Электромагнитные волны

$$[\vec{\nabla}\vec{E}] = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \text{ – з-н Фарадея}$$

$$\vec{\nabla}\vec{D} = \rho \text{ – теорема Гаусса}$$

$$[\vec{\nabla}\vec{H}] = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \text{ – з-н Ампера}$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \text{ – теорема Гаусса}$$

$$\vec{\nabla}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \text{ – ур-ние непрерывности}$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$

Рассмотрим среду однородную
нейтральную ($\rho = 0$) непроводящую ($j = 0$).

Тогда система принимает вид:

$$[\vec{\nabla}\vec{E}] = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla}\vec{D} = 0 \qquad (2)$$

$$[\vec{\nabla}\vec{H}] = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0 \qquad (4)$$

Продифференцируем (3) по времени и далее воспользуемся (1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{\nabla}\vec{H}\right] = [\vec{\nabla}, \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}] = -\frac{1}{\mu\mu_0}\left[\vec{\nabla}, \left[\vec{\nabla}\vec{E}\right]\right]$$

С учетом :

$$\left[\vec{a}, \left[\vec{b}\vec{c}\right]\right] = \vec{b}\left(\vec{a}\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}\vec{b}\right)$$

получим:

$$\left[\vec{\nabla}, \left[\vec{\nabla}\vec{E}\right]\right] = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{E}\right) - \left(\vec{\nabla}\vec{\nabla}\right)\vec{E} = -\vec{\nabla}^2\vec{E}$$

Здесь использовано соотношение (2):

$$\vec{\nabla}\vec{D} = \vec{\nabla}\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = 0$$

Таким образом, приходим к ***волновому уравнению*** для ***E***: .

$$\nabla^2\vec{E} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad (5)$$

и аналогично для напряженности магнитного поля ***H***:

$$\nabla^2\vec{H} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0 \qquad (6)$$

Коэффициент перед вторыми производными по времени определяет скорость распространения волны:

$$\mathrm{v} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

где c – скорость распространения электромагнитной волны в вакууме ($\varepsilon = \mu = 1$)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3\cdot 10^8 \ \text{м}/c$$

Равенство скорости распространения ЭМВ скорости распространения света в вакууме позволило Максвеллу предположить, что свет есть вид электромагнитных волн.
Если волна от точечного источника изотропна, то решение волнового уравнения нужно искать в виде

$$E = E\,(r, t),$$

где r – расстояние от точечного источника, принятого за начало координат.

В этом случае одним из простейших решений является бегущая ***гармоническая расходящаяся сферическая*** волна вида

$$E(r,t) = \frac{E_0}{r}\cos\left(\omega t - kr + \varphi_0\right)$$

Плоские ЭМВ волны

Если значения E и H ***зависят только от одной из координат***, например, x, то простейшим решением волнового уравнения будет **бегущая** (вдоль оси x) **плоская гармоническая** волна

$$E(x,t) = E_0 \cos\left(\omega t \pm kx + \varphi_0\right) \qquad (7)$$

При произвольной ориентации декартовых осей плоская волна, бегущая в направлении, определяемом направлением волнового вектора ***k***, есть:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos\left(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0\right)$$

Анализ свойств плоской ЭМВ с помощью уравнений Максвелла показывает, что ЭВМ обладают следующими важными свойствами:

- ✓ Вектора ***E***, ***B***$=\mu\mu_0$***H*** и ***k*** взаимно ортогональны и образуют правовинтовую тройку векторов, т.е. ЭВМ ***поперечны***.
- ✓ Между напряженностью электрического поля и индукцией магнитного поля волны в вакууме существует прямая связь:

$$|\mathbf{E}| = c\,|\mathbf{B}|\,.$$

Для волны в изотропном веществе :

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\left|\vec{E}\right| = \sqrt{\mu\mu_0}\left|\vec{H}\right| \qquad (8)$$

E и ***B*** **в электромагнитной волне изменяются *в одинаковой фазе*, т.е. одновременно достигают максимальных и нулевых значений**.
Докажем это.

