

Memo pour l'année

LAURENT Thomas

Master 2 informatique 2018

Contents

I	Fouille de donnée	1
1	Rappel	2
1.1	Probabilités	2
1.2	Exemple	3
1.3	Logarithmes en base 2	3
2	Pré traitement des données	4
2.1	Nettoyage des données	4
2.1.1	Caractéristiques descriptives	4
2.2	Normalisation	4
3	Classification	5
3.1	Évaluation des classifieurs	5
3.1.1	Matrice de confusion	5
4	Arbre de décision	7
4.1	critères de sélection C4.5	7
4.1.1	Entropie	8
4.1.2	Gain d'information	9
4.1.3	Gain Ratio	9
4.2	critères d'arrêt	10
4.2.1	Critères d'arrêt	10
4.2.2	critères d'arrêt: Paramètre utilisateur	10
5	Réseau bayésiens	11
5.1	Classifieur bayésiens	12
5.2	Construction et classification avec des réseaux Bayésiens	14
5.2.1	Construction d'un réseau bayésien naïf	14

5.2.2	Règle de classification bayésienne	15
5.2.3	Règle de décision	15
5.2.4	Observation de classe	15
6	Clustering	16
II	Apprentissage automatique par la pratique	17
7	Rappel	18
7.1	Matrices et calculs sur les Matrices	18
7.1.1	Addition	18
7.1.2	Multiplication	18
7.1.3	Transposer	18
7.1.4	Inverse	18
8	Algorithms Learn a Mapping From Input to Output	20
8.1	linear ML algorithms	20
8.2	Supervised machine learning	20
8.3	Unsupervised machine learning	20
8.4	semi-supervised machine leaning	21
8.5	Overview of bias and variance	21
9	Overfitting and Underfitting	22
9.1	Overfitting	22
9.2	Underfitting	22
10	Linear Algorithms	23
10.1	Régression linéaire	23
10.2	Least squares linear regression	24
10.3	Gradient Descent	25
11	Logistic Regression	26
11.1	Logistic function	26
12	Linear Discriminant Analysis	27
12.1	bayésien rules	27

13 Non linear algorithm	29
13.1 Classification and régression tree	29
13.2 K moyen	31
13.3 Support vector machines	31
13.3.1 Margin classifier	31
13.3.2 Soft margin classifier	32
 III Outils formel	 33
14 Logique classique des propositions	34
14.1 Vocabulaire	34
14.2 Propriétés de l'opérateur Models	35
14.3 Ensemble de connecteurs fonctionnellement complet	36
14.4 Preuve par induction structurelle sur un ensemble de connecteurs non fonctionnellement complet	36
14.5 Décomposition de Shannon	37
14.6 Arbre de Shannon, ROBDD	37
14.6.1 Remplacement ou vérifonctionnalité	38
14.6.2 Substitution	38
14.7 Notion de impliquant premier	38
14.7.1 Table de Karnaugh	38
14.7.2 Calcule arithmétique	39
14.8 Système de Hilbertien	39
14.9 théorème de finitude	39
 15 Logique classique et prédicat du premier ordre	 40
15.1 Syntaxe via les arbres	40
15.1.1 Occurrences libre	40
15.1.2 Occurrences liée	41
15.1.3 Occurrences quantifié	41
15.1.4 Vocabulaire	41
15.2 Sémantique	42
15.3 Formule polie	44
15.4 Équivalences remarquables	44
15.5 Forme Prénexe	45
15.6 Scalénisation	46
15.7 Forme propositionnelle	46

16 Calculabilité et Machine de Turing	47
IV Recherche Opérationnel	48
17 Rappel	49
17.1 Pivot de gauss	49
18 Introduction à la PL	50
18.1 Modèle linéaire continu à 2 variables	50
18.1.1 Recherche de solutions	51
18.1.2 recherche de la solution optimal	51
19 Le simplexe	53
19.1 Initialisation du simplexe	53
19.2 Canonicité du modèle	54
19.3 Solution admissible	54
19.4 Exemple simple Premier itération	55
19.4.1 Choix de la variable entrante	55
19.4.2 Choix de la variable sortante	55
19.4.3 pivotage	56
19.4.4 Nouveau modèle	56
19.5 Exemple simple Seconde itération	57
19.5.1 Choix de la variable entrante	57
19.5.2 Choix de la variable sortante	57
19.5.3 pivotage	57
19.5.4 Nouveau modèle	57
19.6 Exemple simple, troisième itération	58
19.6.1 Variable entrante et sortante	58
19.6.2 Nouveau modèle	58
19.7 Exemple simple, dernière itération	59
20 Simplexe à deux phases	60
20.1 Première phase du simplexe à deux phases	61
20.1.1 Nouveau modèle	61
20.2 Premier phase du simplexe à deux phases, première itération	62
20.2.1 Variable entrante et sortante	62
20.2.2 pivotage	62

20.2.3	Nouveau modèle	62
20.3	Premier phase du simplexe à deux phases, seconde itération .	62
20.4	Seconde phase du simplexe à deux phases	63
20.5	Seconde phase du simplexe à deux phases, première itération .	64
20.5.1	Variable entrante et sortante	64
20.5.2	pivotage	64
20.5.3	Nouveau modèle	64
20.6	Seconde phase du simplexe à deux phases, seconde itération .	65
20.6.1	Variable entrante et sortante	65
20.6.2	pivotage	65
20.6.3	Nouveau modèle	65
20.7	Seconde phase du simplexe à deux phases, troisième itération .	65

V Représentation des connaissances et raisonnement

66

21	Logique propositionnel	67
21.1	Vocabulaire	67
21.2	cohérence d'un ensemble de clauses	67
22	Introduction à la logique de description	69
22.1	Attributive Language with Complement	69
22.1.1	Sémantique	69
22.1.2	Propriétés	70
22.2	Logique de description	70
22.2.1	Sémantique	70
22.2.2	Assertions	70
22.3	TBoxes et ABoxes	71
22.3.1	Subsumption	71
22.3.2	Classification	71
22.3.3	Instance checking	72
22.3.4	Retrieval	72
22.3.5	Equivalence of concept	72
22.3.6	Concept satisfiability	72
22.3.7	ABox consistency	73
22.3.8	Réduction et consistance	73

23 Méthode des Tableau pour les ALC	74
23.1 Pre processing	74
23.1.1 Réécriture	74
23.1.2 Vocabulaire	75
23.1.3 Règles d'expansion	75
23.2 Exemple	76
23.3 Exemple 2	77
24 Logique presque tout	78
24.1 Système P	79
24.1.1 Exemple	80
24.2 Tolérance du Système P	81
24.3 Stratification du système P	81
24.4 Exemple de stratification possible	82
24.4.1 Initialisation	82
24.4.2 Première itération	82
24.4.3 Seconde itération	83
24.5 Exemple de stratification non possible	84
24.5.1 Initialisation	84
24.5.2 Première itération	84
24.5.3 Seconde itération	85
25 Logique de description DL Lite	86
25.1 Opérateurs	86
25.2 Requêtes	86
25.2.1 Grounded query	86
25.2.2 Conjonctives Query	87
25.3 Fermetures négatives	87
25.4 Gestion des contraintes et MultiABox	88
25.4.1 Expansion	88
25.4.2 Spliting	88
25.4.3 Selection	89
25.4.4 Modifieurs	89
25.4.5 Complex modifieurs	90
25.4.6 Décision avec plusieurs ABox	90

26	Complexité	92
26.1	Analyse de complexité pour D(M1,Safe)	92
26.2	Analyse de la complexité pour D(M2,Forall)	93
VI	XML	94
27	DTD	95
28	XSD	96
29	XPATH	98
29.1	Syntaxe	98
29.1.1	Sélection	98
29.1.2	Prédicats	98

Part I

Fouille de donnée

Chapter 1

Rappel

1.1 Probabilités

Quelques rappels de probabilités : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes prenant leurs valeurs dans $DX=x_1, \dots, x_n$ et $DY=y_1, \dots, y_m$ respectivement.

$$P(x_i) = \frac{|x_i|}{\sum_{j=1}^n |x_j|}$$

$$\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1$$

$$P(x_i|y_i) = \frac{P(x_i, y_i)}{p(y_i)}$$

$P(x_i, y_i) = p(x_i) * p(y_i)$ Si X et Y sont indépendantes

règle de bayes $= P(x_i|y_i) = \frac{P(y_i|x_i)*p(x_i)}{p(y_i)}$

règle de chainage $P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = p(x_1)*p(x_2|x_1)*\dots*p(x_n|x_{n-1}..x_1)$

distribution conditionnel $\forall x \in X, \forall y \in Y \Rightarrow P(x|y)$

Exemple:

Année	Sexe	#	%
M1	M	25	25/55
M1	F	4	4/55
M2	M	25	25/55
M2	F	1	1/55

$$P(sexe = M) = P(Sexe = MetAnnee = M1) + P(Sexe = MetAnnee = M2) = 50/55$$

$$P(Annee = M2 | sexe = M) = P(Sexe = MetAnnee = M2) / P(Sexe = M) = \frac{25}{55} / \frac{50}{55} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$$

1.2 Exemple

A	B	$P(AB)$
a_1	b_1	.1
a_2	b_1	.15
a_1	b_2	.3
a_2	b_2	.45

- $P(a_1 | b_1) = .4$
- $P(a_1 | b_2) = .4$
- $P(a_2) = .60$
- $P(a_2 | b_1) = .6$
- $P(a_2 | b_2) = .6$
- $P(a_1) = .40$

1.3 Logarithmes en base 2

$$\text{Log}_2\left(\frac{x}{y}\right) = \text{Log}_2(x) - \text{Log}_2(y)$$

$$\text{Log}_2(x * y) = \text{Log}_2(x) + \text{Log}_2(y)$$

Chapter 2

Pré traitement des données

2.1 Nettoyage des données

2.1.1 Caractéristiques descriptives

Moyenne (espérance) : $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

Ecart moyen : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$

Variance : $v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

Ecart type : $\sigma x := \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_i^2) - \bar{x}^2}$

Médiane : Valeur se trouvant au milieu de données ordonnées

Mode : Valeur la plus fréquente

Amplitude : min, max

2.2 Normalisation

Min-max : $v_n = \frac{v - v_{min}}{v_{max} - v_{min}}$

Min-max dans l'intervalle [A,B] : $v_n = \frac{v - v_{min}}{v_{max} - v_{min}} * (B - A) + A$

Z-Score : $v_n = \frac{v - moyenne}{ecart_{type}}$

Decimal scaling : $v_n = \frac{v}{100^j}$

Chapter 3

Classification

3.1 Évaluation des classifieurs

3.1.1 Matrice de confusion

Percent of correct classification :

$$\text{PCC}(\%) : = \frac{N_c}{N_t} * 100$$

N_c : nombre d'instances correctement classées

N_t : nombre d'instances testées ($N_t = |D_{test}|$)

Exemple:

-	c1	c2	c3	c4
c1	0	1	0	0
: c2	1	60	0	1
c3	0	1	23	0
c4	1	0	7	5

Taux d'erreurs : 100-PCC

$$\text{PCC}(\%) = \frac{0+60+23+5}{100} * 100 = 88\%$$

$$\text{Coût d'erreur} = \sum_1^n \text{cout}(\text{class}_{\text{reelle}}, \text{classe}_{\text{predite}})$$

$$\text{coût d'erreur moyen} = \frac{\text{coutderreur}}{N_{\text{erreurs}}}$$

$$Rappel(C_i) = \frac{N_{c,i}}{N_{t,i}} * 100 \text{ (Horizontal) } Ex : Rappel(C_3) = (23/24)\%$$

$$Precision(C_i) = \frac{N_{c,i}}{N_i} * 100 \text{ (Vertical) } Ex : Precision(C_3) = (23/30)\%$$

Chapter 4

Arbre de décision

4.1 critères de sélection C4.5

Construction d'un arbre de décision C4.5 La construction d'un arbre de décision avec C4.5 passe par deux phases:

Phase d'expansion : La construction se fait selon l'approche descendante et laisse croître l'arbre jusqu'à sa taille maximale.

Phase d'élagage : Pour optimiser la taille l'arbre et son pouvoir de généralisation, C4.5 procède à l'élagage (pour supprimer les sous-arbres qui ne minimisent pas le taux d'erreurs)

Approche de construction d'un AD : Partitionner récursivement les données en sous-ensembles plus homogènes ... jusqu'à obtenir des partitions qui contiennent des objets qui appartiennent majoritairement à la même classe.

=> Théorie de l'information pour caractériser le degré de mélange, homogénéité, impureté, incertitude...

Théorie de l'information : Théorie mathématique ayant pour objet l'étude du contenu informationnel d'un message.
Applications en codage, compression, sécurité...

Entropie : Mesure la quantité d'incertitude dans une distribution de probabilités.

4.1.1 Entropie

Entropie : Mesure la quantité d'incertitude (manque d'information) dans une distribution de probabilités. Soit X une variable aléatoire discrète prenant ses valeurs dans $DX = x_1, \dots, x_n$. Soit P la distribution de probabilités associée à X .

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) * \log_2(p(x_i))$$

Par convention, quand $p(x) = 0, 0 * \log(0) = 0$

Exemple:

X	P(X)
x_1	1/3
x_2	1/3
x_3	1/3

$$H(X) = -p(x_1) * \log_2(p(x_1)) - p(x_2) * \log_2(p(x_2)) - p(x_3) * \log_2(p(x_3))$$

$$H(X) = -3(\frac{1}{3} * \log_2(\frac{1}{3})) = \log_2(3) = 1.58$$

Autre exemples:

$$[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}] : H(X) = 1.5$$

$$[1, 0, 0] : H(X) = 0$$

$$[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] : H(X) = 1$$

Propriétés:

$$H(X) \geq 0$$

$H(X)$ est maximale pour une distribution uniforme (toutes les valeurs sont équiprobables).

