Механические волны

Бегущие

Перенос энергии в направлении распространения волны

Стоячие

Перераспределение энергии между точками среды

Стоячие волны

При распространении в упругой среде нескольких волн происходит их наложение, причем колебания частиц среды оказываются векторной суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой волны в отдельности. Это называют *принципом суперпозиции* волн.

Рассмотрим важный частный случай: пусть две плоские гармонические волны с **одинаковыми частотами** и **амплитудами**, распространяются в противоположных направлениях вдоль оси X.

$$\xi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx) \qquad \xi_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx)$$

Результирующее смещение частиц среды:

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = 2A\cos kx \cdot \cos\omega t = A_{cm}\cos kx \cdot \cos\omega t \ (1)$$

Это есть уравнение **стоячей** волны. ***Амплитуда колебаний*** частиц в стоячей волне $|A_{cm}\cos kx|$ в отличие от бегущей волны ***зависит*** от x.

В точках, где $|\cos kx| = 1$ (т.е. $kx = \pm \pi n$) имеем максимумы, или **пучности** волны, а где $\cos kx = 0$ ($kx = \pm \pi(n+½)$) минимумы, или **узлы** стоячей волны.

Максимальная амплитуда (пучность) достигается при x:

$$x_{\text{пучн}} = \pm n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 0,1,2,\ldots) \quad (2)$$

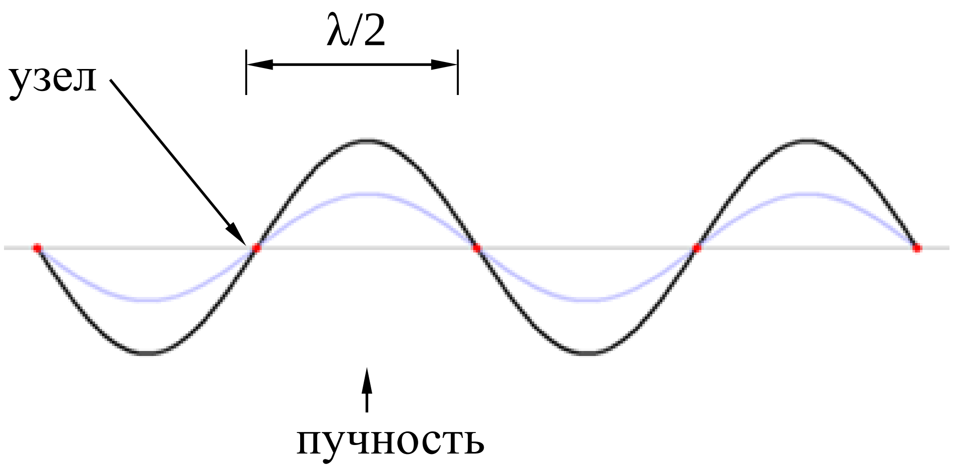
Амплитуда равна нулю (узел) достигается при x:

$$x_{\text{узл}} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad (n = 0,1,2,\ldots) \quad (3)$$

Период $|\cos\ kx|$ равен π, поэтому расстояние Δx между соседними узлами или пучностями равно:

$$k(x+\Delta x)-kx=\pi=k\Delta x=\frac{2\pi}{\lambda}\Delta x\Rightarrow\Delta x=\frac{\lambda}{2}$$

(Это прямо следует также из (2) и (3).)



Между соседними узлами все частицы колеблются синфазно, при переходе через узел фаза колебания меняется на π. Никакой передачи движения из одной области к другой, и соответственно перетекания энергии через узлы не происходит (амплитуда колебаний в узлах – ноль). Таким образом, нет распространения возмущения вдоль оси X. Поэтому возмущение, описываемое формулой (1) называют **стоячей** волной.