Если E и H зависят только от x, из (1) и (3) следует соответственно:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad (9)$$

Полагая:

$$E_y(x,t) = E_{0y} \cos\left(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1\right) \quad \left(\omega_1 / k_1 = \mathrm{v}\right)$$

$$H_z(x,t) = H_{0z} \cos\left(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2\right) \quad \left(\omega_2 / k_2 = \mathrm{v}\right)$$

Из (9) получим:

$$k_1 E_{0y} \sin\left(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1\right) = \mu\mu_0 \omega_2 H_{0z} \sin\left(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2\right)$$

$$k_2 H_{0z} \sin\left(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2\right) = \varepsilon\varepsilon_0 \omega_1 E_{0y} \sin\left(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1\right)$$

Отсюда:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega, \quad k_1 = k_2 = k,$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi \quad - \text{т.е. колебания } E \text{ и } H \text{ синфазны,}$$

$$\text{при этом:}$$

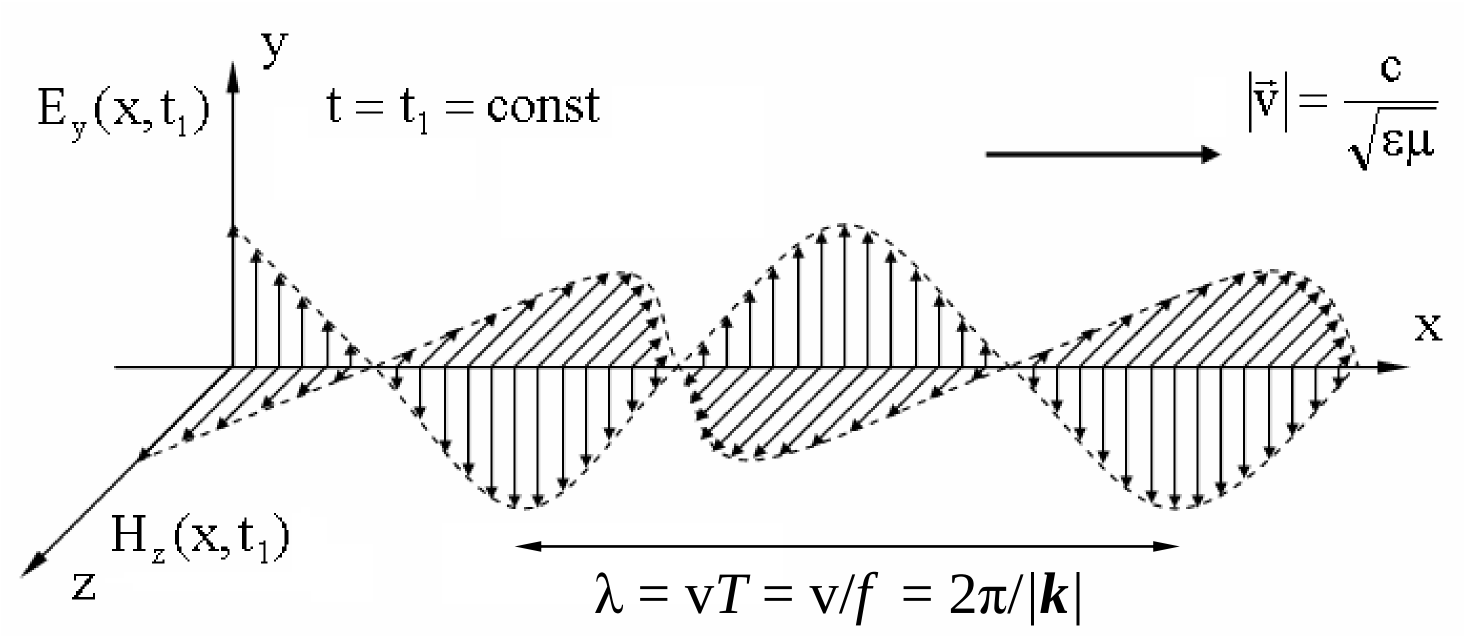
$$\frac{kE_{0y}}{kH_{0z}} = \frac{\mu\mu_0\omega H_{0z}}{\varepsilon\varepsilon_0\omega E_{0y}} \rightarrow \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_{0y} = \sqrt{\mu\mu_0}H_{0z}$$

Если бы мы рассмотрели волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси x, то E_y и H_z *изменялись бы в противофазе*:

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}E_y = -\sqrt{\mu\mu_0}H_z$$

Однако по-прежнему оба вектора, ***E*** и ***H***, составляли бы правовинтовую систему с направлением распространения волны.