Entropie conjointe : L'entropie conjointe de deux variables aléatoires X et Y est l'incertitude relative à ces deux variables conjointement.

$$Entropie(X, Y) = - \sum_{i,j=1}^n p(x_i, y_j) * \log_2(p(x_i, y_j))$$

Exemple : $[0.2, 0.1, 0.3, 0.4] : H(X, Y) = 1.85$

4.1.2 Gain d'information

Soit le data suivant, avec ClientSatisfait la variable de classe:

Mémoire	AutonomieBatterie	Prix	ClientSatisfait
<= 4	longue	<= 150	Oui
> 4	longue	> 150	Oui
> 4	longue	<= 150	Oui
<= 4	longue	> 150	Oui
> 4	longue	> 150	Oui
> 4	courte	> 150	Oui
<= 4	courte	> 150	Non
<= 4	courte	> 150	Non
> 4	courte	<= 150	Oui
<= 4	courte	<= 150	Non
<= 4	moyen	<= 150	Non
> 4	moyen	<= 150	Non
<= 4	moyen	> 150	Oui
> 4	moyen	> 150	Oui
> 4	moyen	<= 150	Non

Le *Gain information* appliqué sur la colonne AutonomieBatterie (AB) serait:

$$Gain(AB) = Entropie(AB) - \frac{5}{15} Entropie(Longue) - \frac{5}{15} Entropie(Courte) - \frac{5}{15} Entropie(Moyen)$$

$$Entropie(AB) = -3(\frac{5}{15} * \log_2(\frac{5}{15}))$$

$$Entropie(Longue) = 0$$

$$Entropie(Courte) = \frac{2}{5} * \log_2(\frac{2}{5}) - \frac{3}{5} \log_2(\frac{3}{5})$$

$$Entropie(Moyen) = \frac{3}{5} \log_2(\frac{3}{5}) - \frac{2}{5} * \log_2(\frac{2}{5})$$

4.1.3 Gain Ratio

$$Gainratio(AB) = \frac{Gain(AB)}{Entropie(AB)}$$

4.2 critères d'arrêt

4.2.1 Critères d'arrêt

Si tout les objets d'une partition appartiennent à une même classes

Si il n'y a plus aucun attributs à tester

si le nœud est vide (càd feuille de l'arbre)

Absence d'apport informationnel (le gain est négatif ou nul)

4.2.2 critères d'arrêt: Paramètre utilisateur

Nombre d'objets minimum par feuille

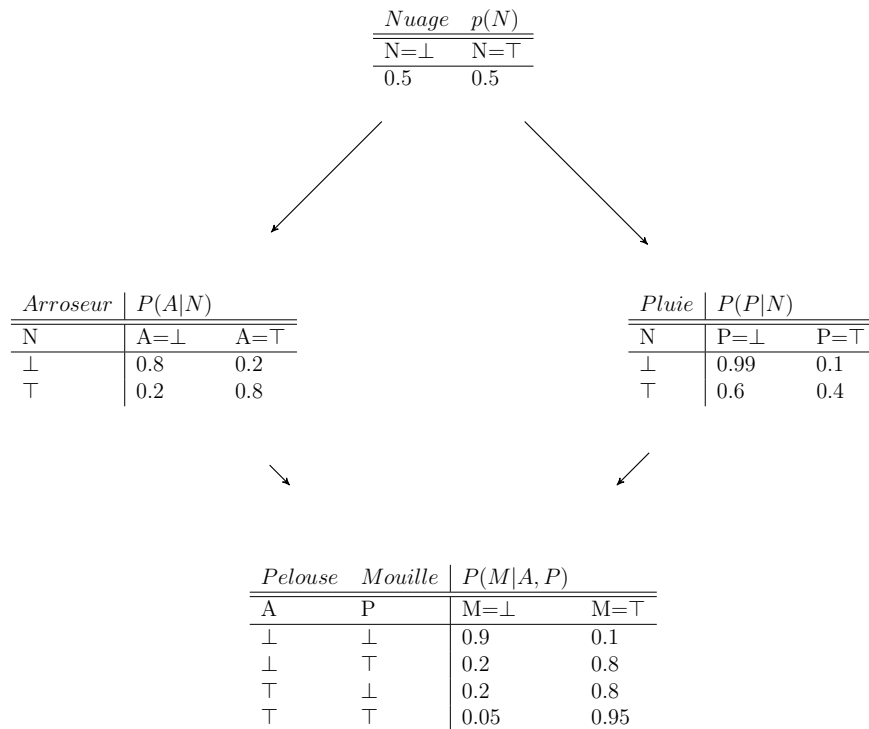
Taille, profondeur de l'arbre

Temps de construction de l'arbre

Chapter 5

Réseau bayésiens

5.1 Classifieur bayésiens



Calculer $P(N = \top, P = \top, A = \perp, M = \top)$

$$= P(N = \top) * P(P = \top | N = \top) * P(A = \perp | N = \top, P = \top) * P(M = \top | N = \top, P = \top, A = \perp)$$

$$= .5 * .4 * \frac{P(N=\top, P=\top)P(A=\perp)}{P(N=\top, P=\top)} * \frac{P(N=\top, P=\top, A=\perp)*P(M=\top)}{P(N=\top, P=\top, A=\perp)}$$

$$= .5 * .4 * 1 *$$

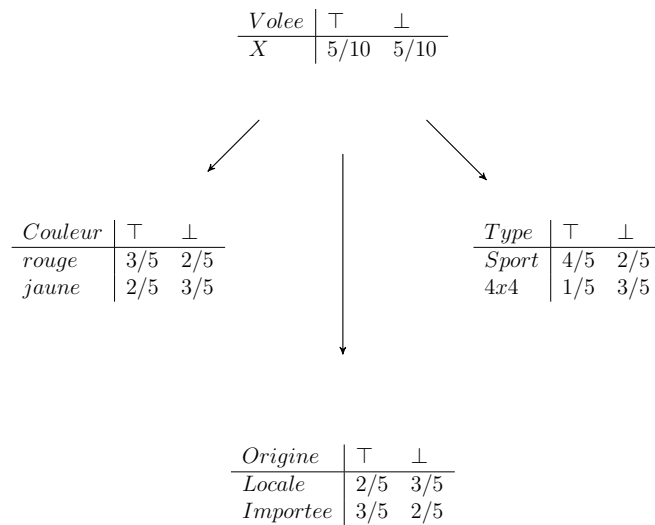
5.2 Construction et classification avec des réseaux Bayésiens

Soit le jeu de donnée suivant:

	Couleur	Type	Origine	volée
1	rouge	sport	locale	oui
2	rouge	sport	locale	non
3	rouge	sport	locale	oui
4	jaune	sport	locale	non
5	jaune	sport	importée	oui
6	jaune	4x4	importée	non
7	jaune	4x4	importée	oui
8	jaune	4x4	locale	non
9	rouge	4x4	importée	non
10	rouge	sport	importée	oui

5.2.1 Construction d'un réseau bayésien naïf

soit la variable de classe nommé "Volée":



5.2.2 Règle de classification bayésienne

$$classes = \max \begin{cases} P(Volee = \top | Rouge, 4x4, Importee) \\ P(Volee = \perp | Rouge, 4x4, Importee) \end{cases}$$

5.2.3 Règle de décision

$$\begin{aligned} P(V|CTO) &= P(VCTO) \text{ car indépendantes} \\ &= P(C|v) * P(T|V) * P(O|V) * P(V) \end{aligned}$$

5.2.4 Observation de classe

Avec l'observation suivante (Rouge, 4x4, Importée) la classe associée à cette observation est:

$$\begin{aligned} P(Volee = Non, Rouge, 4x4, Importee) &= P(Rouge|Non) * P(4x4|Non) * \\ &P(Importee|Non) * P(Non) \\ &= 2/5 * 3/5 * 2/5 * 1/2 \\ P(Volee = Oui, Rouge, 4x4, Importee) &= P(Rouge|Oui) * P(4x4|Oui) * \\ &P(Importee|Oui) * P(Oui) \\ &= \end{aligned}$$

Avec l'observation incomplète suivante (Jaune, Sport) la classe associée à cette observation est:

$$\begin{aligned} P(Volee = Non, Jaune, Sport) &= P(Jaune|Non) * P(Sport|Non) * \sum P(\theta|Non) * \\ &P(Non) \\ &= 2/5 * 4/5 * 1 * 1/2 \\ P(Volee = Oui, Jaune, Sport) &= P(Jaune|Oui) * P(Sport|Oui) * \sum P(\theta|Oui) * \\ &P(Oui) \\ &= \end{aligned}$$

Chapter 6

Clustering

Part II

Apprentissage automatique par la pratique

Chapter 7

Rappel

7.1 Matrices et calculs sur les Matrices

7.1.1 Addition

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+0 \\ 1+7 & 0+5 \\ 1+2 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

7.1.2 Multiplication

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$
$$(1 * 5) + (2 * 7) = 19$$

7.1.3 Transposer

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

7.1.4 Inverse

Soit une matrice 2x2 comme : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Soit Determinant $D = ad - bc$

Si $D \neq 0$ alors il existe une matrice inverse égal à : $\frac{1}{D} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Chapter 8

Algorithms Learn a Mapping From Input to Output

8.1 linear ML algorithms

Simplifier les processus d'apprentissage et réduire la fonction sur ce qu'on connaît

Soit : $B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + B_3X_3 = 0$

Où B_0, B_1, B_2, B_3 sont les coefficients présent sur l'axe des ordonnées.

Et X_1, X_2, X_3 sont les valeurs en Input.

8.2 Supervised machine learning

L'apprentissage supervisé peut se diviser en 2 partis

Classification : Quand les variables en sortie sont des Classe (*Vert, Carre, Homme*)

Regression : Quand les variables en sortie sont des valeur numérique (*euro, poids, quantites*)

8.3 Unsupervised machine learning

Les problèmes de l'apprentissage non supervisé sont:

Clustering : L'art de faire des paquet d'éléments qui ont des points commun, comme regrouper les clients par paquet de choses qu'ils ont le plus en commun.

Association : Associer des règles d'apprentissage pour décrire une portion du data, comme une personne qui a acheté un item A et qui est aussi tenté par acheter un item B

8.4 semi-supervised machine leaning

L'apprentissage semi supervisé c'est avoir un bonne quantité de données en input X, et un peu de data avec le label Y.

8.5 Overview of bias and variance

La prédiction des erreurs pour les algorithmes sont regroupé en 3 points:

Bias Error : Simplifier l'hypothèse fait par le modèles pour faire une fonction d'apprentissage plus facile.

Variance Error : Et la quantité estimé par la fonction visé qui changera via un différent ensemble de data utilisé.

Irreducible Error : Ne peut pas être réduit

Chapter 9

Overfitting and Underfitting

9.1 Overfitting

L'overfitting intervient lorsque le modèle sur apprend des connaissances, Lorsque l'on sur apprend nous prenons en compte les points plus éloigné de la droite de la fonction.

On peut illustrer l'overfitting en codant un algorithme qui prend en compte les points bleu et rouges de la figure *ap-linear-regression_1* ce dessous.

9.2 Underfitting

C'est l'inverse de l'overfitting, pas assez de données pour pouvoir généraliser le base de connaissance.

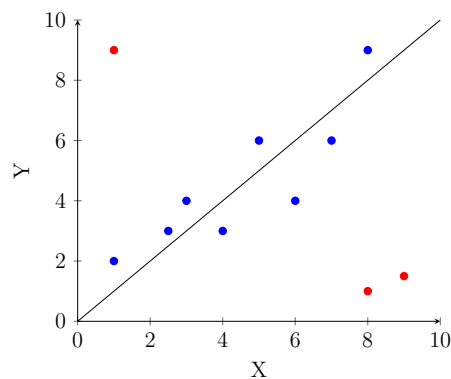
Chapter 10

Linear Algorithms

Soit X l'ensemble des variables indépendantes sur l'axe des l'abscisse et Y l'ensemble des variable dépendantes sur l'axe des ordonnée.

10.1 Régression linéaire

Étant donné un plan à deux dimensions où l'abscisse contient les point d'entrée X et l'ordonnée contient les points de sortie Y, et un nuage de points précédaient acquitté de tout point éloigné du nuage.



Avec : $y = \beta_0 + \beta_1 x$

Pour un hyperPlan (3d) : $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$

$P - I_n$: $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots \beta_n x_n$

10.2 Least squares linear regression

Calculer la régression linéaire avec la méthode Least squares:
Soit:

$\mathbf{X} = [1, 2, 3, 4, 5]$ les variables indépendantes d'axe abscisse

$\mathbf{Y} = [2, 4, 5, 4, 5]$ les variables dépendantes d'axe ordonnée

Calculons $y = \beta_0 + \beta_1 x$

Calcule de la moyenne de X et Y:

$$\mathbf{Xm} = \sum x_i \in X = 3$$

$$\mathbf{Ym} = \sum y_i \in Y = 4$$

Toutes ligne de régression doivent passer par le point $(\mathbf{Xm}, \mathbf{Ym})$.
Calculer tout les écarts des $x_i \in X$ par rapport à \mathbf{Xm} (resp Y):

X	Y	$X - Xm$	$Y - Ym$	$(X - Xm)^2$	$(X - Xm)(Y - Ym)$
1	2	-2	-2	4	4
2	4	-1	0	1	0
3	5	0	1	0	0
4	4	1	0	1	0
5	5	2	1	4	2

Calculer β_1 :

$$\beta_1 = \frac{\sum (X - Xm)(Y - Ym)}{\sum (X - Xm)^2} = \frac{6}{10} = .6$$

$$\beta_0 : Ym = \beta_0 + \beta_1 * Xm : 4 = \beta_0 + .6 * 3 : 4 = \beta_0 + 1.8 : \beta_0 = 2.2$$

10.3 Gradient Descent

Soit:

$$\mathbf{X} = [1, 2, 4, 3, 5]$$

$$\mathbf{Y} = [1, 3, 3, 2, 5]$$

i = une variable qui itère les éléments de X et Y en bouclant à l'infini.

Une initialisation comme:

$$\beta_0 = 0$$

$$\beta_1 = 0$$

α = donnée en énoncé (pour l'exemple égal à 0.01)

Et des fonctions définit tel que:

$$\mathbf{error} = (\beta_0 + \beta_1 * X[i]) - Y[i]$$

$$\beta_{0+1} = \beta_0 - \alpha * error$$

$$\beta_{1+1} = \beta_1 - \alpha * error * X[i]$$

En appliquant l'algorithme des calculs des β_i :

i	$X[i]$	$Y[i]$	$error$	β_0	β_1
0	1	1	-1	0.01	0.01
1	2	3	-2.97	0.06	0.03
2	4	3	-1.77	0.18	0.06
3	3	2	-1.61	0.22	0.08
4	5	5	-4.35	0.44	0.12
0	1	1	-0.42	0.45	0.13
1	2	3	-2.28	0.49	0.49

Chapter 11

Logistic Regression

11.1 Logistic function

Soit:

$$t \in \mathbb{R}[0, 1] \text{ égal à } \beta_0 + \beta_1 * x$$

La fonction de logique de régression, les valeur d'entrée X sont combiné en utilisant les coefficient de valeur pour prédire une sortie Y. Cette sortie sera une valeur binaire.

$$p(x) = \frac{1}{1+e^{-(\beta_0 + \beta_1 x)}}$$

Note : $p(x)$ peut être interprété comme une fonction de probabilité $P(X) = P[Y = 1|X]$.

$$\beta_0 + \beta_1 * x = \ln\left(\frac{P(x)}{1-P(x)}\right) \text{ aussi appelé odds.}$$

Chapter 12

Linear Discriminant Analysis

L'analyse discriminante linéaire fait partie des techniques d'analyse discriminante prédictive, il s'agit de prédire l'appartenance d'un individu à une classe prédéfinie à partir de ses caractéristiques mesurées à l'aide de variables prédictives.

A notre disposition, un échantillon de n observations réparties dans \mathbb{k} groupes d'effectifs $n_{\mathbb{k}}$.