Энергия стоячей волны

Кинетическая энергия волны определяется квадратом скорости движения частиц среды, **потенциальная** - квадратом относительной деформации среды.
Скорость смещения частиц среды:

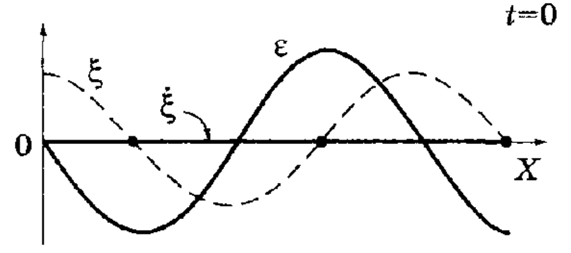
$$\dot{\xi}(x,t) = -A_{cm}\omega \cos kx \cdot \sin \omega t$$

Относительная деформация среды:

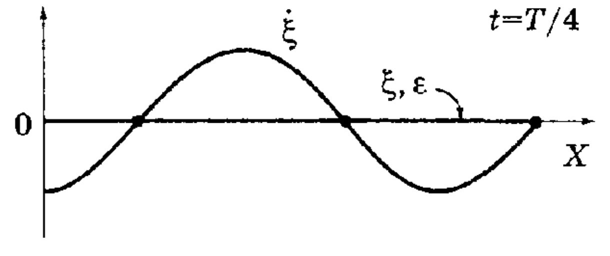
$$\varepsilon(x,t) = \partial\xi(x,t)/\partial x = -A_{cm}k \sin kx \cdot \cos \omega t$$

Обе величины, скорость и деформация, тоже стоячие волны, сдвинутые по фазе на π/2 как в пространстве, так и во времени.

Энергия стоячей волны превращается то полностью в потенциальную,



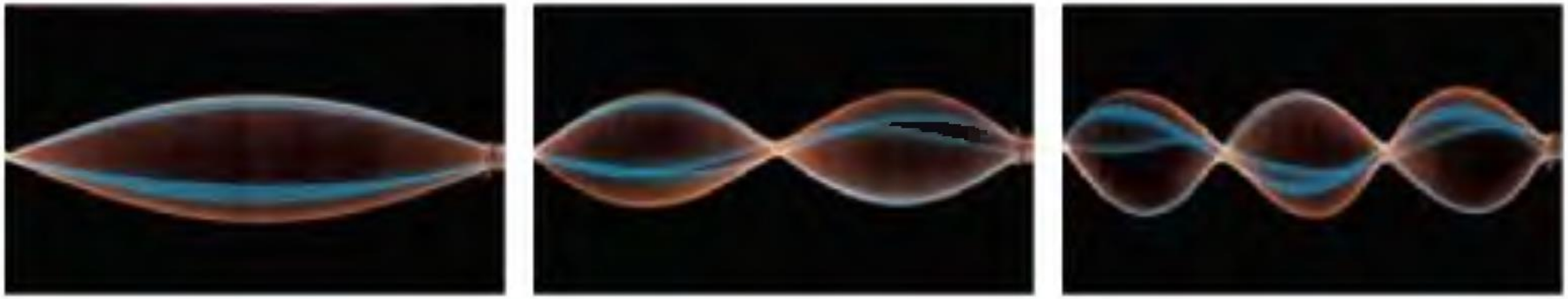
то полностью в кинетическую



В процессе колебаний энергия перетекает от каждого узла к соседним с ним пучностям и обратно. **Средний же по времени поток энергии в любом сечении стоячей волны равен нулю**.

Колебания закрепленной струны

В натянутой струне при возбуждении поперечного возмущения устанавливается стационарное движение, характеризуемое вполне определенными частотами. Это связано с необходимостью выполнения на закрепленных концах струны определенных **граничных условий**: в них смещение частиц $\xi\ (x,\ t) \equiv 0$. Другими словами, если в струне возбуждается стоячая волна, то ее концы являются узлами. В этом случае на длине струны l должно укладываться целое число длин полуволн:



$$l = \frac{\lambda}{2}n \ \Rightarrow\ \lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad n = 1,2,... \quad (5)$$

