



Ecole royale militaire

Bruxelles — Belgique

# ES311

## Signaux et systèmes

Prof. Dr Ir Xavier Neyt  
Professeur

24 octobre 2018



---

# Table des matières

---

<b>Préface</b>	<b>14</b>
<b>I Les systèmes linéaires, continus et stationnaires</b>	<b>17</b>
<b>1 Classification des signaux</b>	<b>19</b>
1.1 Définition . . . . .	19
1.2 Représentation mathématique des signaux . . . . .	19
1.2.1 Signaux continus . . . . .	20
1.2.2 Signaux discrets . . . . .	20
1.3 Classification par énergie et puissance moyenne . . . . .	20
1.4 Quelques signaux particuliers . . . . .	22
1.4.1 L'impulsion de Dirac . . . . .	22
1.4.2 L'échelon unité . . . . .	22
<b>2 Les systèmes linéaires</b>	<b>23</b>
2.1 Définitions . . . . .	23
2.2 Systèmes linéaires à une entrée et une sortie . . . . .	24
2.2.1 Définitions . . . . .	24
2.3 Produit de convolution . . . . .	25
2.3.1 Hypothèse de stationnarité - ( <i>shift invariance</i> ) . . . . .	25
2.3.2 Produit de convolution . . . . .	25
2.4 Fonctions propres et valeurs propres d'un système linéaire stationnaire . . . . .	26
<b>3 La transformée de Laplace</b>	<b>29</b>
3.1 Définition . . . . .	29

3.2	Domaine de convergence de la transformée de Laplace . . . . .	30
3.2.1	Le signal $x(t)$ est à support borné . . . . .	30
3.2.2	Le signal $x(t)$ est à support unilatéral à droite . . . . .	30
3.2.3	Le signal $x(t)$ est à support unilatéral à gauche . . . . .	32
3.2.4	Le signal $x(t)$ est à support bilatéral . . . . .	33
3.3	Détermination des bornes $\sigma_{\text{inf}}$ et $\sigma_{\text{sup}}$ . . . . .	34
3.4	fonctions singulières et leur transformée de Laplace . . . . .	36
3.4.1	L'échelon unitaire : $\mathcal{U}(t)$ . . . . .	36
3.4.2	L'impulsion de Dirac $\delta(t - t_0)$ en $t_0$ . . . . .	36
3.4.3	La rampe unitaire . . . . .	37
3.5	Propriétés de la transformée de Laplace . . . . .	38
3.5.1	Linéarité . . . . .	38
3.5.2	Transformée de Laplace d'une dérivée . . . . .	38
3.5.3	Transformée de Laplace d'une intégrale . . . . .	38
3.5.4	Changement d'échelle . . . . .	39
3.5.5	Amortissement . . . . .	39
3.5.6	Décalage ("shift") . . . . .	40
3.5.7	Multiplication par $t$ . . . . .	40
3.5.8	Transformée d'une fonction périodique . . . . .	41
3.5.9	Transformée du produit de convolution . . . . .	41
3.5.10	Théorèmes de Tauber ou théorèmes des valeurs initiale et finale . . . . .	42
	3.5.10.1 Théorème de la valeur initiale . . . . .	42
	3.5.10.2 Théorème de la valeur finale . . . . .	42
3.6	Exemples . . . . .	43
3.6.1	Circuit RLC . . . . .	43
3.6.2	fonction sinusoïdale . . . . .	43
3.6.3	Fonction créneau . . . . .	44
3.6.4	Fonction triangulaire . . . . .	45
3.6.5	Fonction sinus redressée . . . . .	46
3.7	Transformée de Laplace inverse . . . . .	47
3.7.1	Théorème des résidus ou théorème de Cauchy . . . . .	47
3.7.2	Lemme de Jordan . . . . .	48
3.7.3	Calcul de l'intégrale de Bromwich-Wagner par la méthode des résidus . . . .	49
3.7.4	Extension de la méthode . . . . .	52
3.7.5	Calcul du résidu d'une fonction $Z(s)$ pour un pôle $s = a$ d'ordre $m$ : Rappel	52

3.7.6	Calcul de l'intégrale de Bromwich-Wagner par décomposition en fractions rationnelles simples . . . . .	53
3.7.7	Exemples de transformée de Laplace inverse . . . . .	53
3.7.7.1	Transformée inverse de la fonction $X(s) = \frac{2a}{a^2-s^2}$ . . . . .	53
3.7.7.2	Transformée inverse de la fonction $X(s) = \frac{2a}{a^2-s^2} e^{-st_0}$ . . . . .	56
<b>4</b>	<b>La transformée de Fourier</b>	<b>59</b>
4.1	Définition . . . . .	59
4.2	Conditions d'existence . . . . .	60
4.3	Propriétés de la transformée de Fourier . . . . .	60
4.3.1	Propriétés de symétrie . . . . .	60
4.3.2	Transformée de Fourier d'une dérivée . . . . .	61
4.3.3	Transformée de Fourier d'une intégrale . . . . .	61
4.3.4	Changement de signe . . . . .	62
4.3.5	Réciprocité . . . . .	62
4.3.6	Transformée de Fourier de fonctions complexes conjuguées . . . . .	62
4.3.7	Décalage (shift) . . . . .	62
4.3.8	Modulation . . . . .	63
4.3.9	Produit de convolution . . . . .	63
4.3.10	Théorème de Parseval . . . . .	63
4.4	Transformée de Fourier inverse . . . . .	63
4.5	Exemples . . . . .	64
4.6	Conclusion . . . . .	76
<b>5</b>	<b>La stabilité des systèmes linéaires et stationnaires</b>	<b>79</b>
5.1	Définition de la stabilité au sens du critère BIBO . . . . .	79
5.2	Condition nécessaire et suffisante de stabilité au sens du critère BIBO . . . . .	79
5.3	Condition nécessaire et suffisante de stabilité . . . . .	79
<b>6</b>	<b>L'analyse harmonique des systèmes linéaires et stationnaires</b>	<b>81</b>
6.1	La réponse en fréquence d'un système causal stable en régime . . . . .	81
6.1.1	Introduction . . . . .	81
6.2	Représentations de la transmittance isochrone . . . . .	82
6.3	Courbes de Bode . . . . .	82
6.4	Application . . . . .	84
6.5	Représentation asymptotique des courbes de gain et de phase . . . . .	85

6.5.1	Décomposition de $Y(s)$ en facteurs . . . . .	85
6.5.2	Construction des courbes asymptotique de BODE de structures élémentaires	85
6.5.2.1	Constante ( $H(s) = K$ ) . . . . .	85
6.5.2.2	Dérivateur ( $H(s) = s$ ) . . . . .	86
6.5.2.3	Intégrateur ( $H(s) = 1/s$ ) . . . . .	86
6.5.2.4	Facteur du premier ordre ( $H(s) = (\tau s + 1)$ ) . . . . .	87
6.5.2.5	Diviseur du premier ordre ( $H(s) = 1/(\tau s + 1)$ ) . . . . .	88
6.5.2.6	Facteur quadratique ( $H(s) = \tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1$ ) . . . . .	88
6.5.2.7	Diviseur quadratique ( $H(s) = (\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1)^{-1}$ ) . . . . .	89
<b>II</b>	<b>Les signaux déterministes discrets</b>	<b>91</b>
<b>7</b>	<b>Les systèmes linéaires discrets</b>	<b>93</b>
7.1	Introduction . . . . .	93
7.1.1	Signaux . . . . .	93
7.1.2	Signaux discrets . . . . .	93
7.2	Exemples de signaux discrets usuels . . . . .	94
7.2.1	La fonction delta de Kronecker . . . . .	94
7.2.2	L'échelon unité . . . . .	95
7.2.3	Suite exponentielle . . . . .	95
7.2.4	Suite sinusoïdale . . . . .	95
7.3	Signaux discrets périodiques . . . . .	96
7.4	Energie d'un signal discret . . . . .	96
7.5	Opérations sur des signaux discrets . . . . .	96
7.6	Systèmes linéaires et stationnaires (Linear Shift-Invariant Systems) . . . . .	97
7.6.1	Systèmes linéaires . . . . .	97
7.6.2	Sommation de Duhamel . . . . .	97
7.6.3	Systèmes linéaires stationnaires . . . . .	98
7.6.4	Propriétés . . . . .	98
7.6.5	Exemple . . . . .	99
7.7	Suites propres et valeurs propres d'un système linéaire stationnaire . . . . .	100
<b>8</b>	<b>La transformée en <math>z</math></b>	<b>103</b>
8.1	Définition . . . . .	103
8.2	Condition suffisante de convergence . . . . .	104
8.3	Etude des différents types de suite $x(n)$ . . . . .	104

8.3.1	Suites à support borné (Finite length sequences) . . . . .	104
8.3.2	Suites à support unilatéral à droite UD (Right-sided sequences) . . . . .	105
8.3.3	Suites à support unilatéral à gauche UG (Left-sided sequences) . . . . .	106
8.3.4	Suites à support bilatéral . . . . .	107
8.4	Détermination de $r_{\text{inf}}$ et $r_{\text{sup}}$ . . . . .	108
8.5	La transformée inverse . . . . .	109
8.5.1	Théorème de Cauchy . . . . .	109
8.5.2	Transformée en $z$ inverse . . . . .	109
8.5.3	Evaluation de la transformée inverse . . . . .	109
8.6	Propriétés de la transformée en $z$ . . . . .	111
8.7	Transformée en $z$ de quelques suites particulières . . . . .	113
8.8	Condition de causalité . . . . .	113
<b>9</b>	<b>La transformée de Fourier d'une suite</b>	<b>115</b>
9.1	Définition . . . . .	115
9.2	Réponse en fréquence d'un système linéaire invariant . . . . .	116
9.3	Transformée de Fourier inverse d'une suite . . . . .	117
9.3.1	$X(e^{j\omega})$ est une fonction périodique en $\omega$ . . . . .	117
9.4	Propriétés . . . . .	117
9.5	Quelques transformées de Fourier usuelles . . . . .	119
<b>10</b>	<b>L'échantillonnage et la reconstruction d'un signal</b>	<b>121</b>
10.1	Introduction . . . . .	121
10.2	La transformée de Laplace d'un signal échantillonné . . . . .	121
10.3	Interprétation fréquentielle - Théorème de Shannon . . . . .	122
10.3.1	Cas général . . . . .	122
10.3.2	Signal réel en bande de base . . . . .	124
10.3.3	Signal modulé . . . . .	124
10.3.4	De la nécessité d'un filtre anti-repliement . . . . .	125
10.4	Reconstruction d'un signal à temps continu . . . . .	125
10.4.1	Introduction . . . . .	125
10.4.2	Reconstruction parfaite – Interpolateur idéal . . . . .	125
10.4.3	Reconstruction d'un signal par un bloqueur . . . . .	127
10.5	Conservation de la convolution . . . . .	128
<b>11</b>	<b>La stabilité BIBO</b>	<b>131</b>

11.1	Définition de la stabilité au sens du critère BIBO . . . . .	131
11.2	Condition nécessaire et suffisante de stabilité au sens du critère BIBO . . . . .	131
11.3	Condition nécessaire et suffisante de stabilité . . . . .	131
11.4	Exemples . . . . .	133
<b>12</b>	<b>Les séries de Fourier continues et discrètes</b>	<b>135</b>
12.1	Développement en série de Fourier d'une fonction périodique . . . . .	135
12.2	Transformée de Fourier d'une suite périodique . . . . .	138
12.3	Les séries de Fourier discrètes ou DFS . . . . .	140
12.3.1	Définition . . . . .	140
12.3.2	Forme matricielle de la transformée DFS . . . . .	141
12.3.3	Propriétés des transformées DFS de suites périodiques de même période $N$	142
12.3.4	La convolution cyclique . . . . .	142
12.3.5	Forme matricielle de la convolution cyclique . . . . .	143
12.3.6	Interprétation de la convolution cyclique . . . . .	144
12.3.7	Echantillonnage de la transformée en $z$ d'une suite suivant le cercle de rayon 1	144
<b>13</b>	<b>La transformée de Fourier discrète</b>	<b>149</b>
13.1	Définition . . . . .	149
<b>14</b>	<b>Caractéristiques de systèmes discrets</b>	<b>151</b>
14.1	Introduction . . . . .	151
14.2	Représentation . . . . .	151
14.2.1	Réponse impulsionnelle . . . . .	151
14.2.2	Fonction de transfert . . . . .	151
14.2.3	Transmittance . . . . .	152
14.2.4	Equations aux différences . . . . .	152
14.2.4.1	Introduction . . . . .	152
14.2.4.2	Moyenne mobile . . . . .	152
14.2.4.3	Système autorégressif . . . . .	152
14.2.4.4	Systèmes ARMA . . . . .	153
14.2.4.5	Exemple . . . . .	153
14.3	Implémentation . . . . .	153
14.3.1	Convolution dans le domaine temporel . . . . .	153
14.3.2	Implementation au moyen de la transformée de Fourier discrète . . . . .	154
14.3.3	Implementation de l'équation aux différences . . . . .	154



14.4 Propriétés . . . . .	154
14.4.1 Phase linéaire - délai de groupe . . . . .	154
<b>III Les signaux stochastiques</b>	<b>157</b>
<b>15 Les signaux stochastiques continus</b>	<b>159</b>
15.1 Variables aléatoires – Rappels . . . . .	159
15.2 Fonctions aléatoires . . . . .	160
15.2.1 Fonctionnelles certaines relatives à une fonction aléatoire $X(t)$ . . . . .	161
15.2.1.1 Espérance mathématique (moment du 1er ordre) . . . . .	161
15.2.1.2 Autocovariance (moment centré du 2d ordre) . . . . .	161
15.2.1.3 Autocorrélation (moment <i>non</i> centré du 2d ordre) . . . . .	161
15.2.1.4 Covariance mutuelle de deux fonctions aléatoires . . . . .	161
15.2.2 Opérations élémentaires sur les fonctions aléatoires . . . . .	162
15.2.3 Stationnarité des fonctions aléatoires . . . . .	162
15.2.3.1 Stationnarité au sens strict . . . . .	162
15.2.3.2 Stationnarité au sens faible . . . . .	162
15.2.4 Bruits blancs . . . . .	163
15.2.4.1 Bruit blanc . . . . .	163
15.2.4.2 Bruit blanc généralisé . . . . .	164
15.3 Ergodicité . . . . .	164
15.3.1 Continuité d’une fonction aléatoire . . . . .	164
15.3.1.1 Convergence d’une suite de variables aléatoires . . . . .	164
15.3.1.2 Convergence d’une suite de fonctions aléatoires . . . . .	164
15.3.2 Moyennes temporelles de fonctions aléatoires . . . . .	165
15.3.2.1 Moyenne temporelle d’une fonction aléatoire . . . . .	165
15.3.2.2 Moyenne temporelle quadratique d’une fonction aléatoire . . . . .	165
15.3.2.3 Autocovariance “temporelle” d’une fonction aléatoire . . . . .	165
15.3.2.4 Covariance mutuelle “temporelle” de deux fonctions aléatoires . . . . .	165
15.3.3 Processus stochastique ergodique . . . . .	166
15.3.3.1 Ergodisme au premier ordre . . . . .	166
15.3.3.2 Ergodisme au second ordre . . . . .	166
15.3.3.3 Discussion . . . . .	166
15.3.3.4 Hypothèse ergodique . . . . .	166
15.4 Analyse harmonique des fonctions aléatoires . . . . .	166

15.4.1	Introduction . . . . .	166
15.4.2	Représentation orthogonale . . . . .	167
15.4.3	Transformation de Karhunen-Loève . . . . .	167
15.4.3.1	Exemple . . . . .	168
15.4.4	Densité spectrale de puissance . . . . .	168
15.4.4.1	Définition . . . . .	168
15.4.4.2	Interprétation physique . . . . .	168
15.4.4.3	Estimation sur base de la fonction d'autocovariance temporelle . .	169
15.5	Transformation linéaire de fonctions aléatoires . . . . .	169
15.5.1	Introduction . . . . .	169
15.5.2	Moyenne et fonction d'autocorrélation . . . . .	170
15.5.2.1	Moyenne . . . . .	170
15.5.2.2	Fonction d'autocorrélation . . . . .	170
15.5.2.3	Fonction de corrélation entre l'entrée et la sortie . . . . .	170
15.5.2.4	Application . . . . .	171
15.5.3	Densité spectrale de puissance du signal de sortie . . . . .	171
<b>16</b>	<b>Les signaux stochastiques à temps discret</b>	<b>173</b>
16.1	Introduction . . . . .	173
16.2	Fonction aléatoire discrète . . . . .	173
16.2.1	Bruit blanc discret . . . . .	174
16.3	Suites aléatoires de longueur finie . . . . .	174
16.3.1	Définitions . . . . .	174
16.3.2	Fonctionnelles certaines du premier et du second ordre . . . . .	174
16.3.2.1	Moyenne . . . . .	174
16.3.2.2	Covariance . . . . .	174
16.3.3	La transformée de Karhunen-Loève . . . . .	175
16.3.3.1	Décomposition orthogonale . . . . .	175
16.3.3.2	Bruit blanc généralisé . . . . .	175
16.3.3.3	Reconstruction parfaite . . . . .	176
16.3.3.4	Reconstruction partielle . . . . .	176
16.3.3.5	Applications . . . . .	176
<b>17</b>	<b>L'échantillonnage d'une fonction stochastique</b>	<b>179</b>
17.1	Relation entre les fonctionnelles certaines d'une fonction stochastique continue et de celle de ses échantillons . . . . .	179

17.1.1	Introduction . . . . .	179
17.1.2	Cas des suites de longueur finies . . . . .	179
17.2	Echantillonnage d'une fonction stochastique . . . . .	180
17.2.1	Rappel – Reconstruction d'un signal sur base de ses échantillons . . . . .	180
17.2.2	Echantillonnage de la fonction d'autocovariance . . . . .	180
17.2.3	Echantillonnage d'une fonction aléatoire . . . . .	180
<b>18</b>	<b>Estimation spectrale</b>	<b>181</b>
18.1	Introduction . . . . .	181
18.2	Estimation . . . . .	182
18.2.1	Préliminaires . . . . .	182
18.2.2	Périodogramme . . . . .	183
18.2.3	Estimateur de Welch . . . . .	184
<b>IV</b>	<b>Les filtres</b>	<b>185</b>
<b>19</b>	<b>Conception de filtres invariants</b>	<b>187</b>
19.1	Introduction . . . . .	187
19.2	Spécification des filtres . . . . .	187
19.3	Filtres FIR ou filtres IIR . . . . .	188
19.3.1	Introduction . . . . .	188
19.3.2	Ordre . . . . .	188
19.4	Conception des filtres IIR . . . . .	188
19.4.1	Conception par prototypage . . . . .	189
19.4.2	Filtres prototypes . . . . .	189
19.4.2.1	Filtre de Butterworth . . . . .	189
19.4.2.2	Les filtres de Chebyshev . . . . .	190
19.4.2.3	Les filtres de Bessel . . . . .	191
19.4.2.4	Comparaison . . . . .	191
19.4.3	Correspondance continu-discret . . . . .	192
19.4.4	Introduction . . . . .	192
19.4.4.1	Conditions minimales . . . . .	192
19.4.4.2	Invariance de la réponse impulsionnelle . . . . .	192
19.4.4.3	Solution numérique de l'équation différentielle . . . . .	194
19.4.4.4	Transformation bilinéaire . . . . .	195
19.4.5	Conception optimale de filtres IIR . . . . .	196

19.5	Conception de filtres FIR . . . . .	197
19.5.1	Introduction . . . . .	197
19.5.2	Propriétés des filtres FIR . . . . .	197
19.5.2.1	Stabilité . . . . .	197
19.5.2.2	Linéarité de la phase . . . . .	197
19.5.3	Conception au moyen de fenêtres . . . . .	198
19.5.3.1	Famille des fenêtres polyomiales . . . . .	198
19.5.3.1.1	Fenêtre rectangulaire . . . . .	198
19.5.3.1.2	Fenêtre de Bartlett . . . . .	198
19.5.3.1.3	Fenêtre polynomiale . . . . .	198
19.5.3.2	Famille des fenêtres “Raised cosine” . . . . .	199
19.5.3.2.1	Fenêtre en cosinus . . . . .	199
19.5.3.2.2	Fenêtre de Hanning . . . . .	199
19.5.3.2.3	Fenêtre de Hamming . . . . .	199
19.5.3.2.4	Fenêtre de Blackman . . . . .	200
19.5.3.3	Résumé . . . . .	200
<b>20</b>	<b>Filtres adaptatifs</b>	<b>203</b>
20.1	Introduction . . . . .	203
20.1.1	Structure des filtres adaptatifs . . . . .	204
20.1.2	Applications des filtres adaptatifs . . . . .	204
20.1.2.1	Identification des systèmes . . . . .	204
20.1.2.2	Suppression d’écho . . . . .	205
20.1.2.3	Modélisation inverse . . . . .	205
20.2	Le filtre de Wiener . . . . .	206
20.2.1	Le critère d’erreur du moindre carré moyen . . . . .	207
20.2.2	Les équations normales . . . . .	207
20.2.3	Le principe d’orthogonalité . . . . .	208
20.2.4	Filtre de Wiener illimité . . . . .	209
20.2.5	Application : Modélisation inverse . . . . .	209
20.3	L’algorithme des moindres carrés moyen (Least Mean Square – LMS) . . . . .	210
20.3.1	Introduction . . . . .	210
20.3.2	Déduction de l’algorithme LMS . . . . .	210
20.3.3	Analyse de la convergence . . . . .	212
20.3.4	Effect de l’écart entre les valeurs propres . . . . .	214

20.3.5 Mismatch . . . . .	215
20.3.6 Résumé et discussion . . . . .	216
20.3.7 Exemple : Le prédicteur linéaire . . . . .	216
20.3.8 LMS normalisé (NLMS) . . . . .	218
20.3.9 LMS à pas variable . . . . .	219
20.4 L'algorithme des moindres carrés récursif . . . . .	219
20.4.1 Le critère de l'erreur des moindres carrés . . . . .	219
20.4.2 Calcul récursif . . . . .	220
20.4.3 RLS avec pondération exponentielle . . . . .	222
20.4.4 Résumé et discussion . . . . .	223
20.4.5 Exemple : le prédicteur linéaire . . . . .	224
20.5 Estimation au sens du maximum de vraisemblance (Maximum likelihood) . . . . .	225
20.5.1 Introduction . . . . .	225
20.5.2 Formulation du maximum de vraisemblance . . . . .	226
20.5.3 Estimation dans le cas de bruit blanc Gaussien . . . . .	226
20.5.4 Estimation en présence de connaissance à priori . . . . .	227
20.6 Application : Formation de faisceau . . . . .	228
20.6.1 Introduction . . . . .	228
20.6.2 Multiple sidelobe canceler . . . . .	229
<b>A Dérivée par rapport à un vecteur</b>	<b>233</b>
A.1 Définition . . . . .	233
A.2 Exemple 1 . . . . .	233
A.3 Exemple 2 . . . . .	234
A.4 Exemple 3 . . . . .	234
<b>Références</b>	<b>235</b>



---

# Préface

---

Ce livre est à la fois un condensé de l'héritage du passé transmis par les enseignants de l'ancienne chaire d'électricité de l'Ecole royale militaire, créée par le Général Humé au début du 20<sup>ième</sup> siècle et des méthodes actuelles de traitement des signaux et systèmes.

*Le but de ce cours est de permettre aux étudiants de comprendre et d'analyser le comportement dynamique des circuits et des systèmes linéaires continus ou discrets, déterministes ou aléatoires. A la suite de ce cours, les étudiants devraient être capables d'analyser une chaîne de traitement des signaux et d'en identifier les limites (bande passante, fréquence d'échantillonnage, etc.).*

La première partie du livre étudie les systèmes linéaires stationnaires et les signaux continus.

Le chapitre 1 explique le type de signaux considérés dans ce cours, le chapitre 2, inspiré du livre [8] d'Alan Oppenheim, Alan Willsky et S. Hamid Nawab, intitulé "Signals and Systems" et publié par Prentice-Hall, définit ce que l'on entend par "système linéaire", "produit de convolution" et décrit les fonctions propres et valeurs propres d'un système linéaire stationnaire. Le chapitre 3, inspiré du cours du Professeur Jean Charles, d'abord répétiteur à la chaire d'électricité, professeur et chef de la chaire des télécommunications ensuite, définit la transformée de Laplace, son inverse et ses propriétés. Il discute plus particulièrement les problèmes de convergence. Le chapitre 4, aussi inspiré du cours du Professeur Jean Charles, définit la transformée de Fourier comme cas particulier de la transformée de Laplace bilatérale, son inverse et ses propriétés dans l'analyse des systèmes linéaires et des signaux. Le chapitre 5 définit les conditions de stabilité des systèmes linéaires causaux et non causaux. Le chapitre 6 analyse la réponse en fréquence de systèmes linéaires et définit les courbes de Bode et leur application.

La deuxième partie du livre étudie les systèmes linéaires stationnaires et les signaux discrets.

Le chapitre 7 entame l'étude des systèmes discrets linéaires, définit les signaux discrets ou suites, le produit de convolution discret et la "diagonalisation du produit de convolution discret". Le chapitre 8 définit la transformée en  $z$ , son inverse et ses propriétés. Il analyse plus particulièrement les conditions de convergence de la transformée en  $z$ . Le chapitre 9 étudie la transformée de Fourier d'une suite et ses propriétés. Le chapitre 10 aborde le problème de l'échantillonnage (théorème de Shannon) et de la reconstruction d'un signal. Le chapitre 11 étudie la stabilité des systèmes discrets linéaires causaux et non causaux, ainsi que la stabilité des équations aux différences. Le chapitre 12 étudie les séries de Fourier continues et discrètes. il introduit la notion de convolution cyclique et montre que cette dernière est diagonalisée en utilisant les séries de Fourier discrètes.

Le chapitre 13 définit enfin la transformée de Fourier discrète connue par l'algorithme qui permet de la calculer rapidement, à savoir la transformée de Fourier rapide, mieux connue sous le nom de FFT. Les chapitres 7 et 13 sont inspirés du livre [7] d'Alan Oppenheim et Ronald Schafer, intitulé "Digital Signal Processing", publié par Prentice-Hall.

La troisième partie est quant à elle consacré aux signaux aléatoires continus et discrets.

Et enfin, la quatrième et dernière partie est consacrée aux filtres numériques et aux filtres adaptatifs.



## Première partie

# Les systèmes linéaires, continus et stationnaires



---

# Classification des signaux

---

## 1.1 Définition

Un signal est une entité porteuse d'information et correspond généralement aux variations au cours du temps d'une grandeur physique : électrique, acoustique, lumineuse...

Exemples de signaux :

- Les variations de tension au cours du temps dans un circuit électrique (par exemple les variations de tension aux bornes d'un condensateur, les variations du courant dans une résistance, etc)
- Les variations d'une force appliquée à un objet (par exemple la résistance de l'air appliquée à un projectile et la vitesse résultante)
- Les variations d'une onde lumineuse appliquée à un détecteur photovoltaïque qui transforme l'intensité lumineuse reçue en une tension électrique.
- L'enregistrement de la voix humaine par un microphone qui capte les variations de la pression acoustique et les convertit en un signal électrique.
- La tension produite par un accéléromètre fixé sur un véhicule et produisant un signal électrique proportionnel à l'accélération.
- Les niveaux de gris d'une image en noir et blanc, représentant les variations de luminosité de la lumière visible.
- etc.

## 1.2 Représentation mathématique des signaux

Un signal est une fonction d'une ou de plusieurs variables indépendantes. Un air de musique est un signal représentant une pression acoustique  $p_a$  en fonction d'une seule variable indépendante, à savoir le *temps*  $t$  ( $p_a = f(t)$ ). Les niveaux de gris  $g$  d'une image noir et blanc est un signal (bidimensionnel) fonction de deux variables indépendantes  $x$  et  $y$ , représentant les coordonnées spatiales ( $g = f(x, y)$ ). Dans la suite, ce cours se limite à l'étude des signaux à une seule variable indépendante.

### 1.2.1 Signaux continus

Dans le cas des signaux continus, la variable indépendante est continue (par exemple le temps  $t$ , la distance  $x$ , etc). La tension aux bornes d'une résistance varie en fonction du temps comme le courant qui la traverse ( $v(t) = Ri(t)$ ).

### 1.2.2 Signaux discrets

Les signaux discrets ne sont définis que pour des valeurs discrètes  $n$  de la variable indépendante. Cette variable indépendante est constituée d'un ensemble discret de valeurs représentant par exemple leur numéro d'ordre. Par exemple, l'indice Dow-Jones du marché boursier évolue de manière intrinsèquement discrète. Les études sociologiques utilisent de nombreux attributs tels que le budget moyen des familles, le taux de criminalité, etc, tabulés en fonction de variables discrètes.

Il existe deux types de signaux discrets :

- Les signaux représentant un phénomène dont la variable indépendante est discrète (ex : l'indice Dow-Jones).
- Les signaux issus d'une opération d'échantillonnage (le signal de musique stocké sur un CDROM). Dans ce cas  $x(n)$  représente les échantillons successifs ( $n$  est alors leur numéro d'ordre) d'un phénomène pour lequel la variable indépendante est continue.

## 1.3 Classification par énergie et puissance moyenne

Par analogie avec les signaux électriques, l'énergie et la puissance moyenne d'un signal sont définies comme suit :

	Signaux continus	Signaux discrets
Énergie	$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty}  x(t) ^2 dt$	$E_x = \sum_{-\infty}^{+\infty}  x(n) ^2$
Puissance moyenne	$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T  x(t) ^2 dt$	$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N  x(n) ^2$

Il en découle les classes de signaux suivantes :

- Les signaux à énergie finie pour lesquels  $E_x < \infty$  et  $P_x = 0$ . Voir Fig. 1.1 ci-dessous :

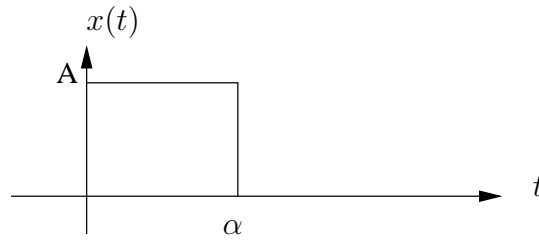


Figure 1.1 – Exemple de signal à énergie finie

- Les signaux à puissance moyenne finie pour lesquels  $\mathbf{P}_x < \infty$  et  $\mathbf{E}_x = \infty$ . Voir Fig. 1.2 ci-dessous :

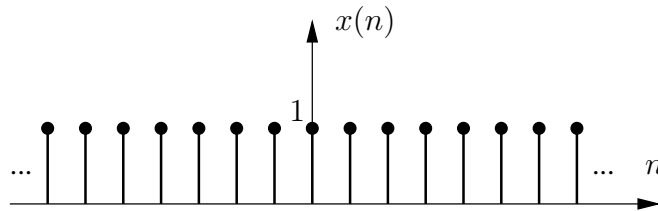


Figure 1.2 – Exemple de signal à puissance moyenne finie

- Les signaux à énergie et puissance moyenne infinies pour lesquels  $\mathbf{P}_x = \infty$  et  $\mathbf{E}_x = \infty$ . Voir Fig. 1.3 ci-dessous :

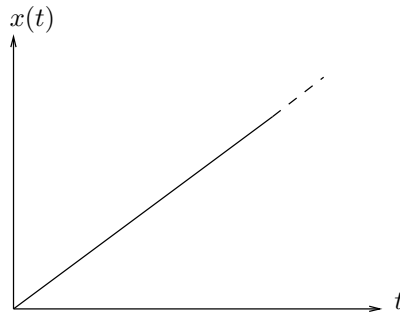


Figure 1.3 – Exemple de signal à énergie et puissance moyenne infinies

Il existe encore d'autres façons de classer les signaux :

- Selon le caractère aléatoire ou déterministe, on distingue ainsi les *signaux certains* et les *signaux aléatoires*. On dira d'un signal qu'il est certain s'il est possible de le reproduire exactement en recréant les conditions dans lesquelles il a été produit. Un signal est dit aléatoire dans le cas contraire, c'est-à-dire si seules les fonctionnelles certaines tirées des probabilités permettent de caractériser son comportement (espérance, variances, etc).
- Suivant qu'ils soient périodiques ou non.
- etc.

## 1.4 Quelques signaux particuliers

### 1.4.1 L'impulsion de Dirac

**Définition 1.1.** *L'impulsion de Dirac est une distribution particulière – la distribution du certain – et est définie par :*

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{n'est pas définie en} & t = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

et par

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$t$  est la variable indépendante générale. Cette dernière expression montre bien qu'il s'agit d'une distribution. Elle peut représenter aussi bien le temps que l'espace. Dans les systèmes évoluant dans le temps,  $t$  est le temps. Dans les systèmes qui ne sont pas fonction du temps (ex : un appareil photographique),  $t$  représente par exemple une variable spatiale.

**Propriété 1.1.** *Soit une impulsion de Dirac en  $t = t_0$ . On montre aisément que l'intégrale suivante :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt$$

*se réduit à  $f(t_0)$  si  $f(t)$  est continue en  $t_0$ . Cette propriété est appelée propriété de pincette de la Dirac.*

Parmi toutes les valeurs que prend  $f(t)$  pour tout  $t$ , l'impulsion de Dirac sélectionne celle correspondant à  $t = t_0$ .

### 1.4.2 L'échelon unité

**Définition 1.2.** *L'échelon unité est un signal noté  $U(t)$  et défini comme suit :*

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

**Propriété 1.2.** *On vérifie aisément les propriétés suivantes*

$$\delta(t) = \frac{dU(t)}{dt}$$

$$U(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t') dt'$$

# Les systèmes linéaires

## 2.1 Définitions

**Définition 2.1.** *Un système est une boîte noire (parfois grise, rarement blanche) caractérisée par un certain nombre de grandeurs d'entrée et de sortie et effectuant une transformation des grandeurs d'entrée pour produire les grandeurs de sortie.*

Une représentation schématique d'un système est donnée à la figure 2.1.

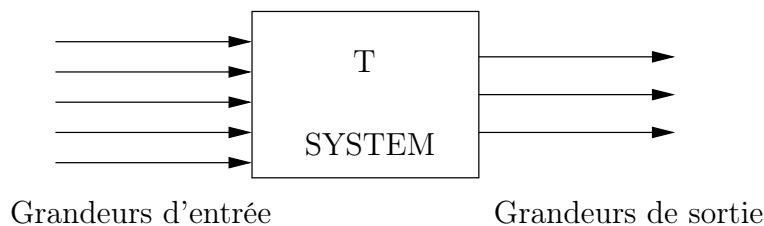


Figure 2.1 – schéma fonctionnel d'un système

**Exemple 2.1.** *La suspension d'un véhicule.*

La suspension d'un véhicule peut être considérée comme un système dont la grandeur d'entrée est la force appliquée et la grandeur de sortie le mouvement du véhicule par rapport au sol.

**Exemple 2.2.** *Le moteur électrique à courant continu (CC).*

Un moteur électrique à CC est un système dont les grandeurs d'entrée sont par exemple la tension d'alimentation et le courant d'excitation et dont les grandeurs de sortie sont la vitesse de rotation et le couple moteur.