Noté Y les variables prédire $\{y_1, \dots, y_{\mathbb{k}}\}$

J variables prédictives $X = (X_1, \dots, X_J)$

$\mu_{\mathbb{k}}$ la moyenne (ou *mean* en anglais) valant $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_{\mathbb{k}})^2}{n - \mathbb{k}}$

σ^2 la variance de toutes les classes

la fonction discriminante pour la classe \mathbb{k} avec x donné $D_{\mathbb{k}}(x) = x * \frac{\mu_{\mathbb{k}}}{\omega^2} - \frac{\mu_{\mathbb{k}}^2}{2x\omega^2} + \ln(P(k))$

Où $P(k)$ vaut la probabilité appliqué aux valeurs de Y

12.1 bayésien rules

L'objectif est de produire une règle d'affection $X(\omega) \rightarrow Y(\omega)$ qui permet de prédire, pour une observation ω donné, sa valeur associé de Y à partir des

valeurs prises par X . via une probabilité

$$P(Y = y_k) = \frac{P(Y=y_{Bbbk}) * P(X|Y=y_k)}{\sum_{i=1}^k P(Y=y_i) * P(X|Y=y_i)}$$

Où $P(Y = y_k)$ est la probabilité à *priori* d'appartenance à une classe

$P(X|Y = y_k)$ représente la fonction de densité des X conditionnellement à la classe y_k

Chapter 13

Non linear algorithm

13.1 Classification and régression tree

Soit:

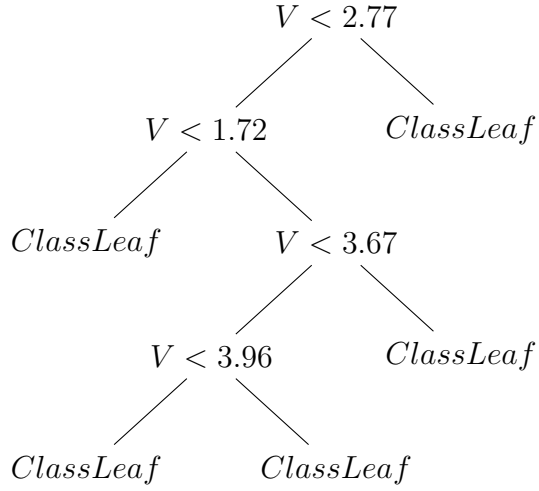
$$G = \sum_{k=1}^n p_k * (1 - p_k)$$

$$V = 2.67$$

X_1	X_2	Y
2.77	2.33	0
1.72	01.78	0
3.67	03.36	0
3.96	4.67	0

Soit un arbre de décision ayant comme fils gauche des *Yes* et fils droit des *No* par rapport à la condition *split*.

Si la valeur $V < X1_i$ alors on crée un fils gauche, sinon on crée un fils droit:



Soit d'une façon plus calculatoire:

$G =$

$$\begin{array}{ll}
 left(X_{1_1}) * (1 - left(X_{1_1})) + & X_{1_1} = 2.77 \\
 right(X_{1_1}) * (1 - right(X_{1_1})) + & = 0 \text{ car } V < 2.77 \rightarrow \text{Left} \\
 left(X_{1_2}) * (1 - left(X_{1_2})) + & = 0 \text{ car } 1.72 < V \rightarrow \text{Right} \\
 right(X_{1_2}) * (1 - right(X_{1_2})) + & X_{1_2} = 1.72 \\
 left(X_{1_3}) * (1 - left(X_{1_3})) + & X_{1_3} = 3.67 \\
 right(X_{1_3}) * (1 - right(X_{1_3})) + & = 0 \text{ car } V < 3.67 \rightarrow \text{Left} \\
 left(X_{1_4}) * (1 - left(X_{1_4})) + & X_{1_4} = 3.96 \\
 right(X_{1_4}) * (1 - right(X_{1_4})) + & = 0 \text{ car } V < 3.96 \rightarrow \text{Left}
 \end{array}$$

13.2 K moyen

Le K moyen demande une heuristique de type métrique pour comparé les distances entre points.

Par exemple:

$$\text{Distance euclidienne } \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i, b_i)^2}$$

13.3 Support vector machines

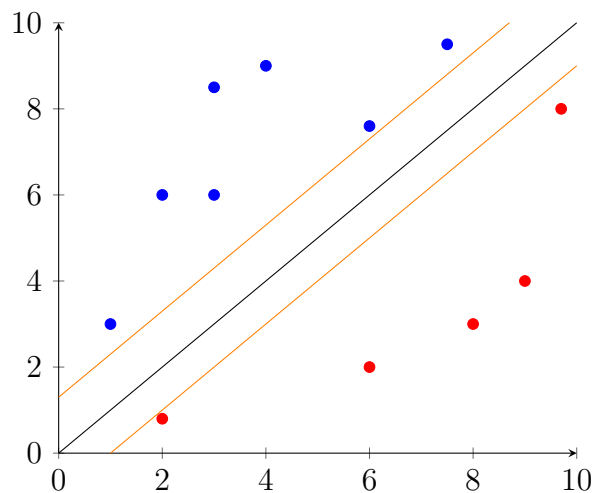
13.3.1 Margin classifier

Soit les points:

Blue Une *ClassA*

Rouge Une *ClassB*

Le support vector machines cherche un hyperplan (de couleur noir) pouvant départager les deux classes, Il en existe une infinité d'hyperplan qui peuvent les départager, donc introduisons un autre concept, celui de l'hyperplan qui maximise la séparation entre les deux classes (les droites *Oranges* appelé *Margin*).



13.3.2 Soft margin classifier

Dans le cadre du Soft margin, il n'existe pas de margin séparent les deux classes, il faut donc chercher la droite qui minimise l'erreur. Soit un ensemble de données divisé en trois parties:

Training Set sont les données qui seront utiliser pour l'apprentissage

Test Set les données qui sont utiliser pour vérifier la satisfesabilité de l'algorithme

Tunning Set appeler C qui sera le taux de violation de la margin accepté

Soit $C = \{0.1, 1, 10\}$ les longueurs que peut prendre la margin et:

	<i>longeurdelamargin</i>	<i>Tauxdebonnesprediction</i>
C_0	0.1	80%
C_1	1	85 % La meilleur borne
C_1	10	85 %

Part III

Outils formel

Chapter 14

Logique classique des propositions

14.1 Vocabulaire

Déduction $\models \alpha$ ssi $\neg \alpha$ est contradictoire

Absurde ϕ est contradictoire ssi $\neg \phi$ est valide

DAG : Un graphe dirigé acyclique

Taille(Arbre) = $\{ \text{tout les symboles} + \text{connecteurs} \}$

Var(Arbre) = $\{ \text{Toutes les feuilles} \}$

Sous formules(Arbres) = $\{ T + \cup_{i=0}^k \text{SousFormules}(\text{Arbre}_i) \}$

Interprétation : ω de $PROP_{ps}$ est une application de PS dans 0.1

Sémantique : $\|\phi\|(\omega)$ d'une formule ϕ de $PROP_{ps}$ dans l'interprétation ω est un élément de 0.1 défini inductivement par:

si $\phi \in PS$ alors $\|\phi\|(\omega) = \omega(\phi)$

si $\phi = cX_1 \dots X_n$ alors $\|\phi\|(\omega) = C_F(\|x_1\|(\omega) \dots \|x_n\|(\omega))$

ω **satisfait** ϕ noté $\omega \models \phi$ ssi $\|\phi\|(\omega) = 1$

Lorsque $\omega \models \phi$ on dit que ω est un modèle de ϕ

on note $\eta(\phi)$ l'ensemble des modèles de ϕ

$\omega \in PROP_{ps}$ est **valide** noté $\models \phi$, ssi toute interprétation ω de $PROP_{ps}$ satisfait ϕ

$\phi \equiv \psi$ sont logiquement équivalents ssi $\phi \models \psi$ et $\psi \models \phi$

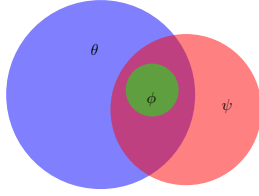
14.2 Propriétés de l'opérateur Models

Réflexivité : $\phi \models \phi$

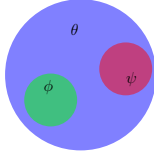
Équivalence à gauche : si $\phi \equiv \theta$ et $\phi \models \psi$ alors $\theta \models \psi$

Affaiblissement à droite (transitivité) : si $\phi \models \psi$ et $\psi \models \theta$ alors $\phi \models \theta$

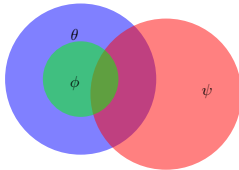
Coupure : si $\phi \wedge \psi \models \theta$ et $\phi \models \psi$ alors $\phi \models \theta$



Ou : $\phi \vee \psi \models \theta$ ssi $\phi \models \theta$ et $\psi \models \theta$



Monotonie : si $\phi \models \theta$ alors $\phi \wedge \psi \models \theta$



14.3 Ensemble de connecteurs fonctionnellement complet

On dit qu'un ensemble est fonctionnellement complet si avec que les connecteurs de cette ensemble on peut exprimer toutes les formules d'un monde.

$\{\neg, \wedge\}$ est fonctionnellement complet pour la logique propositionnel classique

Il en va de même pour $\{\neg, \vee\}, \{vrai, \wedge, \oplus\}, \{\neg, \Rightarrow\}$ ou $\{NAND\}$

Suppression des fils équivalent : Soit un arbre D ayant comme sous arbre plus d'une fois le nœud $\alpha = (\top X \top)$, α peut être remplacé par (\top) tout en concevant les modèles de D.

fusion des nœuds : Soit un arbre D ayant comme sous arbre les nœuds (aBc) et $(a'B'c')$ et $a = a', b = b', c = c'$ alors on peut faire relier les deux branches menant vers ces nœuds vers le même sous arbre.

14.4 Preuve par induction structurelle sur un ensemble de connecteurs non fonctionnellement complet

Soit $\forall P \in \{\wedge, \vee\}_{ps}$, vérifier P:

Cas de base $\varphi \in PS$: $1 \rightarrow (\varphi) = 1$ donc $1 \rightarrow$ constitue un modèle de φ

Étape inductive :

φ s'écrit : $[\alpha \wedge \beta]$ ou $[\alpha \vee \beta]$

Avec $\alpha, \beta \in \{\wedge, \vee\}_{ps}$

Par hypothèse d'induction, α et β vérifient P.

Il ne reste plus qu'à montrer que φ vérifie P.

$$\|\alpha \vee \beta\|(1 \rightarrow) = \vee \models (\|\alpha\|(1 \rightarrow), \|\beta\|(1 \rightarrow)) = \vee \models (1, 1) = 1$$

$$\|\alpha \wedge \beta\|(1 \rightarrow) = \wedge \models (\|\alpha\|(1 \rightarrow), \|\beta\|(1 \rightarrow)) = \wedge \models (1, 1) = 1$$

donc $x \wedge \neg x$ ne vérifie pas P : $\|x \wedge \neg x\|(1 \rightarrow) = 0$

14.5 Décomposition de Shannon

On note $\phi[x \leftarrow 0]$ la formule obtenue en substituant dans ϕ la constante faux à toutes les occurrences du symbole propositionnel x .

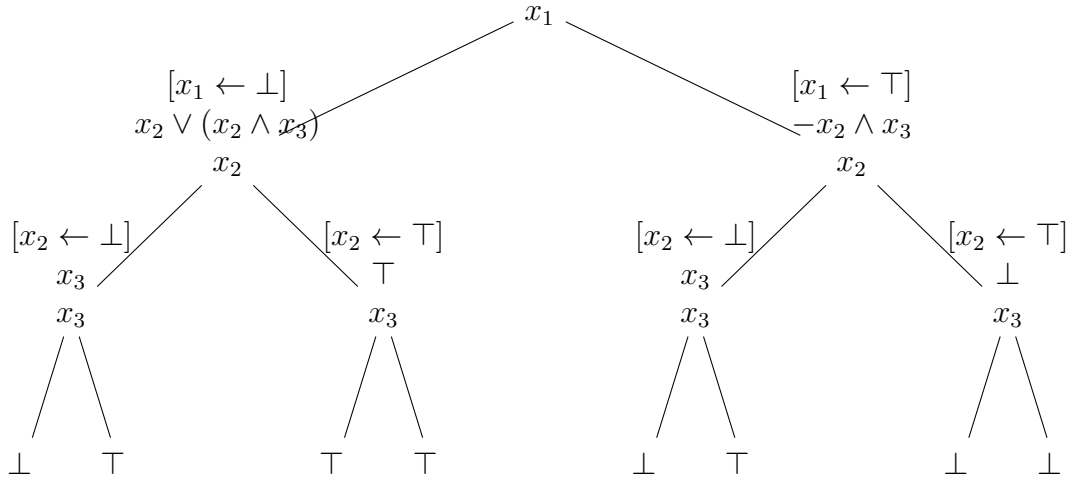
On note $\phi[x \leftarrow 1]$ la formule obtenue en substituant dans ϕ la constante vrai à toutes les occurrences du symbole propositionnel x .

La décomposition de Shannon de ϕ suivant x est la formule:

$$(\neg x \wedge \phi[x \leftarrow 0]) \vee (x \wedge \phi[x \leftarrow 1])$$

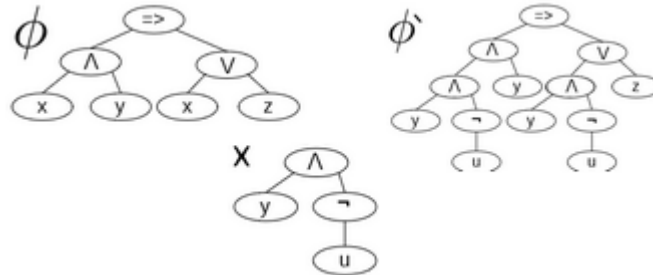
14.6 Arbre de Shannon, ROBDD

Étant donnée un ordre strict total $x_1 < x_2 < x_3$ sur $Var(\phi) = \{x_1, \dots, x_n\}$
Et une formule $\phi = (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \wedge x_3)$



L'ensemble des modèles de ϕ sont toutes les interprétation où la feuille vaut la valeur T .

14.6.1 Remplacement ou vérifonctionnalité



$\phi \equiv \phi'$ quelque soit la valeur de x (vrai ou faux).

14.6.2 Substitution

Soit un arbre D ayant comme nœud un sous arbre du type infixe $\alpha = (x \Rightarrow y)$
 et un sous arbre de substitution $\beta = (\neg x \Rightarrow \neg y)$
 $(D' = D_{\alpha \leftarrow \beta} \equiv D)$

14.7 Notion de impliquant premier

Les impliquant premier sont des sous formules des formules original tel que ces sous formules soit plus petite que la formule d'origine elle conserve les même modèles:

En circuit combinatoire les algo sont appelé Table de Karnaugh ou Quine-McCluskey.