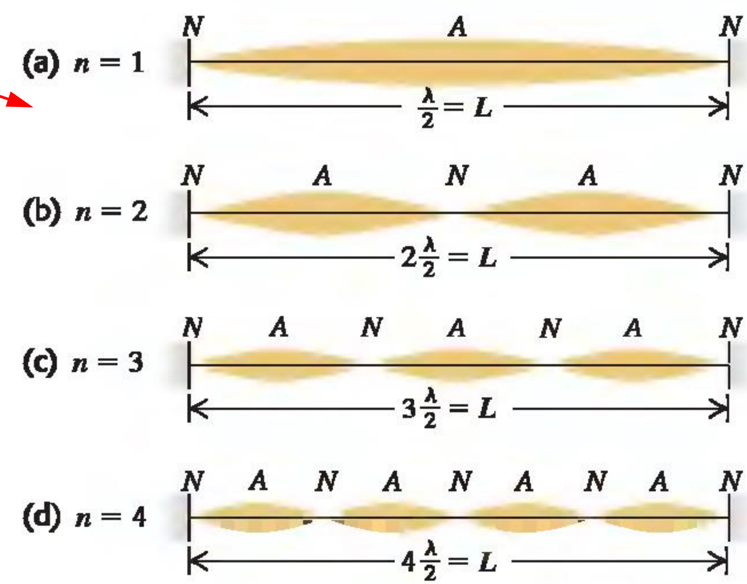
Соответственно возможные частоты колебаний:

$$\upsilon_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\text{v}}{\lambda_n} = \frac{\text{v}}{2l} n \quad (6)$$

Частоты (6) называют собственными частотами струны. Частота, соответствующая $n = 1$, называется **основной**, остальные – **обертонами**. Гармонические колебания с частотами (6) называют **собственными колебаниями**, или **гармониками**. В общем случае колебания струны есть суперпозиция различных гармоник.

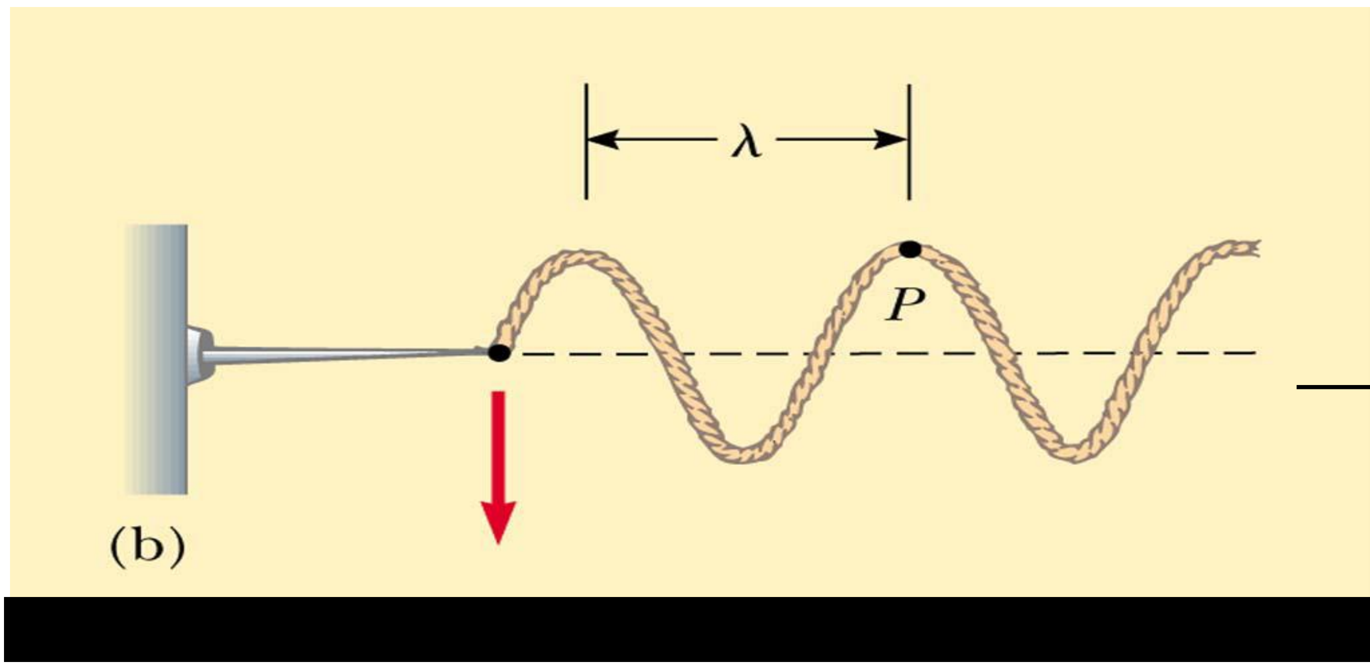
Нормальная мода колебательной системы есть движение, в котором все частицы системы колеблются по синусоидальному закону с одинаковой частотой. В закрепленной с двух сторон струне, каждая из длин волн (2) соответствует возможной нормальной моде колебаний.