**Théorème 2.1.** *Une condition nécessaire et suffisante de linéarité d'une transformation (système) est que le principe de superposition soit applicable et que la multiplication par un scalaire soit conservée.*

Soit un système qui effectue une transformation  $T[\mathbf{x}]$  sur ses grandeurs d'entrée représentées par le vecteur  $\mathbf{x}$  et dont les grandeurs de sortie sont représentées par le vecteur  $\mathbf{y}$ .

La relation entre les grandeurs d'entrée et de sortie est

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}[\mathbf{x}] \quad (2.1)$$

La linéarité du système impose la linéarité de l'opérateur  $\mathbf{T}$ .

Il en résulte donc la condition nécessaire et suffisante suivante :

Le système décrit par (2.1) est linéaire, ssi

$$\mathbf{T}[\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2 + \dots] = \alpha \mathbf{T}[\mathbf{x}_1] + \beta \mathbf{T}[\mathbf{x}_2] + \dots$$

où  $\alpha, \beta, \dots$  sont des scalaires complexes.

En particulier, si  $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, \dots]$

$$\mathbf{T}[\mathbf{x}] = \mathbf{T}[x_1, 0, 0, \dots, 0]^T + \mathbf{T}[0, x_2, 0, \dots, 0]^T + \dots$$

Cette dernière relation montre qu'un système linéaire à plusieurs entrées peut être étudié comme une combinaison de systèmes linéaires à une seule entrée. Et, évidemment, on peut toujours considérer les sorties indépendamment les unes des autres. Un système linéaire à plusieurs entrées et plusieurs sorties (Multiple-Inputs Multiple-Outputs, MIMO) peut donc s'étudier comme une simple combinaison de systèmes linéaires à une seule entrée et une seule sortie (Single-Input Single-Output, SISO).

## 2.2 Systèmes linéaires à une entrée et une sortie

### 2.2.1 Définitions

**Définition 2.2.** Dans le cas particulier des systèmes linéaires à une entrée et une sortie, la forme la plus générale de la relation entre les grandeurs d'entrée et de sortie est donnée par l'intégrale de Duhamel :

$$y(t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)h(t, t_1) dt$$

où  $x(t)$  est la grandeur d'entrée (par ex. un signal temporel, mais pas nécessairement) et  $y(t)$  la grandeur de sortie.  $h(t, t_1)$  est appelé le noyau de la transformation. On vérifie aisément que la condition nécessaire et suffisante du paragraphe précédent est satisfaite. L'intégrale de Duhamel exprime d'ailleurs le fait que le signal de sortie d'un système linéaire est une combinaison linéaire *continue* du signal d'entrée, les coefficients de la combinaison linéaire étant donnés par le noyau  $h(t, t_1)$  de la transformation.

Il est remarquable de constater que la réponse d'un système linéaire à un signal d'entrée donné est entièrement déterminée par la connaissance du noyau  $h(t, t_1)$  de la transformation linéaire.

En outre, il est possible d'interpréter l'intégrale de Duhamel de la façon suivante : le signal de sortie d'un système linéaire est la version pondérée du signal d'entrée par une fonction de pondération constituée par le noyau  $h(t, t_1)$  de la transformation.

**Définition 2.3.** La réponse d'un système (la grandeur de sortie) à une impulsion de Dirac en  $t = 0$  est appelée réponse impulsionnelle de ce système.



**Propriété 2.1.** *La réponse impulsionnelle  $w(t)$  d'un système linéaire décrit par l'intégrale de Duhamel est donnée par le noyau  $h(0, t)$  de cette transformation.*

Il suffit en effet de poser  $x(t) = \delta(t)$  dans l'intégrale de Duhamel et de tenir compte de la propriété de pincette de la Dirac, et

$$w(t) = h(0, t)$$

Le noyau  $h(t_0, t)$  est donc la réponse du système observée en  $t$  et faisant suite à une impulsion de Dirac produite en  $t_0$ .

**Définition 2.4.** *Un système est dit causal si sa réponse impulsionnelle est nulle pour  $t < 0$ .*

C'est le cas de tous les systèmes temporels dits *réalisables*. Il est en effet inimaginable d'entendre une cloche résonner avant qu'elle ait été percutée!!!

**Définition 2.5.** *La réponse d'un système à un échelon est appelée réponse indicielle de ce système.*

## 2.3 Produit de convolution

### 2.3.1 Hypothèse de stationnarité - (*shift invariance*)

Cette hypothèse consiste à admettre que la réponse d'un système à une impulsion n'est fonction que de la différence  $\tau$  entre l'endroit  $t$  d'observation et l'endroit  $t_0$  de production de l'impulsion de Dirac :

$$h(t_0, t) = h(t - t_0) = w(\tau)$$

Ce qui signifie que la réponse impulsionnelle :

- a la même forme quel que soit l'endroit où l'impulsion se produit ;
- a toujours la même position relative en  $t$  par rapport à l'impulsion.

$$\tau = t_1 - t_0 = t_3 - t_2 \longrightarrow h(t_0, t_1) = h(t_2, t_3) = w(\tau)$$

Dans le cas très important des systèmes temporels, cette hypothèse est appelée *hypothèse de permanence*.

### 2.3.2 Produit de convolution

**Définition 2.6.** *L'hypothèse de stationnarité permet d'écrire l'intégrale de Duhamel sous la forme*

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)w(t - \tau) d\tau$$

*cette intégrale est appelée convolution de  $x(t)$  avec  $w(t)$  ou encore produit de convolution de  $x(t)$  avec  $w(t)$ , noté aussi :*

$$y(t) = x(t) * w(t)$$

Dans le cas des systèmes causaux le produit de convolution devient :

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)w(t - \tau) d\tau$$

puisque dans ce cas  $w(t - \tau) = 0, \forall \tau > t$

**Propriété 2.2.** *On vérifie facilement les propriétés suivantes du produit de convolution.*

— Le produit de convolution est commutatif :

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$$

— Le produit de convolution est associatif

$$(x_1(t) * x_2(t)) * x_3(t) = x_1(t) * (x_2(t) * x_3(t))$$

**Propriété 2.3.** *L'impulsion de Dirac  $\delta(t)$  est un élément neutre du produit de convolution.*

En effet

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

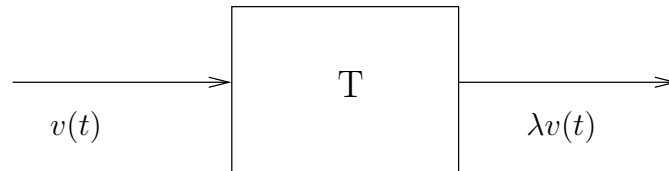
Un système dont la réponse impulsionnelle est une fonction de Dirac est capable de reproduire exactement son signal d'entrée. Un tel système linéaire est dit parfait et est en outre irréalisable s'il est dynamique parce qu'il devrait dans ce cas être capable de mettre en oeuvre une énergie infinie afin de fournir une réponse “instantanée”.

**Exemple 2.3.** *Photographie.*

Un appareil photographique dont le système optique est défocalisé produit des images floues. Cet effet s'explique très facilement par le produit de convolution. Au plus l'optique est défocalisée, au plus la réponse impulsionnelle de celle-ci est large, au plus chaque point des images produites est influencé par ses voisins immédiats et au plus les images produites sont floues. On prend souvent comme modèle de la réponse impulsionnelle d'un système optique (appelée “point spread function” ou “PSF” en anglais) une fonction gaussienne dont la largeur caractérise en effet la qualité du système optique.

## 2.4 Fonctions propres et valeurs propres d'un système linéaire stationnaire

**Définition 2.7.** *Un signal  $v(t)$  est dit **fonction propre** d'un système linéaire donné  $\mathbf{T}$  (d'une transformation linéaire donnée) si, appliqué à l'entrée de ce système, il produit une grandeur de sortie correspondante  $y(t)$  égale à lui-même multiplié par une constante, éventuellement complexe  $\lambda$ , appelée **valeur propre** (voir figure (2.4)).*



Fonction propre et valeur propre correspondante

On écrit donc

$$y(t) = \mathbf{T}[v(t)] = \lambda v(t)$$

**Théorème 2.2.** *Les fonctions propres du système linéaire stationnaire sont des exponentielles complexes.*

En effet, si le signal d'entrée d'un système linéaire stationnaire (on dira *permanent* pour un système du temps) est  $x(t) = e^{st}$  où  $s$  est un nombre complexe donné par :

$$s = \sigma + j\omega \text{ avec } \sigma \text{ et } \omega \in \mathcal{R}$$

Le plan complexe dans lequel  $s$  prend ses valeurs est appelé plan de Gauss. Dans la suite, on l'appellera indifféremment plan  $s$  ou plan de Gauss.

Comme le produit de convolution est commutatif, on peut écrire :

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) e^{st} e^{-s\tau} d\tau \\ &= e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) e^{-s\tau} d\tau \end{aligned}$$

On notera que dans le cas d'un système causal l'intégrale ci-dessus s'écrit

$$y(t) = e^{st} \int_0^{\infty} w(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

En conséquence,  $e^{st}$  est bien une fonction propre de l'intégrale de convolution pour autant que l'intégrale ci-dessus existe. Le problème de l'existence de cette intégrale sera analysé ultérieurement. Il peut exister des valeurs de  $s$  pour lesquelles cette intégrale existe et d'autres pour lesquelles elle n'existe pas.

Dans la dernière expression ci-dessus, l'intégrale est indépendante de  $t$  et est uniquement une fonction de  $s$  pour un système donné. Posons

$$\lambda(s) = H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (2.2)$$

Si on fixe la valeur de  $s$ , la fonction propre  $e^{st}$  et la valeur propre  $\lambda(s)$  correspondante sont entièrement déterminées. La valeur propre  $\lambda(s) = H(s)$  est aussi appelée *transmittance isomorphe* du système linéaire stationnaire. L'expression (2.2) est, par définition de la transformée de Laplace, la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle. (Voir chapitre suivant).

Dans le cas où la fonction  $w(\tau)$  est causale (c'est-à-dire si  $w(t) = 0$  pour  $t < 0$ ), l'équation (2.2) devient

$$\lambda(s) = H(s) = \int_0^{\infty} w(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad (2.3)$$

Cette dernière expression (2.3) est souvent appelée transformée de Laplace unilatérale.

*Il en résulte que la transmittance isomorphe d'un système stationnaire et linéaire est l'ensemble (paramétré en  $s$ ) des valeurs propres de ce système ou encore la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle de ce système.*

Comme la transformée de Laplace est une intégrale dont les bornes d'intégration sont infinies, il est primordial d'en étudier les conditions d'existence, à savoir : la détermination de l'ensemble

des valeurs de  $s$  (ou domaine de convergence  $D_c$ ) pour lesquelles la transformée de Laplace existe et est égale à une fonction donnée  $H(s)$ .

Dans le cas des systèmes linéaires stationnaires  $H(s)$  s'écrit souvent sous la forme d'un rapport de polynômes en  $s$ . Dans ce cas, le nombre des valeurs de  $s$  pour lesquelles  $H(s)$  est infini est donc fini : ce sont les racines du dénominateur. Dans le cas général, comme par exemple dans celui de temps morts, le nombre de pôles de  $H(s)$  est dénombrable. Il n'en est pas de même pour les intégrales des expressions (2.2) et (2.3) qui n'existe pas hors du domaine de convergence. Il en résulte que les expressions (2.2) et (2.3) ne sont correctes que dans le domaine de convergence  $D_c$ .

# La transformée de Laplace

---

## 3.1 Définition

La *transformée de Laplace* d'un signal  $x(t)$  est par définition :

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (3.1)$$

où  $s$ , complexe et défini comme précédemment,

$$s = \sigma + j\omega,$$

prend ses valeurs dans le plan complexe  $s$  ou plan de Gauss. L'intégrale (3.1), notée aussi  $\mathcal{L}\{x(t)\}$ , est souvent appelée transformée de Laplace bilatérale par opposition à la transformée de Laplace unilatérale à laquelle elle se réduit dans le cas des systèmes et signaux causaux, à savoir :

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Il est plus élégant à notre avis de définir la transformée de Laplace bilatérale et de considérer dès lors la transformée de Laplace unilatérale et la transformée de Fourier (voir propriété et chapitre suivants) comme des cas particuliers.

**Propriété 3.1.** Lorsque  $s = j\omega$  ( $\sigma = 0$ ), les fonctions propres correspondantes ( $e^{j\omega t}$ ) sont orthogonales dans  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_1 t} e^{-j\omega_2 t} dt = 2\pi\delta(\omega_1 - \omega_2)$$

et leur norme au carré vaut  $2\pi$ . La transformée de Laplace se ramène dans ce cas à la transformée de Fourier

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.2)$$

pour autant que l'intégrale existe. Pour qu'il en soit ainsi *il faut et il suffit* que le signal  $x(t)$  soit intégrable (voir cours d'analyse mathématique) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

**Théorème 3.1.** *Condition nécessaire et suffisante d'existence de la transformée de Laplace.*

Cette dernière propriété nous permet d'exprimer la transformée de Laplace d'un signal  $x(t)$  comme étant la transformée de Fourier de la fonction  $x(t)e^{-\sigma t}$ . L'expression (3.1) peut en effet également s'écrire :

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t} dt$$

Par voie de conséquence, pour que l'intégrale dans l'expression (3.1) et donc la transformée de Laplace existe, *il faut et il suffit* que la fonction  $x(t)e^{-\sigma t}$  soit intégrable, c'est-à-dire que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (3.3)$$

Il résulte de ce qui précède que le domaine de convergence de la transformée de Laplace, c'est-à-dire les valeurs de  $s$  pour lesquelles l'intégrale (3.1) existe, est délimité dans le plan  $s$  par des droites verticales (parallèles à l'axe imaginaire) : la condition nécessaire et suffisante (3.3) ne dépend en effet que de  $\sigma$  et non d' $\omega$ .

**Cas particulier important.** Il résulte de ce qui précède que pour que la transformée de Fourier existe il faut et il suffit que l'axe imaginaire du plan  $s$  soit dans le domaine de convergence de l'intégrale (3.1).

## 3.2 Domaine de convergence de la transformée de Laplace

L'analyse de la condition nécessaire et suffisante (3.3) conduit à l'examen de quatre cas différents :

- le signal  $x(t)$  est à support borné
- le signal  $x(t)$  est à support unilatéral à droite
- le signal  $x(t)$  est à support unilatéral à gauche
- le signal  $x(t)$  est bilatéral

### 3.2.1 Le signal $x(t)$ est à support borné

Soit  $x(t) = 0$  pour  $\forall t < t_1$  et pour  $\forall t > t_2$ . Voir figure (3.1). Dans ces conditions, l'équation (3.3) s'écrit :

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (3.4)$$

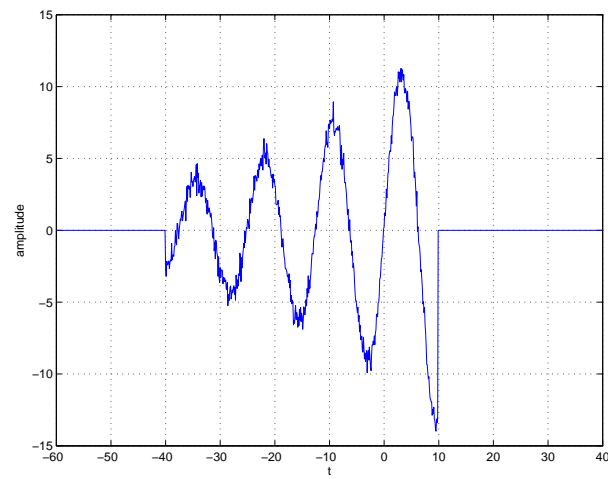
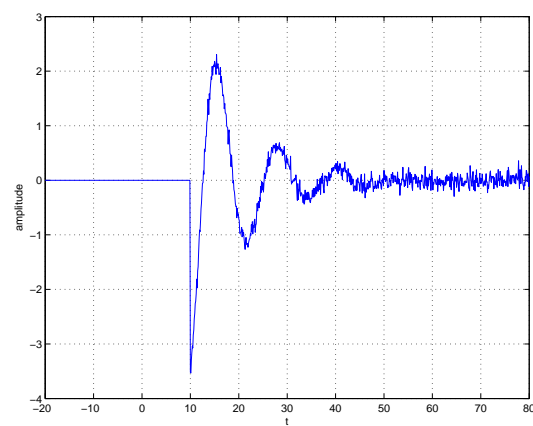
Cette dernière expression est vérifiée pour autant que le signal  $x(t)$  ne soit infini qu'en un nombre dénombrable de valeurs de  $t$  et qu'il soit intégrable dans un voisinage de chacun de ces points.

Pratiquement, il en résulte que la transformée de Laplace d'un signal à support borné existe pour toute valeur de  $s$  dans le plan de Gauss, sauf à l'infini ( $\sigma = -\infty$  si  $t_2 > 0$  et  $\sigma = \infty$  si  $t_1 < 0$ ).

### 3.2.2 Le signal $x(t)$ est à support unilatéral à droite

Ce cas est particulièrement important puisqu'il concerne tous les signaux et systèmes causaux et donc les signaux et systèmes temporels.

Soit  $x(t) = 0$  pour  $\forall t < t_1$ . Voir figure (3.2). Dans ces conditions, l'équation (3.3) s'écrit :

Figure 3.1 – exemple de signal à support borné  $[-40, 10]$ Figure 3.2 – exemple de signal à support unilatéral à droite  $[10, \infty]$

$$\int_{t_1}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (3.5)$$

On scinde alors  $x(t)$  en deux signaux :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

où  $x_1(t) = x(t)$  pour  $-\infty \leq t < 0$  et où  $x_2(t) = x(t)$  pour  $0 \leq t \leq \infty$ .

Le signal  $x_1(t)$  est à support borné. Sa transformée de Laplace existe donc pour toute valeur  $s$  du plan de Gauss dans les mêmes conditions que dans le cas précédent.

Le signal  $x_2(t)$  par contre n'est pas à support borné et le critère d'existence qu'il convient de vérifier s'écrit :

$$\int_0^{\infty} |x_2(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (3.6)$$

A cette fin, supposons qu'il existe une valeur  $\sigma_0$  pour laquelle la condition nécessaire et suffisante d'existence soit vérifiée. Il est donc exact d'écrire

$$\int_0^{\infty} |x_2(t)e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty \quad (3.7)$$

On vérifie facilement que pour toute valeur de  $s$  telle que  $\sigma_0 \leq \sigma = \Re\{s\}$  on a quel que soit  $t \geq 0$

$$e^{-\sigma t} \leq e^{-\sigma_0 t}$$

La comparaison de (3.6) avec (3.7) montre que (3.6) est vérifiée. Il en résulte que le domaine de convergence de la transformée de Laplace est constitué par la partie du plan de Gauss située à droite de la droite d'abscisse  $\sigma_{\inf}$ ,  $\sigma_{\inf}$  étant l'infimum<sup>1</sup> de l'ensemble des valeurs de  $\sigma_0$  pour lesquelles (3.6) est encore vérifiée, sauf en  $\sigma = \infty$  si  $t_1 < 0$ . Voir figure (3.4).

### 3.2.3 Le signal $x(t)$ est à support unilatéral à gauche

Soit  $x(t) = 0 \ \forall t > t_2$ . Voir figure (3.3). Dans ces conditions, l'équation (3.3) s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{t_2} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (3.8)$$

On scinde alors  $x(t)$  en deux signaux :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

où  $x_1(t) = x(t)$  pour  $-\infty \leq t \leq 0$  et où  $x_2(t) = x(t)$  pour  $0 < t \leq \infty$ .

Le signal  $x_2(t)$  est à support borné. Sa transformée de Laplace existe donc pour toute valeur  $s$  du plan de Gauss dans les mêmes conditions que précédemment, sauf en  $\sigma = -\infty$ .

Le signal  $x_1(t)$  par contre n'est pas à support borné et le critère d'existence qu'il convient de vérifier s'écrit

$$\int_{-\infty}^0 |x_1(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \quad (3.9)$$

A cette fin, supposons qu'il existe une valeur  $\sigma_0$  pour laquelle la condition nécessaire et suffisante d'existence est vérifiée. Il est donc exact d'écrire

$$\int_{-\infty}^0 |x_2(t)e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty \quad (3.10)$$

---

1. l'infimum d'un ensemble est le plus grand des minorants de cet ensemble



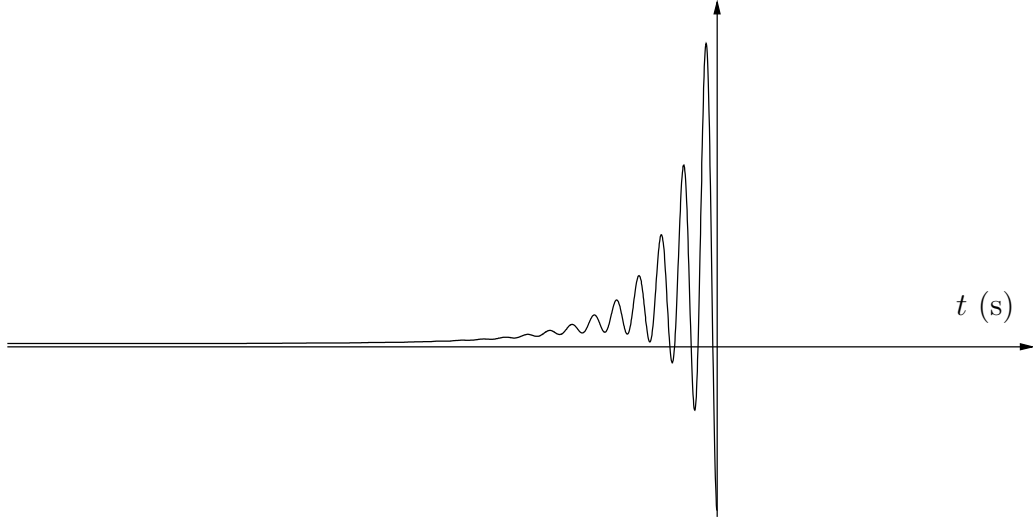


Figure 3.3 – exemple de signal à support unilatéral à gauche

On vérifie facilement que pour toute valeur de  $s$  telle que  $\sigma_0 \geq \sigma = \Re\{s\}$  on a quelque soit  $t \leq 0$

$$e^{-\sigma t} \leq e^{-\sigma_0 t}$$

La comparaison de (3.9) avec (3.10) montre que (3.9) est vérifiée. Il en résulte que le domaine de convergence de la transformée de Laplace est constitué par la partie du plan de Gauss située à gauche de la droite d'abscisse  $\sigma_{\text{sup}}$ ,  $\sigma_{\text{sup}}$  étant le supremum<sup>2</sup> de l'ensemble des valeurs de  $\sigma_0$  pour lesquelles (3.9) est encore vérifiée, sauf en  $\sigma = -\infty$  si  $t_2 > 0$ . Voir figure (3.4).

### 3.2.4 Le signal $x(t)$ est à support bilatéral

Ce cas comprend celui de la plupart des systèmes optroniques (caméras visibles ou infrarouge, radars, etc).

Soit un signal  $x(t)$  à support bilatéral. L'équation (3.3) s'écrit

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt$$

On scinde à nouveau  $x(t)$  en deux fonctions :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

où  $x_1(t) = x(t)$  pour  $-\infty \leq t < 0$  et où  $x_2(t) = x(t)$  pour  $0 \leq t \leq \infty$ .

Le signal  $x_1(t)$  est à support unilatéral à gauche non borné, tandis que le signal  $x_2(t)$  est à support unilatéral à droite non borné. L'étude du domaine de convergence de la transformée de Laplace du signal  $x(t)$  se ramène donc à celle de l'existence de la transformée de Laplace des signaux  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ .

Le domaine de convergence correspondant au signal  $x_1(t)$  est constitué par la partie du plan de Gauss située à gauche de la droite d'abscisse  $\sigma_{\text{sup}}$ ,  $\sigma_{\text{sup}}$  étant le supremum de l'ensemble des

<sup>2</sup>. le supremum d'un ensemble est le plus petit majorant de cet ensemble

$\Re\{s\}$  pour lesquels (3.9) est encore vérifiée. C'est-à-dire

$$\Re\{s\} \leq \sigma_{\sup}$$

Le domaine de convergence correspondant au signal  $x_2(t)$  est constitué par la partie du plan de Gauss située à droite de la droite d'abscisse  $\sigma_{\inf}$ ,  $\sigma_{\inf}$  étant l'infimum de l'ensemble des  $\Re\{s\}$  pour lesquels (3.6) est encore vérifiée. C'est-à-dire

$$\Re\{s\} \geq \sigma_{\inf}$$

Le domaine de convergence de la transformée de Laplace de  $x(t)$  est donc caractérisé par les valeurs de  $s$  telles que

$$\sigma_{\inf} \leq \Re\{s\} \leq \sigma_{\sup}$$

Ce domaine de convergence n'est différent de l'ensemble vide que si

$$\sigma_{\inf} \leq \sigma_{\sup}$$

où  $\sigma_{\inf}$  ne dépend **que** de la partie  $x_2(t)$  du signal et  $\sigma_{\sup}$  **que** de la partie  $x_1(t)$  du même signal.

### 3.3 Détermination des bornes $\sigma_{\inf}$ et $\sigma_{\sup}$

Dans le domaine de convergence, il y a égalité entre la transformée de Laplace  $\mathcal{L}\{x(t)\}$  et la fonction  $X(s)$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = X(s)$$

En dehors du domaine de convergence, cette égalité n'est pas vérifiée, puisque la transformée de Laplace  $\mathcal{L}\{x(t)\}$  n'existe pas et que  $X(s)$  n'est infinie qu'en un nombre fini ou dénombrable de points du plan  $s$ , appelés pôles de  $X(s)$ .

- Si le signal  $x(t)$  est à support borné, la transformée de Laplace  $\mathcal{L}\{x(t)\}$  converge pour toute valeur de  $s$  située dans le plan de Gauss
- Si le signal  $x(t)$  est à support unilatéral à droite, le domaine de convergence se trouve à droite de la droite verticale d'abscisse  $\sigma_{\inf}$ . Imaginons que, partant d'un point situé dans le domaine de convergence, on se dirige vers la gauche dans le plan complexe où  $s$  prend ses valeurs. Comme  $X(s)$  et  $\mathcal{L}\{x(t)\}$  sont analytiques dans le domaine de convergence et que le domaine de convergence n'est fonction que de la partie réelle de  $s$ , tant que la droite verticale passant par ce point ne contient pas de pôle de  $X(s)$ , on reste dans le domaine de convergence.  $\sigma_{\inf}$  est donc **la partie réelle du pôle de  $X(s)$  de plus grande partie réelle**.
- Si le signal  $x(t)$  est à support unilatéral à gauche. Le domaine de convergence se trouve à gauche de la droite verticale d'abscisse  $\sigma_{\sup}$ . Imaginons que, partant d'un point situé dans le domaine de convergence, on se dirige vers la droite dans le plan complexe où  $s$  prend ses valeurs. Comme  $X(s)$  et  $\mathcal{L}\{x(t)\}$  sont analytiques dans le domaine de convergence et que le domaine de convergence n'est fonction que de la partie réelle de  $s$ , tant que la droite verticale passant par ce point ne contient pas de pôle de  $X(s)$ , on reste dans le domaine de convergence.  $\sigma_{\sup}$  est donc **la partie réelle du pôle de  $X(s)$  de plus petite partie réelle**.

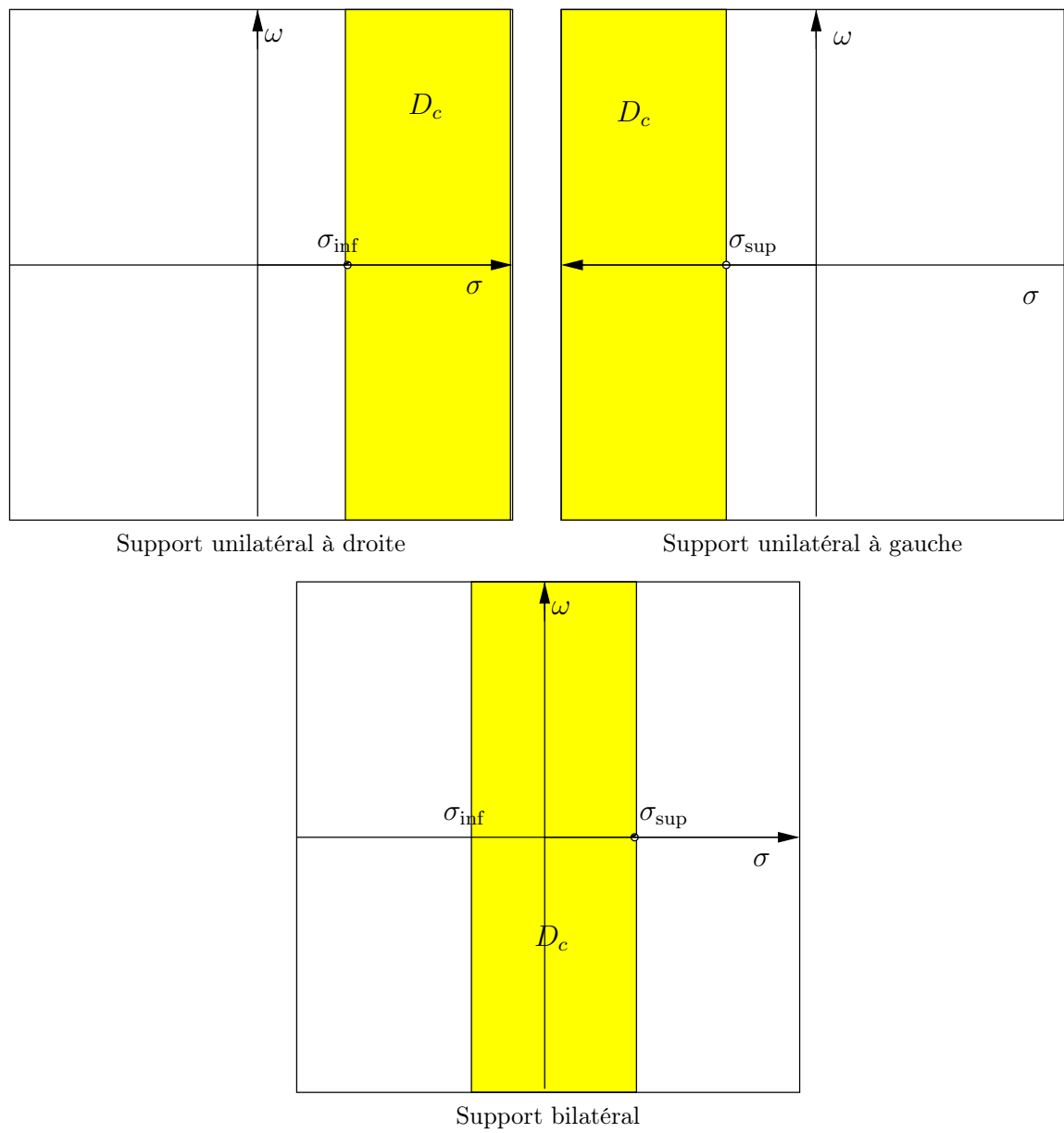


Figure 3.4 – Domaine de convergence

- Si la suite est à support bilatéral, le domaine de convergence est délimité par la partie réelle  $\sigma_{\inf}$  du pôle de plus grande partie réelle de la partie de  $x(t)$  à support unilatéral à droite et par la partie réelle  $\sigma_{\sup}$  du pôle de plus petite partie réelle de la partie de  $x(t)$  à support unilatéral à gauche.

### 3.4 fonctions singulières et leur transformée de Laplace

#### 3.4.1 L'échelon unitaire : $\mathcal{U}(t)$

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(t) &= 0 \text{ pour } t \leq 0 \\ &= 1 \text{ pour } t > 0\end{aligned}$$

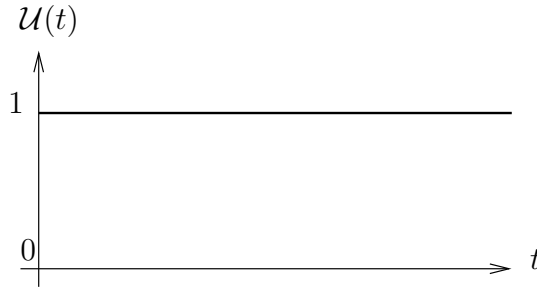


Figure 3.5 – échelon unité

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t)\} = X(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \frac{-1}{s} [e^{-st}]_0^{\infty} \\ &= \frac{-1}{s} [e^{-s\infty} - 1]\end{aligned}$$

$\mathcal{U}(t)$  est une fonction unilatérale à droite. Il en résulte que le domaine de convergence de sa transformée de Laplace est tel que  $\sigma > \sigma_{inf}$ . En outre, comme le montre la dernière expression,  $X(s)$  a un pôle en  $s = 0$ . Il s'ensuit que  $\sigma > 0$  et que  $e^{-s\infty} = e^{-\sigma\infty} e^{-j\omega\infty} = e^{-\infty} e^{-j\omega\infty} = 0$  et

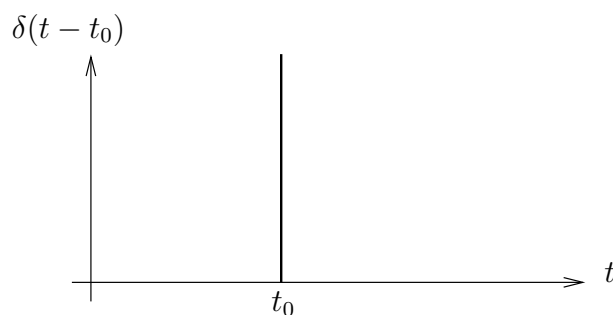
$$X(s) = \frac{1}{s}$$

#### 3.4.2 L'impulsion de Dirac $\delta(t - t_0)$ en $t_0$

En utilisant la propriété de pincette de la Dirac d'ordre 1 (ou percussion d'ordre 1 définie dans le chapitre précédent), on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-st} dt = e^{-st_0}$$

Si  $t_0 = 0$ ,  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

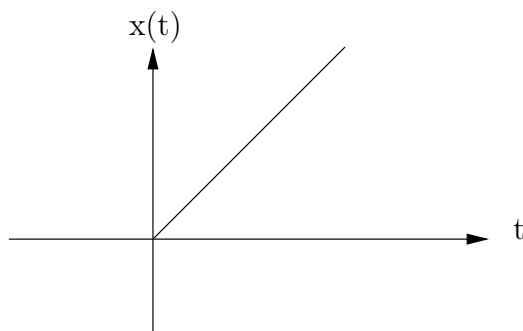


On démontre que la transformée de Laplace d'une Dirac d'ordre  $n$ ,  $\delta_n(t)$ , (percussion d'ordre  $n$ ) est donnée par

$$\mathcal{L}\{\delta_n(t)\} = s^{n-1}$$

### 3.4.3 La rampe unitaire

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \text{ pour } t \leq 0 \\ &= t \text{ pour } t > 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) &= \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} t e^{-st} dt \\ &= \left[ t \frac{-1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{-1}{s} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

### 3.5 Propriétés de la transformée de Laplace

#### 3.5.1 Linéarité

Si

$$\mathcal{L}\{x_1(t)\} = X_1(s) \text{ et } \mathcal{L}\{x_2(t)\} = X_2(s)$$

alors

$$c_1 \mathcal{L}\{x_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{x_2(t)\} = c_1 X_1(s) + c_2 X_2(s)$$

avec  $c_1$  et  $c_2$  des constantes arbitraires.