14.7.1 Table de Karnaugh

Appliquer l'algorithme avec la formule $S = \neg a \neg b \neg c d + a \neg b \neg c \neg d + b \neg d$

S	$\neg a \neg b$	$\neg ab$	ab	$a \neg b$
$\neg c \neg d$	X	X	X	X
$\neg cd$		X	X	
cd		X	X	
$c \neg d$	X	X	X	X

les impliquant premier de S sont $b \neg d$

14.7.2 Calcule arithmétique

En logique, les impliquant premier sont calculer que à partir d'une formule en mode CNF transposé en DNF et ensuite détransposé en CNF.

$$\phi = (a \wedge b \wedge c) \vee (\neg b \wedge c)$$

$$\phi = (a \vee \neg b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee \neg b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee \neg b) \wedge (c \vee c)$$

$$\phi = (a \vee \neg b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee \neg b) \wedge c$$

$$\phi = (a \vee \neg b) \wedge c$$

$$\phi = (a \wedge c) \vee (\neg b \wedge c) \text{ sont les impliquant premier.}$$

Via une table de Karnaugh:

ϕ	$\neg a \neg b$	$\neg ab$	ab	$a \neg b$
$\neg c$				
c	X		X	X
Égal à $(a \wedge c) \vee (\neg b \wedge c)$.				

14.8 Système de Hilbertien

g

14.9 théorème de finitude

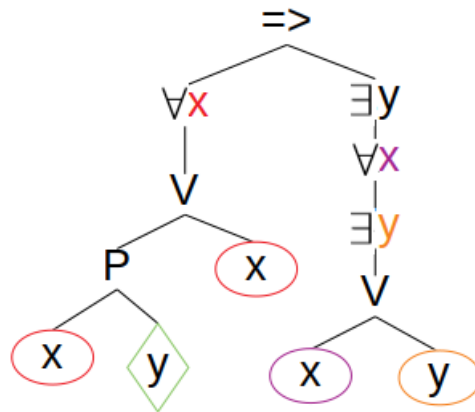
g

Chapter 15

Logique classique et prédicat du premier ordre

15.1 Syntaxe via les arbres

$\phi =$



15.1.1 Occurrences libre

Une occurrence libre est une variable n'ayant aucun quantificateur associé de son noeud à la racine de l'arbre.

par exemple le noeud y ayant un contour un losange vert est une

occurrence libre, elle sera instancié que lors de l'interprétation de ϕ .

15.1.2 Occurrences liée

Une occurrence liée est une variable ayant un quantificateur associé, comme:

la variable x entouré d'un rond rouge est définit via le quantificateur $\forall x$ présent dans ces noeuds parent

la variable x entouré d'un rond violet est définit par le quantificateur de ces parents $\forall x$

la variable y entouré d'un rond orange via le quantificateur $\exists y$

A noté que les x entouré d'un rond de couleurs rouge sont différent des x entouré avec un rond orange, donc on peut tout bien renommer les x de couleur orangé en z sans changer le sens de ϕ .

Les occurrences liée se lient sur leur premier père le définissant, comme le y orange qui se définit que sur le $\exists y$ le plus proche de lui.

15.1.3 Occurrences quantifié

Les occurrences quantifié sont toutes les variable positionné derrière un quantificateur, celle ci montre comme dans la logique classique, le \forall (où quelque soit) ou \exists (où il existe au moins un).

On peut noter que sur la figure ci dessus il y a un $\exists y$ qui n'est pas associé à un y en feuille, on peut s'en débarrasser sans changer le sens de ϕ .

15.1.4 Vocabulaire

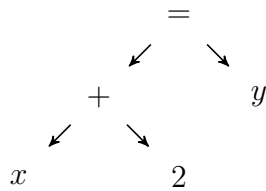
Formule fermée est une formule de $FORM_L$ qui ne contient aucune variable libre.

Formule instanciée est une formule qui ne contient aucune occurrence libre ou liée de symbole de variable

15.2 Sémantique

Soit t un terme de $TERM_L$, la sémantique de t dans l'interprétation de I pour l'assignation X_i noté $[[t]](I)(X_i)$ est l'élément de D_i défini inductivement.

$\phi =$



$= \in \mathfrak{R}$ d'arrêter 2

$+ \in \mathfrak{S}$ d'arrêter 2

$2 \in \mathfrak{S}$ d'arrêter 0

$X, Y \in X$

Avec une interprétation tel que:

$D_i = \mathbb{N}$

$+_1 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$2_i = 3$

Avec une assignation tel que:

$X_i : X \rightarrow \mathbb{N}$

$x \rightarrow 5$

$y \rightarrow 10$

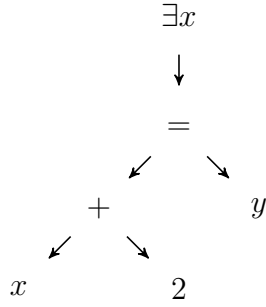
On peut calculer cette sous formule en appliquant chaque terme dans l'interprétation

I pour un assignent X_i :

$$\|x + 2\|(I)(X_i) = +_i(\|x\|(I)(X_i), \|2\|(I)(X_i)) = +_i(5, 3) = 8$$

$$\|\phi\|(I)(X_i) = =_i(8, 10) = 0(faux)$$

$$\psi =$$



$$\begin{aligned}
 & \|\psi\|(I)(X_i)[x \leftarrow 7]) = \\
 & =_i (+_i(\|x\|(I)(X_i[x \leftarrow 7]), 3), \|y\|(I)(X_i[x \leftarrow 7])) = \\
 & =_i (+_i(7, 3), 10) = \\
 & =_i (10, 10) = 1(vrai)
 \end{aligned}$$

Le quantificateur \forall ou \exists est plus prioritaire que les variables assigné dans X_i .

Soit ϕ la formule ϕ ci dessus, la formule interprété avec deux assignations différentes:

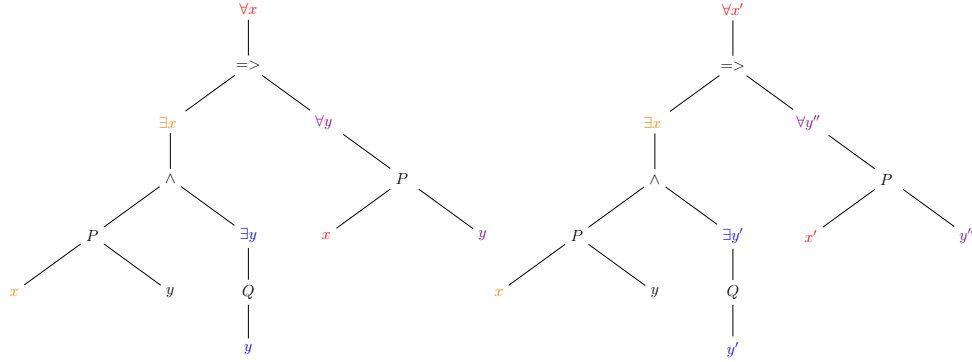
$$X_i^1 \quad x \rightarrow 5, y \rightarrow 10$$

$$X_i^2 \quad x \rightarrow 6, y \rightarrow 10$$

L'interprétation de ϕ avec X_i^1 est équivalent à ϕ avec X_i^2 car le symbole de quantification \exists est plus prioritaire que les assignations.

15.3 Formule polie

Une formule polie est une formule qui pour un nom de variable x , ne porte pas plusieurs significations. Pour se faire il suffit de renommer les variables. La formule de gauche n'est pas sous forme polie, mais celle de droite l'ai:



15.4 Équivalences remarquables

Pour tout $\phi, \psi \in FORM_L$ et $x, y \in X$

Dualité $\forall x \phi \equiv \neg \exists x \neg \phi$

$$\forall x (\phi \wedge \psi) \equiv (\forall x \phi) \wedge (\forall x \psi)$$

$$\exists x (\phi \vee \psi) \equiv (\exists x \phi) \vee (\exists x \psi)$$

Si x n'est pas libre dans ψ et $Q = \forall$ ou \exists alors :

$$Qx\phi \equiv \phi$$

$$Qx(\phi \wedge \psi) \equiv (Qx\phi) \wedge \psi$$

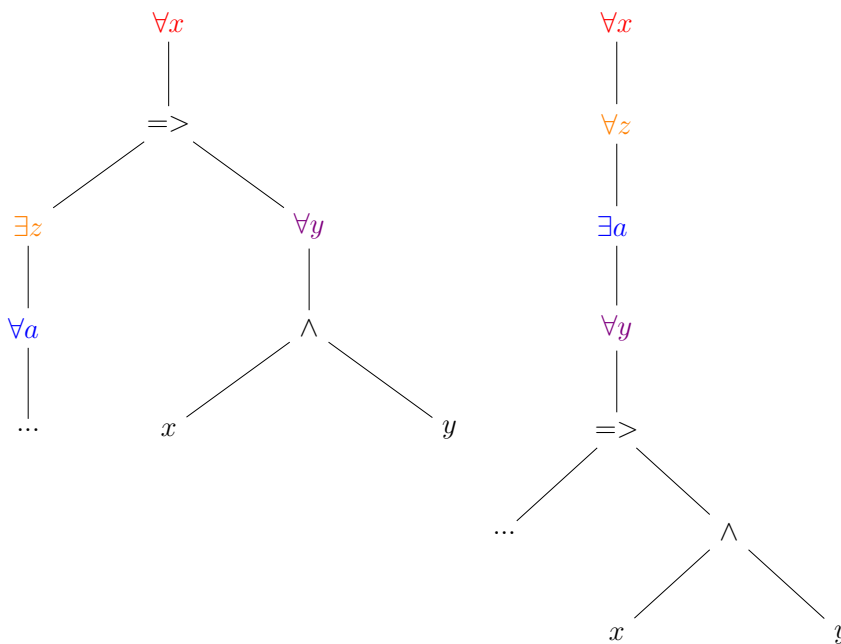
$$Qx(\phi \vee \psi) \equiv (Qx\phi) \vee \psi$$

$$\forall x \forall y \phi \equiv \forall y \forall x \phi$$

$$\exists x \exists y \phi \equiv \exists y \exists x \phi$$

15.5 Forme Prénexe

La mise en forme prénexe se fait en transformant la formule en forme polie puis en remontant tout les quantificateurs en haut de l'arbre en faisant attention que lorsqu'on remonte un quantificateur par de la une négation, on applique le dual sur le quantificateur, Et aussi il faut garder l'ordre des quantificateur par rapport à la profondeur de leur sous arbre:
(Rappel que $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$):



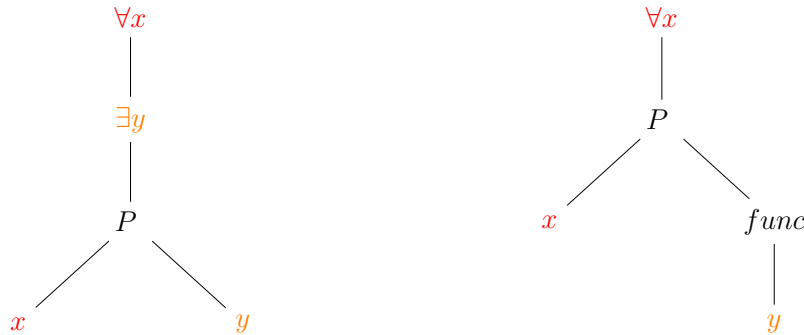
La partie contenant tout les quantificateurs s'appelle le Prefix et la partie sans quantificateurs s'appelle la Matrice.

Si dans la formule ci dessus on aurait changé le \Rightarrow par un \vee (ou autre chose sans signe de négation) les quantificateurs de couleur *orange* et *bleu* ne serait pas "dualisé", mais conserveront l'ordre de leurs profondeur.

Pareil si on remplace dans la formule le \Rightarrow par un \vee (ou autre chose sans signe de négation) et on s'intéresse exclusivement au quantificateur *orange* et *violet*, $(\{\exists z, \forall, \forall y\})$ l'ordre de parcourt des sous arbres n'a aucune importance sur l'arbre final, (*GRD*) ou (*DRG*).

15.6 Scalénisation

Soit la formule suivante, scaléniser une formule c'est pour tout quantificateurs $\exists y$ dépendant d'un quantificateur $\forall x$, y peut se déduire via une fonction:



15.7 Forme propositionnelle

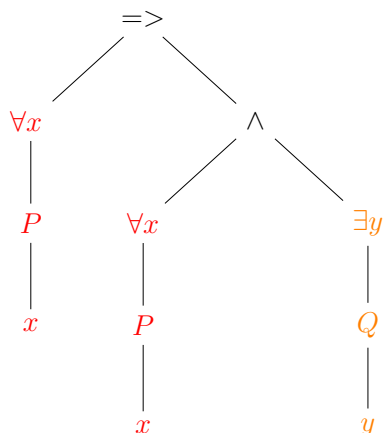
L'ensemble $SFP(\phi)$ des sous-formules premières de $\phi \in FORM_L$ est défini inductivement par:

Si ϕ est un atome ou une formule du type $\forall\psi$ ou $\exists\psi$ alors $SFP(\phi) = \{\phi\}$

Si ϕ est une formule du type $\neg\psi$ alors $SFP(\phi) = SFP(\psi)$

Si ϕ est une formule du type $\psi \wedge \theta$ ou $\psi \vee \theta$ ou $\psi \Rightarrow \theta$ alors $SFP(\phi) = SFP(\psi) \cup SFP(\theta)$

Si la formule propositionnelle ϕ est propositionnellement valide alors ϕ est valide



$SFP(\phi) = \{ \text{formules de couleur } \textcolor{red}{rouge}, \text{formules de couleur } \textcolor{orange}{orange} \}$, ϕ est propositionnellement équivalent à $A \Rightarrow (A \vee B)$ qui est propositionnellement valide donc ϕ est valide

Chapter 16

Calculabilité et Machine de Turing

Soit une machine de turing M un quadruplet $M = (K, \Sigma, \delta, s)$

K ensemble fini d'état

$s \in K$ état initial

Σ ensemble fini de symboles supposé disjoint de K et de deux symboles:

\triangleright marque de début

\sqcup séparateur ou fin de ruban

$\delta : (K \times \Sigma) \times ((K \cup \{yes, no\}) \times \Sigma \times \{\leftarrow, \rightarrow, -\})$

$\{yes, no\}$ état acceptable

$\{\leftarrow, \rightarrow, -\}$ mouvement de la tête de lecture

Part IV

Recherche Opérationnel

Chapter 17

Rappel

17.1 Pivot de gauss

$$L1 \text{ et } L2 = \begin{cases} L1 : 160 = 8x + 4y \\ L2 : 120 = 4x + 6y \end{cases}$$

$$(L2 * (-2)) = \begin{cases} L1 : 160 = 8x + 4y \\ L2 : -240 = -8x - 12y \end{cases}$$

$$(L2 = L2 + L1) = \begin{cases} L1 : 160 = 8x + 4y \\ L2 : -80 = -8y \end{cases}$$

$$y = 10$$

$$8x + 4 * 10 = 160$$

$$8x + 40 = 160$$

$$8x = 120$$

$$x = 15$$

Chapter 18

Introduction à la PL

Construire une modèle linéaire, c'est donc:

identifier les variables de décision du problème

déterminer : la fonction objectif du modèle

déterminer : les contraintes du modèle

18.1 Modèle linéaire continu à 2 variables

Soit le modèle linéaire suivantes:

Déterminer $(x, y) \in \mathfrak{S}^2$

Minimisant $z = 1000x + 1200y$

sous les contraintes :

$$(1) 8x + 4y \leq 160$$

$$(2) 4x + 6y \leq 120$$

$$(3) x \leq 34$$

$$(4) y \leq 14$$

$$(5) 0 \leq x$$

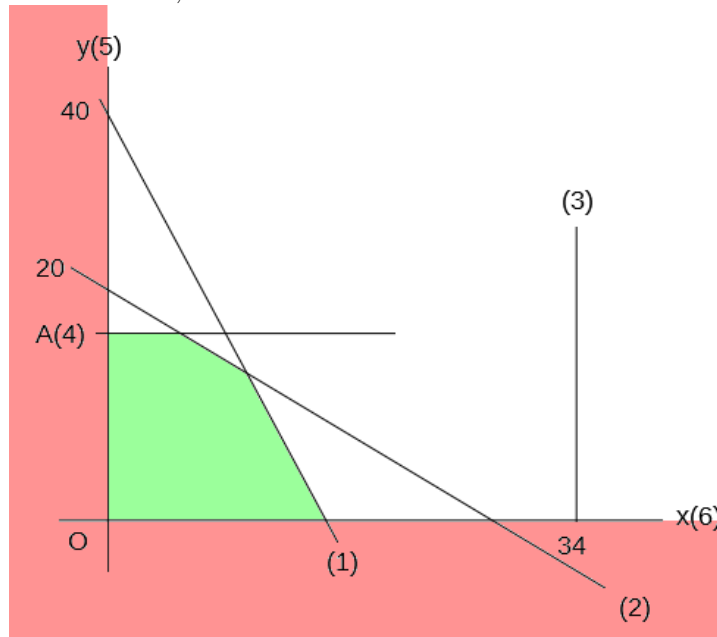
$$(6) 0 \leq y$$

18.1.1 Recherche de solutions

Après avoir tracé graphiquement tout les points:

Pour chaque contrainte, tracer la droite et repérer le demi plan des solution: exemple pour (5) et (6), x et y doivent être supérieurs ou égal à 0, d'où le demi plan des solution sont toutes les valeurs positives.