Примеры четырех нормальных мод струны. Одиночный гармонический осциллятор имеет только одну нормальную моду и одну собственную частоту. Струна, закрепленная с двух сторон, имеет бесконечное число нормальных мод, поскольку состоит из огромного (фактически бесконечного) числа частиц.



Эффект Доплера

Если в жидкой или газообразной среде приемник и/или источник волны движутся относительно среды, то частота волн, воспринимаемых приемником f отличается от частоты колебаний, генерируемых источником f_0. Это явление называется эффектом Доплера.

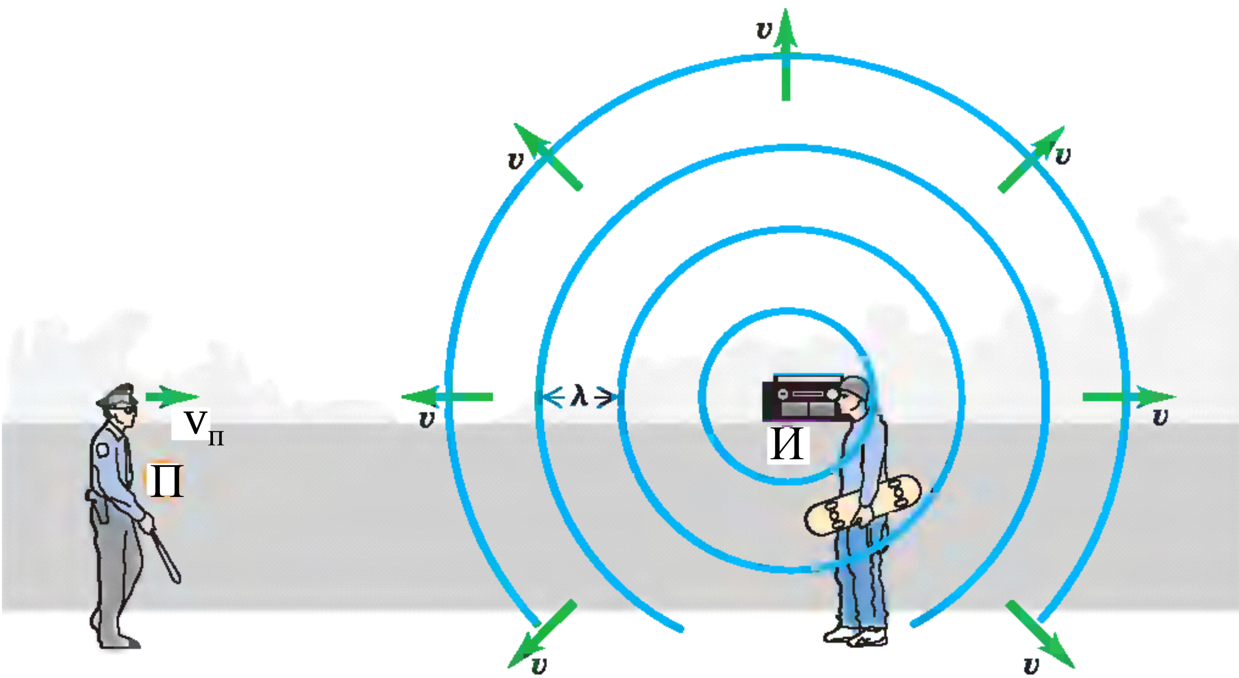


$\longrightarrow v$

$$\frac{\mathrm{v}}{\lambda} = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{v}T} = f$$

Эффект Доплера

Если в жидкой или газообразной среде приемник и/или источник волны движутся относительно среды, то частота волн, воспринимаемых приемником f отличается от частоты колебаний, генерируемых источником f_0. Это явление называется эффектом Доплера.