#### 3.5.2 Transformée de Laplace d'une dérivée

Considérons une fonction causale  $x(t)$  ( $x(t) = 0$  pour  $t < 0$ ) :

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = \int_0^\infty x'(t) e^{-st} dt$$

Résolution de l'intégrale par parties afin de faire apparaître  $x(t)$ . Posons

$$\begin{aligned} u'(t) = x'(t) &\rightarrow u(t) = x(t) \\ v(t) = e^{-st} &\rightarrow v'(t) = e^{-st}(-s) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x'(t)\} &= [x(t) e^{-st}]_0^\infty - \int_0^\infty x(t) e^{-st}(-s) dt \\ &= -x(0) + sX(s) \end{aligned}$$

De façon plus générale, on aura pour la  $n$ ème dérivée de  $x(t)$  :

$$\mathcal{L}\{x^n(t)\} = s^n X(s) - s^{n-1} x(0) - s^{n-2} x'(0) - \dots - x^{n-1}(0)$$

#### Remarque

$x(0), x'(0), \dots, x^{n-1}(0)$  n'apparaissent dans l'expression ci-dessus que s'il existe des conditions initiales non nulles. Si les conditions initiales sont nulles (système initialement neutre), la transformation de Laplace a pour effet de remplacer les opérations de dérivations successives par des multiplications par  $s, s^2, \dots, s^n$ .

#### 3.5.3 Transformée de Laplace d'une intégrale

Considérons une fonction causale  $x(t)$  ( $x(t) = 0$  pour  $t < 0$ ) :

$$\mathcal{L}\{x^{-1}(t)\} = \int_0^\infty x^{-1}(t) e^{-st} dt$$

En intégrant par parties afin de faire apparaître  $x(t)$  :

$$\begin{aligned} u(t) = x^{-1}(t) &\rightarrow u'(t) = x(t) \\ v'(t) = e^{-st} &\rightarrow v(t) = e^{-st} \left( \frac{-1}{s} \right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x^{-1}(t)\} &= [x^{-1}(t) e^{-st} \frac{-1}{s}]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{-1}{s} x(t) e^{-st} dt \\ &= \frac{x^{-1}(0)}{s} + \frac{X(s)}{s}\end{aligned}$$

De façon plus générale, on a :

$$\mathcal{L}\{x^{-n}(t)\} = \frac{X(s)}{s^n} + \frac{x^{-1}(0)}{s^n} + \dots + \frac{x^{-n}(0)}{s}$$

Remarque :

A nouveau,  $x(0), x^{-1}(0), \dots, x^{-n}(0)$  n'apparaissent dans l'expression ci-dessus que s'il existe des conditions initiales non nulles. Si les conditions initiales sont nulles (système initialement neutre), la transformation de Laplace a pour effet de remplacer les opérations d'intégrations successives par des divisions par  $s, s^2, \dots, s^n$ .

### 3.5.4 Changement d'échelle

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(kt)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(kt) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} x(kt) e^{-\frac{s}{k}(kt)} d(kt)\end{aligned}$$

Posons  $t' = kt$  et  $s' = \frac{s}{k}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(kt)\} &= \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-s't'} dt' \\ &= \frac{1}{k} X\left(\frac{s}{k}\right)\end{aligned}$$

### 3.5.5 Amortissement

Considérons la fonction causale  $x(t) = e^{-\lambda t} \mathcal{U}(t)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(t) e^{-\lambda t} \mathcal{U}(t)\} &= \int_0^\infty x(t) e^{-\lambda t} e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty x(t) e^{-(\lambda+s)t} dt\end{aligned}$$

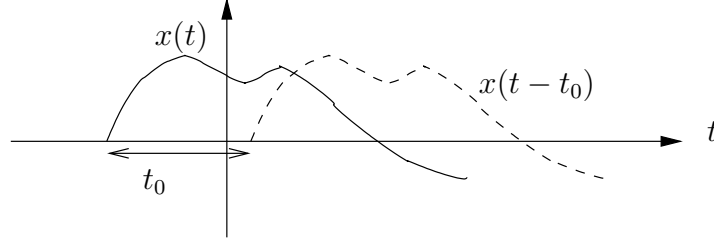
Posons ensuite  $s' = \lambda + s$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x(t) e^{-\lambda t} \mathcal{U}(t)\} &= \int_0^\infty x(t) e^{-s't} dt \\ &= X(s') \\ &= X(\lambda + s)\end{aligned}$$

avec  $\lambda$  un nombre complexe.

### 3.5.6 Décalage ("shift")

Considérons la fonction  $x(t - t_0)$



$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{x(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-st} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-st} e^{-st_0} e^{+st_0} dt \\
 &= e^{-st_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-s(t-t_0)} dt
 \end{aligned}$$

Posons  $t' = t - t_0$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{x(t - t_0)\} &= e^{-st_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-st'} dt' \\
 &= e^{-st_0} X(s)
 \end{aligned}$$

$e^{-st_0}$  n'est d'ailleurs rien d'autre que la transmittance isomorphe d'un temps mort de durée  $t_0$ .

### 3.5.7 Multiplication par $t$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t x(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} t x(t) e^{-st} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) t e^{-st} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{-d}{ds} [e^{-st}] dt \\
 &= \frac{-d}{ds} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \right) \\
 &= \frac{-dX(s)}{ds}
 \end{aligned}$$

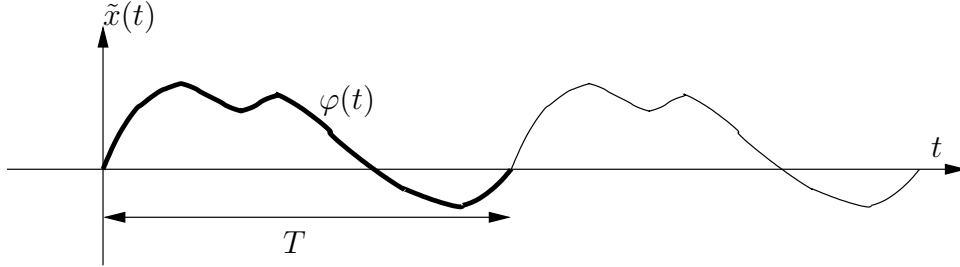
Généralisation :

$$\mathcal{L}\{t^n x(t)\} = (-1)^n \frac{-d^n X(s)}{ds^n}$$



### 3.5.8 Transformée d'une fonction périodique

$\tilde{x}(t)$  une fonction périodique et  $\varphi(t)$  sa fonction "patron" ou fonction de forme ( $\varphi(t) = \tilde{x}(t)$  pour  $t \in [0, T]$  et  $\varphi(t) = 0$  autrement).



$$\tilde{x}(t) = \varphi(t) + \varphi(t - T) + \varphi(t - 2T) + \varphi(t - 3T) + \dots$$

$$\mathcal{L}\{\tilde{x}(t)\} = \mathcal{L}\{\varphi(t)\} + \mathcal{L}\{\varphi(t - T)\} + \mathcal{L}\{\varphi(t - 2T)\} + \mathcal{L}\{\varphi(t - 3T)\} + \dots$$

Si  $\phi(s) = \mathcal{L}\{\varphi(t)\}$  alors, en vertu de la propriété de la translation,

$$\begin{aligned} X(s) &= \phi(s) + e^{-sT}\phi(s) + e^{-s2T}\phi(s) + e^{-s3T}\phi(s) + \dots \\ &= \phi(s)[1 + e^{-sT} + e^{-s2T} + e^{-s3T} + \dots] \end{aligned}$$

Soit une progression géométrique de raison  $e^{-sT}$ , et

$$X(s) = \phi(s) \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

### 3.5.9 Transformée du produit de convolution

Le produit de convolution de deux fonctions  $x(t)$  et  $g(t)$  est défini par les intégrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) g(\tau) d\tau = x(t) * g(t)$$

Si les fonctions  $g(t)$  et  $x(t)$  sont nulles pour  $t < 0$ , le produit de convolution se réécrit

$$\int_0^t x(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t x(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

La transformée de Laplace du produit de convolution est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) g(t - \tau) d\tau\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) g(t - \tau) d\tau e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau) e^{-st} dt d\tau \end{aligned}$$

Posons ensuite  $t - \tau = r$ , avec  $dt = dr$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) g(t - \tau) d\tau\right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} g(r) e^{-s(r+\tau)} dr d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(r) e^{-sr} dr\right] e^{-s\tau} d\tau \\
 &= G(s) \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\
 &= G(s) X(s)
 \end{aligned}$$

La transformée de Laplace du **produit de convolution** de deux fonctions  $x(t)$  et  $g(t)$  est égale au **produit simple** des transformées de Laplace des deux fonctions  $G(s) X(s)$ . Il s'agit de la version diagonale du produit de convolution, résultat de la procédure de diagonalisation.

### 3.5.10 Théorèmes de Tauber ou théorèmes des valeurs initiale et finale

#### 3.5.10.1 Théorème de la valeur initiale

Le théorème de la valeur initiale, relatif aux signaux causaux, établit que

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad (3.11)$$

Si  $x'$  est la dérivée d'un signal causal  $x(s)$  et si la transformée de Laplace de  $x'$  existe :

$$\mathcal{L}\{x'\} = \int_0^{+\infty} x' e^{-st} dt = sX(s) - x(0)$$

et

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} x' e^{-st} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) - x(0)$$

Or comme la transformée de Laplace de  $x'$  existe,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} x' e^{-st} = 0$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

#### 3.5.10.2 Théorème de la valeur finale

Le théorème de la valeur initiale, relatif aux signaux causaux, établit que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (3.12)$$

En effet, on peut écrire le second terme de cette relation

$$\begin{aligned}
 sX(s) &= \mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) + x(0) \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{st} dt + x(0) \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{+T} e^{st} dx(t) + x(0)
 \end{aligned}$$

soit, en faisant tendre  $s$  vers 0

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{+T} dx(t) + x(0) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} [x(t)]_0^{+T} + x(0) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} x(T)\end{aligned}$$

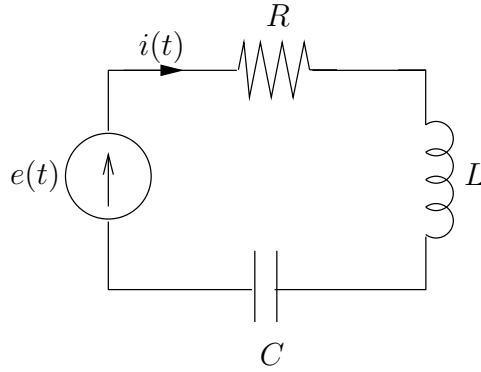
ce qui démontre la proposition.

Dans le cas particulier où la fonction  $x(t)$  considérée est la réponse indicielle (réponse à un échelon unité) d'un système dont la transmittance est  $S(s)$ , on aura  $X(s) = \mathcal{L}(x(t)) = \frac{S(s)}{s}$  et on pourra donc écrire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} S(s) \quad (3.13)$$

## 3.6 Exemples

### 3.6.1 Circuit RLC



Étant donné le circuit RLC ci-dessus, on demande de calculer la transformée de Laplace du courant parcourant ce circuit.

— Equation du circuit

$$e(t) = R i(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} \int i dt$$

— Transformée de Laplace

$$E(s) = R I(s) + L(sI(s) - i(0)) + \frac{1}{c} \left( \frac{I(s)}{s} - \frac{i'(0)}{s} \right)$$

Si les conditions initiales sont nulles, on trouve :

$$I(s) = \frac{E(s)}{(R + Ls + \frac{1}{cs})}$$

### 3.6.2 fonction sinusoïdale

Considérons la fonction  $x(t) = \sin(\omega t) \mathcal{U}(t)$ . On demande de calculer sa transformée de Laplace.

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} \sin(\omega t) e^{-st} dt$$

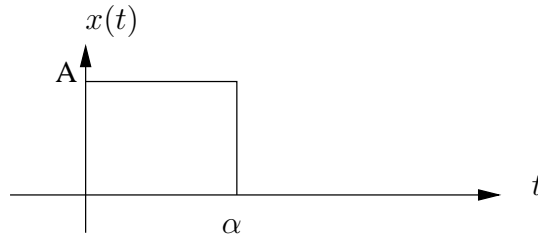
en intégrant par parties :

$$u = \sin(\omega t) \rightarrow u' = \cos(\omega t) \omega$$

$$v' = e^{-st} \rightarrow v = \frac{-e^{-st}}{s}$$

$$\begin{aligned} X(s) = \int_0^{\infty} \sin(\omega t) e^{-st} dt &= \left[ \sin(\omega t) \frac{-e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} + \frac{\omega}{s} \int_0^{\infty} \cos(\omega t) e^{-st} dt \\ &= \frac{\omega}{s} \int_0^{\infty} \cos(\omega t) e^{-st} dt \\ &= \frac{\omega}{s} \left[ \cos(\omega t) \frac{-e^{-st}}{s} \right]_0^{\infty} - \frac{\omega^2}{s^2} \int_0^{\infty} \sin(\omega t) e^{-st} dt \\ X(s) \left[ 1 + \frac{\omega^2}{s^2} \right] &= \frac{\omega}{s} \left[ \frac{1}{s} \right] \\ X(s) &= \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \end{aligned}$$

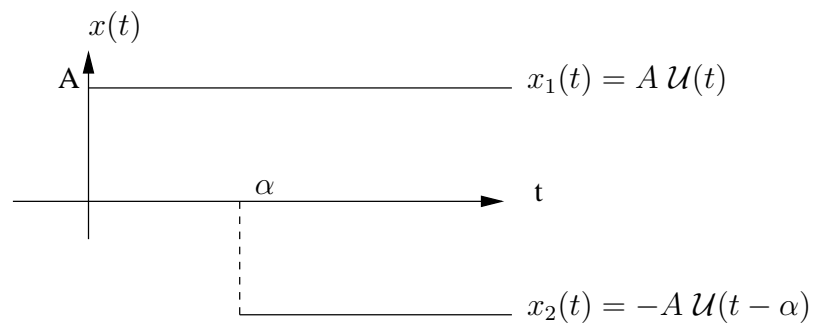
### 3.6.3 Fonction créneau



Calcul de la transformée.

$$\begin{aligned} X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt &= \int_0^{\alpha} A e^{-st} dt \\ &= \frac{-A}{s} [e^{-st}]_0^{\alpha} \\ &= \frac{-A}{s} [e^{-s\alpha} - 1] \\ &= \frac{A}{s} [1 - e^{-s\alpha}] \end{aligned}$$

La fonction  $x(t)$  peut également être considérée comme la superposition de deux fonctions  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  telles que



$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

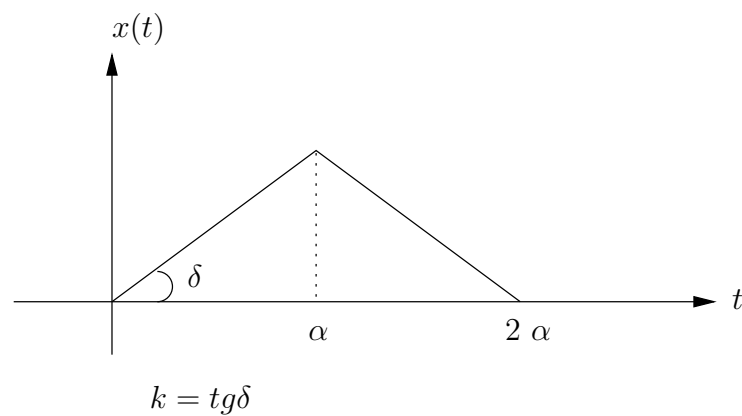
Il s'ensuit, en vertu du théorème de la linéarité que

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s)$$

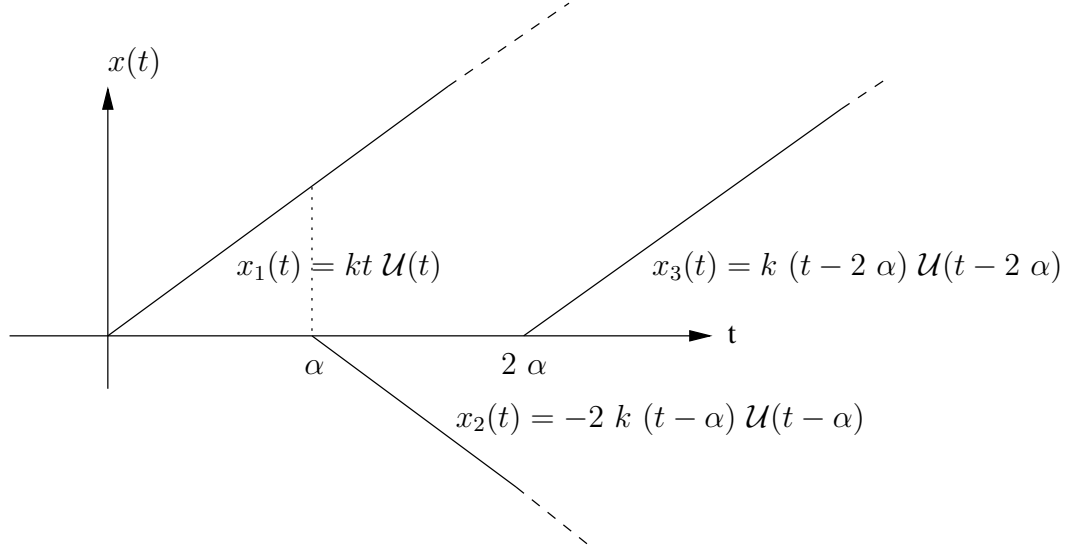
avec

$$X_1(s) = \frac{A}{s} \text{ et } X_2(s) = \frac{-A}{s} e^{-s\alpha} \text{ (Propriété de translation)}$$

### 3.6.4 Fonction triangulaire



La fonction  $x(t)$  peut se décomposer en trois fonctions  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  et  $x_3(t)$  telles que



$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

Il s'ensuit que

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s) + X_3(s)$$

Avec

$$X_1(s) = \mathcal{L}\{kt\mathcal{U}(t)\} = k \frac{-d}{ds} [\mathcal{L}\{\mathcal{U}\{t\}\}] = k \frac{-d}{ds} \left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}$$

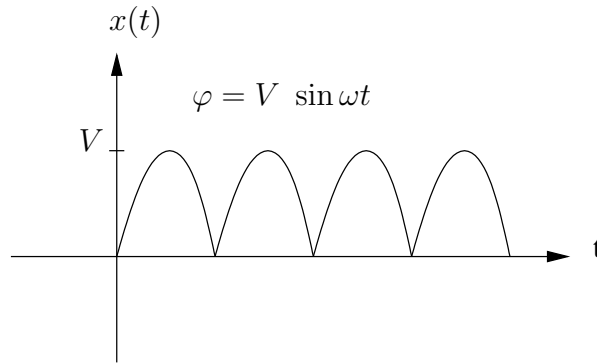
$$X_2(s) = \mathcal{L}\{-2k(t - \alpha)\mathcal{U}(t - \alpha)\} = -2k e^{-s\alpha} X_1'(s) = \frac{-2k e^{-s\alpha}}{s^2}$$

$$X_3(s) = \mathcal{L}\{k(t - 2\alpha)\mathcal{U}(t - 2\alpha)\} = k e^{-s2\alpha} X_1'(s) = \frac{k e^{-s2\alpha}}{s^2}$$

On trouve finalement

$$X(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2k e^{-s\alpha}}{s^2} + \frac{k e^{-s2\alpha}}{s^2}$$

### 3.6.5 Fonction sinus redressée



$x(t)$  est une fonction périodique dont la fonction de forme est  $\sin(\omega t)$  jusqu'à la demi-période.

$$x(t) = V \sin(\omega t) \mathcal{U}(t) + V \sin\left(\omega\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) \mathcal{U}\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$X(s) = V \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \frac{(1 + e^{-s\frac{T}{2}})}{(1 - e^{-s\frac{T}{2}})}$$

### 3.7 Transformée de Laplace inverse

On suppose connaître la transformée de Laplace  $X(s)$  d'une fonction inconnue  $x(t)$ . Le problème consiste à résoudre l'équation intégrale suivante

$$X(s) = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt$$

où le premier membre est connu et où l'inconnue se situe sous le signe intégral.

La solution du problème est fournie par l'intégrale complexe de Bromwich-Wagner

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds \quad (3.14)$$

où  $c$  doit être choisi dans le domaine de convergence de la transformée de Laplace de  $x(t)$  ( $c$  définit une droite verticale dans le domaine de convergence, le long de laquelle l'intégrale doit être calculée).

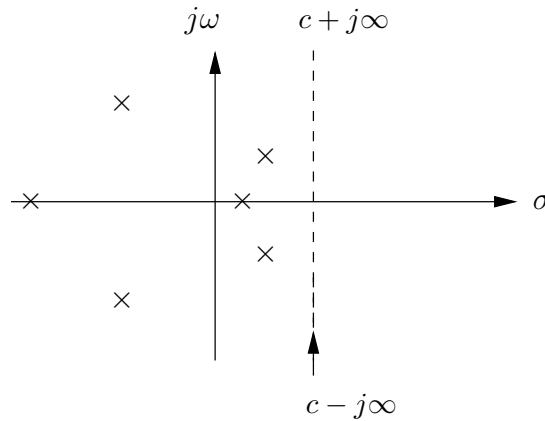


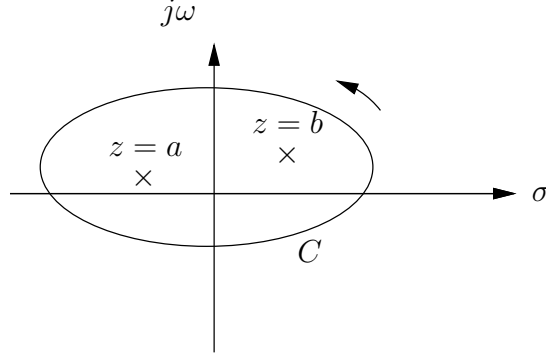
Figure 3.6 – Exemple de droite d'abscisse  $c$  dans le plan  $s$  pour un signal unilatéral à droite

Le calcul de cette intégrale peut s'effectuer soit par intégration directe dans le plan complexe, soit, sous certaines conditions, par application de la méthode des résidus ou théorème de Cauchy, soit par décomposition en fractions rationnelles simple (si  $F(p)$  est une fraction rationnelle).

#### 3.7.1 Théorème des résidus ou théorème de Cauchy

*Énoncé*

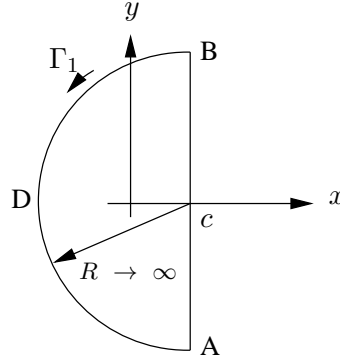
L'intégrale d'une fonction  $x(z)$  d'une variable complexe  $z$  le long d'un contour fermé  $C$  du plan de Gauss, parcouru dans le sens direct, est égale à  $2\pi j$  fois la somme des résidus  $\mathcal{R}$  de la fonction aux différents points *singuliers* situés à l'intérieur du contour  $C$  dans le plan de Gauss. Dans le cas de la figure, on obtient :



$$\oint_C x(z) dz = 2\pi j [\mathcal{R}_{z=a} + \mathcal{R}_{z=b}]$$

La flèche ( $\uparrow$ ) à droite du signe intégral indique que l'intégration doit être effectuée dans le sens direct.

### 3.7.2 Lemme de Jordan



Considérons ensuite la demi-circonférence  $\Gamma_1$  (BDA) de rayon  $R$  et de centre  $(c, 0)$ , munie de son sens de parcours (voir figure ci-dessus). Le lemme de Jordan établit que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} e^{mz} x(z) dz = 0$$

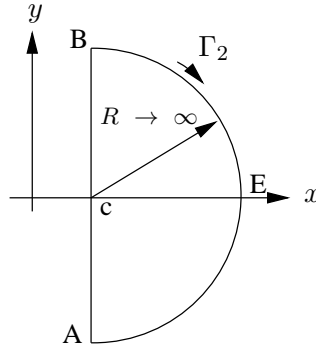
à condition que :

1.  $x(z)$  soit holomorphe dans le demi-plan complexe  $\Re(z) < c$  sauf en un nombre limité de pôles.



2.  $x(z)$  tende uniformément vers 0 pour  $|z|$  tendant vers l'infini et  $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$ , où  $\varphi$  est l'argument de  $(z - c)$ .
3.  $m \geq 0$ .

Considérons ensuite l'intégrale  $\int_{\Gamma_2} e^{mz} x(z) dz$  le long de la demi-circonférence  $\Gamma_2$  (BEA) de rayon  $R$  et de centre  $(c, 0)$ , munie de son sens de parcours (voir figure ci-dessous).



Le lemme de Jordan établit que

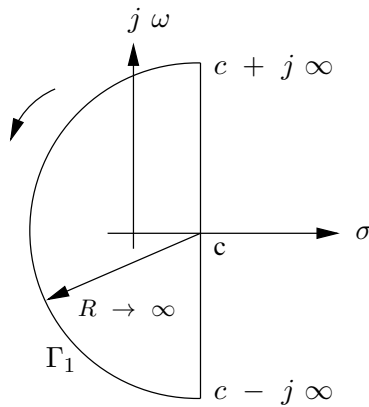
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_2} e^{mz} x(z) dz = 0$$

à condition que :

1.  $x(z)$  soit holomorphe dans le demi-plan complexe  $\Re(z) > c$  sauf en un nombre limité de pôles.
2.  $x(z)$  tende uniformément vers 0 pour  $|z|$  tendant vers l'infini et  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ , où  $\varphi$  est l'argument de  $(z - c)$ .
3.  $m < 0$ .

### 3.7.3 Calcul de l'intégrale de Bromwich-Wagner par la méthode des résidus

1. Si  $t \geq 0$



L'abscisse  $c$  a été choisie de sorte que la verticale  $\sigma = c$  du plan complexe soit dans le domaine de convergence de la transformée de Laplace  $X(s)$  de  $x(t)$ . Considérons en outre un contour fermé  $C_1$ , parcouru dans le sens direct ( $\uparrow$ ) et constitué par la verticale  $\sigma = c$  et par la demi-circonférence  $\Gamma_1$  de centre  $(c, 0)$  et de rayon  $R$  infiniment grand. On peut alors écrire en utilisant l'intégrale de Bromwich-Wagner (3.14)

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} X(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} e^{st} X(s) ds - \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_1} e^{st} X(s) ds \end{aligned}$$

Si les conditions du lemme de Jordan sont vérifiées, à savoir :

- (a)  $t \equiv m \geq 0$ ;
- (b)  $X(s)$  tend uniformément vers 0 pour  $s$  tendant vers l'infini pour  $\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2$ ;
- (c)  $X(s)$  est holomorphe dans le domaine  $\Re(s) < c$  sauf en un nombre limité de pôles;

alors

$$\int_{\Gamma_1} e^{st} X(s) ds = 0$$

et

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} e^{st} X(s) ds$$

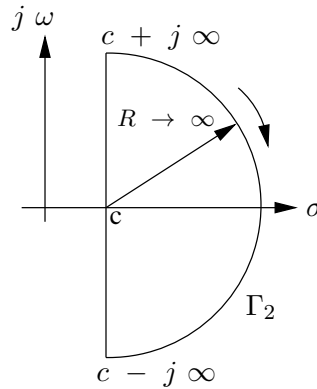
Cette dernière intégrale se calcule par la méthode des résidus :

$$\oint_{C_1} e^{st} X(s) ds = 2\pi j \sum \mathcal{R}_1\{e^{st} X(s)\}$$

avec  $\sum \mathcal{R}_1\{e^{st} X(s)\}$ , la somme des résidus de la fonction  $e^{st} X(s)$ , pour tous les pôles de  $X(s)$  situés à gauche de l'abscisse  $c$  dans le plan de Gauss et  $t \geq 0$ . L'intégrale de Bromwich-Wagner pour  $t \geq 0$  est donc, moyennant les conditions reprises ci-avant donnée par

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} X(s) ds = \sum \mathcal{R}_1\{e^{st} X(s)\}$$

2. Si  $t < 0$



Considérons cette fois un contour fermé  $C_2$ , parcouru dans le sens rétrograde ( $\downarrow$ ) et constitué par la verticale  $\sigma = c$  et par la demi-circonférence  $\Gamma_2$  de centre  $(c, 0)$  et de rayon  $R$  infiniment grand. On peut à nouveau écrire en utilisant l'intégrale de Bromwich-Wagner 3.14

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} X(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2} e^{st} X(s) ds - \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_2} e^{st} X(s) ds \end{aligned}$$

La flèche ( $\downarrow$ ) à droite de l'intégrale indique que l'intégration doit être effectuée dans le sens rétrograde.

Si les conditions du lemme de Jordan sont vérifiées, à savoir :

- (a)  $t \equiv m < 0$ ;
- (b)  $X(s)$  tend uniformément vers 0 pour  $s$  tendant vers l'infini pour  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ ;
- (c)  $X(s)$  est holomorphe dans le domaine  $\Re(s) > c$  sauf en un nombre limité de pôles;

alors

$$\int_{\Gamma_2} e^{st} X(s) ds = 0$$

et

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2} e^{st} X(s) ds$$

Cette dernière intégrale se calcule par la méthode des résidus :

$$\oint_{C_2} e^{st} X(s) ds = - \oint_{C_2} e^{st} X(s) ds = -2\pi j \sum \mathcal{R}_2\{e^{st} X(s)\}$$

avec  $\sum \mathcal{R}_2\{e^{st} X(s)\}$ , la somme des résidus de la fonction  $e^{st} X(s)$ , pour tous les pôles de  $X(s)$  situés à droite de l'abscisse  $c$  du plan de Gauss et  $t < 0$ . L'intégrale de Bromwich-Wagner pour  $t < 0$  est donc, moyennant les conditions reprises ci-avant donnée par

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} X(s) ds = - \sum \mathcal{R}_2\{e^{st} X(s)\}$$

3. En conclusion,  $x(t)$  est donné par

$$\text{Pour } t \geq 0 : \quad x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} X(s) ds = \sum \mathcal{R}_1\{e^{st} X(s)\}$$

$$\text{Pour } t < 0 : \quad x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} X(s) ds = - \sum \mathcal{R}_2\{e^{st} X(s)\}$$

où  $\sum \mathcal{R}_1\{e^{st} X(s)\}$  et  $\sum \mathcal{R}_2\{e^{st} X(s)\}$  sont les sommes des résidus de la fonction  $e^{st} X(s)$ , pour tous les pôles de  $X(s)$  respectivement à gauche et à droite de l'abscisse  $c$  dans le plan de Gauss. On constate que les intégrales de Laplace et de Bromwich-Wagner établissent une correspondance entre  $x(t)$  et  $X(s)$ . On constate également que la valeur de l'intégrale de Bromwich-Wagner ne dépend pas de la valeur de la constante  $c$ , et ce pour autant que la verticale d'équation  $\sigma = c$  du plan de Gauss  $s$  soit située dans le domaine de convergence de la transformée de Laplace de  $x(t)$ .

### 3.7.4 Extension de la méthode

Supposons que la deuxième condition de Jordan ne soit pas satisfaite. Plusieurs cas peuvent se présenter :

- Si  $\lim_{s \rightarrow \infty} X(s) = A$  avec  $A$  constant. On définit alors une fonction  $G(s) = X(s) - A$  où  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$ , pour laquelle

$$\begin{aligned} \text{pour } t \geq 0 : \quad & g(t) = \sum \mathcal{R}_1\{e^{st}G(s)\} \\ \text{pour } t < 0 : \quad & g(t) = -\sum \mathcal{R}_2\{e^{st}G(s)\} \end{aligned}$$

$G(s)$  et  $X(s)$  étant égales à une constante près, les pôles de  $G(s)$  et ceux de  $X(s)$  sont les mêmes. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} x(t) &= A \delta(t) + g(t) \\ &= A \delta_1(t) + \sum \mathcal{R}_1\{e^{st}X(s)\} \quad \text{pour } t \geq 0 \\ &= -\sum \mathcal{R}_2\{e^{st}X(s)\} \quad \text{pour } t < 0 \end{aligned}$$

où  $\sum \mathcal{R}_1\{e^{st}X(s)\}$  et  $\sum \mathcal{R}_2\{e^{st}X(s)\}$  sont les sommes des résidus de la fonction  $e^{st}X(s)$ , pour tous les pôles de  $X(s)$  respectivement à gauche et à droite de l'abscisse  $c$  dans le plan de Gauss.

- Si  $\lim_{s \rightarrow \infty} X(s) = \infty$  et  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{X(s)}{s} = B$  avec  $B$  constant. On définit alors une fonction  $G(s) = X(s) - sB$  avec  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = A$ .

$$\begin{aligned} \text{pour } t \geq 0 : \quad & g(t) = A \delta_1(t) + \sum \mathcal{R}_1\{e^{st}X(s)\} \\ \text{pour } t < 0 : \quad & g(t) = -\sum \mathcal{R}_2\{e^{st}X(s)\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{pour } t \geq 0 : \quad & x(t) = A \delta_1(t) + B \delta_2(t) + \sum \mathcal{R}\{e^{st}X(s)\} \\ \text{pour } t < 0 : \quad & x(t) = -\sum \mathcal{R}_2\{e^{st}X(s)\} \end{aligned}$$

On peut ainsi poursuivre le raisonnement.