La partie En vert représente la région admissible, quelque soit le point choisis dans ce vert, aucune contrainte ne sera violé.



18.1.2 recherche de la solution optimal

Changer l'équation z tel que z soit égal à 0

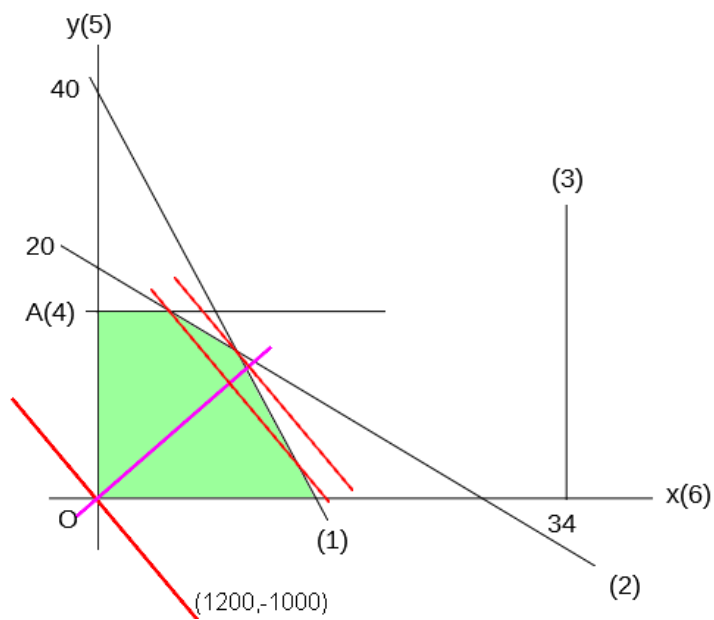
$$z = 1000x + 1200y = 0 = 1000 * (1200) + 1200 * (-1000)$$

Traçons la droite $(0, 0)$, $(1200, -1000)$

Un point extrême : est un point se trouvant sur l'intersection de 2 contraintes et étant dans la zone admissible.

L'altitude : est la droite (rouge) la plus haute touchant un point extrême, ce point sera le vecteur (x, y) le plus optimal pour z .

Les droites rouges doivent être toutes parallèles.



Dans cet exemple le point $(15,10)$ est le point extrême maximal pour l'équation z .

Chapter 19

Le simplexe

Soit le modèle linéaire suivantes:

Déterminer $(x, y) \in \mathfrak{S}^2$

Maximisant $Z = 3x + 7y$

sous les contraintes :

$$(1) -x + y \leq 3$$

$$(2) y \leq 8$$

$$(3) 2x - y \leq 28$$

$$(5) 0 \leq x$$

$$(6) 0 \leq y$$

19.1 Initialisation du simplexe

Pour chaque expression du type (1)(2)(3) intégrer un e_i pour la transformer en équation.

On appelle les e_1 des variables d'accumulation, Ce qui fait

Déterminer $(x, y, e_1, e_2, e_3) \in \mathfrak{S}^5$

Maximisant $Z = 3x + 7y$

sous les contraintes :

$$(1) -x + y + e_1 = 3$$

$$(2) y + e_2 = 8$$

$$(3) 2x - y + e_3 = 28$$

$$(5) 0 \leq x$$

$$(6) 0 \leq y$$

$$(7) e_1, e_2, e_3 \geq 0$$

19.2 Canonicité du modèle

Soit les valeurs (pour la première itération)

Hors Base (x, y)

Base (e_1, e_2, e_3)

Un modèle est canonique que si:

si toutes les variables de Base ne sont pas dans Z .

19.3 Solution admissible

$$(1) -x + y + e_1 = 3$$

$$(2) x - e_1 + e_2 = 5$$

$$(3) 3x - e_1 + e_3 = 25$$

Variable hors base $= x, e_1$

Variable Base $= y, e_2, e_3$

Avec comme solution admissible $A \text{ Deduire}(x, y, e_1, e_2, e_3)$

Pour toute variable présente dans l'ensemble *Hors base* la valeur admissible est égal à 0

Donc solution admissible $= (0, y, 0, e_2, e_3)$

Les 3 dernières valeurs sont les résultat des équations (soit 3, 5 et 25).

Pour chaque équation nous lisons les termes de droit à gauche et ignorons ceux qui sont dans l'ensemble *Hors Base*:
 Donc solution admissible = $(0, 3, 0, 5, 25)$

19.4 Exemple simple Premier itération

19.4.1 Choix de la variable entrante

(x, y) sont deux choix possible, le tout est de choisir une bonne heuristique, comme celle du meilleur gain marginale, ou via la comparaison (en mode graphique):

Y sera choisit, donc Y sera notre variable entrante.

19.4.2 Choix de la variable sortante

Pour chaque résultat d'équation, le diviser par sa valeur de Y (devant être positif (car Y est la variable entrante))

$$-x + y + e_1 = 3 \text{ donne } \frac{3}{1} = 3 \text{ (1 car } y = 1 * y)$$

$$y + e_2 = 8 \text{ donne } \frac{8}{1} = 8$$

$$2x - y + e_3 = 28 \text{ donne } \frac{28}{1} = 28$$

Prendre le minimum des variables, donc se sera 3.
 la variable présente dans la Base sera prise comme variable sortante, dans notre cas e_1 .

19.4.3 pivotage

On choisit l'équation associée à la variable e_1 pour définir la variable entrante y .

On n'a:

$$y = 1 * (x - e_1 + 3)$$

Puis on crée les nouvelles équations via le nouveau y :

$$Z = 3x + 7y \text{ devient}$$

$$Z = 3x + 7(x - e_1 + 3)$$

$$Z = 10x - 7e_1 + 21$$

$$x - e_1 = 3 \text{ est déjà normalisé}$$

$$y + e_2 = 8 \text{ devient}$$

$$8 = x - e_1 + 3 + e_2$$

$$5 = x - e_1 + e_2$$

$$2x - y + e_3 = 28 \text{ devient}$$

$$28 = 2x + (x - e_1 + 3) + e_3$$

$$25 = 3x - e_1 + e_3$$

19.4.4 Nouveau modèle

Voici le nouveau modèle:

Déterminer $(x, y, e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{S}^5$	(1) $-x + y + e_1 = 3$
Maximisant $Z = 10x - 7e_1 + 21$	(2) $x - e_1 + e_2 = 5$
Variables hors base x, e_1	(3) $3x - e_1 + e_3 = 25$
Variables de Base y, e_2, e_3	(5) $0 \leq x$
Solution admissible $(0, 3, 0, 5, 25)$	(6) $0 \leq y$
et $Z = 21$	(7) $e_1, e_2, e_3 \geq 0$

A ne pas oublier de vérifier la canonicité du modèle.

19.5 Exemple simple Seconde itération

19.5.1 Choix de la variable entrante

X sera choisit, donc X sera notre variable entrante.

19.5.2 Choix de la variable sortante

$$\frac{5}{1} = 5$$

$$\frac{25}{3} = 8.3$$

Prendre le minimum des variables, donc se sera 5, donc e_2 .

19.5.3 pivotage

$$x = 1 * (e_1 - e_2 + 5)$$

Puis on crée les nouvelles équations via le nouveau y :

$Z = 10x - 7e_1 + 27$ devient

$$Z = 10(e_1 - e_2 + 5) - 7e_1 + 27$$

$$Z = 3e_1 - 10e_2 + 71$$

$-x + y + e_1 = 3$ devient

$$3 = -(e_1 - e_2 + 5) + y + e_1$$

$$8 = y + e_2$$

$3x - e_1 + e_3 = 25$ devient

$$25 = 3(e_1 - e_2 + 5) - e_1 + e_3$$

$$10 = 2e_1 - 3e_2 + e_3$$

19.5.4 Nouveau modèle

Voici le nouveau modèle:

Déterminer $(x, y, e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{S}^5$	(1) $y + e_2 = 8$
Maximisant $Z = 3e_1 - 10x + 71$	(2) $x - e_1 + e_2 = 5$
Variables hors base e_2, e_1	(3) $2e_1 - 3e_2 + e_3 = 10$
Variables de Base y, x, e_3	(5) $0 \leq x$
Solution admissible $(5, 8, 0, 0, 10)$ et $Z = 71$	(6) $0 \leq y$
	(7) $e_1, e_2, e_3 \geq 0$

A ne pas oublier de vérifier la canonicité du modèle.

19.6 Exemple simple, troisième itération

19.6.1 Variable entrante et sortante

La variable entrante sera e_1

La variable sortante sera e_3 car:

$\frac{8}{0}$ est NULL, $\frac{5}{1}$ car négatif, $\frac{10}{2} = 5$

19.6.2 Nouveau modèle

Voici le nouveau modèle:

Déterminer $(x, y, e_1, e_2, e_3) \in \mathbb{S}^5$	(1) $-\frac{1}{2}e_2 + \frac{e_3}{2} + e_1 = 10$
Maximisant $Z = 86 - \frac{11}{2}e_2 - \frac{3e_3}{2}$	(2) $e_2 + y = 8$
Variables hors base e_2, e_3	(3) $e_1 - \frac{3}{2}e_2 + \frac{e_3}{2} = 5$
Variables de Base y, x, e_1	(5) $0 \leq x$
Solution admissible $(10, 8, 5, 0, 0)$ et $Z = 86$	(6) $0 \leq y$
	(7) $e_1, e_2, e_3 \geq 0$

19.7 Exemple simple, dernière itération

Stop car e_2 et e_3 sont inférieur à 0 dans Z .

Chapter 20

Simplexe à deux phases

Soit le modèle suivant:

Déterminer $(x, y) \in \mathfrak{S}^2$

Maximisant $Z = 2x + 3y$

sous les contraintes :

$$(1) \ x + y \leq 4$$

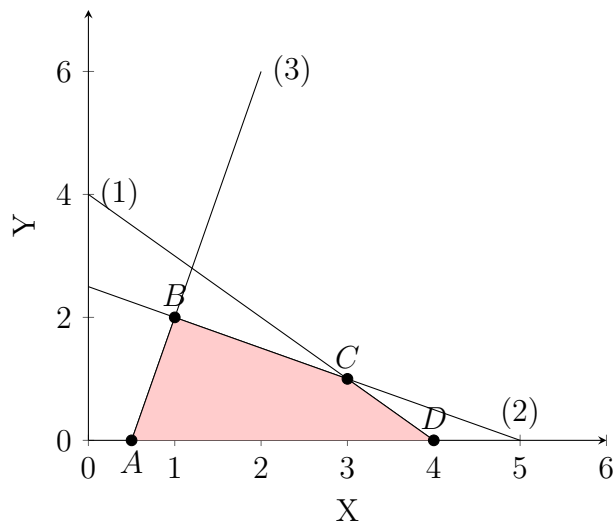
$$(2) \ x + 2y \leq 5$$

$$(3) \ 4x - y \geq 2$$

$$(4-5) \ x, y \geq 0$$

Lorsque le sens de l'équation est \leq il faut ajouter une variable e_i , dans le cas des équations \geq il faut ajouter une variable d'excédant a dans la contrainte concerné et instaurer Z à $-a$

La représentation graphique ci dessous:



20.1 Première phase du simplexe à deux phases

Pour toutes expression sous la forme $A \geq -i$, multiplier les deux coté par -1 et inverser le signe pour obtenir des équations positif.

Si une contrainte est jugé redondante, alors elle peut être éliminé sans changer le modèle.

Le modèle ci dessus n'est pas canonique, donc nous allons exprimer Z en fonction de l'équation portant le symbole a :

20.1.1 Nouveau modèle

Voici le nouveau modèle:

Déterminer $(x, y, e_1, e_2, e_3, a) \in \mathbb{S}^5$

Solution admissible $(0, 0, 4, 5, 0, 2)$
et $Z = -2$

Maximisant $Z = -a = 4x - y - e_3 - 2$ *%oldZ = 2x + 3y*

$$(1) \quad x + y + e_1 = 4$$

$$(2) \quad x + 2y + e_2 = 5$$

Variables hors base x, y, a

$$(3) \quad 4x - y - e_3 + a = 2$$

Variables de Base e_1, e_2, e_3

$$(4-5) \quad x, y, e_i, a \geq 0$$

Ce modèle est canonique.

20.2 Premier phase du simplexe à deux phases, première itération

20.2.1 Variable entrante et sortante

La variable entrante sera x

La variable sortante sera a car:

$$\frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

20.2.2 pivotage

$$x = \frac{1}{2} * (y + e_3 - a + 2) = \frac{y}{4} + \frac{e_3}{4} - \frac{a}{4} + \frac{1}{2}$$

20.2.3 Nouveau modèle

Voici le nouveau modèle:

Déterminer $(x, y, e_1, e_2, e_3, a) \in \mathfrak{S}^5$	Solution admissible $(\frac{1}{2}, 0, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, 0, 0)$ et $Z = 0$
---	---

Maximisant $Z = -a$	(1) $\frac{5}{4}y + e_1 + \frac{e_3}{4} - \frac{a}{4} = \frac{7}{2}$
$\%oldZ = 2x + 3y$	(2) $\frac{9}{4}y + e_2 + \frac{e_3}{4} - \frac{a}{4} = \frac{9}{2}$

Variables hors base y, a	(3) $x - \frac{y}{4} - \frac{e_3}{4} + \frac{a}{4} = \frac{1}{2}$
-----------------------------------	---

Variables de Base e_1, e_2, x	(4-5) $x, y, e_i, a \geq 0$
--	-----------------------------

20.3 Premier phase du simplexe à deux phases, seconde itération

Nous sommes en présence d'un système optimal car Z à l'altitude 0.