Пусть источник волн (звука) покоится, а приемник движется ему навстречу со скоростью $v_п$. Скорость распространения волны – v. Длина звуковой волны $\lambda = v / f_0$

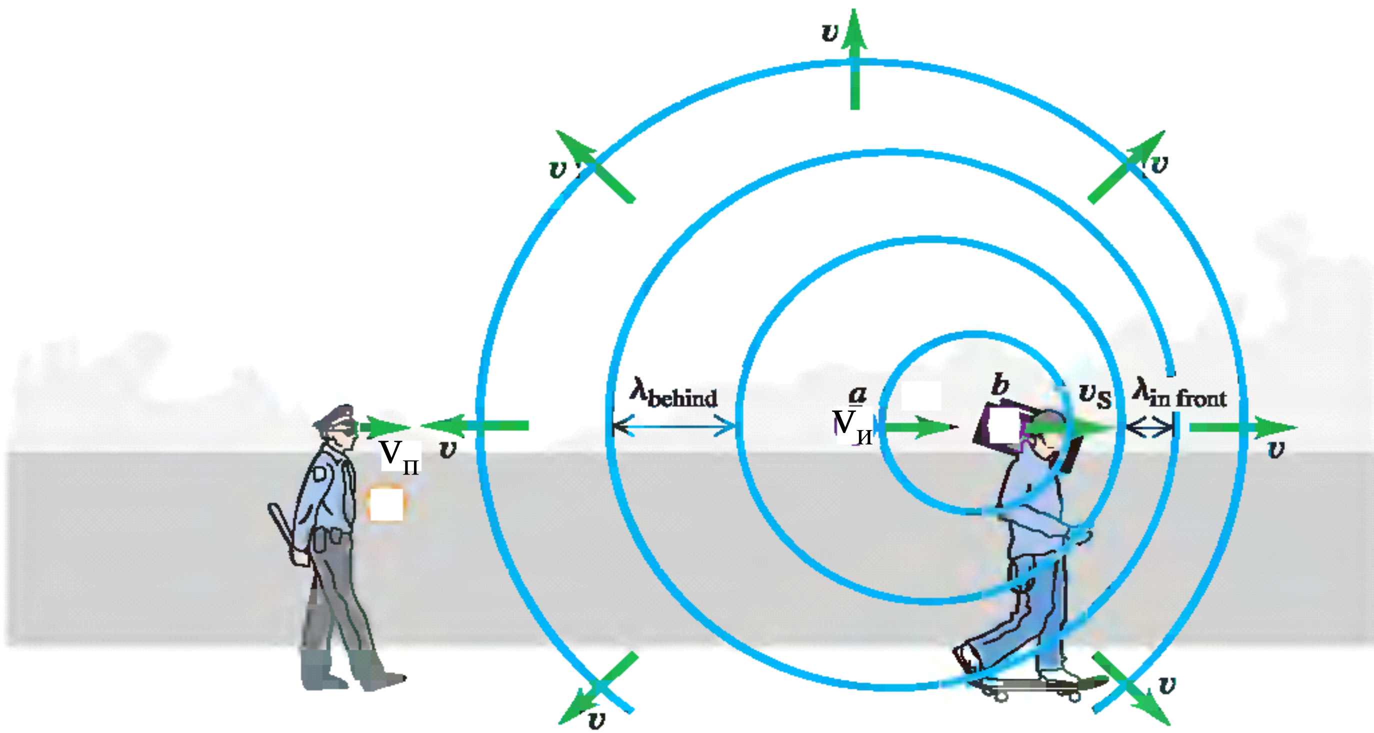
На рисунке гребни звуковой волны показаны синими линиями. Расстояние между соседними гребнями равно λ. Гребни волны приближаются к приемнику (слушателю) со скоростью $v + v_п$.