### 3.7.5 Calcul du résidu d'une fonction $Z(s)$ pour un pôle $s = a$ d'ordre $m$ : Rappel

Considérons le développement en série de Laurent de  $Z(s)$  dans le voisinage d'un pôle  $s = a$  d'ordre  $m$ .

$$Z(s) = \frac{K_m}{(s-a)^m} + \frac{K_{m-1}}{(s-a)^{m-1}} + \dots + \frac{K_1}{(s-a)} + L_0 + L_1(s-a) + \dots + L_m(s-a)^m$$

Le résidu de  $Z(s)$  pour le pôle  $s = a$  d'ordre  $m$  est, par définition, le coefficient  $K_1$  du terme  $\frac{1}{(s-a)}$  à savoir :

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} [(s-a)^m Z(s)]$$

### 3.7.6 Calcul de l'intégrale de Bromwich-Wagner par décomposition en fractions rationnelles simples

Si  $X(s)$  est donnée sous la forme suivante

$$X(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)}$$

Si  $m \geq n$ , on obtient après division de  $P_m(s)$  par  $Q_n(s)$

$$\begin{aligned} X(s) &= \sum_{k=0}^{m-n} a_k s^k + \frac{R(s)}{T(s)} \\ &= \sum_{k=0}^{m-n} a_k s^k + \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^{\alpha_k} \frac{b_{k\ell}}{(s-s_k)^\ell} \end{aligned}$$

où  $N$  est le nombre de pôles et  $\alpha_k$  l'ordre du pôle  $s_k$ . Par commodité, on calcule le résidu au pôle  $s_k$ . A cette fin, on calcule le coefficient  $K_1$ , résidu de  $X(s)e^{st}$  en  $s = s_1$  et coefficient de  $(s-s_1)^{-1}$  dans le développement en série de Laurent de  $X(s)e^{st}$  au point  $s = s_1$ . Il est évident que

$$\left[ \sum_{k=0}^{m-n} a_k s^k + \sum_{k \neq 1}^N \sum_{\ell=1}^{\alpha_k} \frac{b_{k\ell}}{(s-s_k)^\ell} \right] e^{st}$$

est analytique au voisinage de  $s_1$  et ne contribue pas à  $K_1$ . On a alors après développement en série de  $e^{st}$  autour de  $s_1$

$$\left[ \sum_{\ell=1}^{\alpha_1} \frac{b_{1\ell}}{(s-s_1)^\ell} \right] e^{st} = e^{s_1 t} \sum_{\ell=1}^{\alpha_1} \frac{b_{1\ell}}{(s-s_1)^\ell} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(s-s_1)^k t^k}{k!}$$

Le coefficient  $K_1$  de  $(s-s_1)^{-1}$ , résidu de  $X(s)e^{st}$  en  $s = s_1$ , est donné par

$$K_1 = \left[ b_{11} + \frac{b_{12}t}{1!} + \dots + \frac{b_{1\alpha_1} t^{\alpha_1-1}}{(\alpha_1-1)!} \right] e^{s_1 t} \quad (3.15)$$

### 3.7.7 Exemples de transformée de Laplace inverse

#### 3.7.7.1 Transformée inverse de la fonction $X(s) = \frac{2a}{a^2-s^2}$

On donne la transformée de Laplace suivante

$$X(s) = \frac{2a}{a^2-s^2} = \frac{2a}{(s+a)(a-s)}$$

Cette fonction possède deux pôles, l'un en  $s = -a$  et l'autre en  $s = a$ . On calcule ensuite les résidus correspondants.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{s=-a} &= \frac{2a}{a-s} e^{st} \Big|_{s=-a} = e^{-at} \\ \mathcal{R}_{s=a} &= \frac{2a}{a+s} e^{st} \Big|_{s=a} = -e^{at} \end{aligned}$$

Le signal original  $x(t)$  dépend de la position du domaine de convergence  $D_c$  de sa transformée de Laplace. Si le domaine de convergence de la transformée de Laplace est à droite des pôles,  $x(t)$

est unilatéral à droite. Si le domaine de convergence de la transformée de Laplace est à gauche des pôles,  $x(t)$  est unilatéral à gauche. Si le domaine de convergence est entre les deux pôles,  $x(t)$  est bilatéral.

1<sup>er</sup> cas :  $D_c$  est à droite du pôle  $s = a \geq 0$  ( $x(t)$  est unilatéral à droite)

Alors

$$\text{Pour } t \geq 0 \quad x(t) = \sum \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_{s=-a} + \mathcal{R}_{s=a} = e^{-at} - e^{at}$$

et

$$\text{Pour } t < 0 \quad x(t) = 0$$

Le signal  $x(t)$  est représenté à la Fig. (3.7).

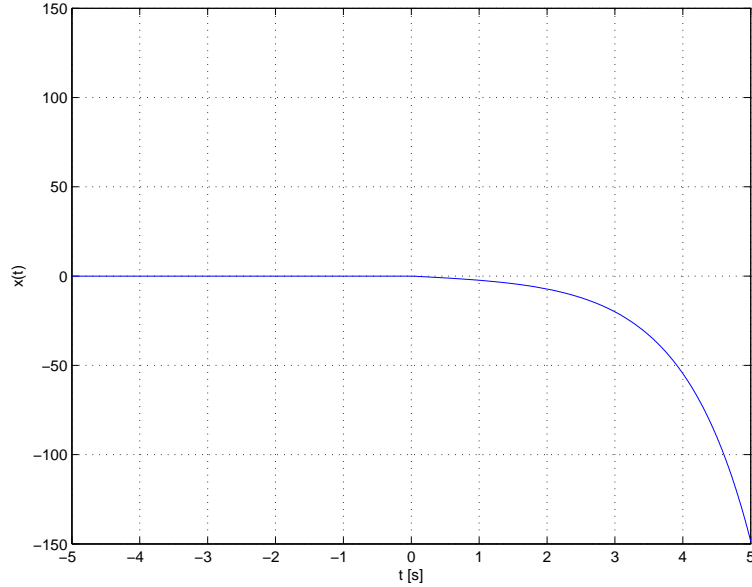


Figure 3.7 – Cas où  $x(t)$  est unilatéral à droite et  $a = 1$

2<sup>ème</sup> cas :  $D_c$  est à gauche du pôle  $s = -a$  ( $x(t)$  est unilatéral à gauche)

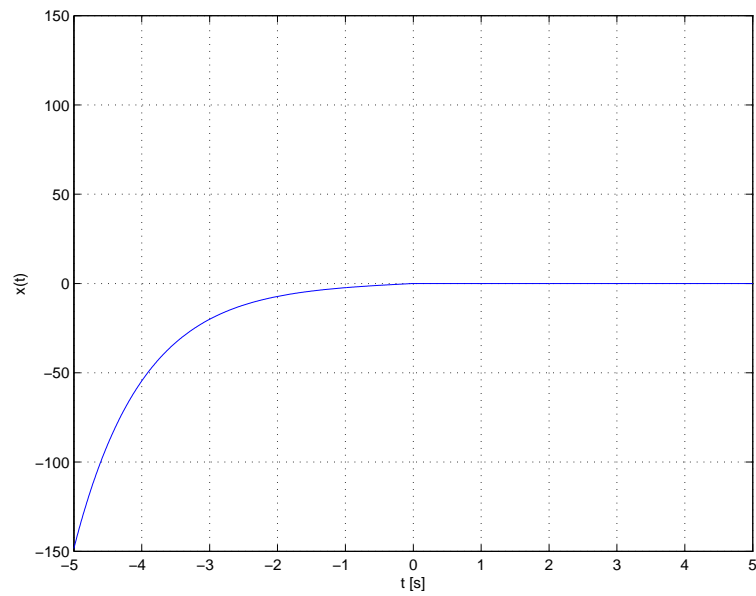
Alors

$$\text{Pour } t \geq 0 \quad x(t) = 0$$

et

$$\text{Pour } t < 0 \quad x(t) = \sum \mathcal{R}_2 = -\mathcal{R}_{s=-a} - \mathcal{R}_{s=a} = e^{at} - e^{-at}$$

Le signal  $x(t)$  est représenté à la Fig. (3.8).

Figure 3.8 – Cas où  $x(t)$  est unilatéral à gauche et  $a = 1$ 

3<sup>ème</sup> cas :  $D_c$  est entre les pôles  $s = -a$  et  $s = a$  ( $x(t)$  est bilatéral)

Alors

$$\text{Pour } t \geq 0 \quad x(t) = \sum \mathcal{R}_1 = -\mathcal{R}_{s=-a} = e^{-at}$$

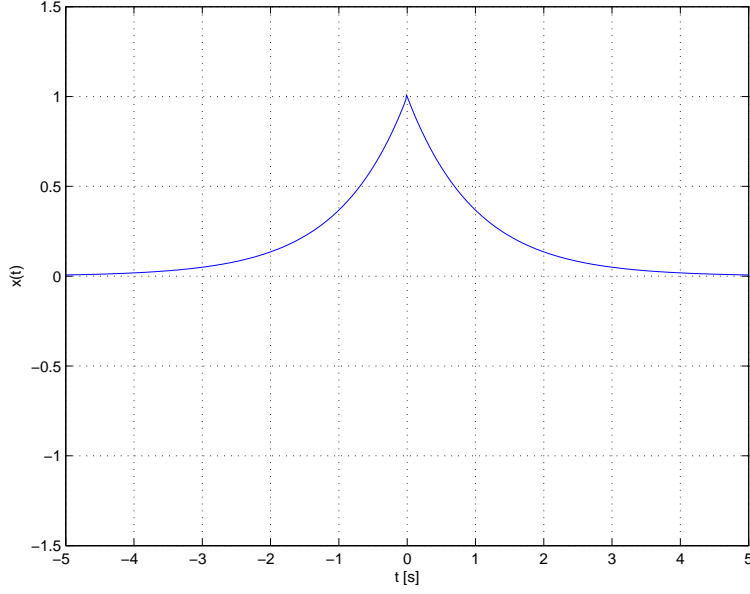
et

$$\text{Pour } t < 0 \quad x(t) = \sum \mathcal{R}_2 = -\mathcal{R}_{s=a} = e^{at}$$

En résumé,  $x(t)$  est donnée par

$$x(t) = e^{-a|t|}$$

Le signal  $x(t)$  est représenté à la Fig. (3.9).

Figure 3.9 – Cas où  $x(t)$  est bilatéral et  $a = 1$ 

### 3.7.7.2 Transformée inverse de la fonction $X(s) = \frac{2a}{a^2 - s^2} e^{-st_0}$

On donne la transformée de Laplace suivante

$$X(s) = \frac{2a}{a^2 - s^2} e^{-st_0} = \frac{2a}{(s + a)(a - s)} e^{-st_0}$$

Cette fonction possédant deux pôles, l'un en  $s = -a$  et l'autre en  $s = a$ , et à l'infini un point singulier essentiel, ne satisfait pas aux conditions des lemmes de Jordan. Cependant, cette fonction satisfait bien aux conditions des lemmes si dans les démonstrations précédentes on remplace  $e^{st}$  par  $e^{s(t')}$ , avec  $t' = t - t_0$ . On calcule ensuite les résidus correspondant à  $s = -a$  et  $s = a$  et l'on trouve la même manière que ci-dessus :

$$\mathcal{R}_{s=-a} = \left. \frac{2a}{a - s} e^{st'} \right|_{s=-a} = e^{-at'}$$

$$\mathcal{R}_{s=a} = \left. \frac{2a}{a + s} e^{st'} \right|_{s=a} = -e^{at'}$$

Considérons le cas d'un signal bilatéral, le domaine de convergence  $D_c$  de la transformée de Laplace se trouve donc entre les pôles  $s = -a$  et  $s = a$ . Il en résulte ,

$$\text{Pour } t' = (t - t_0) \geq 0 \quad x(t) = \sum \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_{s=-a} = e^{-at'} = e^{-a(t-t_0)}$$

et

$$\text{Pour } (t' = t - t_0) < 0 \quad x(t) = \sum \mathcal{R}_2 = -\mathcal{R}_{s=a} = e^{at'} = e^{a(t-t_0)}$$

En résumé,  $x(t)$  est donnée par

$$x(t) = e^{-a|t-t_0|}$$

Le signal  $x(t)$  est représenté à la Fig. (3.10).



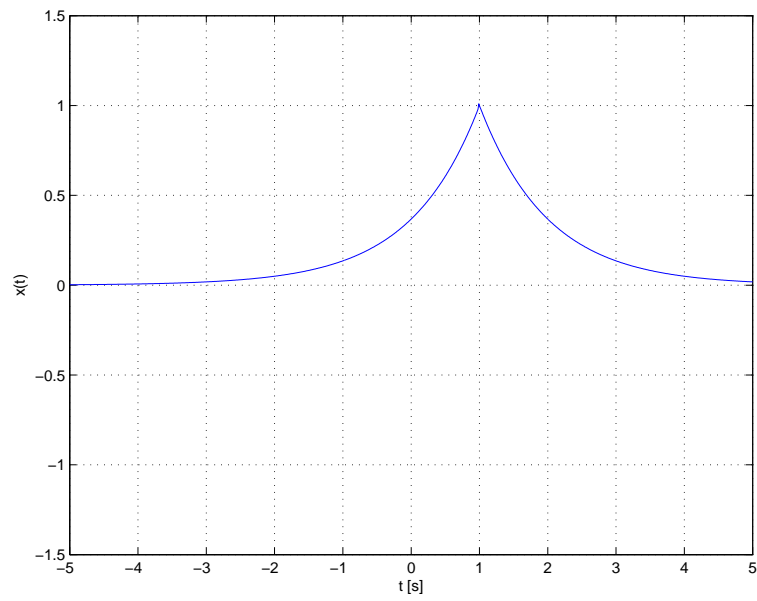


Figure 3.10 – Cas où  $x(t)$  est bilatéral,  $a = 1$  et  $t_0 = 1$  sec

**Remarque :** Il est évident qu'on aurait pu arriver directement au même résultat en utilisant la propriété de décalage.



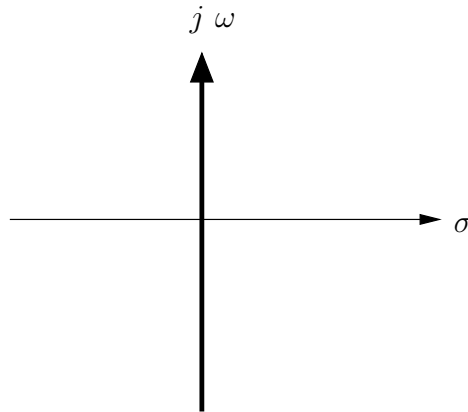
# La transformée de Fourier

## 4.1 Définition

La transformée de Fourier d'un signal  $x(t)$  est définie par :

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

et constitue un cas particulier de la transformée de Laplace, calculée pour des valeurs de  $s$  situées sur l'axe imaginaire du plan de Gauss ( $\sigma = 0$  et  $s = j\omega$ ).



La fonction  $X(j\omega)$  est le spectre du signal  $x(t)$  et peut également s'écrire sous la forme

$$X(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

Les fonctions spectrales  $A(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$  sont appelées respectivement courbes de densité spectrale d'amplitude et de phase.

Le signal  $x(t)$  est aussi appelé l'original de  $X(j\omega)$  et s'écrit alors

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$$

## 4.2 Conditions d'existence

Une condition nécessaire et suffisante d'existence de la transformée de Fourier d'un signal  $x(t)$  est que la transformée de Laplace de ce signal existe pour les valeurs de  $s$  situées sur l'axe imaginaire du plan de Gauss (c'est-à-dire pour  $s = j\omega$ ).

## 4.3 Propriétés de la transformée de Fourier

Beaucoup de propriétés de la transformée de Fourier sont tirées de celles de la transformée de Laplace dont la transformée de Fourier est un cas particulier.

### 4.3.1 Propriétés de symétrie

Outre les propriétés de la transformée de Laplace décrites dans le chapitre précédent, la transformée de Fourier possède les propriétés de symétrie décrites ci-après.

— Si  $x(t)$  est une fonction paire

$$x(t) = x(-t)$$

l'intégrale

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

est égale à

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(\cos(\omega t) - j \sin(\omega t))dt$$

$\cos \omega t$  et  $\sin \omega t$  sont des fonctions respectivement paire et impaire. Il en résulte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(\omega t) dt = 2 \int_0^{+\infty} x(t) \cos(\omega t) dt$$

et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(\omega t) dt = 0$$

Donc pour une fonction paire

$$X(j\omega) = 2 \int_0^{+\infty} x(t) \cos(\omega t) dt$$

et  $X(j\omega)$  est aussi une fonction paire mais de  $\omega$ .

— De manière analogue, si  $x(t)$  est une fonction impaire alors

$$X(j\omega) = -2j \int_0^{+\infty} x(t) \sin(\omega t) dt$$

et  $X(j\omega)$  est aussi une fonction impaire mais de  $\omega$ .

### 4.3.2 Transformée de Fourier d'une dérivée

On donne un signal  $x(t)$  et sa transformée de Fourier  $X(j\omega)$ . Il en résulte que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x'(t)\} &= \mathcal{L}\{x'(t)\}|_{s=j\omega} \\ &= j\omega \mathcal{L}\{x(t)\}|_{s=j\omega} \\ &= j\omega \mathcal{F}\{x(t)\}\end{aligned}\tag{4.1}$$

Des dérivation par rapport au temps correspondent donc à des multiplications par  $j\omega$ . C'est le résultat classique utilisé par la méthode symbolique de Steinmetz.

#### Remarque

Le théorème reste vrai même si  $x(t)$  présente des discontinuités par saut brusque à distance finie, à condition d'admettre que la dérivée d'une fonction discontinue est une distribution.

On considère à titre d'illustration la fonction créneau

$$x(t) = A\mathcal{U}(t - t_0) - A\mathcal{U}(t - t_0 - T)$$

Sa dérivée est constituée de deux impulsions de Dirac d'amplitude  $A$ , l'une positive, en  $t_0$ , et l'autre négative, en  $t_0 + T$

La transformée de Fourier de cette fonction créneau est donnée par

$$X(j\omega) = \frac{A}{j\omega} [e^{j\omega t_0} - e^{-j\omega(t_0+T)}]$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x'(t)\} &= A[e^{j\omega t_0} - e^{-j\omega(t_0+T)}] \\ &= j\omega X(j\omega)\end{aligned}$$

#### Généralisation du théorème

$$\mathcal{F}\{x^{(n)}\} = (j\omega)^n X(j\omega)\tag{4.2}$$

### 4.3.3 Transformée de Fourier d'une intégrale

On considère un signal  $x(t)$  et sa transformée de Fourier  $X(j\omega)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

En intégrant les deux membres de l'équation par rapport au temps, on trouve

$$\int x(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

d'où

$$\mathcal{F}\left\{\int x(t) dt\right\} = \frac{X(j\omega)}{j\omega}$$

Intégrer par rapport au temps revient à diviser par  $j\omega$ .

#### 4.3.4 Changement de signe

$$\mathcal{F}\{x(-t)\} = X(-j\omega) \quad (4.3)$$

#### 4.3.5 Réciprocité

Si  $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$ ,

$$\mathcal{F}\{X(j\omega)\} = 2\pi x(-t) \quad (4.4)$$

$$\mathcal{F}\{X(-j\omega)\} = 2\pi x(t) \quad (4.5)$$

**Démonstration**

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} 2\pi x(-t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega(-t)} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \\ &= \mathcal{F}_t\{X(j\omega)\} \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} 2\pi x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{-j\omega(-t)} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(-j\omega') e^{-j\omega' t} d\omega' \\ &= \mathcal{F}_t\{X(-j\omega)\} \end{aligned}$$

#### 4.3.6 Transformée de Fourier de fonctions complexes conjuguées

On considère une fonction complexe

$$x(t) = x_1(t) + jx_2(t)$$

et sa fonction complexe conjuguée

$$x^*(t) = x_1(t) - jx_2(t)$$

La transformée de Fourier de  $x^*(t)$  est donnée par

$$\mathcal{F}\{x^*(t)\} = X^*(-j\omega)$$

et

$$\mathcal{F}\{x^*(-t)\} = X^*(j\omega)$$

#### 4.3.7 Décalage (shift)

$$\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

$e^{-j\omega t_0}$  est la transmittance isochrone d'un temps mort de durée  $t_0$

### 4.3.8 Modulation

$$\mathcal{F}\{x(t)e^{j\omega_1 t}\} = X[j(\omega - \omega_1)] \quad (4.6)$$

$$\mathcal{F}\{x(t) \cos \omega_1 t\} = \frac{1}{2}X[j(\omega - \omega_1)] + \frac{1}{2}X[j(\omega + \omega_1)] \quad (4.7)$$

$$\mathcal{F}\{x(t) \sin \omega_1 t\} = \frac{1}{2j}X[j(\omega - \omega_1)] - \frac{1}{2j}X[j(\omega + \omega_1)] \quad (4.8)$$

Moduler un signal avec une fonction  $e^{j\omega_1 t}$  revient à décaler son spectre en fréquence de  $\omega_1$

### 4.3.9 Produit de convolution

$$\mathcal{F}\{x * g(t)\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)g(t - \tau)d\tau\right\} = X(j\omega)G(j\omega) \quad (4.9)$$

$$\mathcal{F}\{x(t)g(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega')G[j(\omega - \omega')]d\omega' \quad (4.10)$$

Il s'agit du résultat important du processus de diagonalisation consistant à remplacer le produit de convolution par un produit simple de deux fonctions scalaires.

### 4.3.10 Théorème de Parseval

$$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \quad (4.11)$$

La transformée de Fourier conserve l'énergie d'un signal.

## 4.4 Transformée de Fourier inverse

La transformée de Fourier étant un cas particulier de la transformée de Laplace, sa transformée inverse est obtenue directement à partir de l'intégrale de Bromwich-Wagner et est donnée par l'équation (3.14) :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (4.12)$$

Cette dernière équation exprime qu'un signal pratiquement quelconque (il suffit qu'il soit absolument intégrable!) peut être considéré comme une "somme" infinie d'exponentielles complexes dont l'amplitude  $X(j\omega)$  est complexe, c'est-à-dire que le module de la transformée de Fourier de  $x(t)$ , à savoir  $|X(j\omega)|$ , représente l'amplitude de l'exponentielle complexe correspondante et que l'argument de cette transformée de Fourier, à savoir  $\arg\{X(j\omega)\}$ , représente la phase de cette exponentielle complexe. En effet, pour une pulsation particulière  $\omega_0$  on a :

$$X(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} = |X(j\omega_0)| e^{j(\omega_0 t + \arg\{X(j\omega_0)\})}$$

A titre d'exemple, considérons la transformée inverse de Fourier d'une impulsion de Dirac à l'origine  $\delta(t)$ , sachant que la transformée de Fourier d'une Dirac vaut 1 (comme pour la transformée de Laplace) :

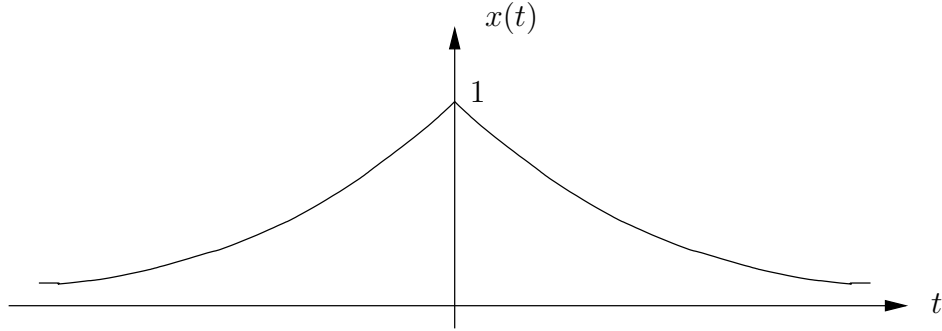
$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

La fonction de Dirac  $\delta(t)$  peut donc être considérée comme une “somme” infinie d’exponentielles complexes  $e^{j\omega t}$  pour toutes les valeurs possibles de  $\omega$  allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ , toutes ces exponentielles complexes ayant la même amplitude égale à l’unité et une phase initiale égale à zéro ( $\arg\{X(j\omega)\} = 0$ ). Ceci explique pourquoi l’impulsion de Dirac a une importance primordiale dans l’étude des systèmes linéaires stationnaires. Il s’agit en effet d’un signal “cohérent” comprenant toutes les pulsations possibles avec la même amplitude, et donc la même importance.

La transformée de Fourier inverse peut se calculer de manière directe en utilisant la formule (4.12) ci-dessus ou par la méthode des résidus décrite au chapitre précédent, en remplaçant  $j\omega$  par  $s$ , en tenant compte du fait que  $\sigma = 0$  (donc  $c = 0$  dans l’intégrale de Bromwich-Wagner).

## 4.5 Exemples

1.  $x(t) = e^{-a|t|}$  avec  $a > 0$ .



$x(t)$  est un signal bilatéral, constitué de deux signaux, l’un unilatéral à droite,  $x_1(t) = e^{-at}\mathcal{U}(t)$  et l’autre unilatéral à gauche,  $x_2(t) = e^{at}\mathcal{U}(-t)$ . Le domaine de convergence est donc situé entre deux droites verticales du plan de Gauss, l’une à droite du pôle le plus à droite de  $x_1(t)$ , l’autre à gauche du pôle le plus à gauche de  $x_2(t)$ .

Comme  $x(t)$  est une fonction paire, sa transformée de Fourier devient

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(\omega t) dt \end{aligned}$$

En intégrant deux fois par parties, on obtient

$$X(j\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \quad (4.13)$$

### Calcul de la transformée inverse de (4.13)

— *Par la méthode des résidus*

(4.13) peut s’écrire

$$X(j\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} = \frac{2a}{(a + j\omega)(a - j\omega)}$$



En remplaçant  $j\omega$  par  $s$ , cette expression devient

$$X(s) = \frac{2a}{(a+s)(a-s)}$$

$X(s)$  possède deux pôles, l'un, en  $s = -a$ , à gauche de l'axe imaginaire ( $\sigma = 0$ ) et l'autre, en  $s = a$ , à droite de l'axe imaginaire. L'abscisse  $c$  de la droite du plan de Gauss, le long de laquelle l'intégrale de Bromwich-Wagner doit être calculée, vaut zéro ( $c = 0$ ), puisqu'il s'agit de la transformée de Fourier. Il en résulte que

— pour  $t \geq 0$  seul le pôle  $s = -a$  (à gauche de l'axe imaginaire) doit être pris en compte pour le calcul des résidus  $\mathcal{R}_1$ , et

$$\text{pour } \forall t \geq 0 \quad x(t) = \mathcal{R}_1\{X(s)e^{st}\}_{s=-a} = \frac{2a}{a-s}e^{st} \Big|_{s=-a} = e^{-at}$$

— pour  $t < 0$  seul le pôle  $s = a$  (à droite de l'axe imaginaire) doit être pris en compte pour le calcul des résidus  $\mathcal{R}_2$ , et

$$\text{pour } \forall t < 0 \quad x(t) = -\mathcal{R}_2\{X(s)e^{st}\}_{s=a} = \frac{2a}{a+s}e^{st} \Big|_{s=a} = e^{at}$$

Il en résulte que

$$x(t) = e^{-a|t|}$$

— *Par intégration directe*

$$X(j\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Comme  $X(j\omega)$  est paire,

$$x(t) = \frac{4a}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega$$

or

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|m|}$$

En choisissant  $\frac{\omega}{a} = x$  et  $m = at$

$$x(t) = 2 \frac{a}{\pi} \frac{\pi}{2a} e^{-a|t|} = e^{-a|t|}$$

## 2. Transformée d'une constante

Soit  $x(t) = K = \text{constante}$ .

L'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$  diverge, mais  $x(t) = \lim_{a \rightarrow 0} K e^{-a|t|}$  d'où

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} K e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} K \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} K \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Cette expression est égale à zéro pour  $\omega \neq 0$  et à l'infini pour  $\omega = 0$ , donc

$$X(j\omega) = K' \delta(\omega)$$

Il reste à déterminer la valeur de la constante  $K'$ . Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} K' \delta(\omega) d\omega = K'$$

$$\begin{aligned} K' &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{a \rightarrow 0} K \frac{2a}{a^2 + \omega^2} d\omega \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} K \frac{2a}{a^2 + \omega^2} d\omega \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} 2Ka \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + \omega^2} d\omega \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} 2K \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{a^2}} d\frac{\omega}{a} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} 2K [\arctan(\frac{\omega}{a})]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= 2K\pi \end{aligned}$$

Et finalement

$$X(j\omega) = 2K\pi \delta(\omega)$$

**Transformée inverse du résultat**

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2K\pi \delta_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= K \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_1(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= K \end{aligned}$$

## 3. Transformée d'une exponentielle complexe

$$x(t) = e^{j\omega_1 t} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha|t|} e^{j\omega_1 t}$$

La transformée de Fourier de cette fonction est donnée par

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|} e^{j\omega_1 t} dt \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{[\alpha - j(\omega - \omega_1)]t} dt + \int_0^{+\infty} e^{[-\alpha - j(\omega - \omega_1)]t} dt \right\} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\alpha - j(\omega - \omega_1)} + \frac{1}{\alpha + j(\omega - \omega_1)} \right] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_1)^2} \end{aligned}$$

Si  $\alpha \rightarrow 0$ , il vient

$$\begin{aligned} \text{pour } \omega \neq \omega_1 \quad X(j\omega) &= 0 \\ \text{pour } \omega = \omega_1 \quad X(j\omega) &= \infty \end{aligned}$$

On trouve donc

$$X(j\omega) = K\delta(\omega - \omega_1)$$

Comme précédemment, la constante K se détermine en calculant l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_1)^2} d\omega = 2\pi$$

On a donc finalement :

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_1)$$

**Transformée inverse du résultat**

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} 2\pi\delta(\omega - \omega_1) d\omega \\ &= e^{j\omega_1 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_1) d\omega \\ &= e^{j\omega_1 t} \end{aligned}$$

De même

$$\mathcal{F}\{e^{-j\omega_1 t}\} = 2\pi\delta_1(\omega + \omega_1)$$

## 4. Transformée d'une fonction sinusoïdale

Soit

$$x(t) = \cos \omega_1 t = \frac{e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}}{2}$$

En utilisant les résultats précédents,

$$\mathcal{F}\{\cos \omega_1 t\} = \pi \delta(\omega - \omega_1) + \pi \delta(\omega + \omega_1)$$

On trouve de même

$$\mathcal{F}\{\sin \omega_1 t\} = -j\pi\delta(\omega - \omega_1) + j\pi\delta(\omega + \omega_1)$$

ce qui s'écrit encore

$$\mathcal{F}\{\sin \omega_1 t\} = \pi\delta(\omega - \omega_1)e^{-j\frac{\pi}{2}} + j\pi\delta(\omega + \omega_1)e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

d'où

$$A(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_1) + \pi\delta(\omega + \omega_1)$$

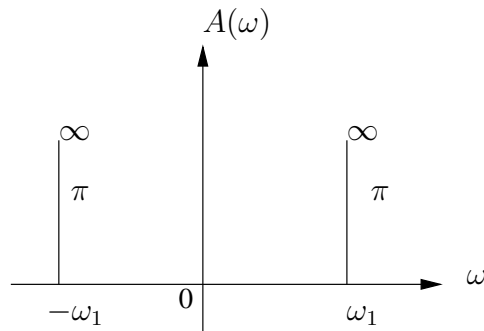
$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= -\frac{\pi}{2} \text{ pour } \omega = \omega_1 \\ &= +\frac{\pi}{2} \text{ pour } \omega = -\omega_1 \end{aligned}$$

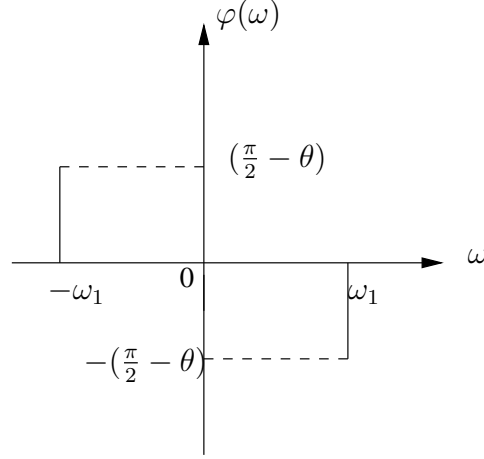
Plus généralement,

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_1 t + \theta)\} = \pi\delta(\omega - \omega_1)e^{j\theta} + \pi\delta(\omega + \omega_1)e^{-j\theta}$$

$$\mathcal{F}\{\sin(\omega_1 t + \theta)\} = \pi\delta(\omega - \omega_1)e^{-j(\frac{\pi}{2}-\theta)} + \pi\delta(\omega + \omega_1)e^{j(\frac{\pi}{2}-\theta)}$$

Les courbes spectrales correspondant à ce dernier cas sont représentées schématiquement ci-après.





5. *Signaux périodiques* (voir aussi le chapitre 12)

Soit  $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t + kT)$  un signal périodique de période  $T$ . Si l'on développe  $\tilde{x}(t)$  en série de Fourier on obtient

$$\tilde{x}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{j \frac{2\pi n t}{T}}$$

avec

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{x}(t) e^{-j \frac{2\pi n t}{T}} dt$$

En posant  $\frac{2\pi}{T} = \omega_1$ , la pulsation fondamentale, et  $\frac{2n\pi}{T} = n\omega_1$ , la  $n^{\text{ième}}$  harmonique

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} 2\pi C_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

Il s'agit d'une somme de fonctions de Dirac, espacées de  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  et d'intensité  $I_n$  définie par

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi C_n \delta(\omega - n\omega_1) d\omega = 2\pi C_n$$

Si le signal périodique est réel, son développement en série de Fourier s'écrit

$$\tilde{x}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

où les coefficients  $a_n$  sont réels. La transformée de Fourier de  $\tilde{x}(t)$  est alors :

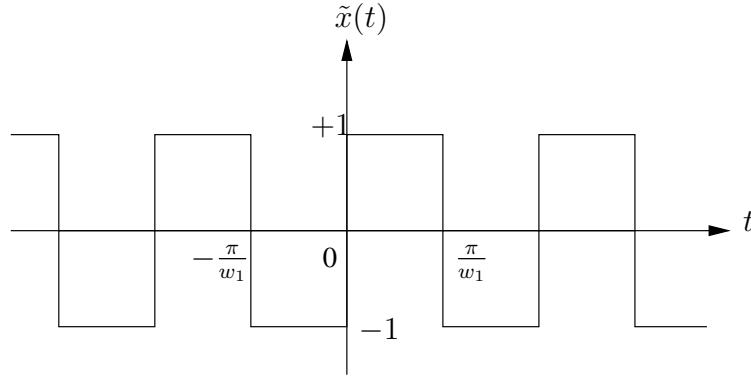
$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = 2\pi a_0 \delta(\omega) + \sum_1^{\infty} 2\pi a_n \delta(\omega - n\omega_1) e^{-j(\frac{\pi}{2} - \varphi_n)} + \sum_1^{\infty} 2\pi a_n \delta(\omega + n\omega_1) e^{j(\frac{\pi}{2} - \varphi_n)}$$

Il en résulte que la transformée de Fourier du signal périodique  $\tilde{x}(t)$  est un spectre de raies à la pulsation fondamentale  $\omega_1$ , à ses harmoniques  $n\omega_1$  et à l'origine (composante continue) dont l'"amplitude" et la phase sont données respectivement par  $a_n$  et  $\varphi_n$ , des fonction de  $n\omega$ .