Une solution admissible serait ($PG =$):

$A(\frac{1}{2}, 0)$ est le point extrême correspondant:

$$\begin{aligned} y_A &= 0 \\ 4x_A - y_A &= 2 \end{aligned}$$

Comme $z = 0$ on passe en phase 2.

20.4 Seconde phase du simplexe à deux phases

Voici le nouveau modèle:

Déterminer $(x, y, e_1, e_2, e_3) \in \mathfrak{S}^5$	Solution admissible $(\frac{1}{2}, 0, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, 0)$ et $Z = 0$
Maximisant $Z = oldZ = 2x + 3y$	(1) $\frac{5}{4}y + e_1 + \frac{e_3}{4} = \frac{7}{2}$ (2) $\frac{9}{4}y + e_2 + \frac{e_3}{4} = \frac{9}{2}$
Variables hors base y	(3) $x - \frac{y}{4} - \frac{e_3}{4} = \frac{1}{2}$
Variables de Base e_1, e_2, x	(4-5) $x, y, e_i \geq 0$

On retire toutes les occurrences de a .

Le modèle n'est pas canonique car x est hors base, donc remplacer x dans Z car il est défini:

$$Z = 2x + 3y = 2(\frac{y}{4} + \frac{e_3}{4} + \frac{1}{2}) + 3y = \frac{7}{2}y + \frac{e_3}{2} + 1$$

Voici le nouveau modèle:

Déterminer $(x, y, e_1, e_2, e_3) \in \mathfrak{S}^5$	et $Z = 1$
Maximisant $Z = \frac{7}{2}y + \frac{e_3}{2} + 1$	(1) $\frac{5}{4}y + e_1 + \frac{e_3}{4} = \frac{7}{2}$ (2) $\frac{9}{4}y + e_2 + \frac{e_3}{4} = \frac{9}{2}$
Variables hors base y, e_3	(3) $x - \frac{y}{4} - \frac{e_3}{4} = \frac{1}{2}$
Variables de Base e_1, e_2, x	(4-5) $x, y, e_i \geq 0$

Ce modèle est canonique.

20.5 Seconde phase du simplexe à deux phases, première itération

20.5.1 Variable entrante et sortante

La variable entrante sera y

La variable sortante sera e_2 car:

$$\frac{\frac{7}{5}}{\frac{4}{4}} = \frac{14}{5}, \frac{\frac{9}{2}}{\frac{9}{4}} = 2, \leq 0$$

20.5.2 pivotage

$$y = \frac{4}{9} * (-e_2 - \frac{e_3}{4} + \frac{9}{2}) = -\frac{4}{9}e_2 - \frac{e_3}{9} + 2$$

20.5.3 Nouveau modèle

Voici le nouveau modèle:

Déterminer $(x, y, e_1, e_2, e_3) \in \mathfrak{S}^5$ et $Z = 8$

Maximisant $Z = -\frac{14}{9}e_2 + \frac{e_3}{9} + 8$ (1) $x - \frac{5}{9}e_2 + \frac{e_3}{9} = 1$

Variables hors base e_2, e_3 (2) $y + \frac{4}{9}e_2 + \frac{e_3}{9} = 2$

Variables de Base e_1, y, x (3) $x + \frac{e_2}{9} - \frac{2}{9}e_3 = 1$

Solution admissible $(1, 2, 1, 0, 0)$ (4-5) $x, y, e_i \geq 0$

Ce modèle est canonique.

20.6 Seconde phase du simplexe à deux phases, seconde itération

20.6.1 Variable entrante et sortante

La variable entrante sera e_3

La variable sortante sera e_1 car:

$$\frac{1}{9} = 9, \frac{2}{9} = 18, \leq 0$$

20.6.2 pivotage

$$e_3 = 9(-e_1 + \frac{5}{9}e_2 + 1) = -9e_1 + 5e_2 + 9$$

20.6.3 Nouveau modèle

Voici le nouveau modèle:

Déterminer $(x, y, e_1, e_2, e_3) \in \mathfrak{S}^5$ et $Z = 9$

Maximisant $Z = -e_1 - e_2 + 9$ (1) $9y + 5e_2 + e_3 = 9$

Variables hors base e_2, e_1 (2) $y - e_1 + e_2 = 1$

Variables de Base e_3, y, x (3) $x + 2e_1 - e_2 = 3$

Solution admissible $(3, 1, 0, 0, 9)$ (4-5) $x, y, e_i \geq 0$

Ce modèle est canonique.

20.7 Seconde phase du simplexe à deux phases, troisième itération

Il n'existe pas de variable entrante car e_1 et $e_3 \leq 0$

Part V

Représentation des connaissances et raisonnement

Chapter 21

Logique propositionnel

21.1 Vocabulaire

Les *Logiques propositionnel* sont définis via les symboles suivant:

$\top, \perp, C, \neg C, C \wedge C, C \vee C, C \Rightarrow C$

Littéral est un atome ou la négation d'un atome

Clause est une disjonction de littéraux

Cube est une conjonction de littéraux

CNF est une forme normal conjonctive (une conjonction de clauses)

DNF est une forme normal disjonctive (une disjonction de cubes)

21.2 cohérence d'un ensemble de clauses

Soit K un ensemble de clauses pouvant être réduit via les axiomes:

$$x \vee x \vee y_1 \vee \dots y_n \equiv x \vee y_1 \vee \dots y_n$$

$$x \vee \neg x \vee y_1 \vee \dots y_n \equiv \text{'top'}$$

$$x \vee \top \equiv \top$$

$$x \vee \perp \equiv x$$

Si K est vide alors K est cohérente

Si $\perp \in K$ alors K est incohérente

$K_{x \leftarrow \top}$ est le résultat du remplacement des occurrences de x par \top

$K_{x \leftarrow \perp}$ est le résultat du remplacement des occurrences de x par \perp

Chapter 22

Introduction à la logique de description

22.1 Attributive Language with Complement

Les *ALC* sont définis via les symboles suivants :

$\top, \perp, C, \neg C, C \sqcap C, C \sqcup C, \forall r.C, \exists r.C$

22.1.1 Sémantique

Tuple $\iota =_{def} \langle \delta^I, .^I \rangle$ où

δ^I est le domaine (ou un ensemble d'objets)

$.^I$ est une fonction d'interprétation tel que

$$A^I \subseteq \Delta^I$$

$$r^I \subseteq \Delta^I \times \Delta^I$$

$$a^I \in \Delta^I$$

$$\top^I =_{def} \Delta^I$$

$$\perp^I =_{def} \emptyset$$

$$(\neg C)^I =_{def} \Delta^I \setminus C^I$$

$$\begin{aligned}
(C \sqcap D)^I &=_{def} C^I \cap C^I \\
(C \sqcup D)^I &=_{def} C^I \cup C^I \\
\exists r.C)^I &=_{def} \{x \in \Delta^I \mid r^I(x) \cap C^I \neq \emptyset\} \\
\forall r.C)^I &=_{def} \{x \in \Delta^I \mid r^I(x) \subseteq C^I\}
\end{aligned}$$

22.1.2 Propriétés

Pour toutes les interprétations $\iota = \langle \Delta^I, .^I \rangle$, et pour tout $C, D \in \ell_{ALC}$:

$$\begin{aligned}
(\neg \neg C)^I &= C^I & (\neg \exists r.C)^I &= (\forall r. \neg C)^I \\
(\neg (C \sqcap D))^I &= (\neg C \sqcup \neg D)^I & \exists r. \perp &\equiv \perp \\
(\neg (C \sqcup D))^I &= (\neg C \sqcap \neg D)^I & \forall r. \top &\equiv \top \\
(\neg \forall r.C)^I &= (\exists r. \neg C)^I
\end{aligned}$$

22.2 Logique de description

Définit via les symboles suivant:

$\ell_{ALC}, C \sqsubseteq C, \sqsupseteq C$

22.2.1 Sémantique

$\iota \models C \sqsubseteq D$ (*satisfait* $C \sqsubseteq D$) si $C^I \subseteq D^I$

$\iota \models C \equiv D$ $\iota \models C \sqsubseteq D$ et $\iota \models C \sqsupseteq D$

22.2.2 Assertions

$a : C$ a est une instance de C

$(a, b) : r$ a et b sont attaché avec la relation r

22.3 TBoxes et ABoxes

Soit une base de connaissance $KB = \langle T, A \rangle$ où:

$$T = \begin{cases} EmpStud \equiv Student \sqcap Employee \\ Student \sqcap \neg Employee \sqsubseteq \neg \exists pays.Tax \\ EmpStud \sqcap \neg Parent \sqsubseteq \exists pays.Tax \\ EmpStud \sqcap Parent \sqsubseteq \neg \exists pays.Tax \\ \exists worksFor.Company \sqsubseteq Employee \end{cases}$$

$$A = \begin{cases} ibm : Company \\ mary : Parent \\ john : EmpStud \\ (john, ibm) : workFor \end{cases}$$

22.3.1 Subsumption

D'après la TBoxes et la ABoxes ci dessus, dire que A subsume B c'est dire que A est plus spécifique que B:

Does *EmpStud* subsume *Student* \sqcap *Employee* ? : yes

Does *Student* \sqcap *Parent* subsume *EmpStud* \sqcap *Parent* ? : yes

Does $\exists pays.\perp$ subsume *EmpStud* ? : No

22.3.2 Classification

Les schémas de classification aide pour trouver les subsumptions:



22.3.3 Instance checking

On n'a

ibm est une instance de *Company*

mary est une instance de *Parent*

john est une instance de *EmpStud*, *Student*, *Employee*

john n'est pas une instance de \neg *Parent*

(john, ibm) est une instance de *workFor*

22.3.4 Retrieval

Student ?{*john*}

$\neg \exists$ *pays.Tax* ?{*mary*}

$\neg(\neg$ *Employee* $\sqcap \exists$ *pays.Tax*) ?{*john, mary*}

\forall *worksFor.Company* ?{ }

Employee $\sqcup \forall$ *pays.* \neg *Tax* \sqcup *Company* ?{*ibm, john, mary*}

\neg *Tax* $\sqcup \exists$ *pays.* \perp $\sqcup \forall$ *workdFor.* \forall *pays.* \top ?{*ibm, john, mary*}

22.3.5 Equivalence of concept

Are *Student* \sqcap *Employee* $\sqcap \neg$ *EmpStud* and \exists *worksFor.* \perp équivalent? *Yes*

Are *Student* $\sqcap \forall$ *worksFor.* \neg *Company* and *Student* $\sqcap \neg$ *Employee* équivalent?
No

22.3.6 Concept satisfiability

EmpStud \sqcap *Parent* $\sqcap \exists$ *pays.* \top satisfiable? *Yep*

$\neg \forall$ *worksFor.* \neg *Company* $\sqcap \neg$ *Employee* satisfiable? *No*

Employee \sqcap *Company* satisfiable ? *Yep*

22.3.7 ABox consistency

Is $A_2 = A \cup \{\textit{john} : \exists \textit{worksFor} . \neg \textit{Company}\}$ consistent wrt T ? : *Yes*

Is $A_3 = A \cup \{\textit{mary} : \exists \textit{pays} . \textit{Tax}\}$ consistent wrt T ? : *No*

22.3.8 Réduction et consistance

Soit $KB = \langle T, A \rangle, C, D \in \iota_{ALC}, a \in I$ and a' new in KB

Concept subsumption wrt T : $KB \models C \sqsubseteq D$ ssi $\langle T, A \cup \{a' : C \sqcap \neg D\} \rangle$ est inconsistant

Instance chacking : $KB \models a : C$ ssi $\langle T, A \cup \{a : \neg C\} \rangle$ est inconsistant

Concept satisfiability wrt T : C est satisfiable wrt T ssi $\langle T, A \cup \{a' : C\} \rangle$ est consistent

$KB \models \textit{EmpStud} \sqcap \textit{Parent} \sqsubseteq \neg \exists \textit{pays} . \textit{Tax} \sqcap \textit{Employee}$?

$KB \cup \{a : \textit{EmpStud} \sqcap \textit{Parent} \sqcap (\exists \textit{pays} . \textit{Tax} \sqcup \neg \textit{Employee})\} \models \perp?$, for a new

$KB \models \textit{john} : \textit{Student} \sqcap \exists \textit{empBy} . \top$?

$KB \cup \{\textit{john} : \neg(\textit{Student} \sqcap \exists \textit{empBy} . \top)\} \models \perp?$

Is $\textit{EmpStud} \sqcap \neg \exists \textit{pays} . \textit{Tax}$ satisfiable wrt KB ?