Частота, с которой гребни будут подходить к приемнику (т.е. частота, воспринимаемая слушателем):

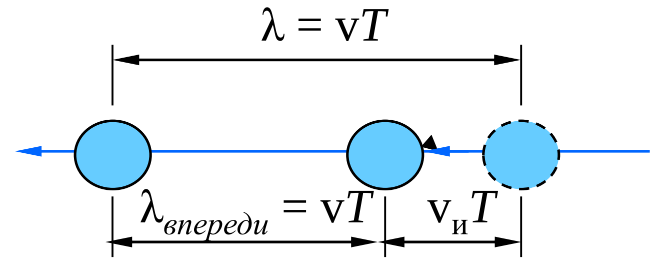
$$f_n = \frac{v + v_n}{\lambda} = \frac{v + v_n}{v/f_0} \quad \text{или}$$

$$f_n = \left(\frac{v + v_n}{v}\right) f_0 = \left(1 + \frac{v_n}{v}\right) f_0 > f_0$$

Пусть далее источник волны также движется в направлении от приемника со скоростью $v_и$. Скорость волны в среде, по-прежнему, v. Она зависит только от свойств среды. Но длина волны больше не равна v/f_0. Дело в том, что время в течение которого источник испускает два последовательных гребня волны есть период колебаний $T = 1/f_0$. Но за это время волна пройдет расстояние $vT = v/f_0$ и одновременно источник сместится на расстояние $v_и T = v_и/f_0$. Длина волны есть расстояние между двумя последовательными гребнями волны. Как видно из рисунка это расстояние различно впереди и позади источника.



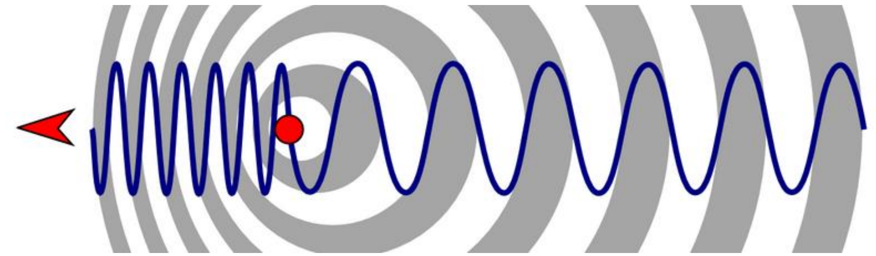
Впереди источника:



$$\lambda_{\text{впереди}} = vT - v_{\text{и}}T = \frac{v}{f_0} - \frac{v_{\text{и}}}{f_0} = \frac{v - v_{\text{и}}}{f_0}$$

Позади источника:

$$\lambda_{\text{позади}} = vT + v_{\text{и}}T = \frac{v}{f_0} + \frac{v_{\text{и}}}{f_0} = \frac{v + v_{\text{и}}}{f_0}$$



Чтобы найти частоту звука, воспринимаемую слушателем, подставим эту длину волны в ранее полученное выражение:

$$f_{\text{п}} = \frac{v + v_{\text{п}}}{\lambda_{\text{позади}}} = \frac{v + v_{\text{п}}}{\left(v + v_{\text{и}}\right)/ f_0} = \frac{v + v_{\text{п}}}{v + v_{\text{и}}} f_0 \quad (8)$$

Здесь скорости **положительные**, если **приемник** движется **к источнику** волн, и **источник** движется в ту же сторону, т.е. **от приемника**. При изменении направлений меняются и знаки соответствующих скоростей.

Если направления скоростей движения источника и приемника колебаний не совпадают с линией, соединяющей источник и приемник, в формуле (8) следует использовать проекции скоростей на линию, соединяющую источник и приемник :