**Exemple**

Considérons la fonction :

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= +1 && \text{pour } 2k\frac{\pi}{\omega_1} < t < (2k+1)\frac{\pi}{\omega_1} \\ &= -1 && \text{pour } (2k+1)\frac{\pi}{\omega_1} < t < (2k+2)\frac{\pi}{\omega_1}\end{aligned}$$



En développant  $\tilde{x}(t)$  en série de Fourier, on obtient

$$\tilde{x}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}$$

avec

$$\begin{aligned}C_n &= \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega_1}}^{\frac{\pi}{\omega_1}} \tilde{x}(t) e^{jn\omega_1 t} dt \\ &= \frac{\omega_1}{2\pi} \left\{ - \int_{-\frac{\pi}{\omega_1}}^0 \tilde{x}(t) e^{-jn\omega_1 t'} dt' + \int_0^{\frac{\pi}{\omega_1}} \tilde{x}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \right\}\end{aligned}$$

Posons ensuite  $t' = t - \frac{\pi}{\omega_1}$  dans la première intégrale,

$$\begin{aligned}C_n &= \frac{\omega_1}{2\pi} \left\{ - \int_0^{\frac{\pi}{\omega_1}} \tilde{x}(t) e^{-jn\omega_1(t - \frac{\pi}{\omega_1})} dt + \int_0^{\frac{\pi}{\omega_1}} \tilde{x}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \right\} \\ &= \frac{\omega_1}{2\pi} (1 - e^{jn\pi}) \int_0^{\frac{\pi}{\omega_1}} \tilde{x}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \\ &= \frac{1 - \cos n\pi}{jn\pi}\end{aligned}$$

Pour  $n$  pair

$$C_n = 0$$

Pour  $n$  impair

$$C_n = \frac{2}{jn\pi}$$

et

$$C_{-n} = \frac{2}{-jn\pi}$$

d'où finalement

$$\tilde{x}(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\sin \omega_1 t}{1} + \frac{\sin 3\omega_1 t}{3} + \frac{\sin 5\omega_1 t}{5} \right]$$

La transformée de Fourier de  $\tilde{x}(t)$  est finalement donnée par

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \sum_{n=2k+1=1}^{n=2k+1=\infty} \frac{4}{n} [\delta(\omega - n\omega_1)e^{-j\frac{\pi}{2}} + \delta(\omega + n\omega_1)e^{j\frac{\pi}{2}}]$$

Les courbes spectrales et le spectre de raies de  $\tilde{x}(t)$  sont représentés dans les figures ci-après.

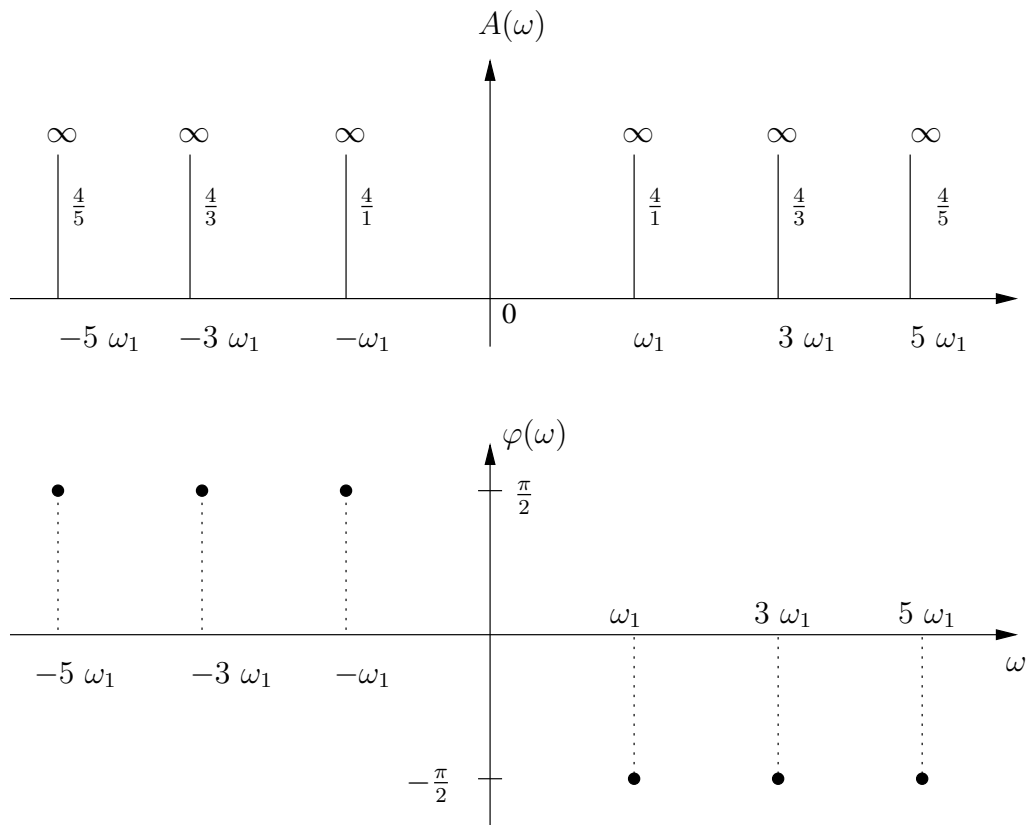
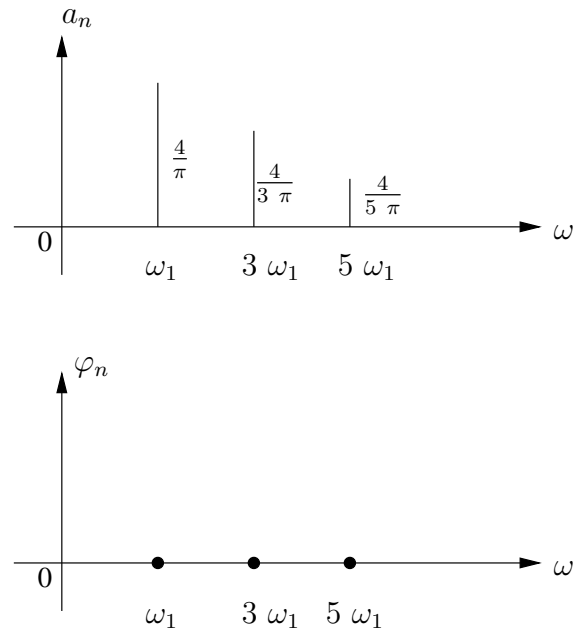


Figure 4.1 – Courbes spectrales de  $\tilde{x}(t)$

Le spectre de raies de la fonction est représenté ci-après

Figure 4.2 – Spectre de raies de  $\tilde{x}(t)$ 

## 6. Transformée de l'impulsion de Dirac

Si  $x(t) = \delta(t - t_0)$ .

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}$$

Dès lors,  $A(\omega) = 1$  et  $\varphi(\omega) = -t_0\omega$ . En particulier, pour  $t_0 = 0$ ,  $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ .



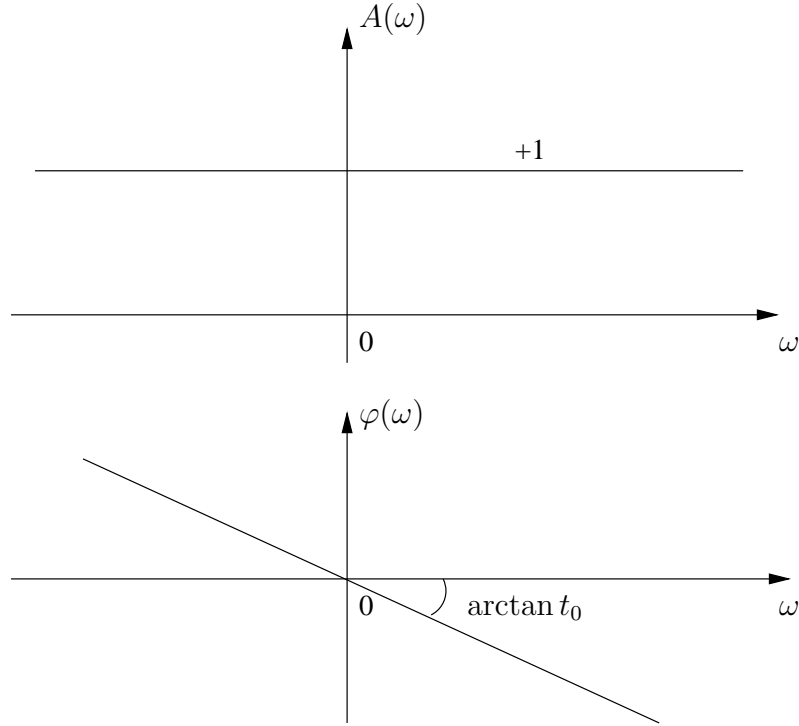


Figure 4.3 – Courbes spectrales de la fonction de Dirac

**Transformée inverse**

Comme  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jx} dx$  n'existe pas et comme procédé précédemment, on calcule

$$x(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\omega| - j\omega t_0} e^{-j\omega t} d\omega$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\omega| + j\omega(t-t_0)} d\omega &= \int_{-\infty}^0 e^{[a+j(t-t_0)]\omega} d\omega + \int_0^{\infty} e^{-[a-j(t-t_0)]\omega} d\omega \\ &= \frac{2a}{a^2 + (t-t_0)^2} \end{aligned}$$

d'où

$$x(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{\pi[a^2 + (t-t_0)^2]}$$

Or cette limite vaut zéro pour  $t \neq t_0$  et l'infini pour  $t = t_0$ . De plus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi[a^2 + (t-t_0)^2]} dt = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{a}{\pi} \left[ \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = 1$$

On a donc bien

$$x(t) = \delta(t - t_0)$$

**7. Echelon unitaire**

Si

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 && \text{pour } -\infty < t < 0 \\ &= 1 && \text{pour } 0 < t < +\infty \end{aligned}$$

On peut écrire

$$x(t) = \mathcal{U}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-a|t|} \mathcal{U}(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{e^{-a|t|} \mathcal{U}(t)\} &= \int_0^\infty e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{-1}{a + j\omega} [e^{-(a+j\omega)t}]_0^\infty = \frac{1}{a + j\omega} \end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{F}\{\mathcal{U}(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a + j\omega} = \frac{1}{j\omega}$$

On en tire

$$A(\omega) = \left| \frac{1}{\omega} \right|$$

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= -\frac{\pi}{2} && \text{pour } \omega > 0 \\ &= \frac{\pi}{2} && \text{pour } \omega < 0 \end{aligned}$$

Le calcul de la transformée inverse de  $X(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$  offre une difficulté due au fait que cette fonction présente une singularité à l'origine. Dès lors, on calcule

$$x(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a + j\omega} e^{j\omega t} d\omega$$

avec  $a > 0$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a + j\omega} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos \omega t + j \sin \omega t)(a - j\omega)}{a^2 + \omega^2} d\omega$$

Calculons successivement les quatres termes de  $g(t)$  :

$$I_1 = \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega$$

d'où en posant  $\omega = ay$

$$I_1 = \frac{2a}{2\pi} \frac{a}{a^2} \int_0^\infty \frac{\cos aty}{1 + y^2} dy = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} e^{-a|t|}$$

$$I_2 = \frac{-j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \cos \omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega = 0$$

puisque l'intégrand est pair et dépourvu de singularités.

$$I_3 = \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega = 0$$

pour les mêmes raisons.

$$I_4 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t}{a^2 + \omega^2} d\omega = 0$$

d'où en posant  $\omega = ay$

$$I_4 = \frac{2a}{2\pi} \frac{a^2}{a^2} \int_0^\infty \frac{y \sin aty}{1 + y^2} dy$$

Or

$$\int_0^\infty \frac{y \sin my}{1+y^2} dy = -\frac{d}{dm} \int_0^\infty \frac{\cos mx}{1+x^2}$$

d'où pour  $t > 0$

$$I_4 = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{d(at)} \left[ \frac{\pi}{2} e^{-at} \right] = \frac{1}{2} e^{-a t}$$

et pour  $t < 0$

$$I_4 = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{d(at)} \left[ \frac{\pi}{2} e^{a t} \right] = \frac{-1}{2} e^{at}$$

On trouve donc finalement

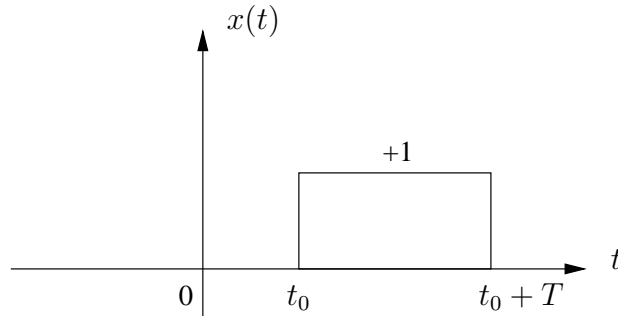
$$\begin{aligned} g(t) &= e^{-at} && \text{pour } t > 0 \\ &= 0 && \text{pour } t < 0 \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} x(t) = \lim_{a \rightarrow 0} g(t) &= 1 && \text{pour } t > 0 \\ &= 0 && \text{pour } t < 0 \end{aligned}$$

Il y a bien une correspondance bi-univoque entre  $x(t) \equiv \mathcal{U}(t)$  et  $X(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

#### 8. Fonction créneau



Si  $x(t) = \mathcal{U}(t - t_0) - \mathcal{U}(t - t_0 - T)$ .

Sa transformée est donnée par

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{e^{-j\omega(t_0+T)} - e^{-j\omega t_0}}{-j\omega} \\ &= \frac{2}{\omega} e^{-j\omega(t_0 + \frac{T}{2})} \frac{e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}}}{2j} \\ &= 2 \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\omega} e^{-j\omega(t_0 + \frac{T}{2})} \\ &= T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\omega(t_0 + \frac{T}{2})} \end{aligned}$$

d'où il résulte que

$$A(\omega) = 2 \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\omega}$$

$$\varphi(\omega) = -\left(t_0 + \frac{T}{2}\right)\omega$$

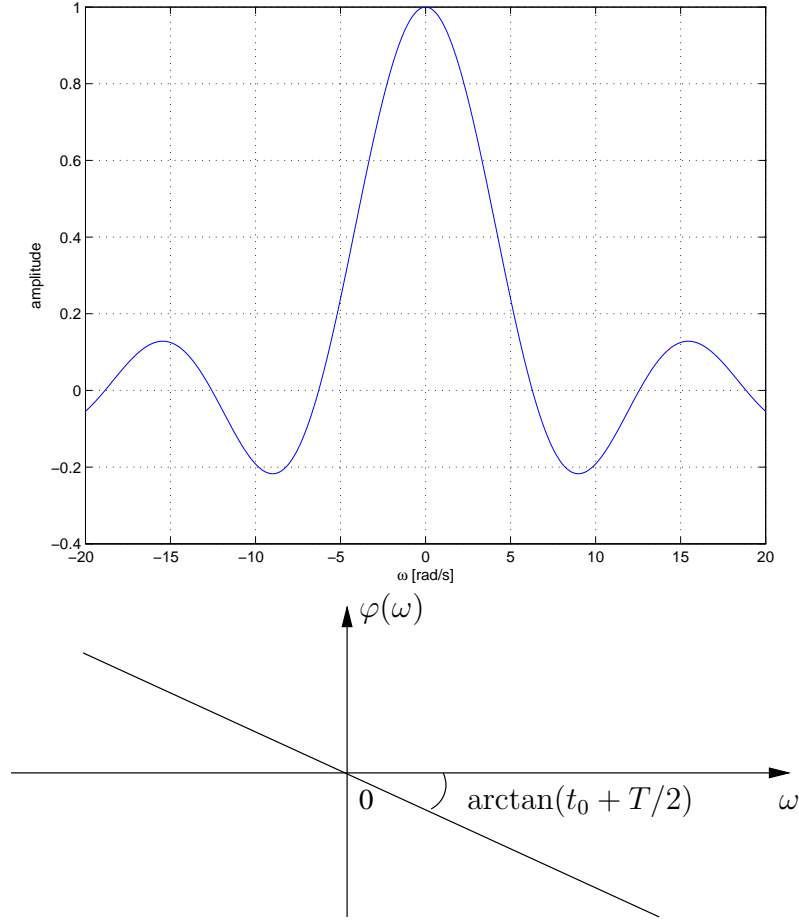


Figure 4.4 – Courbes spectrales d’une fonction créneau, pour  $T = 1$  sec

La fonction  $A(\omega) = 2 \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\omega}$  est nulle pour  $\omega = \frac{2\pi k}{T}$  ( $k$  est ici un nombre entier différent de 0). La fonction a des extremums pour  $\frac{\omega_k T}{2} = u_k$  où  $u_k$  est l’extremum de  $\text{sinc}(u)$  c’est-à-dire la solution de  $\tan(u) = u$  dans l’intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + k\pi[$ . Ces extremums valent

$$A(0) = T,$$

$$A\left(\frac{2u_1}{T}\right) \simeq A\left(\frac{3\pi}{T}\right) = -\frac{2T}{3\pi}$$

$$A\left(\frac{2u_2}{T}\right) \simeq A\left(\frac{5\pi}{T}\right) = \frac{2T}{5\pi} \dots$$

## 4.6 Conclusion

On constate donc qu’il est possible, en étendant avec soin les concepts et règles de l’analyse classique, d’établir un dictionnaire des fonctions et de leurs transformées de Fourier d’où ne seront

pas absentes les fonctions que l'on rencontre en pratique. La correspondance bi-univoque entre une fonction et son spectre de Fourier a pu être établie même dans un certain nombre de cas singuliers. Il faut remarquer cependant que cela ne peut se faire que pour des fonctions qui sont limites d'une famille de fonctions admettant chacune une transformée non singulière.



# La stabilité des systèmes linéaires et stationnaires

## 5.1 Définition de la stabilité au sens du critère BIBO

Un système est dit stable au sens du critère BIBO (Bounded Input Bounded Output) si à tout signal d'entrée borné, correspond un signal de sortie borné.

## 5.2 Condition nécessaire et suffisante de stabilité au sens du critère BIBO

Un système est dit stable au sens du critère BIBO si et seulement si sa réponse impulsionnelle est absolument intégrable, c'est-à-dire si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |w(t)| dt < \infty$$

Il faut et il suffit donc que la norme  $\mathcal{L}_1$  de  $w(t)$  existe.

## 5.3 Condition nécessaire et suffisante de stabilité

Comme la condition ci-dessus est une condition nécessaire et suffisante d'existence de la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du système, l'existence au sens strict de la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du système est une *condition nécessaire et suffisante* de stabilité. Autrement dit, une condition nécessaire et suffisante de stabilité est que l'axe imaginaire du plan de Gauss soit compris dans le domaine de convergence de la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle du système.

Appliquons ensuite cette condition nécessaire et suffisante aux différents types de réponses impulsionnelles.

1.  $w(t)$  est à support borné  
 $w(t) = 0$  sauf en un nombre fini d'échantillons.

Le domaine de convergence de la transformée de Laplace de  $w(t)$  comprend tout le plan  $s$ . L'axe imaginaire du plan de Gauss est donc toujours dans le domaine de convergence et un système caractérisé par une réponse impulsionnelle  $w(t)$  à support borné est **toujours stable**.

2.  $w(t)$  est à support unilatéral à droite

Ce cas revêt une très grande importance, puisqu'il concerne tous les systèmes causaux.

Le domaine de convergence de la transformée de Laplace de  $w(t)$  comprend la partie du plan  $s$  située à droite de la droite verticale d'abscisse  $\sigma_{\inf}$  ( $\forall \Re\{s\} > \sigma_{\inf}$ ).

$\sigma_{\inf}$  est déterminé par la partie réelle du pôle de plus grande partie réelle de  $H(s)$ . Pour que le système soit stable il faut et il suffit que l'axe imaginaire du plan de Gauss soit situé dans le domaine de convergence, ou que, ce qui revient au même, tous les pôles de  $H(s)$  soient situés à gauche de l'axe imaginaire ou encore que tous les pôles aient leur partie réelle négative.

3.  $w(t)$  est à support unilatéral à gauche

Le domaine de convergence de la transformée de Laplace de  $w(t)$  comprend la partie du plan  $s$  située à gauche de la droite verticale d'abscisse  $\sigma_{\sup}$  ( $\forall \Re\{s\} < \sigma_{\sup}$ ).

$\sigma_{\sup}$  est déterminé par la partie réelle du pôle de plus petite partie réelle de  $H(s)$ . Pour que le système soit stable il faut et il suffit que l'axe imaginaire du plan de Gauss soit dans le domaine de convergence, ou que, ce qui revient au même, tous les pôles de  $H(s)$  soient situés à droite de l'axe imaginaire ou encore que tous les pôles aient leur partie réelle positive.

4.  $w(t)$  est à support bilatéral

Ce cas englobe notamment l'étude des systèmes de formation d'image.

La réponse impulsionnelle  $w(t)$  doit être scindée en deux fonctions, l'une à support unilatéral à gauche  $w_1(t)$  et l'autre à support unilatéral à droite  $w_2(t)$ . Pour que le système soit stable, il suffit que les pôles de  $H_1(s)$  soient à droite de l'axe imaginaire du plan de Gauss et que ceux de  $H_2(s)$  soient à gauche de l'axe imaginaire.

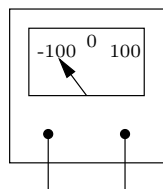


# L'analyse harmonique des systèmes linéaires et stationnaires

## 6.1 La réponse en fréquence d'un système causal stable en régime

### 6.1.1 Introduction

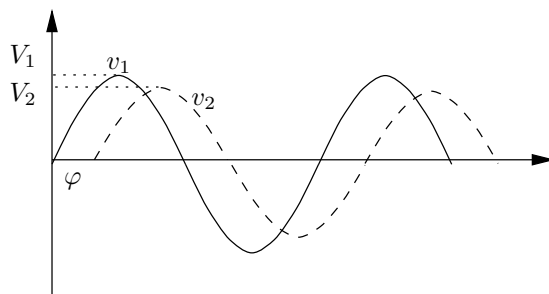
Considérons un voltmètre analogique.



Le signal d'entrée est une tension.  
Le signal de sortie est la déviation d'une aiguille sur un cadran.

- Si on applique une tension constante, l'aiguille va être déviée et va se mettre dans une position bien déterminée sur le cadran indiquant par là la mesure de la tension appliquée.
- Si par contre, on applique une tension sinusoïdale  $v_1 = V_1 \sin(\omega t)$ , l'aiguille va se mettre à osciller à la même fréquence.

Pour des fréquences croissantes, on observe que l'amplitude du signal de sortie diminue et qu'il apparaît un déphasage entre le signal d'entrée et le signal de sortie.



La *réponse en fréquence* d'un système linéaire, stable et en régime est l'ensemble des réponses du

système à des sollicitations sinusoïdales de toutes les fréquences possibles. On étudie la dynamique du système avec les réponses en fréquence.

On appelle respectivement courbes de gain et de phase les courbes qui donnent  $V_2/V_1 = f(\omega)$  et  $\varphi = f(\omega)$ .

## 6.2 Représentations de la transmittance isochrone

La transmittance isochrone d'un système linéaire stationnaire, qui par définition est la transformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle, est souvent représentée de deux façons différentes : sous forme cartésienne (courbe de Cauchy-Nyquist) où sous forme polaire (courbes de Bode).

En guise de préambule (voir figure 6.1), choisissons comme signal d'entrée d'un système linéaire stationnaire une fonction sinusoïdale d'amplitude  $A$  et de phase initiale nulle  $A \cdot \sin(\omega_0 t)$ . En vertu de ce qui a été dit plus avant, la grandeur de sortie de ce système est un sinus de même pulsation  $\omega_0$ , ce qui est encourageant, mais dont l'amplitude a été multipliée par le module de la transmittance isochrone  $|H(j\omega_0)|$ , calculé à la pulsation considérée  $\omega_0$ , et dont la phase a été augmentée de  $\arg\{H(j\omega_0)\}$ , calculé également à la pulsation considérée  $\omega_0$ . C'est cette influence du système sur la grandeur d'entrée que l'on essaye de représenter en fonction de la fréquence, en utilisant les courbes de Bode et de Cauchy-Nyquist.

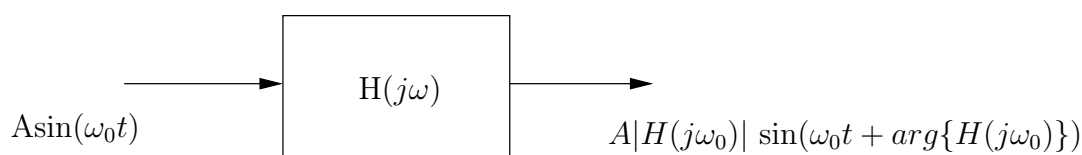
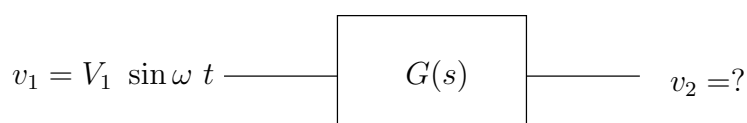


Figure 6.1 – Réponse d'un système linéaire stationnaire à une pulsation  $\omega_0$

## 6.3 Courbes de Bode



On considère un système caractérisé par sa transmittance  $H(s)$  et dont le signal d'entrée est un signal sinusoïdal  $v_1 = V_1 \sin \omega t$ , avec  $\omega$  quelconque.

$$V_2(s) = V_1(s)H(s)$$

avec

$$V_1(s) = \frac{\omega V_1}{s^2 + \omega^2}$$

Si on connaît  $H(s)$ , on peut déterminer la transformée de Laplace du signal de sortie et, en effectuant la transformée de Laplace inverse, le signal de sortie en fonction du temps. Pour ce faire, on doit d'abord déterminer les pôles de  $V_2(s)$ . L'ensemble des pôles de  $V_2(s)$  comprend les pôles de  $V_1(s)$  et les pôles de  $H(s)$ . Les pôles de  $H(s)$  se trouvent à gauche de l'axe imaginaire

par suite de la stabilité du système. Ils donnent lieu à des résidus de la forme  $e^{-a t}$  pour les pôles n'ayant qu'une partie réelle et  $e^{-at} \sin(bt + \varphi)$  pour les pôles ayant une partie réelle et une partie imaginaire. Les résidus correspondant aux pôles de  $H(s)$  sont tous des fonctions qui tendent vers zéro de façon exponentielle. Ils constituent les termes transitoires. Les pôles de  $V_1(s)$  sont  $s_1 = j\omega$  et  $s_2 = -j\omega$ . Étant donné que le système est supposé en régime, on ne doit prendre en considération que les résidus de  $V_1(s)$ .

$$\begin{aligned} v_{2\text{rég}} &= \{H(s) \frac{\omega V_1 e^{st}}{s^2 + \omega^2} (s - j\omega)\}_{s=j\omega} + \{H(s) \frac{\omega V_1 e^{st}}{s^2 + \omega^2} (s + j\omega)\}_{s=-j\omega} \\ &= H(j\omega) \frac{V_1 e^{j\omega t}}{2j} + H(-j\omega) \frac{\omega V_1 e^{-j\omega t}}{-2j} \end{aligned}$$

D'autre part, on décompose

$$H(j\omega) = H_1(\omega) + jH_2(\omega) \text{ et } H(-j\omega) = H_1(\omega) - jH_2(\omega)$$

et on écrit que

$$\begin{aligned} v_{2\text{rég}} &= \frac{V_1}{2j} \{(H_1 + jH_2)(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) - (H_1 - jH_2)(\cos(\omega t) - j \sin(\omega t))\} \\ &= V_1 \{H_2 \cos(\omega t) + H_1 \sin(\omega t)\} \\ &= V_1 \sqrt{H_1^2 + H_2^2} \left\{ \frac{H_2}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2}} \cos(\omega t) + \frac{H_1}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2}} \sin(\omega t) \right\} \end{aligned}$$

On vérifie que :

$$-1 \leq \frac{H_1}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2}} \leq 1 \text{ ainsi que } -1 \leq \frac{H_2}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2}} \leq 1$$

et que leur somme au carré est égale à 1. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} v_{2\text{rég}} &= V_1 \sqrt{H_1^2 + H_2^2} \{\sin(\varphi) \cos(\omega t) + \cos(\varphi) \sin(\omega t)\} \\ &= V_1 \sqrt{H_1^2 + H_2^2} \sin(\omega t + \varphi) \\ \varphi &= \arctan \frac{H_2}{H_1} \end{aligned}$$

$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{H_1^2 + H_2^2}$  est le gain du système et est égal au module  $|H(j\omega)|$ .

$\varphi = \arg\{H(j\omega)\}$  est la différence de phase entre  $v_{2\text{rég}}$  et  $v_1$ .

On préfère souvent travailler avec le gain logarithmique que l'on définit comme suit :

$$A = 20 \log_{10} \frac{V_2}{V_1} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$

—  $A$  et  $\varphi$  sont fonctions de  $\omega$  ou  $\log(\omega)$ . En effet, dans un diagramme fréquentiel, ce qui se passe entre 1 et 10 est aussi important que ce qui se passe entre 10 et 100 Hz.

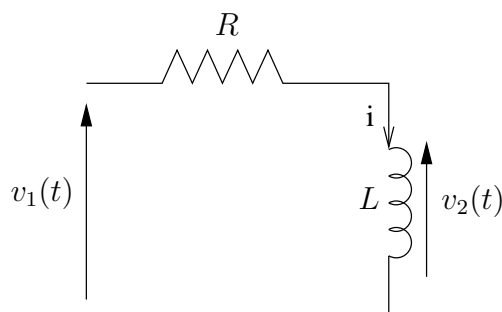
$A$  est exprimé en décibels (dB) et  $\varphi$  en degrés ou en radians. On appelle les courbes  $A$  et  $\varphi$  fonctions de  $\omega$  **courbes de BODE**.

— On définit un octave comme étant un interval ou bande de fréquence dont la valeur supérieure est le double de la valeur inférieure.

— On définit une décade comme étant une bande de fréquence dont la valeur supérieure est égale à dix fois la valeur inférieure.

— On appelle  $H(j\omega)$  transmittance isochrone.

## 6.4 Application



### 1. Equations de fonctionnement

$$\begin{aligned} v_1 &= Ri + L \frac{di}{dt} \\ v_2 &= L \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

### 2. Transformation de Laplace

$$\begin{aligned} V_1 &= (R + sL)I \\ V_2 &= sLI \end{aligned}$$

### 3. Transmittance isomorphe

$$H(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{sL}{R + sL}$$

### 4. Transmittance isochrone

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega L(R - j\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ &= \frac{\omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \frac{\omega LR}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ &= \frac{\omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \text{ et } H_2(j\omega) = \frac{\omega LR}{R^2 + \omega^2 L^2} \end{aligned}$$

### 5. Gain

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{\omega^4 L^4 + \omega^2 L^2 R^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2}} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Le gain varie donc bien avec la fréquence. Pour  $\omega \rightarrow 0$ , le Gain  $V_2/V_1 \rightarrow 0$ .

Pour une fréquence nulle (c'est-à-dire pour une tension d'alimentation continue), la bobine agit comme un court-circuit.

Pour des hautes fréquences, le gain  $V_2/V_1 \rightarrow 1$ , on retrouve tout. On est donc en présence d'un filtre passe-haut.

### 6. Phase

$$\varphi = \arg\{H(j\omega)\} = \arctan \frac{R}{\omega L}$$

## 6.5 Représentation asymptotique des courbes de gain et de phase

### 6.5.1 Décomposition de $Y(s)$ en facteurs

Généralement  $H(s)$  s'écrit sous la forme suivante :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Où  $N(s)$  et  $D(s)$  sont des polynômes en  $s$ .

La transmittance peut également être décomposée en un produit de facteurs :

$$H(s) = \pi K, s^a, (\tau s + 1)^b, (\tau^2 s^2 + 2 \tau \zeta s + 1)^c \text{ où } a, b, c \in \mathbb{Z}$$

Le gain logarithmique est donné par :

$$A = 20 \log_{10} |Y(j\omega)| = 20 \log_{10} K + 20a \log_{10} |j\omega| + 20b \log_{10} |(\tau j\omega + 1)| + 20c \log_{10} |(\tau^2 j^2 \omega^2 + 2\tau \zeta j\omega + 1)|$$

Le gain logarithmique est donc la somme des gains logarithmiques des structures élémentaires.

La différence de phase entre les signaux de sortie et d'entrée est donnée par :

$$\varphi = \arg\{(j\omega)^a\} + \arg\{(1 + \tau j\omega)^b\} + \dots$$

La phase est donnée par la somme des arguments des structures élémentaires.

### 6.5.2 Construction des courbes asymptotique de BODE de structures élémentaires

#### 6.5.2.1 Constante ( $H(s) = K$ )

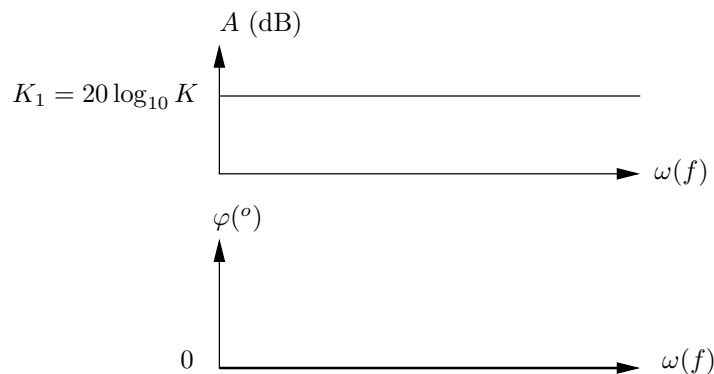
Le gain est égal à :

$$A = 20 \log_{10} K = \text{Constante}$$

La phase est égale à :

$$\varphi = 0$$

La phase est nulle dans toute la bande de fréquence.



### 6.5.2.2 Dérivateur ( $H(s) = s$ )

Le gain est égal à :

$$A = 20 \log_{10} \omega$$

Cette équation représente une droite dans un système d'axes  $(\log_{10} \omega, A)$ . Pour pouvoir représenter cette droite, il faut soit deux points, soit un point et la pente de la droite.

$$\text{Si } \omega = 1 \Rightarrow A = 20 \log_{10} 1 = 0$$

La droite passe par le point  $(0, 0)$  dans un système d'axes  $(\log_{10} \omega, A)$

$$\text{Si } \omega = \omega_1 \Rightarrow A_1 = 20 \log_{10} \omega_1$$

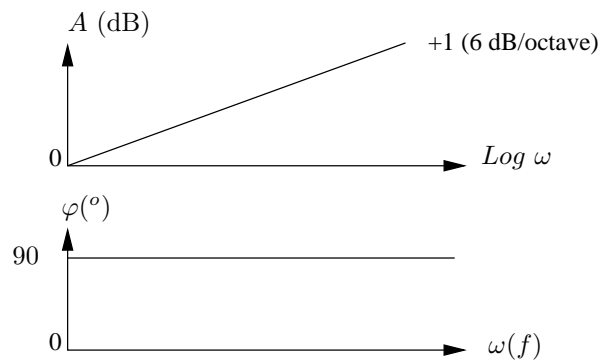
$$\text{Si } \omega = 2\omega_1 \Rightarrow A_1 = 20 \log_{10} \omega_1 + 20 \log_{10} 2 = 20 \log_{10} \omega_1 + 6 \text{ (dB)}$$

La pente est donc de 6 dB/Octave ou 20 dB/décade.

La phase est égale à :

$$\varphi = 90^\circ$$

Pour un signal d'entrée  $v_1 = V_1 \sin(\omega t)$ , on a un signal de sortie  $v_2 = V_1 \omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = V_1 \omega \cos(\omega t)$  (Système dérivateur).