$KB \cup \{a : \textit{EmpStud} \sqcap \neg \exists \textit{pays} . \textit{Tax}\} \not\models \perp?$, for a new

Chapter 23

Méthode des Tableau pour les ALC

23.1 Pre processing

23.1.1 Réécriture

Réécrite chaque:

$$C \sqsubseteq D \text{ dans } T \text{ en } \top \sqsubseteq \neg C \sqcup D$$

$$A \sqsubseteq \exists r.B \text{ en } \top \sqsubseteq \neg A \sqcup \exists r.B$$

Changer la KB en NNF (\neg occurs only in front of concept names)

$$\neg\neg C \rightarrow C$$

$$\neg(C \sqcap D) \rightarrow \neg C \sqcup \neg D$$

$$\neg(C \sqcup D) \rightarrow \neg C \sqcap \neg D$$

$$\neg(\exists r.C) \rightarrow \forall r.\neg C$$

$$\neg(\forall r.C) \rightarrow \exists r.\neg C$$

23.1.2 Vocabulaire

Blocage/Blocking l'apparition d'une boucle infini dans le déroulement de l'algorithme

Clash Quand il existe une contradiction d'un noeud feuille vers l'un de ses ascendant

23.1.3 Règles d'expansion

\sqsubseteq_T – rule

Si $a : C \in A, \top \sqsubseteq D \in T$ **et** $a : D \notin A$ **alors**
 $A := A \cup \{a : D\}$

\sqcap – rule

Si $a : C \sqcap D \in A$ **et** $\{a : C, a : D\} \not\subseteq A$ **alors**
 $A := A \cup \{a : C, a : D\}$

\sqcup – rule

Si $a : C \sqcup D \in A$ **et** $\{a : C, a : D\} \cap A = \emptyset$ **alors**
 $A := A \cup \{a : E\}, \text{ for some } E \in \{C, D\}$

\exists – rule

Si $a : \exists R.C \in A$ **et il n'y a pas de** b **st** $\{(a, b) : R, b : C\} \subseteq A$ **et**
 a **n'est pas en en blocage** **alors**
 $A := A \cup \{(a, c) : R, c : C\}, \text{ for } c \text{ new in } A$

\forall – rule

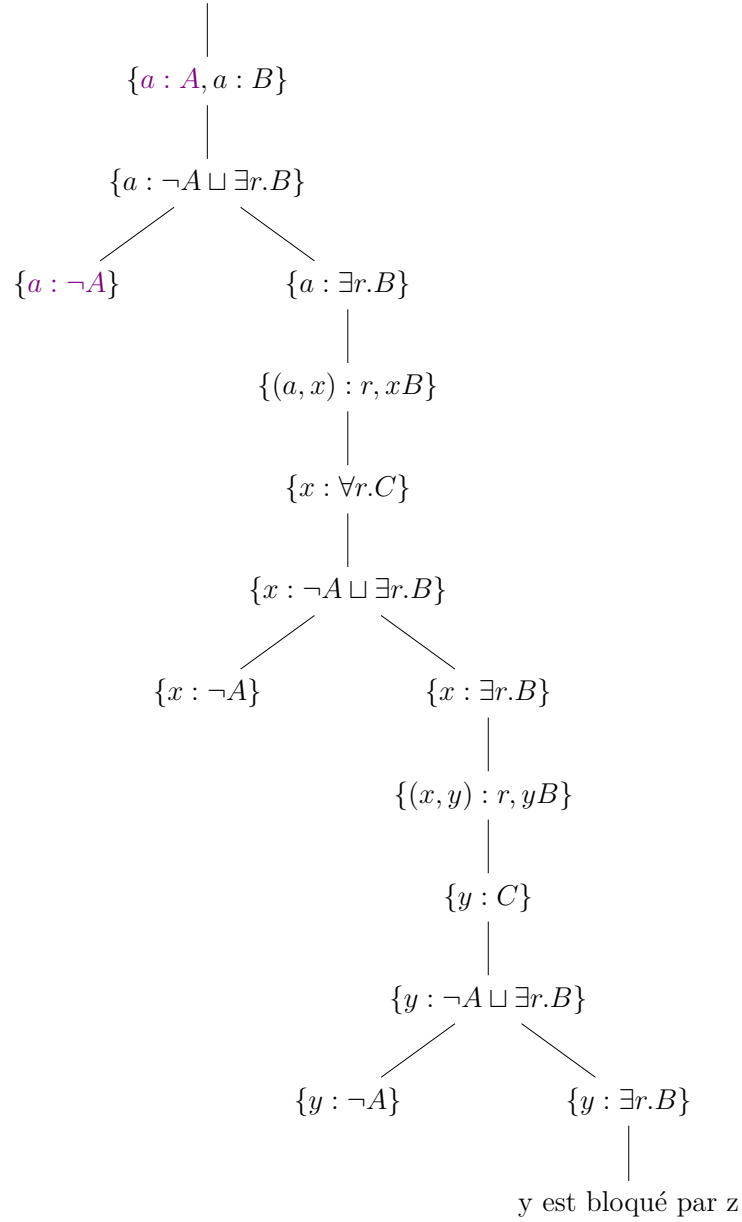
Si $\{a : \forall R.C, (a, b) : R\} \subseteq A$ **et** $b : C \notin A$ **alors**
 $A := A \cup \{b : C\}$

23.2 Exemple

$$T = \{A \sqsubseteq \exists r.B\} \equiv \{\top \sqsubseteq \neg A \sqcup \exists r.B\}$$

$$A = \{a : A \sqcap B, a : \forall r. \forall r.C\}$$

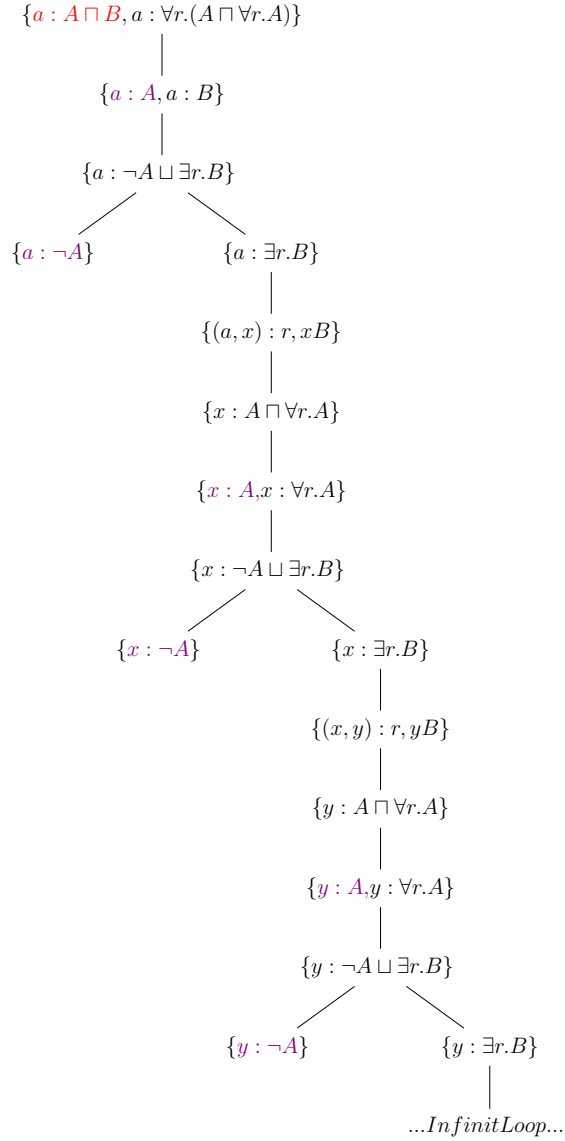
$$\{a : A \sqcap B, a : \forall r. \forall r.C\}$$



23.3 Exemple 2

$$T = \{A \sqsubseteq \exists r.B\} \equiv \{\top \sqsubseteq \neg A \sqcup \exists r.B\}$$

$$A = \{a : A \sqcap B, a : \forall r.(A \sqcap \forall r.A)\}$$

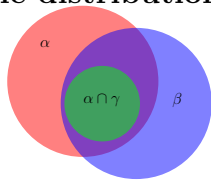


Chapter 24

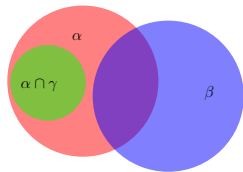
Logique presque tout

Soit le nouvelle opérateur binaire \Subset disent pour *presque tout* A est dans B.

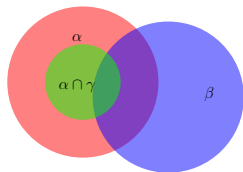
Bonne distribution :



Mauvaise distribution :



Cas général :



24.1 Système P

Réflexivité :

Almost all : $\alpha \vdash \alpha$

ensembliste : $A \in A$

Équilibrage à gauche :

Almost all : Si $\vdash \alpha \Leftrightarrow \beta$ et $\alpha \vdash \gamma$ alors $\beta \vdash \gamma$

ensembliste : Si $A = B$ et $A \in C$ alors $B \in C$

Équilibrage à droite :

Almost all : Si $\alpha \vdash \beta$ et $\gamma \vdash \alpha$ alors $\gamma \vdash \beta$

ensembliste : Si $A \subseteq B$ et $C \in A$ alors $C \in B$

Coupure :

Almost all : Si $(\alpha \wedge \beta) \vdash \gamma$ et $\alpha \vdash \beta$ alors $\alpha \vdash \gamma$

ensembliste : Si $(A \cap B) \in C$ et $A \in B$ alors $A \in C$

Monotonie :

Almost all : Si $\alpha \vdash \beta$ et $\alpha \vdash \gamma$ alors $\alpha \wedge \beta \vdash \gamma$

ensembliste : Si $A \in B$ et $A \in C$ alors $(A \cap B) \in C$

Ou :

Almost all : Si $\alpha \vdash \gamma$ et $\beta \vdash \gamma$ alors $\alpha \vee \beta \vdash \gamma$

ensembliste : Si $A \in C$ et $B \in C$ alors $(A \cup B) \in C$

24.1.1 Exemple

Soit:

Q : être québécoises

C : être canadiens

F : le fait de parler français

A : le fait de parler anglais

S : le fait d'aimer le sirop d'érable

Presque tout les canadiens ne parlent pas le français : $C \models \neg F$

Presque tout les québécois parlent le français : $Q \models F$

Les québécois aiment le sirop d'érable : $Q \Rightarrow S \equiv Q \models S$

Les québécois sont canadiens $Q \Rightarrow C \equiv Q \models C$

Presque tout les québécois canadiens parlent le français

Nous avons $Q \models C$ et $Q \models F$

Avec la monotonie on obtient $Q \wedge C \models F$

Presque tout les québécois canadiens parlent le français ou l'anglais

Avec $Q \wedge C \models F$

Par ailleurs nous avons $F \models F \vee A$

Alors via l'équilibrage à droite $Q \wedge C \models F \vee A$

24.2 Tolérance du Système P

Soit la basse de connaissance:

$$\begin{array}{l} \Delta \quad C \Rightarrow \neg F \\ \quad Q \Rightarrow F \\ \\ W \quad Q \Rightarrow S \\ \quad Q \Rightarrow C \end{array}$$

Pour une formule de type $A \Rightarrow B$ dans Δ dire si il existe une interprétation qui vérifie $A \Rightarrow B$ et qui satisfait chacune des règles de Δ et W

Pour la formule $C \Rightarrow \neg F$ est satisfait

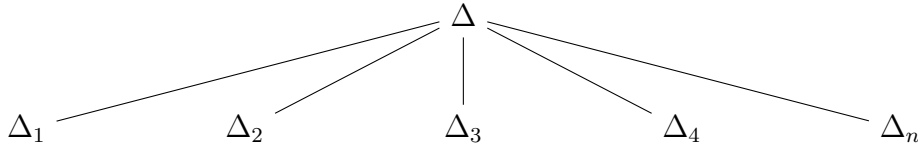
$$\begin{array}{l} \Delta \quad C^1 \Rightarrow \neg F^0 \\ \quad Q^0 \Rightarrow F^0 \\ \\ W \quad Q^0 \Rightarrow S^s \\ \quad Q^0 \Rightarrow C^1 \end{array}$$

Pour la formule $Q \Rightarrow F$ n'est pas satisfait

$$\begin{array}{l} \Delta \quad C^1 \Rightarrow \neg F^1 \equiv \neg \top \vee \perp \\ \quad Q^1 \Rightarrow F^1 \\ \\ W \quad Q^1 \Rightarrow S^s \\ \quad Q^1 \Rightarrow C^1 \end{array}$$

24.3 Stratification du système P

Δ stratifiable (ou cohérente) c'est le fait de pouvoir diviser Δ en Δ_i .
 Δ_i est plus général que Δ_{i+1}



Si $\alpha \rightarrow \beta$ est une conséquences de Δ , alors $\{\alpha \rightarrow \neg\beta\} \cup \Delta$ est incohérente.
 A chaque tour dans Δ appliquer la tolérances et si il y a une interprétation, bouger la formule dans Δ_i , Si Δ_i est vide alors ce n'est pas stratifiable, si Δ est vide alors c'est stratifiable.

24.4 Exemple de stratification possible

24.4.1 Initialisation

$$\Delta = \{C \rightarrow \neg F, Q \rightarrow F\}$$

$$W = \{Q \Rightarrow S, Q \Rightarrow C\}$$

$$\alpha \rightarrow \beta = (Q \wedge C) \rightarrow \neg F$$

24.4.2 Première itération

On n'a:

$$\Delta = \{C \rightarrow \neg F, Q \rightarrow F, (Q \wedge C) \rightarrow F\}$$

$$W = \{Q \Rightarrow S, Q \Rightarrow C\}$$

$$\Delta_1 = \{\}$$

Pour $C^1 \rightarrow \neg F^0$ est toléré par l'algorithme donc transféré dans Δ_1 à la fin du tour:

$$\Delta = \{C^1 \rightarrow \neg F^0, Q^0 \rightarrow F^0, (Q^0 \wedge C^1) \rightarrow F^0\}$$

$$W = \{Q^0 \Rightarrow S^s, Q^0 \Rightarrow C^1\}$$

$$\Delta_1 = \{\}$$

Pour $Q \rightarrow F, (Q \wedge C) \rightarrow F$ ne sont pas tolérés par l'algorithme:

$$\Delta = \{C \rightarrow \neg F, Q \rightarrow F, (Q \wedge C) \rightarrow F\}$$

$$W = \{Q \Rightarrow S, Q \Rightarrow C\}$$

$$\Delta_1 = \{\}$$

24.4.3 Seconde itération

On n'a:

$$\Delta = \{Q \rightarrow F, (Q \wedge C) \rightarrow F\}$$

$$W = \{Q \Rightarrow S, Q \Rightarrow C\}$$

$$\Delta_1 = \{C \rightarrow \neg F\}$$

$$\Delta_2 = \{\}$$

Pour $Q \rightarrow F$ et $(Q \wedge C) \rightarrow F$ sont toléré donc seront transféré dans Δ_2 à la fin du tour:

$$\Delta = \{\}$$

$$W = \{Q \Rightarrow S, Q \Rightarrow C\}$$

$$\Delta_1 = \{C \rightarrow \neg F\}$$

$$\Delta_2 = \{Q \rightarrow F, (Q \wedge C) \rightarrow F\}$$

Δ est vide donc $\{\alpha \rightarrow \neg\beta\} \cup \Delta$ est stratifiable.

24.5 Exemple de stratification non possible

24.5.1 Initialisation

$$\Delta = \{C \rightarrow \neg F, Q \rightarrow F\}$$

$$W = \{Q \Rightarrow S, Q \Rightarrow C\}$$

$$\alpha \rightarrow \beta = (Q \wedge C) \rightarrow (F \vee A)$$

24.5.2 Première itération

On n'a:

$$\Delta = \{C \rightarrow \neg F, Q \rightarrow F, (Q \wedge C) \rightarrow (\neg F \wedge \neg A)\}$$

$$W = \{Q \Rightarrow S, Q \Rightarrow C\}$$

$$\Delta_1 = \{\}$$

Pour $C^1 \rightarrow \neg F^0$ est toléré par l'algorithme donc transféré dans Δ_1 à la fin du tour:

$$\Delta = \{C^1 \rightarrow \neg F^0, Q^0 \rightarrow F^0, (Q^0 \wedge C^1) \rightarrow (\neg F^0 \wedge \neg A^a)\}$$

$$W = \{Q^0 \Rightarrow S^s, Q^0 \Rightarrow C^1\}$$

$$\Delta_1 = \{\}$$

Pour $Q \rightarrow F, (Q \wedge C) \rightarrow (\neg F \wedge \neg A)$ ne sont pas tolérés par l'algorithme:

$$\Delta = \{C \rightarrow \neg F, Q \rightarrow F, (Q \wedge C) \rightarrow (\neg F \wedge \neg A)\}$$

$$W = \{Q \Rightarrow S, Q \Rightarrow C\}$$

$$\Delta_1 = \{\}$$

24.5.3 Seconde itération

On n'a:

$$\Delta = \{Q \rightarrow F, (Q \wedge C) \rightarrow (\neg F \wedge \neg A)\}$$

$$W = \{Q \Rightarrow S, Q \Rightarrow C\}$$

$$\Delta_1 = \{C \rightarrow \neg F\}$$

$$\Delta_2 = \{\}$$

Pour $Q \rightarrow F$ et $(Q \wedge C) \rightarrow (\neg F \wedge \neg A)$ ne sont pas tolérés:

$$\Delta = \{Q \rightarrow F, (Q \wedge C) \rightarrow (\neg F \wedge \neg A)\}$$

$$W = \{Q \Rightarrow S, Q \Rightarrow C\}$$

$$\Delta_1 = \{C \rightarrow \neg F\}$$

$$\Delta_2 = \{\}$$

Δ_2 est vide donc $\{\alpha \rightarrow \neg\beta\} \cup \Delta$ n'est pas stratifiable.