Аналогичные выводы можно сделать и о компонентах E_z и H_y.



v – *фазовая скорость волны,*
T - *период колебаний* ***E*** *и* ***B****,*
f – *частота колебаний,*
k – *волновой вектор*

Энергия ЭМВ

С распространением ЭМВ связан перенос энергии. Объемная плотность ЭМ энергии:

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$$

С учетом соотношения (8) $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\left|\vec{E}\right| = \sqrt{\mu\mu_0}\left|\vec{H}\right|$

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2 = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}EH = \frac{EH}{\mathrm{v}}$$ (v – скорость волны)

Плотность потока энергии, как и в случае упругой волны дается соотношением

$$S = w \cdot \mathrm{v} = EH$$

Направление потока энергии совпадает с направлением векторного произведения [***E*** , ***H***] || ***k***, модуль которого есть EH . Поэтому *вектор потока* ЭМ энергии можно определить как

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$$ - ***вектор Пойнтинга***

Для ***бегущей плоской*** ЭМВ

$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_m \cos(\omega t - kx)$ и $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_m \cos(\omega t - kx)$

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

Плотность потока энергии:

$$S = w \cdot \mathrm{v} = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 / \mu\mu_0}\, E_m^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

Интенсивность волны (среднее по времени значение плотности потока энергии, переносимой волной)

$$I = \left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 / \mu\mu_0}\, E_m^2 / 2 \propto E_m^2$$

Эффект Доплера для ЭМВ

Продольный эффект

f_0 - частота волн, испускаемых источником

f - частота волн, воспринимаемых приемником

v – скорость источника по отношению к приемнику:

при приближении источника v < 0,

при удалении v > 0.

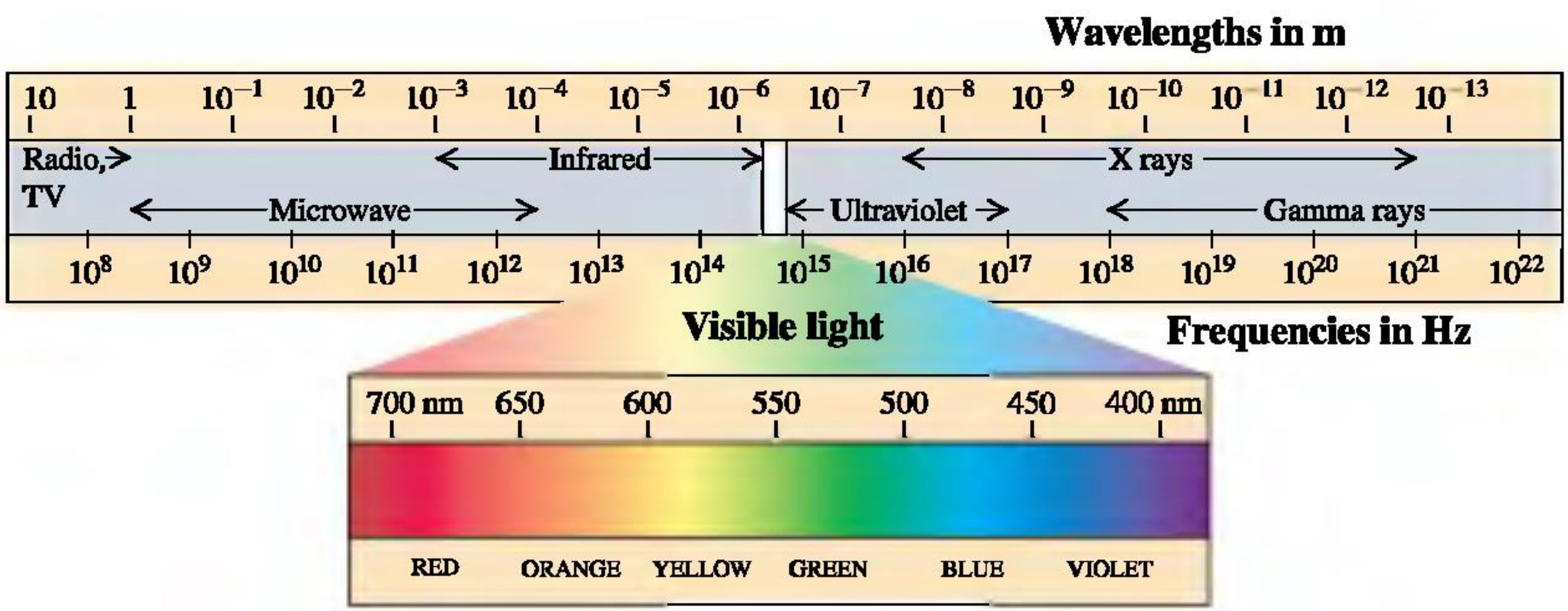
$$f = f_0 \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