### 6.5.2.3 Intégrateur ( $H(s) = 1/s$ )

Le gain est égal à :

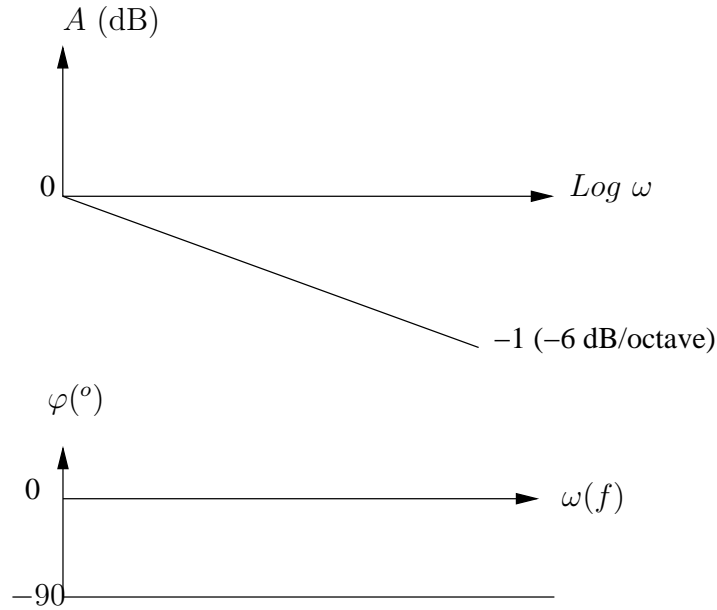
$$A = -20 \log_{10} \omega$$

On a également une droite dans un système d'axes  $(\log_{10} \omega, A)$ . Cette droite passe par le point  $(0, 0)$  et a une pente égale à  $-1$ , soient  $-6$  dB par octave ou  $-20$  dB par décade.

La phase est égale à :

$$\varphi = -90^\circ$$

Pour un signal d'entrée  $v_1 = V_1 \sin(\omega t)$ , on a un signal de sortie  $v_2 = (V_1/\omega) \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = -(V_1/\omega) \cos(\omega t)$  (Système intégrateur).



#### 6.5.2.4 Facteur du premier ordre ( $H(s) = (\tau s + 1)$ )

$\tau$  est la constante de temps du système.

Le gain est égal à :

$$A = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$$

Il ne s'agit plus d'une droite mais d'une courbe que l'on va approcher par deux asymptotes.

— Cas où  $\tau\omega \ll 1 \Leftrightarrow \omega \ll 1/\tau$  (Basses fréquences)

Dans ce cas :  $A = 20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$

— Cas où  $\tau\omega \gg 1 \Leftrightarrow \omega \gg 1/\tau$  (Hautes fréquences)

Dans ce cas :  $A = 20 \log_{10} \tau\omega$  (Droite passant par le point  $(1/\tau, 0)$  et ayant une pente égale à  $+1$  soient  $+6 \text{ dB/octave}$  (ou  $20 \text{ dB/décade}$ ))

*Erreur commise en remplaçant la courbe réelle par la courbe asymptotique*

Pour les très basses fréquences et les très hautes fréquences, l'erreur commise est minime. Elle s'accroît pour des fréquences proches de  $1/\tau$  où elle est maximale.

Pour  $\omega = 1/\tau$ , on a  $A = 20 \log_{10} \sqrt{2} = 3 \text{ dB}$ . L'erreur maximale commise est donc de 3 dB.

La phase est égale à :

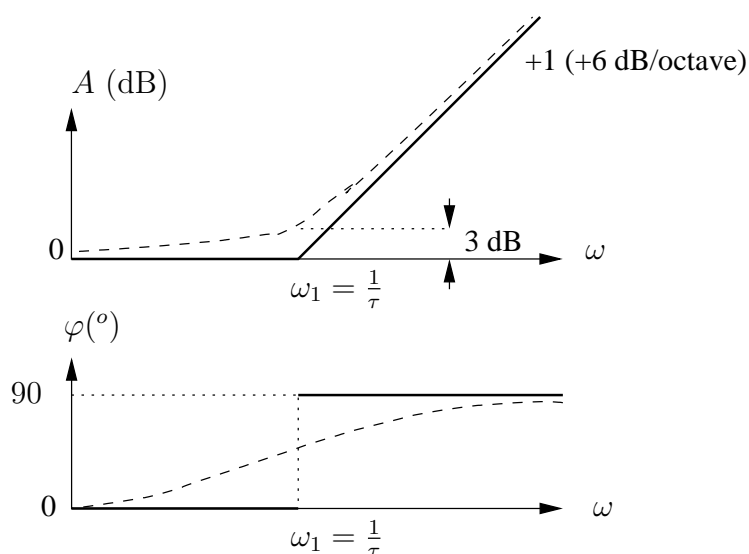
$$\varphi = \arctan \omega\tau$$

Pour les basses fréquences (BF) :  $\varphi = \arctan 0 = 0^{\circ}$ .

Pour les hautes fréquences (HF) :  $\varphi = \arctan \infty = 90^{\circ}$ .

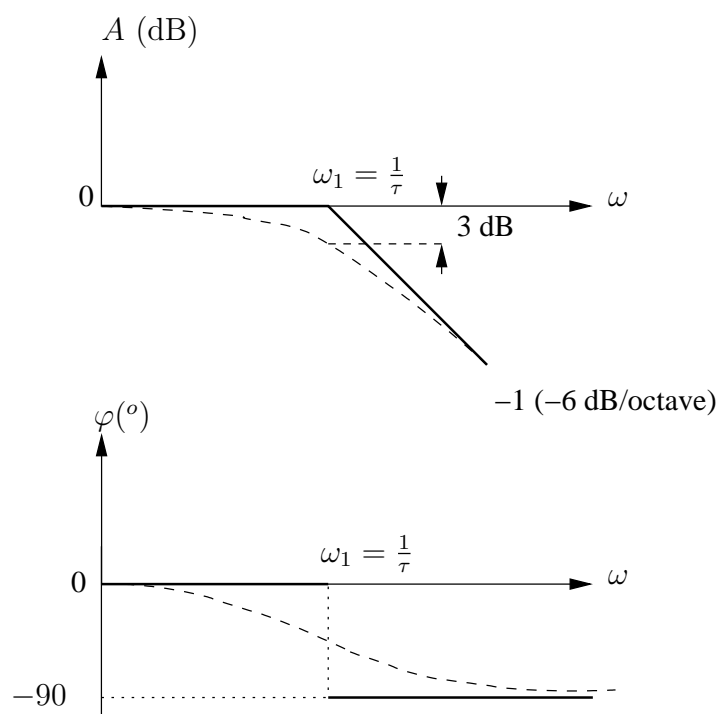
La courbe exacte passe relativement loin des asymptotes pour les fréquences intermédiaires.

**NB** :  $\omega = 1/\tau$  est appelée **fréquence caractéristique** ou **fréquence de coupure**.



#### 6.5.2.5 Diviseur du premier ordre ( $H(s) = 1/(\tau s + 1)$ )

Ce cas est similaire au précédent au signe près puisque l'on travaille avec des logarithmes.



#### 6.5.2.6 Facteur quadratique ( $H(s) = \tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1$ )

$0 \leq \zeta \leq 1$ ;  $\zeta$  est une caractéristique du système.

Le gain est égal à :

$$A = 20 \log_{10} \sqrt{(1 - \omega^2 \tau^2)^2 + 4\omega^2 \zeta^2 \tau^2}$$



— en BF :  $\omega\tau \ll 1 \Rightarrow A = 0$

— en HF :  $\omega\tau \gg 1 \Rightarrow A = 20 \log_{10} \omega^2 \tau^2 = 40 \log_{10} \omega\tau$ .

On est également en présence d'une droite mais dont la pente est cette fois égale à 12 dB/Octave ou 40 dB/décade.

L'erreur commise est maximale pour  $\omega = 1/\tau \leftrightarrow A = 20 \log_{10} 2\zeta$ . Si  $\zeta = 1$  (valeur maximale)  $\Rightarrow A = 6$  dB. La structure n'est plus quadratique. En effet  $Y(p) = (\tau p + 1)^2$ .

Si  $\zeta = 0,5 \Rightarrow A = 0$  dB.

Si  $0,5 \leq \zeta \leq 1$  on a une valeur positive du gain.

Si  $\zeta = 0$  (valeur minimale)  $\Rightarrow A = -\infty$ .

On a dans ce cas-là un phénomène de résonance qui se produit.

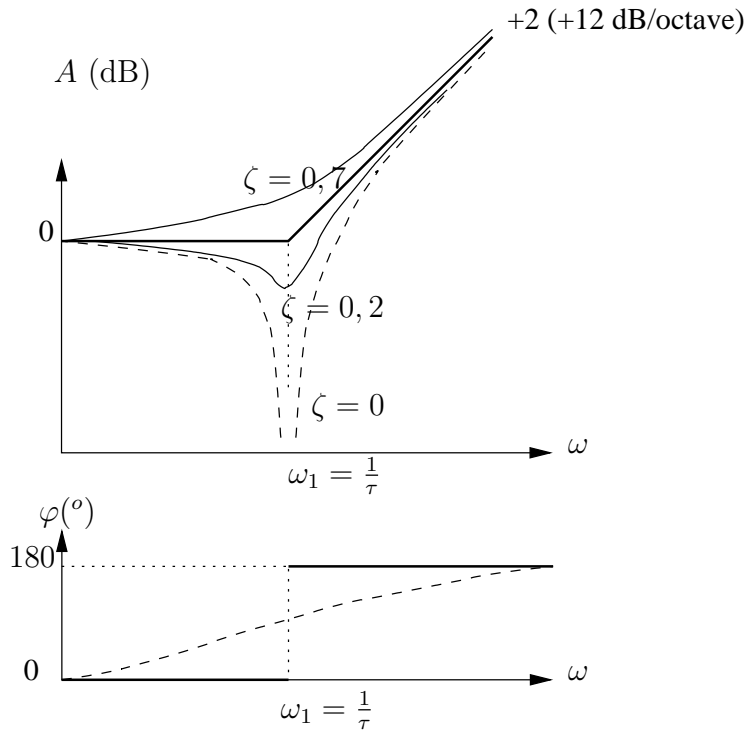
La phase est égale à :

$$\varphi = \arctan \frac{2\omega\tau\zeta}{1 - \omega^2\tau^2}$$

Pour les basses fréquences (BF) :  $\varphi = \arctan 0 = 0^\circ$ .

Pour les hautes fréquences (HF) :  $\varphi = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arctan \frac{2\omega\tau\zeta}{-\omega^2\tau^2} = 180^\circ$ .

La valeur de  $\zeta$  influence le passage de 0 à  $180^\circ$ . Plus la valeur de  $\zeta$  est faible (plus le pic est accentué), plus le passage s'effectuera rapidement



#### 6.5.2.7 Diviseur quadratique ( $H(s) = (\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1)^{-1}$ )

Cas similaire au précédant avec changement de signe.



## Deuxième partie

# Les signaux déterministes discrets



# Les systèmes linéaires discrets

---

## 7.1 Introduction

### 7.1.1 Signaux

Un *signal* peut être défini comme une *fonction* qui véhicule de *l'information* sur une grandeur physique. Cette fonction scalaire ou vectorielle, réelle ou complexe, dépend d'une ou plusieurs variables indépendantes comme le temps et/ou l'espace.

Un signal est donc représenté mathématiquement comme une fonction scalaire ou vectorielle, réelle ou complexe, d'une ou plusieurs variables indépendantes.

Exemples :

- Le relevé de la température au cours du temps.
- Le son entendu pendant une conversation peut être représenté comme l'amplitude des variations de pressions au cours du temps.
- Une photographie noir et blanc peut être représentée comme l'intensité lumineuse en fonction de deux variables spatiales.

### 7.1.2 Signaux discrets

Un signal est dit *discret* si la (les) *variable(s) indépendante(s)* prend (prennent) des *valeurs discrètes*.

Exemples :

- de la musique digitale ; le signal est constitué des échantillons des variations de pressions en fonction du temps ;
- une photo digitale ; le signal bidimensionnel est formé par des échantillons de l'intensité lumineuse pris à des positions discrètes dans le plan focal ;

Les signaux discrets peuvent être obtenus à partir de l'échantillonnage d'un signal continu ou peuvent être intrinsèquement discrets.

Exemples de signaux échantillonnés :

- de la musique digitale ; le signal continu est échantillonné dans le temps ;
- une photo digitale ; le signal spatial bidimensionnel est échantillonné à des positions particulières

dans le plan focal ;

Exemples de signaux intrinsèquement discrets :

- le taux de réussite à l'examen d'entrée en fonction de l'année ; il n'y a en effet qu'une seule session d'examen d'entrée par an ;
- l'heure de coucher du soleil chaque jour ; le soleil ne se couche qu'une seule fois par jour !

Un signal discret est représenté par une suite de nombres.

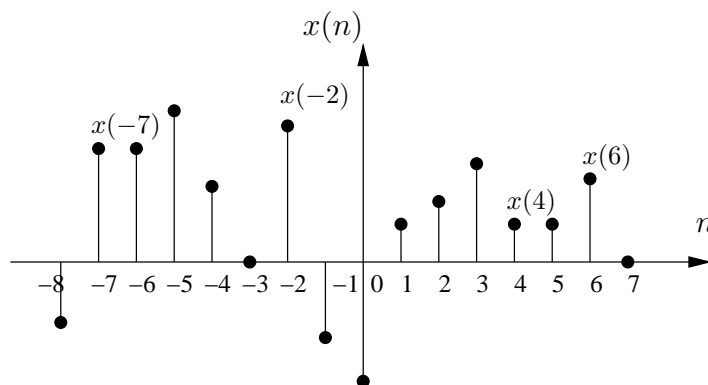
$$x = \{x(n)\} \text{ avec } -\infty < n < \infty \quad (7.1)$$

où  $x(n)$  est le  $n^{\text{ième}}$  élément de la suite. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on notera la suite  $\{x(n)\}$  simplement  $x(n)$  ou  $x$ .

Bien que la variable indépendante puisse prendre des valeurs discrètes, l'amplitude du signal peut prendre des valeurs continues ou des valeurs discrètes. On parle de *signaux digitaux* dans ce dernier cas. Lorsque la variable indépendante et l'amplitude ont des valeurs continues, on parle de *signaux numériques*. Pour pouvoir utiliser l'information contenue dans le signal, il faut l'extraire. Pour cela il faut *traiter le signal*, c-à-d le transformer en un autre signal que l'on peut étudier plus facilement. De la même façon que l'on classe les signaux, on classe les systèmes en *systèmes discrets*, *systèmes continus* ou *hybrides*. Un système continu est un système dont les signaux d'entrée et de sortie sont continus. Un système discret est un système dont les signaux d'entrée et de sortie sont discrets. Un système hybride est un système dont les signaux d'entrée et de sortie sont continus et/ou discrets.

## 7.2 Exemples de signaux discrets usuels

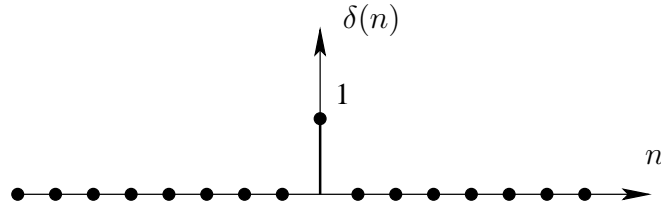
La suite  $x(n)$  peut être représentée graphiquement comme suit



### 7.2.1 La fonction delta de Kronecker

Aussi appelée l'impulsion unité, la fonction delta de Kronecker se note  $\delta(n)$  et est définie par

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{pour } n = 0 \\ 0, & \text{pour } n \neq 0 \end{cases} \quad (7.2)$$



On démontre facilement la propriété suivante de l'impulsion :

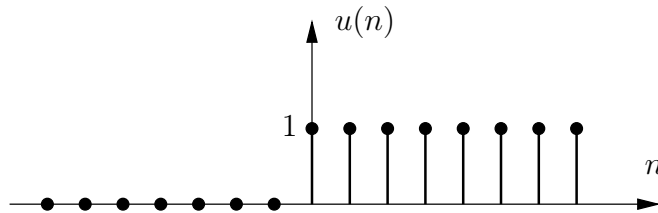
$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k). \quad (7.3)$$

Cette propriété est aussi appelée *propriété de pincette*.

### 7.2.2 L'échelon unité

L'échelon unité  $u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \geq 0 \\ 0 & \text{pour } n < 0 \end{cases} \quad (7.4)$$



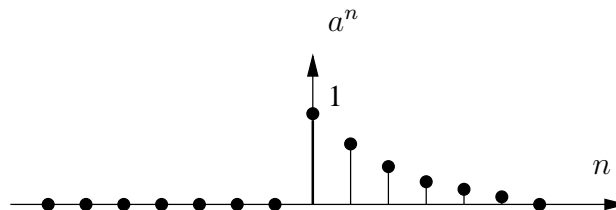
On démontre facilement les deux relations suivantes entre l'échantillon unité ou impulsion et l'échelon unité

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^n \delta(k)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

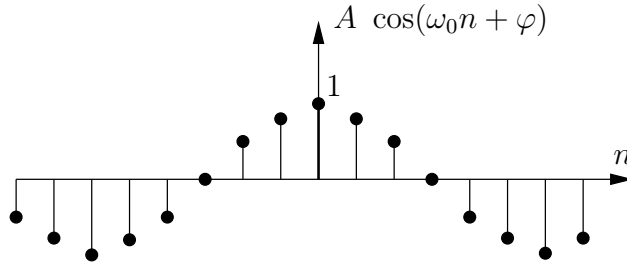
### 7.2.3 Suite exponentielle

Suite exponentielle réelle  $a^n u(n)$  avec  $a \in \mathbb{R}$



### 7.2.4 Suite sinusoïdale

Suite sinusoïdale  $A \cos(\omega_0 n + \varphi)$



### 7.3 Signaux discrets périodiques

Une suite est dite périodique, de période  $N$ , si

$$x(n) = x(n + N) \quad (7.5)$$

D'une manière générale, les fonctions périodiques échantillonnées ne donnent pas lieu à des suites périodiques. Par exemple, les suites sinusoïdales et les suites exponentielles complexes ne sont périodiques de même période que leur version analogique que si  $2\pi/\omega_0$  est un nombre entier.

### 7.4 Energie d'un signal discret

L'énergie  $E$  d'une signal discret est définie comme suit

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (7.6)$$

### 7.5 Opérations sur des signaux discrets

Il est possible de définir, comme pour d'autres grandeurs, un certain nombre d'opérations élémentaires :

— **Le produit de deux suites**

$$xy = \{x(n)y(n)\}$$

— **La somme de deux suites**

$$x + y = \{x(n) + y(n)\}$$

— **la multiplication par un scalaire**

$$\alpha x = \{\alpha x(n)\}$$

— **Le décalage** : une suite est une version décalée (*shifted*) d'une autre lorsque :

$$y(n) = x(n - n_0) \quad n_0 \in \mathbb{Z}$$

— **Propriété de pincette**

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n - k)$$



## 7.6 Systèmes linéaires et stationnaires (Linear Shift-Invariant Systems)

On peut représenter un système comme une “boîte noire” avec des entrées et des sorties. Dans un premier temps, on ne considérera que les systèmes à une seule entrée et une seule sortie.



Un système est défini *mathématiquement* comme un *opérateur* qui agit sur une suite  $x(n)$  à l'entrée pour produire une suite  $y(n)$  à la sortie.

$$y(n) = \mathbf{T}[x(n)] \quad (7.7)$$

Les classes de systèmes discrets sont définies par des conditions sur la transformation  $\mathbf{T}$ .

### 7.6.1 Systèmes linéaires

On dit qu'un système est linéaire lorsque le principe de superposition est applicable (additivité et homogénéité).

*Une condition nécessaire et suffisante de linéarité* : si  $y_1(n), y_2(n), \dots, y_N(n)$  sont respectivement les réponses à  $x_1(n), x_2(n), \dots, x_N(n)$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) + \dots + a_N x_N(n)] &= a_1 \mathbf{T}[x_1(n)] + a_2 \mathbf{T}[x_2(n)] + \dots + a_N \mathbf{T}[x_N(n)] \\ &= a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) + \dots + a_N y_N(n), \end{aligned}$$

les  $a_k$  étant des constantes arbitraires.

Sauf mention contraire, les systèmes que l'on étudie dans la suite du cours sont linéaires.

### 7.6.2 Sommation de Duhamel

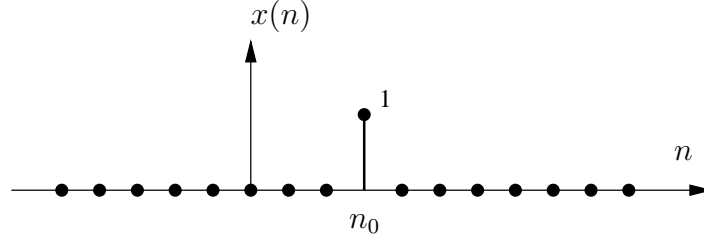
Par la propriété de pincette de l'impulsion unitaire (7.3) et l'hypothèse de linéarité, on obtient :

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathbf{T}[x(n)] \\ &= \mathbf{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n-k)\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \mathbf{T}[\delta(n-k)] \end{aligned} \quad (7.8)$$

Ou encore :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h(k, n)$$

Avec  $h(0, n) = \mathbf{T}[\delta(n)]$ , par définition, la **réponse impulsionnelle** du système. En effet, si le signal d'entrée vaut  $x(k) = \delta(k - n_0)$ , c'est-à-dire une impulsion en  $k = n_0$ ,

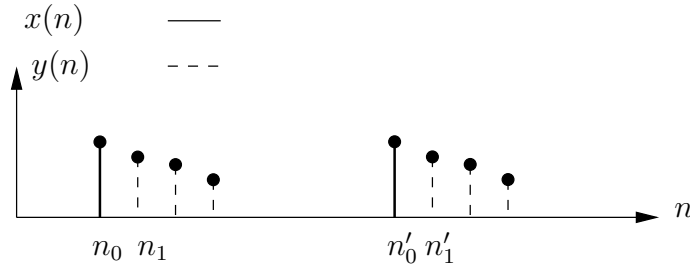


$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h(k, n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(k - n_0) h(k, n) = h(n_0, n)$$

et  $h(n_0, n)$  est donc la réponse, observée à l'époque  $n$ , à une impulsion donnée à l'époque  $n_0$ . L'expression ci-dessus montre que la réponse à un signal d'entrée peut être exprimée en fonction de la réponse à une impulsion ou noyau du système  $h(k, n)$ , fonction elle-même de deux paramètres : l'instant de l'impulsion  $k$  et l'instant d'observation  $n$ .

### 7.6.3 Systèmes linéaires stationnaires

Un système linéaire est stationnaire si la réponse à  $x(n - k)$  est  $y(n - k)$ ,  $y(n)$  étant la réponse à  $x(n)$ .



La forme de la réponse impulsionnelle est identique quel que soit l'instant où est donnée l'impulsion (voir figure), et

$$h(k, n) = h(n - k)$$

L'amplitude de la réponse impulsionnelle n'est donc fonction que de l'écart entre l'instant de l'impulsion et l'instant d'observation. Dans ces conditions, la sommation de Duhamel devient le produit de convolution appelé simplement la convolution :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h(n - k)$$

notée

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

### 7.6.4 Propriétés

— *Commutativité*

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h(n - k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n - k) h(k)$$

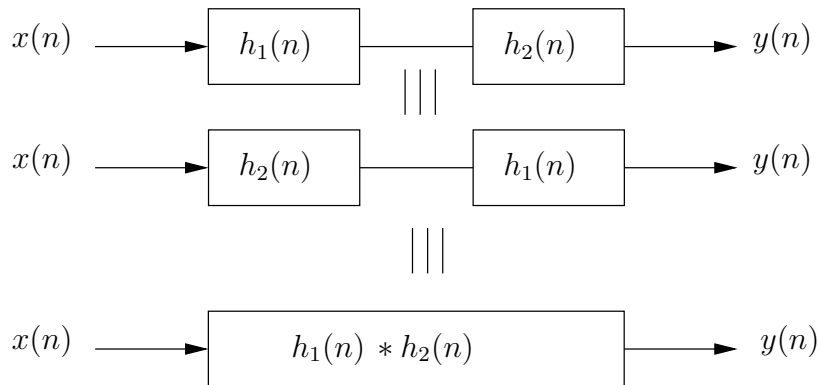
L'ordre dans lequel  $x(n)$  et  $h(n)$  sont convolués n'a pas d'importance. Un système linéaire et stationnaire avec une réponse impulsionnelle  $h(n)$  et une grandeur d'entrée  $x(n)$  aura la même grandeur de sortie  $y(n)$  qu'un autre système linéaire et stationnaire dont la réponse impulsionnelle est  $x(n)$  et la grandeur d'entrée  $h(n)$ .

— *L'impulsion unité est un élément neutre pour le produit de convolution*

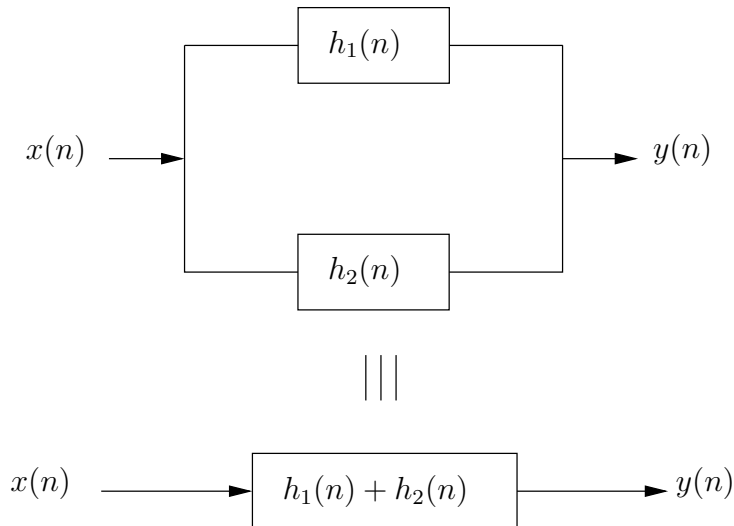
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(k) h(n-k) = h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \delta(n-k)$$

— *Combinaisons de systèmes linéaires stationnaires*

— *Systèmes linéaires stationnaires en cascade.* Dans ce cas, le noyau résultant est le résultat de la convolution des noyaux composants (voir figure).



— *Systèmes linéaires stationnaires en parallèle.* Le noyau résultant est la somme des noyaux composants (voir figure).



### 7.6.5 Exemple

On donne un système tel que la réponse impulsionnelle soit

$$h(n) = a^n$$

Le signal d'entrée est

$$x(n) = u(n) - u(n - N)$$

On demande le signal de sortie  $y(n)$

Il vient donc que :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k) h(k)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^{n-k} [u(k) - u(k-N)]$$

avec

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

et

$$u(k-N) = \begin{cases} 1 & \text{pour } k-N \geq 0 \leftrightarrow k \geq N \\ 0 & k < N \end{cases}$$

Finalement la somme se ramène à

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k}$$

En développant on a :

$$\begin{aligned} y(n) &= a^n + a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^{n-(N-1)} \\ &= a^n (1 + a^{-1} + a^{-2} + \dots + a^{-(N-1)}) \end{aligned}$$

On est en présence d'une progression géométrique d'argument 1 et de raison  $a^{-1}$ , dont le  $n^{\text{ième}}$  élément  $y(n)$  est donné par :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k} = a^n \frac{1 - a^{-N}}{1 - a^{-1}}$$

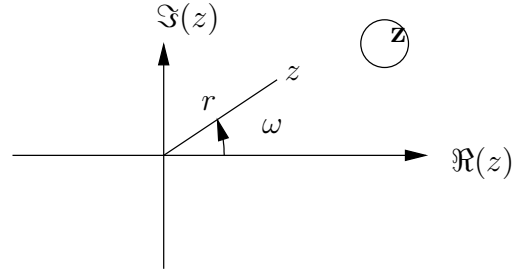
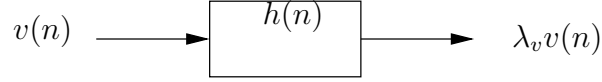
On voit donc que pour que  $y(n)$  converge, il faut que  $a < 1$

## 7.7 Suites propres et valeurs propres d'un système linéaire stationnaire

Si  $v(n)$  est une suite propre du système caractérisé par le noyau  $h(n)$ , on doit avoir par la définition des suites propres :

$$h(n) * v(n) = \lambda_v v(n)$$

$\lambda_v$  étant la valeur propre correspondant à  $v(n)$ , ce qui est décrit dans la figure ci-après.



Considérons la suite  $x(n) = z^n$  où  $z$  est un nombre complexe, vérifions que, pour une valeur particulière de  $z$ , il s'agit d'une suite propre et cherchons la valeur propre correspondante. Si on exprime  $z$  en coordonnées polaires, on obtient  $z = r e^{j\omega}$  où  $r$  est le module de  $z$  et  $\omega$  l'argument de  $z$  exprimé en radians (voir l'analogie avec  $e^{pt}$  où  $p = \sigma + j\omega$ ).

Pour ce signal d'entrée particulier, on obtient le signal de sortie correspondant en effectuant le produit de convolution :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^k h(n-k)$$

Comme le produit de convolution est commutatif :

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{n-k} h(k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^n z^{-k} h(k) \\ &= z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z^{-k} \\ &= z^n \lambda(z) \end{aligned} \tag{7.9}$$

Pour une suite d'entrée  $z^n$  on a une sortie  $z^n \lambda(z)$ .  $z^n$  est donc une suite propre et  $\lambda(z)$  est la valeur propre correspondante.

L'ensemble des suites  $z^n$  constitue donc l'ensemble des suites propres du système caractérisé par le noyau  $h(n)$ . Cet ensemble est paramétré en  $z$ , nombre complexe. L'ensemble des  $\lambda(z)$  constitue l'ensemble des valeurs propres correspondantes, également paramétré en  $z$ . De plus  $\lambda(z)$  est donné par :

$$\lambda(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z^{-k} \tag{7.10}$$

Par définition (voir chapitre suivant), il s'agit de la transformée en  $z$  de la réponse impulsionnelle ou noyau  $h(n)$  du système.

$\lambda(z)$  est aussi appelé *transmittance discrète* du système linéaire stationnaire et est notée  $H(z)$  ultérieurement :

$$\lambda(z) = H(z)$$

L'expression (7.10) montre en outre que la transmittance discrète  $H(z)$  n'existe que si la série du membre de droite converge. Les conditions de convergence sont analysées dans le chapitre suivant.

# La transformée en $z$

## 8.1 Définition

La transformée en  $z$  d'une suite  $x(n)$  est par définition :

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \quad (8.1)$$

avec  $z = r e^{j\omega}$ , variable complexe. La série du membre de droite n'est égale à une fonction  $X(z)$  que si elle converge. En d'autres termes  $X(z)$  peut très bien être finie pour des valeurs de  $z$  telles que la série ne converge pas (est infinie).

L'ensemble des points  $z$  du plan complexe, pour lesquels cette série converge vers  $X(z)$ , forment ce que l'on appelle le *Domaine de convergence*  $D_c$  de la transformée en  $z$  de la suite  $x(n)$ .

$X(z)$  est en outre une fonction continue dans le domaine de convergence, parce que le membre de droite de l'expression (8.1) est la définition d'une série de Laurent qui est continue dans  $D_c$  ainsi que ses dérivées.

Si  $r = 1$  alors  $z = e^{j\omega}$ , et  $\mathcal{Z}\{x(n)\}$  donné par

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

converge vers  $X(e^{j\omega})$  si la série converge. La transformée en  $z$ , évaluée sur le cercle de rayon 1, est par définition la transformée de Fourier de la suite  $x(n)$ .

On vérifie facilement que  $X(e^{j\omega})$  est périodique en  $\omega$  de période  $2\pi$ . La série  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$  est donc aussi le développement en série de Fourier de la fonction  $X(e^{j\omega})$  et les éléments  $x(n)$  de la suite les coefficients de ce développement.

La transformée en  $z$  d'une suite  $x(n)$  peut être interprétée comme la transformée de Fourier de cette suite multipliée par l'exponentielle  $r^{-n}$ . En effet :

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x(n) r^{-n}] e^{-j\omega n} \quad (8.2)$$

La transformée en  $z$  peut être considérée comme la généralisation de la transformée de Fourier dans le cas discret, comme la transformée de Laplace l'est dans le cas continu.

## 8.2 Condition suffisante de convergence

L'examen du dernier paragraphe ci-dessus et de l'expression (8.2) fournit une condition suffisante de convergence de la transformée en  $z$  d'une suite  $x(n)$ , à savoir la condition suffisante suivante de convergence de la série de Fourier :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n) r^{-n}| < \infty \quad (8.3)$$

ce qui signifie qu'il suffit que la norme  $l_1$  de la suite  $x(n) r^{-n}$  soit bornée ou que cette suite soit absolument convergente.

Remarque : il se peut donc que la transformée en  $z$  converge alors que la transformée de Fourier ( $r = 1$ ) ne converge pas.

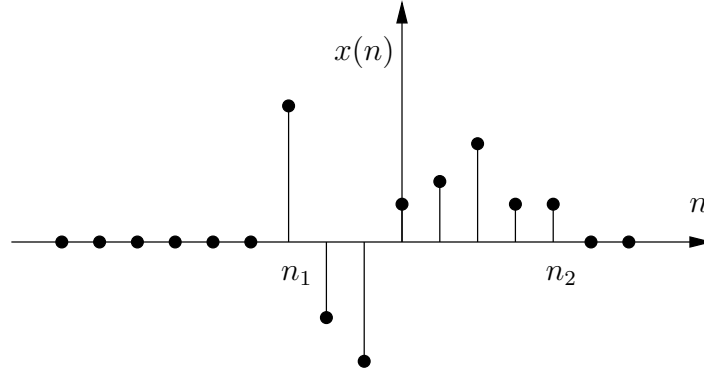
L'analyse de la condition suffisante décrite ci-dessus montre que  $\omega$  n'intervient pas et que la convergence est déterminée uniquement par la valeur de  $r$  et par les propriétés de la suite  $x(n)$ .

Comme en outre  $z = r e^{j\omega}$ , si  $r$  est une constante pour toute valeur de  $\omega$ , l'ensemble des  $z$  forme une circonférence de rayon  $r$  centrée à l'origine du plan complexe. Il en résulte que le domaine de convergence  $D_c$  de la transformée en  $z$  est délimité par des circonférences centrées à l'origine.

## 8.3 Etude des différents types de suite $x(n)$

### 8.3.1 Suites à support borné (Finite length sequences)

Une suite à support borné est une suite pour laquelle le nombre de valeurs non nulles est fini.



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n_1}^{n_2} x(n) z^{-n}$$

La condition suffisante de convergence est

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |x(n)| r^{-n} < \infty$$

Si  $x(n)$  est borné, ce qui est le cas des signaux physiquement réalisables, seule la valeur de  $r$  intervient.

— Si  $n_2 > 0$ , il suffit d'exclure la valeur  $r = 0$ .

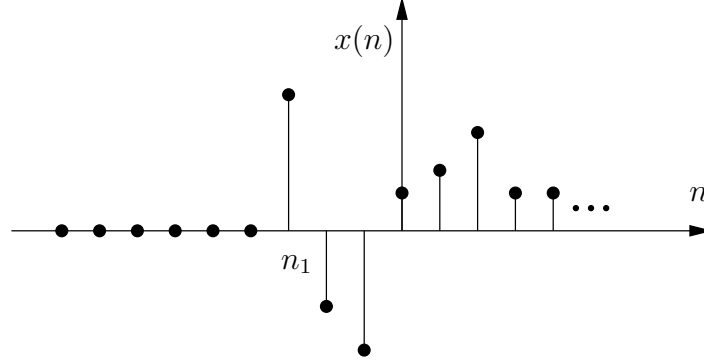


— Si  $n_1 < 0$ , il suffit d'exclure la valeur  $r = \infty$ .