Chapter 25

Logique de description DL Lite

25.1 Opérateurs

Pour une *ABox*:

\neg négation

\exists Rôle \rightarrow Concept

$$\frac{(A, B) \quad (C, D)}{(A, B) \quad (C, D)} \exists \rightarrow \frac{(A)}{(C)}$$

\neg Rôle \rightarrow Rôle

$$\frac{(A, B) \quad (C, D)}{(A, B) \quad (C, D)} \neg \rightarrow \frac{(B, A)}{(D, C)}$$

25.2 Requêtes

25.2.1 Grounded query

Sous la forme $(\bigwedge_{i=1}^n A_i(a)) \wedge (\bigwedge_{j=1}^m P_j(a, b))$

Avec A_i des concepts et P_i des rôles.

Exemple : *Student*(Jean) \wedge *Teacher*(Paul) $\wedge \dots \wedge$ *HasSupervisor*(Jean, Paul)

25.2.2 Conjonctives Query

Sous la forme $q = \{x | \exists y. conj1(x, y) \wedge conj2(Bob, y) \wedge conj3(y)\}$

Si x donne une liste non vide alors c'est une réponse de type *array*

Sinon c'est une sortie de type *boolean*

25.3 Fermetures négatives

Sur $DL-Lit_{core}$ Tout les axiomes négatifs de la *TBox* sont dans $cln(T)$

si $B_1 \sqsubseteq B_2 \in T$ and $B_2 \sqsubseteq \neg B_3 \in T$ alors $B_1 \sqsubseteq \neg B_3 \in T$

si $B_1 \sqsubseteq B_2 \in T$ and $B_3 \sqsubseteq \neg B_2 \in T$ alors $B_1 \sqsubseteq \neg B_3 \in T$

Avec les règles ce dessus dérivons les *negated closure*:

$DL-Lit_{core}$ TBox	$cln(T)$
$Teacher \sqsubseteq \neg Student$	$Teacher \sqsubseteq \exists HasSupervisor$
$Teacher \sqsubseteq \exists TeachesTo$	$\exists HasSupervisor^\neg \sqsubseteq \neg Student$
$\exists TeachesTo^\neg \sqsubseteq Student$	$\exists TeachesTo^\neg \sqsubseteq \neg Teacher$
$Student \sqsubseteq \exists HasSupervisor$	
$\exists HasSupervisor^\neg \sqsubseteq Teacher$	

25.4 Gestion des contraintes et MultiABox

25.4.1 Expansion

Note o_{cl} , Qui va agrandir la ABox avec les axiomes de la TBox

$TBox$	$ABox$	La MultiABox M est composé que d'une ABox.
$\exists P \sqsubseteq B$	$A(a)$	$B(a)$ est ajouté grâce au second axiome
$A \sqsubseteq B$	$P(c,b)$	$B(c)$ est ajouté grâce au premier axiome
$A \sqsubseteq \neg C$	$B(a)$	
	$B(c)$	

25.4.2 Splitting

Note o_{incl} , Qui va Séparer les conflits en créant plusieurs ABox

$TBox$	$MultiAboxes(ABox_1, ABox_2)$	
$C \sqsubseteq \neg B$	$B(a)$	$C(e)$
	$C(a)$	$B(e)$
	$B(b)$	$B(b)$

$$o_{incl} = \{ \{B(a), B(b)\}, \{B(b), C(a)\}, \{C(a)\}, \{C(e)\}, \{B(e)\} \}$$

25.4.3 Selection

Note o_{card} , Qui crée une nouvelle ABox contenant tout les ABox ayant le plus haut cardinal

$TBox$	$ABox_1$	$ABox_2$	$ABox_3$
$C \sqsubseteq \neg B$	$P(c,b)$	$C(a)$	$B(c)$
	$B(a)$	$B(b)$	
$o_{incl} = \{ABox_1, Abox_2\}$			

25.4.4 Modifieurs

$$o_{cl}(o_{cl}(M)) = o_{cl}(M)$$

$$o_{incl}(o_{incl}(M)) = o_{incl}(M)$$

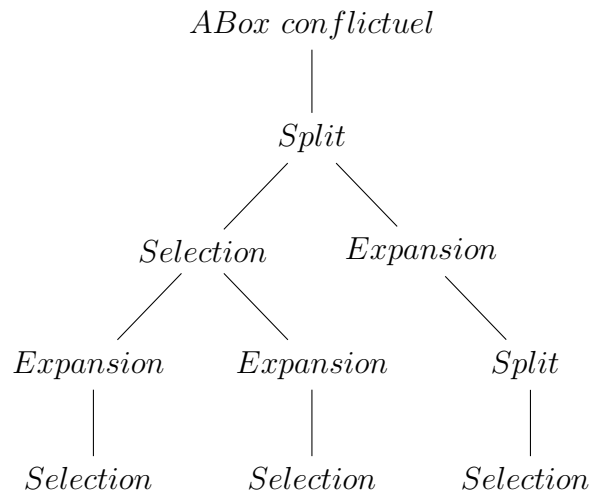
$$o_{card}(o_{card}(M)) = o_{card}(M)$$

$$o_{cl}(O_d(O_{cl}(M))) = o_d(o_{cl}(M))$$

$$o_{incl}(O_d(O_{incl}(M))) = o_d(o_{incl}(M))$$

$$_d = \{incl, card, cl\}$$

25.4.5 Complex modifieurs



25.4.6 Décision avec plusieurs ABox

Universal Inférence : Si toutes les ABox répondent la réponse R, alors R sera retourné

Existencial Inférence : Si au moins une ABox retourne T, alors R sera retourné

Safe inférence : Faire l'intersection de toutes les ABox puis calculer le résultat

Mogority inférence : Si plus de la moitié des ABox répondent avec le résultat R, alors R sera prise

Base inférence : Si plus de α ABox répondent avec le résultat R, alors R sera prise

La différence entre la Safe inférence et l'Universal inférence:

Soit $TBox = \{A \sqsubseteq \neg B, A \sqsubseteq E, B \sqsubseteq E\}$, $ABox = \{A(a), B(a)\}$
Via la résolution des contraintes on obtient:
 $A_1 = \{A(a)\}$, $A_2 = \{B(a)\}$
avec comme $x = E(a)$

Pour la stratégie \forall

$(T, A_1) \models E(a) \rightarrow OUI$

$(T, A_2) \models E(a) \rightarrow OUI$

Conclusion OUI

Pour la stratégie *Safe*

$(T, (A_1 \cap A_2)) \models E(a)$

$\emptyset \models E(a) \rightarrow NON$

Conclusion NON

Chapter 26

Complexité

26.1 Analyse de complexité pour D(M1, Safe)

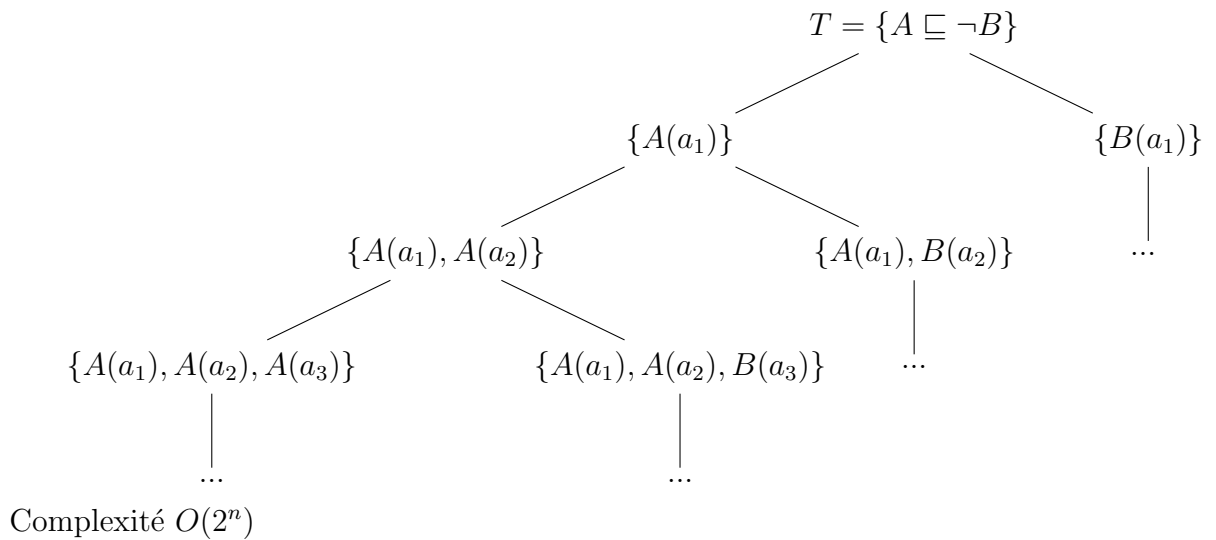
Une approche naïf non satisfiable serait de:

- (1) Calculer les $R_1 \dots R_n$ après avoir appliqué le *modifiersplitting*
- (2) Calculer l'intersection des R_i

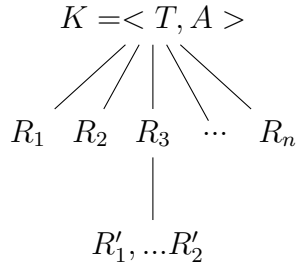
Un cas extrême pour résoudre le problème

$$T = \{A \sqsubseteq \neg B\}$$

$$A = \{A(a_1), B(a_1), \dots A(a_n), B(a_n)\}$$



26.2 Analyse de la complexité pour D(M2,Forall)



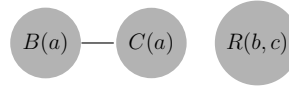
Splitting et Selection selon le cardinal
le plus haut:
 $R'_1, \dots R'_r$

Soit la transformation de ce problème vers un problème dont la complexité est connue, Prenons K-MIS qui est similaire à ce problème de Splitting et Selection:

$$K = \langle T, A \rangle$$

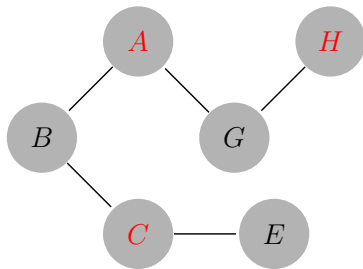
$$T = \{B \sqsubseteq \neg C\}$$

$$A = \{B(a), C(a), R(b, c)\}$$



Soit le nouveau graph, effectuer la transformation inverse du K-MIS vers DLlite.

Soit K-MIS un problème NP-Complet qui consiste à déterminer le nombre maximum de nœuds tel que ces nœuds une fois colorié ne sont pas adjacent à un autre nœud colorié, K=3 dans l'exemple ci dessous



Concept = $\{A, B, C, E, G, H\}$,
Individu = $\{e\}$, Role = $\{\}$

$$TBox = \{H \sqsubseteq \neg G, A \sqsubseteq \neg H, B \sqsubseteq \neg A, C \sqsubseteq \neg B, E \sqsubseteq \neg C\}$$

$$ABox = \{A(e), B(e), C(e), E(e), G(e), H(e)\}$$

$$Cln(T) = T$$

Part VI

XML

Chapter 27

DTD

inclusion dans xml `<!DOCTYPE nom SYSTEM "fichier.dtd" >`

`<!ELEMENT <nom de la balise> (< contenue >) >`

contenue :

`(#PCDATA)` du texte

`(objet+)` au moins un objet

`(objet?)` au plus un objet

`(objet*)` de zero à infini

`(objet, aliment)` un objet et une aliment (dans l'ordre)

`(objet|aliment)` l'un des deux

`<!ATTRIBUT <nom de la balise>< clef >< contenue > [#REQUIRED|#IMPLIED] >`

Chapter 28

XSD

```
<?xml version="1.0" ?>
<xs:schema xmlns:xs="http://www.w3.org/2001/XMLSchema">

    <xs:element name="age" type="xs:integer" />
    <xs:element name="prenom" type="xs:string" />
    <xs:element name="pseudo" type="xs:string" />

    <xs:element name="Personnage">$
        <xs:complexType>
            <xs:sequence>
                <xs:element ref="age">
                <xs:element ref="name" maxOccurs="2">
            </>
        </>
    </>

    <xs:element name="Joueur">
        <xs:complexType>
            <xs:sequence>
                <xs:choise minOccurs="1" maxOccurs="2">
                    <xs:element ref="pseudo">
                    <xs:element ref="prenom">
                </>
            </>
        </>
    </>

</>
```



```
</>

<xs:complexType name="Liste">
  <xs:sequence>
    <xs:element ref="Joueur" maxOccurs="UNBOUNDED">
      </>
    </>
  </>

  <xs:element name="photo" type="xs:string">
    <xs:attribute name="resolution" type="xs:integer"/>
    <xs:attribute name="type" type="xs:string" default="img/jpg"/>
  </xs:element>
</xs:schema>
```

Chapter 29

XPATH

29.1 Syntaxe

29.1.1 Sélection

nodename Sélectionne toute les nœuds ayant comme nom "*nodename*"

/ La racine

. Le nœud courant

.. Le parent

@ les attributs

bookstore/book Tout les book qui sont fils de bookstore

//book Tout les book dans TOUT le document

//@lang Tout les attribut qui sont nommé lang

29.1.2 Prédicats

/bookstore/book[1] Le premier book dans bookstore

/bookstore/book[last()] Le dernier book dans bookstore

/bookstore/book[last() - 1] L'avant dernier book dans bookstore

/bookstore/book[position() < 3 Les 3 premier book

//title[@lang = 'en'] Tout les titres qui ont un attribut lang égal à 'en'

/bookstore/book[price > 35.00]/title Tout les titres des book dans book-store qui ont un élément prix supérieur à 35.00

tous les noeuds éléments de nom attr *//attr*

tous les noeuds éléments qui ont un attribut order *// *[@order]*

les noeuds attributs de nom order *"movie/filmography/*/[@order]"*

le quatrième fils de filmography

"movie/filmography/[position() = 4]"*

le noeud attribut de nom Crew (attribut de filmography)

"//filmography[@Crew]//attr"

les quatre premiers fils de filmography

"movie/filmography/[position() <= 4]"*

retournez le sous-arbre parent et aller dans Editor *"../editor"*

le nombre total de comédiens (cast, remainder)

"count(movie/filmography/cast/name — movie/filmography/remainder/name)"

une chaîne de caractères présentant le film : titre (année) - réalisateur

"concat(movie/title/text(), '(', movie/year/text(), ') - ', movie/film/Director/name)"