Поперечный эффект

Наблюдается, когда вектор относительной скорости направлен перпендикулярно прямой, соединяющей приемник и источник (например, при движении источника вокруг приемника по окружности)

$$f = f_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Шкала ЭМВ



Wavelengths in m
10
1
10 −1
10 −2
10 −3
10 −4
10 −5
10 −6
10 −7
10 −8
10 −9
10 −10
10 −11
10 −12
10 −13
Radio, TV
Infrared
X rays
Microwave
Ultraviolet
Gamma rays
10^8
10^9
10^10
10^11
10^12
10^13
10^14
10^15
10^16
10^17
10^18
10^19
10^20
10^21
10^22
Visible light
Frequencies in Hz
700 nm
650
600
550
500
450
400 nm
RED
ORANGE
YELLOW
GREEN
BLUE
VIOLET

Световые волны

Воздействие света на вещество связано, главным образом, с отличием от нуля вектора ***E*** световой волны, его называют ***световым вектором***.
Среда с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon \neq 1$ меняет фазовую скорость ЭМВ.

Показатель преломления среды n

$$n = c/\mathrm{v} = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0/\varepsilon_0\mu_0} = \sqrt{\varepsilon} \quad (\mu = 1)$$

c – скорость света в вакууме, v – скорость света в среде.

Поскольку $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, то и n и v также зависят от ω.

Зависимость n (или v) от ω или λ называют ***дисперсией света***. Длина волны света в веществе связана с его длиной волны в вакууме λ_0 соотношением

$$\lambda = \frac{\mathrm{v}}{\nu} = \frac{c}{n\nu} = \frac{\lambda_0}{n} \qquad (\nu \text{ - частота волны})$$