Le domaine de convergence est donc  $0 \leq |z| \leq \infty$ , en excluant 0 et/ou l'infini si respectivement  $n_2 > 0$  et/ou  $n_1 < 0$ .

### 8.3.2 Suites à support unilatéral à droite UD (Right-sided sequences)

Il s'agit de suites telles que  $x(n) = 0$  pour  $n < n_1$



Admettons comme précédemment que la suite  $x(n)$  soit à éléments finis. On peut dès lors scinder la suite en deux :  $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$  de sorte que

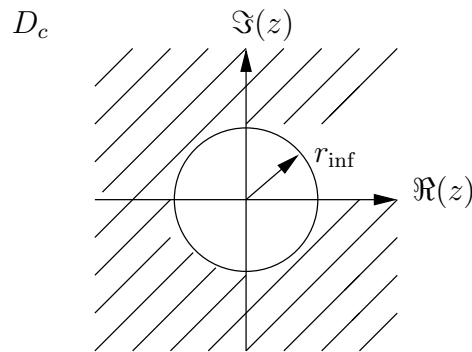
$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n_1}^{-1} x_1(n) z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x_2(n) z^{-n}$$

Comme la suite  $x_1(n)$  est à support borné, la série  $\sum_{n_1}^{-1} x_1(n) z^{-n}$  converge sauf pour  $r = \infty$  si  $n_1$  est négatif (si  $n_1 \geq 0$ ,  $x(n)$  se réduit à  $x_2(n)$ ).

Supposons ensuite que la condition suffisante de convergence de la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} x_2(n) z^{-n}$  soit vérifiée pour  $|z_0| = r_0$ , c'est-à-dire :  $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_2(n)| r_0^{-n} < \infty$ . Dès lors,  $\forall z \mid |z| > |z_0|$  c.-à-d.  $r > r_0$  on a automatiquement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |x_2(n)| r^{-n} < \sum_{n=0}^{+\infty} |x_2(n)| r_0^{-n} < \infty$$

Il y aura donc convergence  $\forall r \mid r \geq r_0 \geq r_{\inf}$ ,  $r_{\inf}$  étant l'infimum de l'ensemble des valeurs  $r_0$  pour lesquelles la condition suffisante de convergence est vérifiée. Le domaine de convergence  $D_c$  se trouve donc au-dehors d'un cercle de rayon  $r_{\inf}$  et n'inclut pas l' $\infty$  si  $n_1$  est négatif.



$$D_c : \forall z \mid |z| > r_{\inf} \text{ sauf } |z| = \infty \text{ pour } n_1 < 0$$

### Remarques

- Si  $n_1 \geq 0$ , la suite est alors purement causale, la transformée en  $z$  converge pour  $z = \infty$ .
- Si le domaine de convergence est au-dehors d'un cercle, on est en présence d'une suite à support unilatéral à droite. Si l' $\infty$  est inclus dans le domaine de convergence, on a affaire à une suite causale.
- Si la condition suffisante de convergence est vérifiée, chaque terme de cette condition est borné, c'est-à-dire que

$$|x(n) r^{-n}| < A \quad (r \geq r_{\inf})$$

et donc  $\forall r > r_{\inf}$

$$\begin{aligned} |x(n) r^{-n}| &< |x(n) r_{\inf}^{-n}| \\ &< |x(n) (r_{\inf} + \epsilon)^{-n}| < A \end{aligned}$$

avec  $\epsilon > 0$  et  $\neq 0$  aussi petit que l'on veut. Dès lors

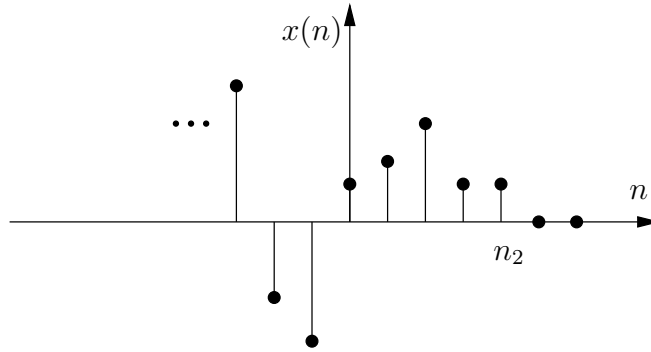
$$|x(n)| \leq A (r_{\inf} + \epsilon)^n$$

Il en résulte que :

- si  $r_{\inf} > 1$ , la suite  $x(n)$  ne croît pas plus rapidement que l'exponentielle  $r_{\inf}^n$  quand  $n \rightarrow \infty$
- ou que, si  $r_{\inf} < 1$  (c'est-à-dire si le domaine de convergence s'étend à l'intérieur du cercle de rayon 1), la suite  $x(n)$  tend vers zéro au moins aussi vite que l'exponentielle  $r_{\inf}^n$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

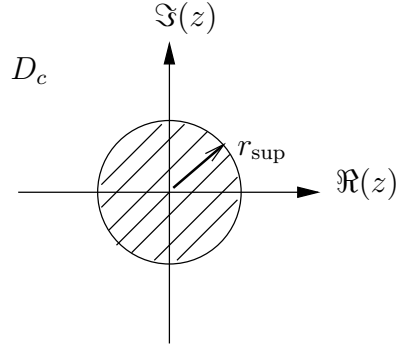
### 8.3.3 Suites à support unilatéral à gauche UG (Left-sided sequences)

Une suite  $x(n)$  est unilatérale à gauche lorsque  $x(n) = 0$  pour  $n > n_2$ .



Moyennant les mêmes hypothèses que précédemment, comme précédemment on peut scinder la suite en deux :  $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$ . De la même manière, on démontre dans ce cas-ci que le domaine de convergence  $D_c$  est à l'intérieur d'un cercle de rayon  $r_{\sup}$  à l'exception de  $z = 0$  si  $n_2 > 0$ ,  $r_{\sup}$  étant le supremum de l'ensemble des valeurs  $r_0$  pour lesquelles la condition suffisante de convergence est vérifiée..

$$D_c : \forall z \mid |z| < r_{\sup} \text{ sauf } |z| = 0 \text{ si } n_2 > 0$$

**Remarques**

- Si la condition de convergence est vérifiée, chaque terme de cette condition est borné et  $\forall r < r_{\text{sup}}$  on a  $\forall n < n_2$

$$|x(n)| < A (r_{\text{sup}} - \epsilon)^n,$$

avec  $\epsilon > 0$  et  $\neq 0$  aussi petit que l'on veut. La suite  $x(n)$  ne croît donc pas plus rapidement que l'exponentielle  $r_{\text{sup}}^n$  pour  $n \rightarrow -\infty$  si  $r_{\text{sup}} < 1$ . Si le domaine de convergence  $D_c$  inclut le cercle unitaire ( $r_{\text{sup}} > 1$ ),  $x(n)$  tend vers zéro au moins aussi rapidement que l'exponentielle  $r_{\text{sup}}^n$  pour  $n \rightarrow -\infty$ .

- Pour traiter une suite à support unilatéral à gauche, il est loisible de remplacer  $n$  par  $-n$ ,  $z$  par  $z^{-1}$ , d'adapter les bornes de sommation et de traiter alors la suite comme une suite à support unilatéral à droite.

**Exemple :**

On donne la suite unilatérale à gauche  $x(n) = -b^n u(-n - 1)$ . On a donc :

$$x(n) = \begin{cases} -b^n & \text{pour } n \leq -1 \\ 0 & \text{pour } n > -1 \end{cases}$$

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} -b^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} -b^{-n} z^n \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} +b^{-n} z^n \\ &= 1 - \frac{1}{1 - (\frac{z}{b})} \\ &= \frac{z}{z - b} \end{aligned}$$

Et enfin :

$$D_c : |z| < |b|$$

**8.3.4 Suites à support bilatéral**

Une suite à support bilatéral s'étend de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Elle peut être scindée en une suite à support unilatéral à gauche et une suite à support unilatéral à droite :

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

et donc

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z)$$

La transformée en  $z$  de  $x(n)$  existe si la transformée en  $z$  de  $x_1(n)$  converge ET si la transformée en  $z$  de  $x_2(n)$  converge.

$\mathcal{Z}\{x_1(n)\}$  converge pour  $|z| < r_{\text{sup}}$ ,  $\mathcal{Z}\{x_2(n)\}$  converge pour  $|z| > r_{\text{inf}}$ . On notera que la borne  $r_{\text{sup}}$  ne dépend que de  $x_1(n)$  et que la borne  $r_{\text{inf}}$  ne dépend que de  $x_2(n)$ .

En outre, si  $r_{\text{inf}} < r_{\text{sup}}$ , il y a une région de convergence commune et

$$D_c : r_{\text{inf}} < |z| < r_{\text{sup}}$$

- Si  $r_{\text{inf}} < 1 < r_{\text{sup}}$ , la transformée de Fourier de la suite existe.
- La réponse impulsionnelle de systèmes de vision est un exemple de suite à support bilatéral, par exemple la suite paire suivante :

$$x(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ -a^n & n \leq -1 \end{cases}$$

## 8.4 Détermination de $r_{\text{inf}}$ et $r_{\text{sup}}$

La transformée en  $z$  d'une suite  $x(n)$  est par définition

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

Dans le domaine de convergence  $D_c$ , cette série converge vers la fonction  $X(z)$ .

- Si la suite est à support unilatéral à droite, le domaine de convergence se trouve au-dehors d'un cercle de rayon  $r_{\text{inf}}$ . Imaginons que, partant d'un point situé dans  $D_c$ , on se dirige vers l'origine du plan complexe  $z$ . Comme  $X(z)$  et  $\mathcal{Z}\{x(n)\}$  sont continues dans  $D_c$  et que le domaine de convergence n'est fonction que du module de  $z$ , tant que la circonférence du cercle centré à l'origine et passant par ce point ne contient pas de pôle de  $X(z)$ , on reste dans  $D_c$ .  $r_{\text{inf}}$  est donc **le module du pôle de  $X(z)$  de plus grand module**.
- Si la suite est à support unilatéral à gauche, le domaine de convergence se trouve à l'intérieur d'un cercle de rayon  $r_{\text{sup}}$ . Imaginons que, partant d'un point situé dans  $D_c$ , on s'éloigne de l'origine du plan complexe  $z$ . Comme  $X(z)$  et  $\mathcal{Z}\{x(n)\}$  sont continues dans  $D_c$  et que le domaine de convergence n'est fonction que du module de  $z$ , tant que la circonférence du cercle centré à l'origine et passant par ce point ne contient pas de pôle de  $X(z)$ , on reste dans  $D_c$ .  $r_{\text{sup}}$  est donc **le module du pôle de  $X(z)$  de plus petit module**.
- Si la suite est à support bilatéral, le domaine de convergence est délimité par le module  $r_{\text{inf}}$  du pôle de plus grand module de la transformée en  $z$  de la partie de  $x(n)$  à support unilatéral à droite et par le module  $r_{\text{sup}}$  du pôle de plus petit module de la transformée en  $z$  de la partie de  $x(n)$  à support unilatéral à gauche.

## 8.5 La transformée inverse

### 8.5.1 Théorème de Cauchy

Il est démontré en analyse mathématique que

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{k-1} dz = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

où  $C$  est un contour fermé entourant l'origine. L'intégration est faite dans le sens direct (antihorlogique).

### 8.5.2 Transformée en $z$ inverse

Considérons la transformée en  $z$  d'une suite  $x(n)$ . On peut écrire :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

En multipliant les deux membres par  $\frac{1}{2\pi j} z^{k-1}$  et en les intégrant suivant  $C$  dans le sens direct, on obtient

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} z^{k-1} dz$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{k-n-1} dz$$

En admettant que la suite soit absolument convergente, on peut écrire

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{k-n-1} dz$$

Ceci implique que le contour fermé  $C$  se trouve dans le domaine de convergence. En appliquant le théorème de Cauchy :

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{k-n-1} dz = \begin{cases} 1 & \text{si } k - n = 0 \Leftrightarrow k = n \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

On trouve finalement l'expression de la transformée inverse :

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz \quad (8.4)$$

*Remarque* : aucune réserve n'a été émise sur le signe de  $n$  (ou de  $k$ )  $\rightarrow$  l'équation donnant la transformée inverse est donc valable quel que soit le signe de  $n$ .

### 8.5.3 Evaluation de la transformée inverse

#### 1. Méthode analytique directe :

On se base sur les résultats du théorème des résidus, à savoir que si  $X(z)z^{n-1}$  a  $N$  pôles  $z_k$  ( $\forall k \in [1, N]$  et entier)

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz = \sum_{k=1}^N [\text{Résidus de } X(z) z^{n-1}]_{z=z_k}$$

Si  $X(z) z^{n-1}$  est une fonction rationnelle, on peut écrire de manière générale que :

$$X(z) z^{n-1} = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^m}$$

où  $X(z) z^{n-1}$  a un pôle  $z_0$  d'ordre  $m$  et où  $z_0$  n'est ni un pôle ni un zéro de  $\psi(z)$ . Le résidu de  $X(z) z^{n-1}$  correspondant du pôle  $z = z_0$  d'ordre  $m$  est alors :

$$[\text{Résidu de } X(z) z^{n-1}]_{z=z_0} = \frac{1}{(m-1)!} \left[ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \psi(z) \right]_{z=z_0}$$

En particulier si  $m = 1$ , le résidu de  $X(z) z^{n-1}$  vaut  $\psi(z_0)$ .

Dans le cas où il faut évaluer des éléments  $x(n)$  d'une suite pour des valeurs négatives de  $n$  ( $n < 0$ ), l'ordre du pôle à l'origine est fonction du numéro d'ordre dans la suite et la méthode analytique directe devient rapidement très lourde à utiliser comme le montre l'exemple ci-après.

On donne  $X(z) = \frac{1}{1-a z^{-1}}$  pour  $|z| > |a|$ . La transformée en  $z$  inverse s'écrit :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^{n-1}}{1-a z^{-1}} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^n}{z-a} dz$$

On voit aisément que pour le calcul de  $x(n)$  et des valeurs négative de  $n$ , c'est-à-dire du  $n^{\text{ième}}$  élément de la suite, l'ordre du pôle à l'origine vaut  $-n$ .

On résout ce problème en effectuant un changement de variable très simple : en remplaçant la variable  $z$  par la variable  $v = z^{-1}$ . L'exemple ci-dessus devient alors, en tenant du fait que  $dv = -z^{-2} dz$  :

$$x(n) = \frac{-1}{2\pi j} \oint_{C'_-} X\left(\frac{1}{v}\right) v^{-n+1} v^{-2} dv$$

On peut alors multiplier l'expression par  $-1$  et inverser le sens d'intégration.

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C'_+} X\left(\frac{1}{v}\right) v^{-n-1} dv$$

Comme  $C$  est un cercle de rayon  $r$  dans le plan complexe des  $z$ , alors  $C'$  est un cercle de rayon  $1/r$  dans le plan complexe des  $v$ . Les pôles de  $X(z)$  qui étaient à l'extérieur de  $C$  correspondent à des pôles de  $X(1/v)$  à l'intérieur de  $C'$  et réciproquement. Cette méthode s'avérant également "lourde" à l'utilisation, on fait appel à des méthodes moins générales, mais plus faciles à appliquer, comme il est montré ci-après.

2. Très souvent  $X(z)$  est donné sous forme d'un rapport de deux polynômes en  $z$  (c'est notamment le cas de la transmittance des systèmes linéaires invariants) :

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

On distingue alors deux cas

— *Le degré de  $P$  est inférieur au degré de  $Q$*

Supposons que  $X(z)$  n'ait que des pôles d'ordre 1. On peut dès lors écrire  $X(z)$  sous forme d'une série de fractions partielles.

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{z - z_k}$$

où

$$A_k = [(z - z_k) X(z)]|_{z=z_k}$$

n'est rien d'autre que le résidu correspondant à  $z = z_k$ .

Si  $X(z)$  a  $N$  pôles multiples d'ordre  $m_k$ , alors

$$X(z) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{m_k} \frac{C_{kl}}{(z - z_k)^l}$$

où

$$C_{kl} = \frac{1}{(m_k - l)!} \left\{ \frac{d^{m_k-l}}{dz^{m_k-l}} [(z - z_k)^{m_k} X(z)] \right\} \Big|_{z=z_k}$$

— *Le degré de  $P$  est supérieur ou égal au degré de  $Q$*

On effectue alors la division polynomiale de  $P$  par  $Q$ . Le degré du numérateur du reste est automatiquement inférieur à celui de son dénominateur.

3. Comme la transformée en  $z$  est donnée par  $X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k}$ , qu'il s'agit d'un développement en série de Laurent et qu'un développement en série de Laurent est unique, si on parvient, par quelque méthode que ce soit, à développer  $X(z)$  en série de puissances (ex : série de Mac Laurin), les coefficients des puissances de  $z$  sont les  $x(n)$ .

## 8.6 Propriétés de la transformée en z

On démontre facilement les propriétés suivantes de la transformée en  $z$  :

Suite	Transformée en z	Domaine de convergence
$x(n)$ $y(n)$	$X(z)$ $Y(z)$	$r_{x,\text{inf}} <  z  < r_{x,\text{sup}}$ $r_{y,\text{inf}} <  z  < r_{y,\text{sup}}$
<u>Linéarité</u> $a x(n) + b y(n)$	$a X(z) + b Y(z)$	$\sup[r_{x,\text{inf}}, r_{y,\text{inf}}] <  z  < \inf[r_{x,\text{sup}}, r_{y,\text{sup}}]$
<u>Décalage (shift)</u> $x(n + n_0)$	$z^{n_0} X(z)$	$r_{x,\text{inf}} <  z  < r_{x,\text{sup}}$ à l'exception possible de 0 ou $\infty$
$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$ a  r_{x,\text{inf}} <  z  <  a  r_{x,\text{sup}}$
$n x(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$r_{x,\text{inf}} <  z  < r_{x,\text{sup}}$
$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$r_{x,\text{inf}} <  z  < r_{x,\text{sup}}$
$x(-n)$	$X(\frac{1}{z})$	$\frac{1}{r_{x,\text{sup}}} <  z  < \frac{1}{r_{x,\text{inf}}}$
$\mathcal{Re}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2} [X(z) + X^*(z^*)]$	$r_{x,\text{inf}} <  z  < r_{x,\text{sup}}$
$\mathcal{Im}\{x(n)\}$	$\frac{1}{2j} [X(z) - X^*(z^*)]$	$r_{x,\text{inf}} <  z  < r_{x,\text{sup}}$
$x(n) * y(n)$	$X(z) \cdot Y(z)$	$\sup[r_{x,\text{inf}}, r_{y,\text{inf}}] <  z  < \inf[r_{x,\text{sup}}, r_{y,\text{sup}}]$
$x(n) \cdot y(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v) Y(\frac{z}{v}) v^{-1} dv$	$r_{x,\text{inf}} r_{y,\text{inf}} <  z  < r_{x,\text{sup}} r_{y,\text{sup}}$



*Remarques*

1. On constate que le produit de convolution qui est une opération relativement difficile à effectuer, est remplacé par une simple multiplication dans le domaine transformé. Il s'agit en fait de la version "diagonale" de la convolution. En effet, après avoir recherché les suites propres ( $z^n$ ) et les valeurs propres correspondantes ( $\lambda(z) = H(z)$ ), on peut "diagonaliser" la convolution et

$$\mathcal{Z}\{x(n) * h(n)\} = X(z) H(z)$$

en est le résultat !

2. Une autre propriété intéressante de la transformée en  $z$  est la propriété de décalage. Décaler les éléments d'une suite  $x(n)$  d'un nombre entier  $n$  de places vers la gauche ( $n_0 > 0$ ) ou vers la droite ( $n_0 < 0$ ) revient à multiplier par  $z^{n_0}$  dans le domaine de la transformée en  $z$ .
3. Si  $X(z)$  a un pôle en  $z = z_1$ , alors  $X(a^{-1}z)$  aura un pôle en  $z = az_1$ .

Si  $a$  est un nombre réel positif, cela peut être interprété comme une extension ou un rétrécissement du plan  $z$ , c'est-à-dire que la position des zéros et des pôles varie radialement dans le plan  $z$ .

Si  $a$  est imaginaire, d'amplitude 1, le changement d'échelle correspond à une rotation dans le plan  $z$  et le changement de la position des zéros et des pôles s'effectue en suivant des cercles centrés à l'origine.

## 8.7 Transformée en $z$ de quelques suites particulières

Suite	Transformée en $z$	Domaine de convergence
$\delta(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\mathcal{C}$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  > 1$
$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  < 1$
$\delta(n-m)$	$z^{-m}$	$\mathcal{C}$ sauf 0 si $m > 0$ et $\infty$ si $m < 0$
$\alpha^n u(n)$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z  > \alpha$
$-\alpha^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$ z  < \alpha$
$n \alpha^n u(n)$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z  > \alpha$
$-n \alpha^n u(-n-1)$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$ z  < \alpha$
$[\cos(\omega_0 n)] u(n)$	$\frac{1-\cos(\omega_0) z^{-1}}{1-2 \cos(\omega_0) z^{-1}+z^{-2}}$	$ z  > 1$
$[\sin(\omega_0 n)] u(n)$	$\frac{\sin(\omega_0) z^{-1}}{1-2 \cos(\omega_0) z^{-1}+z^{-2}}$	$ z  > 1$
$[r^n \cos(\omega_0 n)] u(n)$	$\frac{(1-r \cos(\omega_0)) z^{-1}}{1-2 r \cos(\omega_0) z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$ z  > r$
$[r^n \sin(\omega_0 n)] u(n)$	$\frac{r \sin(\omega_0)}{1-2 r \cos(\omega_0) z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$ z  > r$

## 8.8 Condition de causalité

Un système est dit *causal* si sa grandeur de sortie en  $n = n_0$  n'est fonction que des grandeurs "passées" de sa grandeur d'entrée, c'est-à-dire pour des valeurs de  $n \leq n_0$ .

Un système linéaire et invariant est causal si et seulement si sa réponse impulsionnelle est nulle pour  $n < 0$  :

$$h(n) = 0 \text{ pour } n < 0$$

ou

$$h(n) = h(n) u(n)$$

La réponse impulsionnelle d'un système causal est donc à support unilatéral à droite.

Tous les systèmes évoluant dans le temps sont causaux s'ils sont réalisables. Il s'agit de systèmes qui ne peuvent réagir à un stimulus qu'après l'apparition de ce stimulus (une cloche ne peut tinter qu'après avoir été frappée!).

# La transformée de Fourier d'une suite

---

## 9.1 Définition

Par définition, la transformée de Fourier d'une suite  $x(n)$  est donnée par l'expression

$$\mathcal{F}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (9.1)$$

Si la série de Fourier du membre de droite converge, elle converge vers une fonction de  $e^{j\omega}$  notée  $X(e^{j\omega})$ . La transformée de Fourier d'une suite  $x(n)$  n'est donc rien d'autre que la transformée en  $z$  de la suite  $x(n)$  évaluée pour des valeurs de  $z$  situées sur la circonférence du cercle de rayon 1 dans le plan complexe de  $z$  :

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)(e^{j\omega})^{-n} \quad (9.2)$$

$X(e^{j\omega})$  est généralement complexe et peut être décomposée en sa partie réelle et sa partie imaginaire :

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$$

ou encore être exprimée en termes d'amplitude et de phase :

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j \arg \{X(e^{j\omega})\}}$$

Dans ce dernier cas,  $|X(e^{j\omega})|$  est souvent appelé la densité spectrale ou simplement le spectre de la suite  $x(n)$ .

La transformée de Fourier d'une suite  $x(n)$  peut également être comprise en termes de produit scalaire. En effet

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \langle x(n), e^{j\omega n} \rangle$$

peut être vue comme le produit scalaire de la suite  $x(n)$  avec la suite  $e^{j\omega n}$ .

Les suites  $e^{j\omega n}$  ( $\omega \in [0, 2\pi[$ ) forment en outre un ensemble complet de suites orthogonales et constituent un sous-ensemble orthogonal de l'ensemble des suites  $x(n)$ . La norme relative à la

variable indépendante  $\omega$  de ce sous-ensemble vaut  $2\pi$ , en effet

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} e^{-j\omega n'} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-n')} d\omega = 2\pi \delta(n - n')$$

où  $\delta(n)$  est l'impulsion unité. En outre, les suites  $e^{j\omega n}$  sont également orthogonales relativement à la variable indépendante  $n$  :

$$\langle e^{j\omega_1 n}, e^{j\omega_2 n} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j(\omega_1 - \omega_2)n} = 2\pi \delta(\omega_1 - \omega_2) \quad (9.3)$$

Comme l'ensemble des suites  $e^{j\omega n}$  est complet et orthogonal, il forme une base orthogonale de l'espace des suites complexes  $x(n)$  absolument sommables. Il en résulte l'interprétation suivante de la transformée de Fourier d'une suite  $x(n)$  : pour une valeur donnée  $\omega_0$  de la pulsation,  $\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega_0})$  est la composante de la suite  $x(n)$  suivant la suite de base  $e^{j\omega_0 n}$  particulière.

## 9.2 Réponse en fréquence d'un système linéaire invariant

Si le signal d'entrée d'un système linéaire invariant est la suite exponentielle complexe  $x(n) = e^{j\omega n}$  de fréquence angulaire  $\omega \forall n \in ]-\infty, +\infty[$ , le signal de sortie est donné par le produit de convolution

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j\omega k}. \quad (9.4)$$

On a par ailleurs la transformée de Fourier de  $h(k)$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j\omega k} = H(e^{j\omega}) \quad (9.5)$$

Et l'on peut donc ré-écrire l'équation ci-dessus  $y(n) = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$ .  $H(e^{j\omega})$  décrit donc la façon dont le système linéaire invariant change l'amplitude complexe des exponentielles complexes. C'est pourquoi  $H(e^{j\omega})$  est également appelé réponse en fréquence du système. La réponse en fréquence d'un système linéaire invariant est donc la transformée de Fourier de la suite  $h(n)$ , réponse impulsionnelle de ce système.

Un signal sinusoïdal peut être exprimé comme une combinaison linéaire d'exponentielles complexes

$$x(n) = A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n} \quad (9.6)$$

En tenant compte du fait que  $H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$ , le signal de sortie  $y(n)$  qui y correspond est donné par

$$y(n) = \frac{A}{2} [H(e^{j\omega_0}) e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0}) e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}] = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \phi + \arg\{H(e^{j\omega_0})\}) \quad (9.7)$$

## 9.3 Transformée de Fourier inverse d'une suite

### 9.3.1 $X(e^{j\omega})$ est une fonction périodique en $\omega$

En effet

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega k} \\ X(e^{j(\omega+2\pi)}) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j(\omega+2\pi)k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega k} e^{-j2\pi k} \end{aligned}$$

Comme  $e^{-j2\pi k} = 1$ ,  $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$ .

Etant donné que  $X(e^{j\omega})$  est une fonction périodique en  $\omega$ , elle peut être exprimée sous la forme d'un développement en série de Fourier unique et par conséquent

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

où les coefficients de Fourier correspondent à la suite  $x(n)$ . De cette constatation, il ressort que  $x(n)$  peut être obtenu à partir de  $X(e^{j\omega})$  au moyen de la relation utilisée pour obtenir les coefficients de Fourier d'une fonction périodique :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Ce qui est l'expression de la transformée de Fourier inverse de la suite  $x(n)$ . On vérifie en outre facilement qu'il s'agit d'un cas particulier de la transformée en  $z$  inverse de la suite  $x(n)$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (9.8)$$

où l'intégrale de contour est fait le long du cercle unité  $z = e^{j\omega}$ . En faisant le changement de variable

$$z = e^{j\omega} \Rightarrow dz = j e^{j\omega} d\omega$$

on obtient

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega.$$

Cette dernière expression permet d'interpréter un signal  $x(n)$  pratiquement quelconque comme la superposition d'exponentielles complexes d'amplitude complexe  $X(e^{j\omega})$ .

## 9.4 Propriétés

- La transformée de Fourier d'une suite  $x(n)$  n'étant rien d'autre que le développement en série de Fourier de la fonction  $X(e^{j\omega})$ , elle converge uniformément vers une fonction en  $\omega$  si la suite  $x(n)$  est absolument convergente, c'est-à-dire si

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty$$

Cette condition n'est cependant que suffisante.

- Si une suite est absolument convergente, elle aura aussi une énergie finie. Cela découle du fait que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 \leq \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| \right]^2$$

Par contre une suite avec une énergie finie n'est pas nécessairement absolument convergente.

La suite  $x(n) = \frac{\sin(\omega_0 n)}{\omega_0 n}$  par exemple, est à énergie finie mais n'est pas absolument convergente.

- Les propriétés de la transformée en  $z$  d'une suite sont aussi applicables à la transformée de Fourier de cette suite, puisque la transformée de Fourier d'une suite est un cas particulier de la transformée en  $z$  de cette suite pour  $z = e^{j\omega}$ . Ces propriétés prennent la forme particulière reprise dans la table 9.1.

Suite	Transformée de Fourier
$x(n)$	$X(e^{j\omega})$
$y(n)$	$Y(e^{j\omega})$
$a x(n) + b y(n)$	$a X(e^{j\omega}) + b Y(e^{j\omega})$
<b>Décalage (shift)</b>	
$x(n+k)$	$e^{j\omega k} X(e^{j\omega})$
$e^{j\omega_0 n} x(n)$	$X[e^{j(\omega-\omega_0)}]$
$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
<b>Produit de convolution</b>	
$\omega(n) = x(n) * y(n)$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
<b>Si <math>x(n)</math> est une suite réelle</b>	
$x(n) \in \Re$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$

Table 9.1 – Propriétés générales de la transformée de Fourier

Comme précédemment on insistera sur l'importance de la propriété de décalage ainsi que sur l'utilité de la propriété du produit de convolution, permettant de remplacer ce dernier par un simple produit.

- Propriété de conservation de l'énergie, mieux connue sous le nom de relation de Parseval :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (9.9)$$

En effet

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) x^*(n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\omega}) e^{-j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} X^*(e^{j\omega}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) X^*(e^{j\omega}) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \end{aligned}$$

L'énergie du spectre est donc égale à celle du signal. C'est la raison pour laquelle la transformation de Fourier est unitaire.

## 9.5 Quelques transformées de Fourier usuelles

Signal	Transformée de Fourier
$\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$	$2\pi \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi l}{N})$
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$
$\cos(\omega_0 n)$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)$
$\sin(\omega_0 n)$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)$
$x(n) = 1$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi \delta(\omega - 2\pi l)$
$a^n u(n) ( a  < 1)$	$\frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$
$x(n) = \begin{cases} 1 &  n  \leq N_1 \\ 0 &  n  > N_1 \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\frac{\omega}{2})}$
$\frac{\sin(\Omega n)}{\pi n}$	$X(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 <  \omega  < \Omega \\ 0 & \Omega <  \omega  < \pi \end{cases}$
$\delta(n)$	$1$
$u(n)$	$\frac{1}{1 + e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k)$

Table 9.2 – Transformées de Fourier usuelles





# L'échantillonnage et la reconstruction d'un signal

## 10.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier la relation existant entre un signal à temps continu et un signal à temps discret obtenu par échantillonnage du signal à temps continu. Et en particulier, le but est de déterminer les conditions sous lesquelles le signal à temps continu peut être reconstruit sur base de ses échantillons, c.à.d. sur base du signal à temps discret. On parle de reconstruction parfaite si le signal reconstruit est parfaitement identique au signal de départ.

Les applications de ceci sont innombrables. Citons simplement la reproduction de morceaux de musique, initialement des signaux à temps continu, sur base de leurs échantillons, par exemple provenant d'un CD.

## 10.2 La transformée de Laplace d'un signal échantillonné

Afin d'éviter toute confusion, on utilisera dans la suite  $\Omega$  pour représenter la partie imaginaire de la variable  $s$  de la transformation de Laplace (pulsation (en rad/s) s'il s'agit de signaux temporels), et  $\omega$  pour représenter l'argument de la variable complexe  $z$  de la transformation en  $z$ .

La transformée de Laplace inverse d'un signal analogique  $x_a(t)$  est donnée par :

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X_a(s) e^{st} ds \quad (10.1)$$

avec  $s = \sigma + j\Omega$ . L'intégrale est calculée pour  $\Omega \in ]-\infty, +\infty[$  et  $\Re\{s\} = \sigma = C^{te}$ , où  $\sigma$  est choisi dans le domaine de convergence de la transformée de Laplace de  $x_a(t)$ .

La transformée inverse en  $z$  d'un signal discret  $x(n)$  s'écrit :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (10.2)$$

l'intégrale étant calculée sur un cercle  $C$  centré à l'origine, de rayon  $r = |z|$  et choisi dans le domaine de convergence de la transformée en  $z$  de  $x(n)$ .

Si  $x(n)$  est la version échantillonnée de  $x_a(t)$  et si on évalue (10.1) à l'instant  $nT$ ,

$$x_a(nT) = x(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X_a(s) e^{snT} ds \quad (10.3)$$

Si on découpe la partie imaginaire de l'intervalle d'intégration  $\Omega \in ]-\infty, +\infty[$ , en une somme infinie d'intervalles de largeur  $2\pi/T$ , le  $l^{\text{ième}}$  intervalle s'écrivant :

$$\left[ \frac{\pi}{T}(2l-1), \frac{\pi}{T}(2l+1) \right]$$

(10.3) devient

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_{\sigma+j\frac{\pi}{T}(2l-1)}^{\sigma+j\frac{\pi}{T}(2l+1)} X_a(s) e^{snT} ds \quad (10.4)$$

avec  $l$  entier. On choisit ensuite comme nouvelle variable indépendante  $s$ , l'ancienne diminuée de  $j\frac{2\pi l}{T}$  et  $x(n)$  devient

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_{\sigma-j\frac{\pi}{T}}^{\sigma+j\frac{\pi}{T}} X_a\left(s + j\frac{2\pi l}{T}\right) e^{snT} ds \quad (10.5)$$

Après échange des opérations de sommation et d'intégration, en posant  $\mathbf{z} = \mathbf{e}^{sT}$  et en tenant compte du fait que  $dz = Te^{sT} ds$ , on trouve

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{T} X_a\left(\frac{\ln z}{T} + j\frac{2\pi l}{T}\right) \right] z^{n-1} dz \quad (10.6)$$

La comparaison de (10.2) et de (10.6) fournit finalement le résultat

$$X(z)|_{z=e^{sT}} = X(e^{sT}) = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_a\left(s + j\frac{2\pi l}{T}\right) \quad (10.7)$$

Il ressort de cette dernière expression que la transformée en  $z$  est formée en sommant les versions, translatées verticalement de  $j\frac{2\pi l}{T}$  dans le plan  $s$ , de la transformée de Laplace du signal original et ce pour tout  $l$  entier.