Световые волны

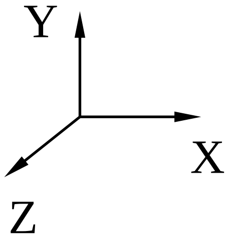
Интенсивность световой волны

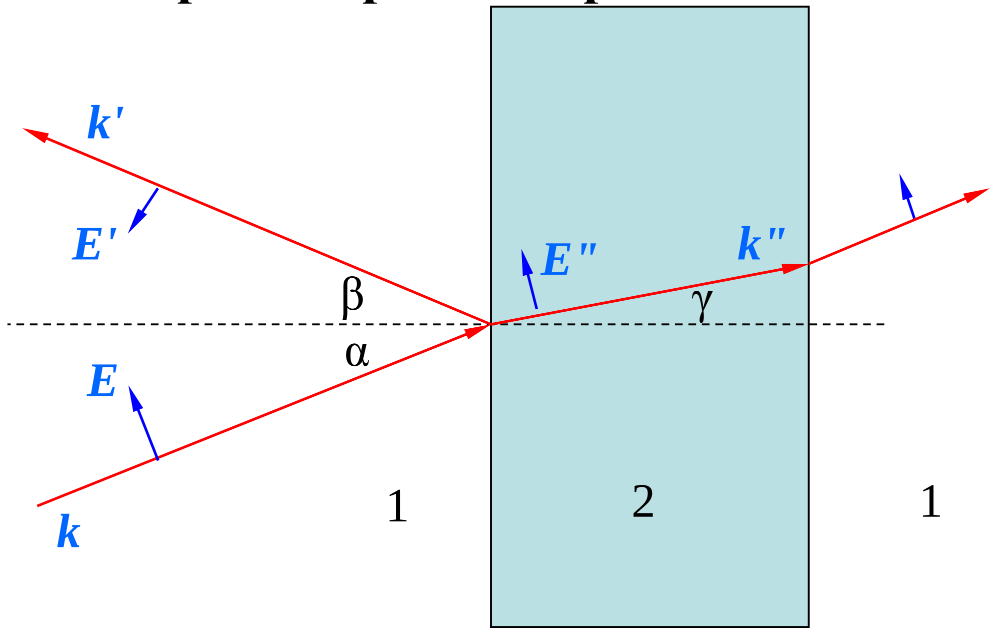
(модуль среднего по времени значения плотностипотока энергии)

$$I = \left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E_m^2 \approx nE_m^2$$

Линии, ортогональные волновым поверхностям, называют световыми *лучами*. Усредненный вектор Пойнтинга <***S***> в данной точке пространства направлен по касательной к лучу, т.е. совпадает с направлением вектора ***k*** (в изотропных средах).

ЭМВ на границе раздела сред





Законы ***отражения*** и ***преломления*** света:

$$\angle\alpha = \angle\beta, \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\left(\dfrac{c}{v_2}\right)}{\left(\dfrac{c}{v_1}\right)} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

Частоты падающей, отраженной и преломленной волн ***<u>равны</u>*****.**

При нормальном падении света (α = β = γ = 0) света на границу примем за направление распространения падающей волны ось OX (***k*** || OX) и пусть ***E*** || OY, ***H*** || OZ.

Из условия непрерывности тангенциальных составляющих ***E*** и ***H*** на границе раздела:

$$\begin{aligned} E_y + E'_y &= E''_y, \\ H_z + H'_z &= H''_z \end{aligned} \qquad (1)$$

С учетом того, что

$$H_z \sim \sqrt{\varepsilon_1} E_y = n_1 E_y, \;\; H''_z \sim n_2 E''_y, \quad H'_z \sim -n_1 E'_y \;\; \left(k' \uparrow\uparrow -x\right)$$

из системы (1) получим (в векторном виде):

$$\vec{E}' = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \vec{E}, \qquad \vec{E}'' = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \vec{E}$$

Выводы

- Вектор преломленной волны $\boldsymbol{E}''$ всегда сонаправлен с вектором $\boldsymbol{E}$, т.е. оба вектора меняются синфазно и при прохождении волны через границу раздела фаза волны не испытывает скачка.

- Если $n_1 > n_2$, т.е. свет переходит из оптически более плотной в оптически менее плотную среду (например, из стекла в воздух), то вектор отраженной волны $\boldsymbol{E}'$ сонаправлен $\boldsymbol{E}$.

- При переходе из оптически менее плотной среды в оптически более плотную $n_1 < n_2$, направление вектора $\boldsymbol{E}'$ на границе раздела оказывается противоположным направлению ***E* т.е. при отражении световой волны от оптически более плотной среды ее фаза скачком изменяется на π**.

Выводы

Коэффициент отражения света от границы раздела при нормальном падении

$$\rho = \frac{I'}{I} = \frac{n_1 E_m'^2}{n_1 E_m^2} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

Коэффициент пропускания света прозрачным (непоглощающим) свет веществом

$$\tau = \frac{I''}{I} = \frac{n_2 E_m''^2}{n_1 E_m^2} = \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}, \quad \text{при этом} \quad \rho + \tau = 1$$