Il est bien évident que la reconstruction parfaite implique de pouvoir reproduire  $X_a(s)$  sur base de  $X(z)|_{z=e^{sT}}$ . Et donc que pour avoir reconstruction parfaite, il est indispensable que les différentes répliques de  $X_a(s)$  ne se chevauchent pas.

La figure 10.2 (a) illustre le spectre d'un signal discret obtenu par échantillonnage d'un signal continu et la relation entre les deux. La périodicité de période  $2\pi$  du spectre du signal discret est évidente ainsi que l'absence de chevauchement des différents spectres. La figure 10.2 (b) fait de même mais dans le cas où la condition de Shannon n'est pas respectée. On remarque que les différentes répliques du spectre du signal continu se chevauchent, ce qui va donner lieu à une distortion du spectre et ainsi rendre une reconstruction parfaite du signal continu sur base du signal discret impossible. On dit qu'il y a **aliasing**. Dans certaines applications, l'*aliasing* est délibéré (effet stroboscopique).

## 10.3 Interprétation fréquentielle - Théorème de Shannon

### 10.3.1 Cas général

Si la transformée de Fourier de  $x_a(t)$  converge et si la transformée de Fourier de la suite  $x(n)$  converge également, alors il est possible d'écrire la relation (10.7) pour  $\sigma = 0$  et donc de  $z =$

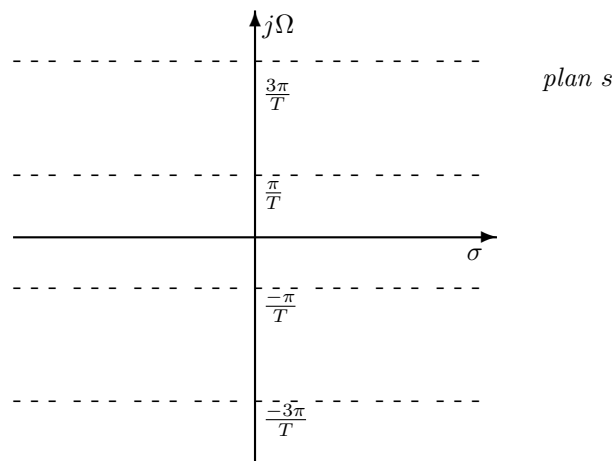
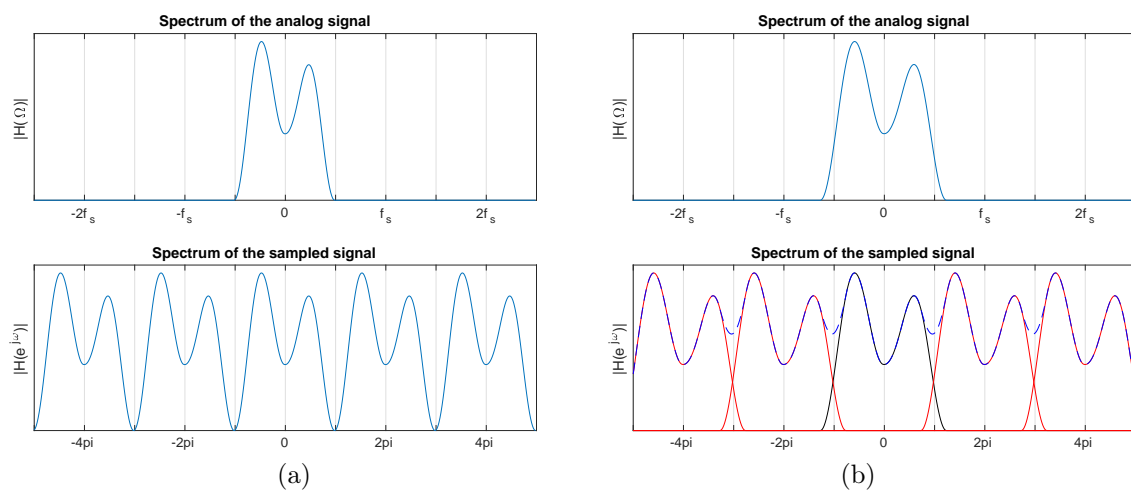
Figure 10.1 – Division du plan  $s$  en bandes horizontales de largeur  $\frac{2\pi}{T}$ 

Figure 10.2 – Spectre d'un signal analogique et spectre du signal discret obtenu par échantillonnage du signal analogique

$re^{j\omega} = e^{j\Omega T}$  il résulte que  $l = 1$  et  $\omega = \Omega T$ . On a donc

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_a \left[ j \left( \Omega + \frac{2\pi}{T} l \right) \right] \quad (10.8)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_a \left[ j \left( \frac{\omega + 2\pi l}{T} \right) \right] \quad (10.9)$$

On notera que  $X(e^{j\omega})$  est périodique de période  $2\pi$  en  $\omega$ , que  $X(e^{j\Omega T})$  est périodique de période  $\frac{2\pi}{T}$  en  $\Omega$  et qu'à la pulsation d'échantillonnage  $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$  correspond la valeur  $\omega = 2\pi$ .

Après échantillonnage le spectre du signal échantillonné (la transformée de Fourier de  $x(n)$ ) s'obtient en sommant les versions, translatées d'un multiple de la pulsation d'échantillonnage, du spectre  $X_a(j\Omega)$  du signal original  $x_a(t)$ .

**Si  $B$  est la bande passante du signal  $x_a(t)$ , c'est-à-dire la différence entre  $\Omega_{\max}$  la plus grande pulsation présente dans le signal et  $\Omega_{\min}$  la plus petite pulsation présente dans le signal**

$$B = \Omega_{\max} - \Omega_{\min}$$

**il faut et il suffit, pour garantir la possibilité de reconstruction parfaite, que la pulsation d'échantillonnage  $\Omega_s = 2\pi/T$  soit au moins égale à  $B$ .**

### 10.3.2 Signal réel en bande de base

Soit  $x_a(t)$ , un signal en bande de base, c'est-à-dire dont les fréquences représentatives sont concentrées autour de l'origine. Si  $x_a(t)$  est réel, le module de  $X_a(j\Omega)$  est pair. Il en résulte que dans ce cas  $\Omega_{\min} = -\Omega_{\max}$ . Ainsi, **si  $\Omega_{\max}$  est la plus grande pulsation présente dans le signal  $x_a(t)$ , il faut et il suffit, pour garantir la possibilité de reconstruction parfaite de  $x_a(t)$ , que la pulsation d'échantillonnage  $\Omega_s = 2\pi/T$  soit au moins deux fois plus grande que  $\Omega_{\max}$ .**

Ce dernier énoncé est connu sous le nom de “*théorème de Shannon*”. La fréquence d'échantillonnage minimale  $f_{s_{\min}}$  que l'on peut utiliser sans perdre d'information, à savoir  $f_{s_{\min}} = 2\Omega_{\max}/2\pi$ , est appelée *fréquence de Nyquist* (dans la littérature anglo-saxonne, on parle de “*Nyquist rate*”).

### 10.3.3 Signal modulé

Soit  $x_m(t)$ , le signal en bande de base  $x_a(t)$  modulé en amplitude

$$x_m(t) = x_a(t) \cos(\Omega_0 t) \quad (10.10)$$

où  $\cos(\Omega_0 t)$  est appelée la porteuse.  $x_m(t)$  peut être décomposé en deux signaux de pulsations de signe contraire

$$x_m(t) = \frac{1}{2} x_a(t) e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2} x_a(t) e^{-j\Omega_0 t} \quad (10.11)$$

Le signal possède donc deux composantes  $x_{m_1}(t)$  et  $x_{m_2}(t)$ , données par

$$x_{m_1}(t) = \frac{1}{2} x_a(t) e^{j\Omega_0 t} \quad (10.12)$$

$$x_{m_2}(t) = \frac{1}{2} x_a(t) e^{-j\Omega_0 t} \quad (10.13)$$

La transformée de  $x_{m_1}(t)$  est la moitié de celle de  $x_a(t)$  décalée de  $\Omega_0$  vers les  $\Omega$  croissants, la transformée de  $x_{m_2}(t)$  est la moitié de celle de  $x_a(t)$  décalée de  $\Omega_0$  vers les  $\Omega$  décroissants. Il en résulte que si  $B$  est la bande passante du signal  $x_a(t)$ , il faut et il suffit, pour permettre une reconstruction parfaite de  $x_a(t)$ , que la pulsation d'échantillonnage  $\Omega_s = 2\pi/T$  soit au moins égale à  $B$  (à deux fois  $\Omega_{\max}$ , la plus grande pulsation présente dans  $x_a(t)$ , si  $x_a(t)$  est réel).

### 10.3.4 De la nécessité d'un filtre anti-repliement

Dans des applications réelles, il est rare d'avoir une garantie que les signaux soit à bande limitée. En particulier et comme on le verra dans le chapitre 15, le bruit est typiquement large bande. Ceci veut dire qu'il n'est pas possible de garantir qu'il y ait effectivement une fréquence  $\Omega_{\max}$  au delà de laquelle le signal est nul.

**Si on veut éviter tout repliement, il est donc indispensable d'imposer la condition de bande limitée en utilisant ce que l'on appelle un filtre anti-repliement. Il s'agit d'un filtre qui va atténuer — et idéalement, totalement annuler — les composantes fréquentielles au delà de  $f_s/2$ . Ce filtre est impérativement à placer avant l'opération d'échantillonnage.**

En pratique, une fois la fréquence d'échantillonnage choisie en fonction du signal à échantillonner, on place un filtre ayant comme fréquence de coupure  $f_s/2$  avant l'échantillonneur.

## 10.4 Reconstruction d'un signal à temps continu

### 10.4.1 Introduction

Fondamentalement, le signal analogique  $x_a(t)$  que l'on veut reconstruire est connu aux instants d'échantillonnage et sa valeur est donnée par  $x(n)$ . La reconstruction consiste donc à donner une valeur à  $x_a(t)$  entre les instants d'échantillonnage. On parle donc d'interpolation entre les instants d'échantillonnage. Comme les valeurs entre les instants d'échantillonnage sont inconnues, elles sont déterminées sur base d'hypothèses annexes. L'interpolation peut donc se faire de différentes façons, selon le modèle du signal analogique considéré.

Comme vu ci-dessus, le modèle le plus courant est celui des signaux à bande-passante limitée (band-limited signals) et pour lequel l'interpolateur idéal permet une reconstruction parfaite. L'interpolateur d'ordre zéro (zero-order hold) est une approximation pragmatique – et simple à mettre en pratique – de l'interpolateur idéal.

### 10.4.2 Reconstruction parfaite – Interpolateur idéal

Si les conditions de la section 10.2 ci-dessus sont respectées, il n'y a pas *aliasing* et on peut écrire que

$$X_a(s) = TX(e^{sT}) \quad \text{pour} \quad -\frac{\pi}{T} < \Omega < \frac{\pi}{T} \quad (10.14)$$

puisque dans ce cas  $X_a(s) = 0$  pour  $\Omega < -\frac{\pi}{T}$  et  $\Omega > \frac{\pi}{T}$ . Le spectre du signal analogique peut donc être obtenu au moyen d'un filtre passe-bas idéal qui ne laisse passer que les fréquences inférieures à  $\frac{\pi}{T}$  comme illustré à la figure 10.3.

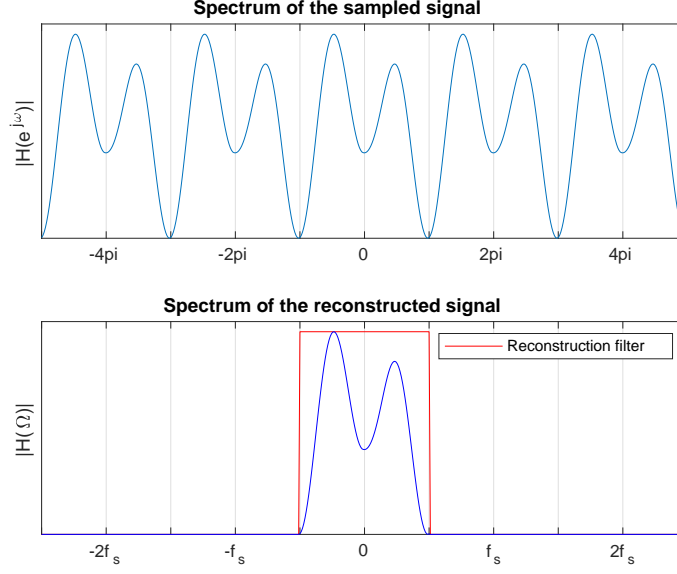


Figure 10.3 – Reconstruction (parfaite) au moyen du filtre passe-bas idéal

On peut donc écrire  $\forall \sigma \in \mathbb{R}$

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\frac{\pi}{T}}^{\sigma+j\frac{\pi}{T}} [TX(e^{sT})] e^{st} ds \quad (10.15)$$

En remplaçant  $X(e^{sT})$  par sa valeur tirée de la transformée en  $z$ , on obtient

$$x_a(t) = \frac{T}{2\pi j} \int_{\sigma-j\frac{\pi}{T}}^{\sigma+j\frac{\pi}{T}} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)(e^{sT})^{-n} \right) e^{st} ds \quad (10.16)$$

En permutant les signes d'intégration et de sommation

$$x_a(t) = \frac{T}{2\pi j} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \int_{\sigma-j\frac{\pi}{T}}^{\sigma+j\frac{\pi}{T}} (e^{sT})^{-n} e^{st} ds \quad (10.17)$$

ou

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \left[ \frac{T}{2\pi j} \int_{\sigma-j\frac{\pi}{T}}^{\sigma+j\frac{\pi}{T}} e^{s(t-nT)} ds \right] \quad (10.18)$$

La grandeur entre crochets est la transformée de Laplace inverse d'une fonction rectangulaire de largeur  $2\pi/T$  et centrée à l'origine. Pour que cette transformée existe, il faut que  $\sigma = 0$ . En effet, si  $\sigma \neq 0$ , la transformée inverse contient un facteur qui diverge pour  $n > 0$  ou  $n < 0$  suivant le signe de  $\sigma$ . Or

$$j \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} e^{j\Omega(t-nT)} d\Omega = \frac{2\pi}{T} \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi}{T}(t-nT) \right) \quad (10.19)$$

et finalement

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi}{T}(t-nT) \right) \quad (10.20)$$

La reconstruction de  $x_a(t)$  s'obtient donc en interpolant ses échantillons  $x(n)$  au moyen de ce que l'on appelle l'interpolateur idéal. Cet interpolateur idéal est constitué par une base infinie de

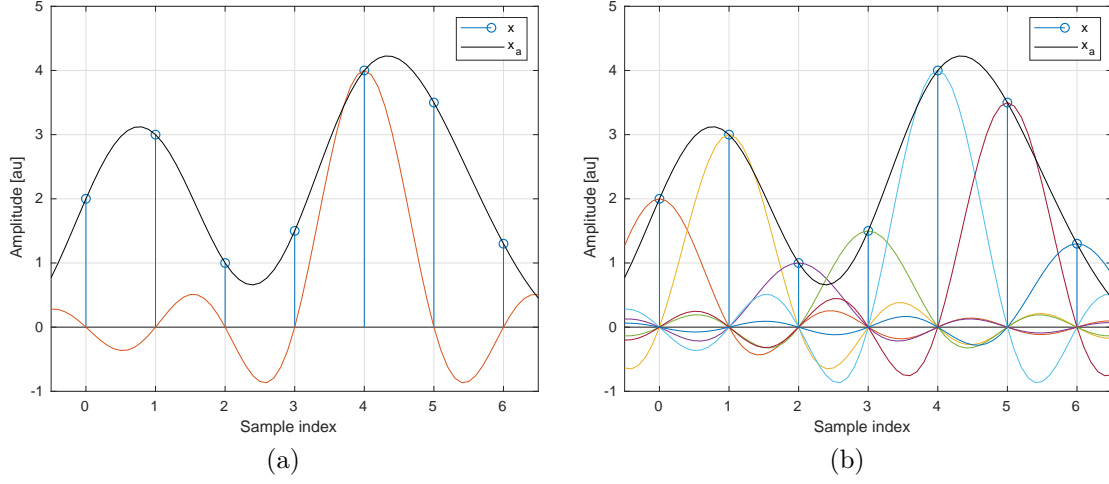


Figure 10.4 – Illustration de l'interpolateur idéal (a) avec une seule fonction de base (b) toutes les fonctions d'interpolations nécessaires

fonctions sinc et est irréalisable en pratique du fait de sa non causalité et de son étendue infinie. La figure 10.4 illustre l'interpolateur idéal. Comme on peut le voir, les fonctions de base sont à chaque fois nulles aux moments d'échantillonnage, sauf pour un des échantillons.

### 10.4.3 Reconstruction d'un signal par un bloqueur

Si le signal  $x_a(t)$  est échantillonné avec une période d'échantillonnage  $T$ , le signal  $\hat{x}_a(t)$  correspondant à la reconstruction de  $x_a(t)$  à l'aide d'un bloqueur, est donnée par

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)[u(t - nT) - u(t - (n+1)T)] \quad (10.21)$$

On trouve facilement que la transformée de Laplace de  $\hat{x}_a(t)$  est donnée par

$$\hat{X}_a(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \frac{1 - e^{-sT}}{s} [e^{sT}]^{-n} \quad (10.22)$$

ce qui peut s'écrire simplement

$$\hat{X}_a(s) = \frac{1}{s} [(1 - z^{-1})X(z)]_{z=e^{sT}} \quad (10.23)$$

ou encore

$$\hat{X}_a(s) = \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \right] X(e^{sT}) \quad (10.24)$$

Il ressort de (10.21) que  $\hat{x}_a(n) = x(n)$  et donc que

$$\hat{X}_a(e^{sT}) = X(e^{sT}) \quad (10.25)$$

Dans le cas où le théorème de Shannon est respecté et seulement dans ce cas, il n'y aura pas d'*aliasing* et la seule distorsion introduite par le bloqueur est celle introduite par l'adjonction de la transmittance  $B_0(s)$

$$B_0(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad (10.26)$$

L'opération est illustrée à la figure 10.5. La zone hachurée en gris indique les composantes fréquentielles issues des répliques et insuffisamment atténuées. De plus, le signal dans la bande passante est lui aussi atténué par rapport au spectre du signal analogique original. Cette atténuation est indiquée par la zone rouge pale.

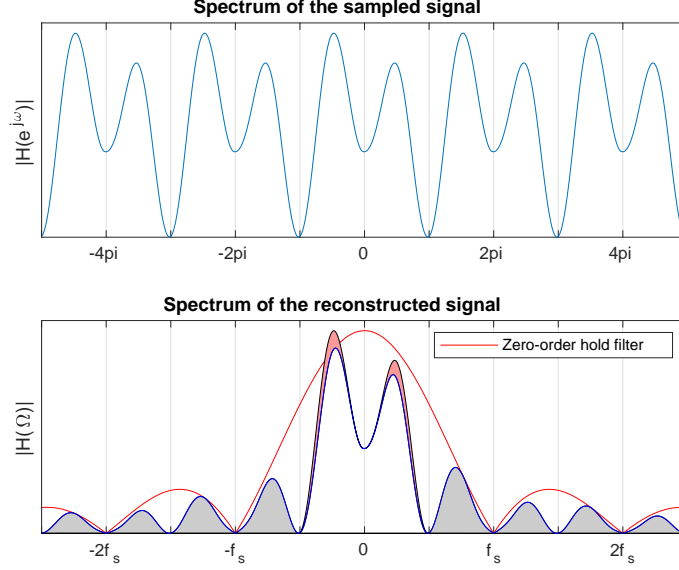


Figure 10.5 – Reconstruction au moyen d'un interpolateur d'ordre zéro (ZOH).

En pratique, le bloqueur d'ordre zéro est l'interpolateur par défaut dans la plupart des applications, à l'exception peut-être des applications audio haute fidélité.

## 10.5 Conservation de la convolution

La convolution d'un signal analogique  $x_a(t)$  avec un autre signal analogique  $h_a(t)$  (par ex. la réponse impulsionnelle d'un système linéaire) est donnée par l'intégrale suivante

$$y_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(\tau) h_a(t - \tau) d\tau$$

En outre, en vertu du théorème de la convolution, on a après transformation de Fourier

$$Y_a(j\Omega) = H_a(j\Omega)X_a(j\Omega) \quad (10.27)$$

Si on échantillonne les signaux  $x_a(t)$  et  $h_a(t)$  en respectant le théorème de Shannon, et que les versions échantillonnées de ces signaux sont respectivement  $x(n)$  et  $h(n)$  on peut écrire pour  $\Omega \in [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} X_a(j\Omega) \quad (10.28)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a(j\Omega) \quad (10.29)$$

L'équation (10.27) s'écrit donc aussi

$$Y_a(j\Omega) = T^2 H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$



et

$$Y_a(j\Omega) = T^2 Y(e^{j\omega})$$

Et la convolution est conservée. Le facteur en  $T^2$  au lieu de  $T$  est dû à la présence du facteur  $d\tau$  dans l'intégrale de convolution.

Pour autant que la réponse impulsionnelle et le signal d'entrée aient été échantillonnés correctement, cette dernière propriété garantit que la simulation d'un système linéaire de manière numérique en utilisant les signaux échantillonnés donne des résultats corrects, c'est-à-dire que les échantillons, résultats de la convolution discrète, sont des échantillons du signal de sortie du système linéaire analogique au facteur  $T$  près.



# La stabilité BIBO

## 11.1 Définition de la stabilité au sens du critère BIBO

Un système est dit stable au sens du critère BIBO (Bounded Input Bounded Output) si à tout signal d'entrée borné, correspond un signal de sortie borné. Dans le cas des systèmes causaux, il est possible d'affiner cette définition (voir l'étude de la représentation d'état), ce qui est très difficile dans le cas de l'étude des systèmes non causaux.

## 11.2 Condition nécessaire et suffisante de stabilité au sens du critère BIBO

Un système est stable au sens du critère BIBO si et seulement si sa réponse impulsionnelle est absolument convergente, c'est-à-dire si et seulement si

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < \infty$$

Il faut et il suffit donc que la norme  $l-1$  de  $h(n)$  soit bornée.

## 11.3 Condition nécessaire et suffisante de stabilité

Comme la condition ci-dessus est une condition nécessaire et suffisante d'existence de la transformée de Fourier au sens strict (convergence absolue) de la réponse impulsionnelle du système, l'existence de la transformée de Fourier au sens strict de la réponse impulsionnelle du système est une *condition nécessaire et suffisante* de stabilité. Autrement dit, une condition nécessaire et suffisante de stabilité est que le cercle de rayon 1 soit dans le domaine de convergence strict de la transformée en  $z$  de la réponse impulsionnelle du système.

Appliquons ensuite cette condition nécessaire et suffisante aux différents types de réponses impulsionnelles.

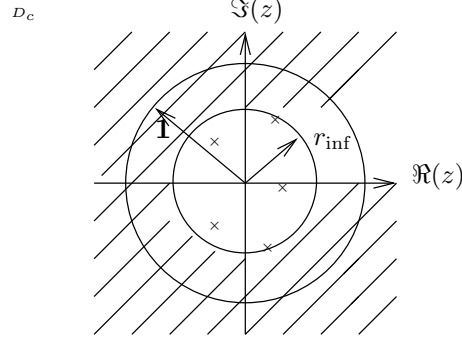
1.  $h(n)$  est à support borné  
 $h(n) = 0$  sauf en un nombre fini d'échantillons.

Le domaine de convergence  $D_c$  de la transformée en  $z$  de  $h(n)$  recouvre tout le plan  $z$ . Le cercle de rayon 1 est donc toujours dans  $D_c$  et un système caractérisé par une réponse impulsionnelle  $h(n)$  à support borné est toujours stable.

2.  $h(n)$  est à support unilatéral à droite

Ce cas revêt une très grande importance, puisqu'il concerne tous les systèmes causaux.

Le domaine de convergence  $D_c$  de la transformée en  $z$  de  $h(n)$  est constitué par la partie du plan  $z$  située à l'extérieur du cercle de rayon  $r_{\text{inf}}$  ( $\forall |z| > r_{\text{inf}}$ ).

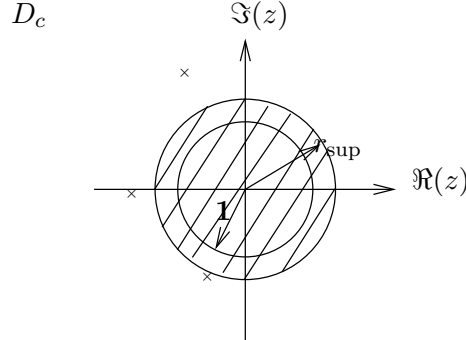


$r_{\text{inf}}$  est déterminé par le module du pôle de plus grand module de  $H(z)$ . Pour que le système soit stable, il faut et il suffit donc que le cercle de rayon 1 soit situé dans  $D_c$ , ou que, ce qui revient au même, tous les pôles de  $H(z)$  soient situés dans le cercle de rayon 1 ou encore que tous les pôles aient un module plus petit que 1.

3.  $h(n)$  est à support unilatéral à gauche

Ce cas a l'avantage de couvrir l'étude des systèmes causaux instables, que l'on peut ainsi étudier à rebours (on part des conditions finales pour atteindre les conditions initiales).

Le domaine de convergence  $D_c$  de la transformée en  $z$  de  $h(n)$  est constitué par la partie du plan  $z$  située à l'intérieur du cercle de rayon  $r_{\text{sup}}$  ( $\forall |z| < r_{\text{sup}}$ ).

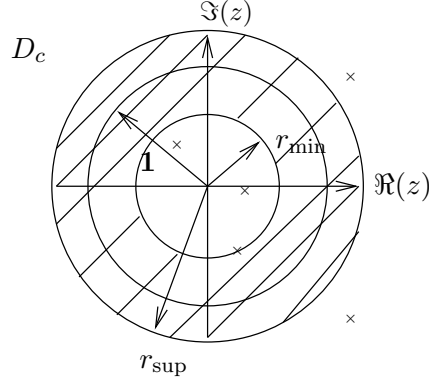


$r_{\text{sup}}$  est déterminé par le module du pôle de plus petit module de  $H(z)$ . Pour que le système soit stable, il faut et il suffit que le cercle de rayon 1 soit dans le domaine  $D_c$ , ou que, ce qui revient au même, tous les pôles de  $H(z)$  soient situés à l'extérieur du cercle de rayon 1 ou encore que tous les pôles aient un module plus grand que 1.

4.  $h(n)$  est à support bilatéral

Ce cas englobe notamment l'étude des systèmes de formation d'image.

La suite  $h(n)$  doit être scindée en deux suites, l'une à support unilatéral à gauche  $h_1(n)$  et l'autre à support unilatéral à droite  $h_2(n)$ . Pour que le système soit stable, il faut et il suffit que les pôles de  $H_1(z)$  soient à l'extérieur du cercle de rayon 1 et que ceux de  $H_2(z)$  soient à l'intérieur du cercle de rayon 1.



## 11.4 Exemples

### 1. La moyenne glissante

On remplace chaque point par la moyenne de ses voisins.

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{5} \sum_{k=-2}^{k=2} x(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(n-k) h(k) \end{aligned}$$

avec :

$$h(k) = \begin{cases} 1/5 & \text{pour } -2 \leq k \leq 2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

On a un système à support borné. La moyenne glissante est donc un système stable.

### 2. Equation récurrente du 1er ordre

$$y(n) = a y(n-1) + b x(n)$$

Il s'agit d'un système causal puisque l'on détermine  $y(n)$  à partir de la valeur passée de  $y$  et de la valeur actuelle de  $x$ . On calcule ensuite la transformée en  $z$  des deux membres, et en tenant compte de la propriété de décalage on obtient :

$$Y(z) = a z^{-1} Y(z) + b X(z)$$

$$Y(z) [1 - a z^{-1}] = b X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b}{1 - a z^{-1}}$$

$H(z)$  possède un pôle en  $z = a$ . Si  $|a| < 1$ , le système converge. Si  $|a| > 1$ , le système diverge et n'est donc pas stable. Ceci se vérifie très facilement, la réponse impulsionnelle étant en effet donnée par la transformée inverse de  $H(z)$  :

$$\begin{aligned} h(n) &= \frac{1}{2\pi j} \oint H(z) z^{n-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{b}{1 - a z^{-1}} z^{n-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z^n b}{z - a} dz \\ &= \psi(z)_{z=a} = a^n b u(n) \end{aligned}$$



# Les séries de Fourier continues et discrètes

## 12.1 Développement en série de Fourier d'une fonction périodique

Soit  $\tilde{x}(t)$  une fonction périodique continue (on utilisera dans la suite le signe “tilde” pour désigner une fonction ou une suite périodique).

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t + k \Delta T) \quad \forall k \text{ entier}$$

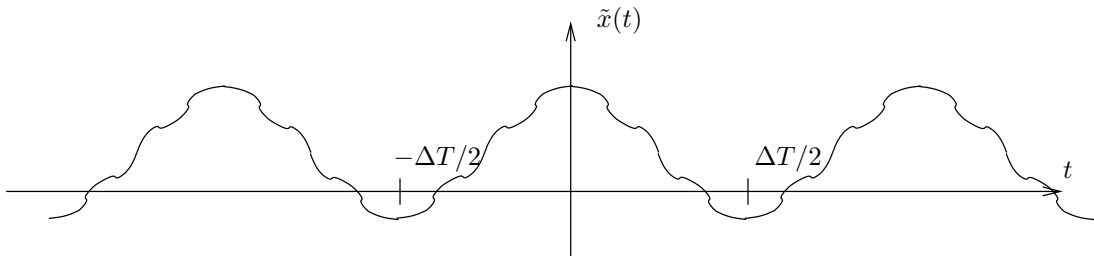
Une fonction périodique peut être développée en série de Fourier, en tout cas si la série des coefficients du développement est absolument convergente :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t}$$

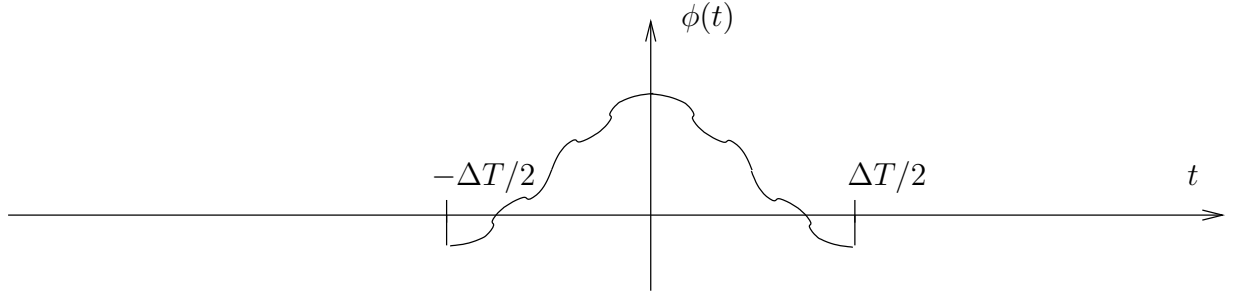
Les coefficients  $C_k$  sont donnés par

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta T/2}^{+\Delta T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

La figure suivante donne un exemple de fonction périodique :



Considérons la fonction patron  $\varphi(t)$  de  $\tilde{x}(t)$ . Il s'agit d'une fonction nulle  $\forall t$  sauf sur la période  $[-\frac{\Delta T}{2}, \frac{\Delta T}{2}]$  de  $\tilde{x}(t)$  où elle est égale à  $\tilde{x}(t)$



Considérons la transformée de Fourier  $\phi(j\Omega)$  de la fonction patron  $\varphi(t)$ , que l'on évalue pour la fondamentale et toutes les harmoniques de  $\tilde{x}(t)$ , c'est-à-dire pour les multiples entiers de  $\Omega_0$  ( $\Omega = k\Omega_0 \forall k$  entier). Il en résulte donc que

$$\phi(j\Omega)|_{\Omega=k\Omega_0} = \phi(jk\Omega_0) = \int_{-\Delta T/2}^{+\Delta T/2} \varphi(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

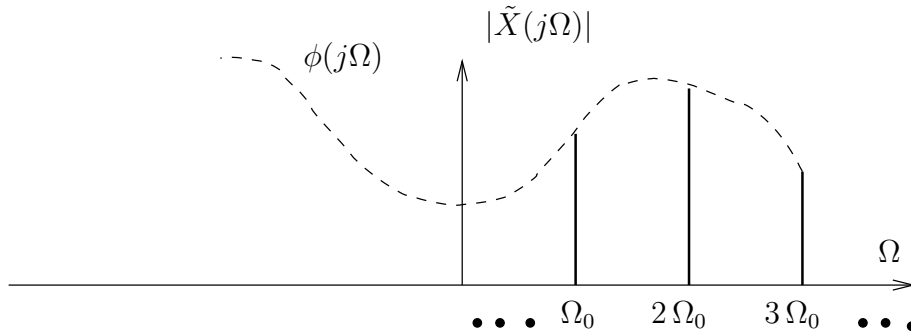
Il en résulte donc que

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \phi(jk\Omega_0)$$

et  $C_k$  est, à un facteur  $\frac{1}{2\pi}$  près, la transformée de Fourier, évaluée pour l'harmonique correspondante, d'une période de  $\tilde{x}(t)$  centrée à l'origine.

La transformée de Fourier de  $\tilde{x}(t)$  s'écrit en outre<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} &= \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t}\right\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \mathcal{F}\{e^{jk\Omega_0 t}\} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k 2\pi \delta(\Omega - k\Omega_0) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi(jk\Omega_0) \delta(\Omega - k\Omega_0) \end{aligned}$$



Si une fonction continue est périodique, son spectre est discret et est constitué par un train d'impulsions situées aux multiples entiers de la pulsation fondamentale  $\Omega_0$ . L'amplitude des raies

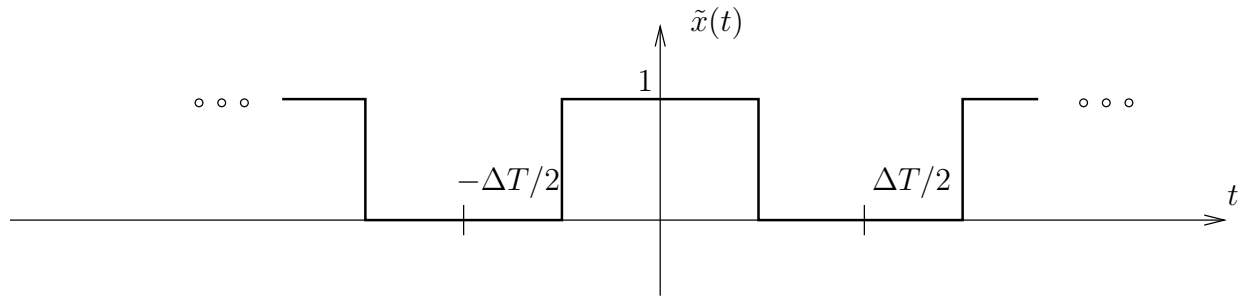
1. en notant que  $\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$



est en outre donnée par la transformée de Fourier, évaluée aux mêmes pulsations, d'une seule période centrée à l'origine.

### Exemple

Considérons la fonction périodique en créneaux de largeur  $\frac{\Delta T}{2}$ , de période  $\Delta T$  et d'amplitude unitaire, représentée à la figure suivante :



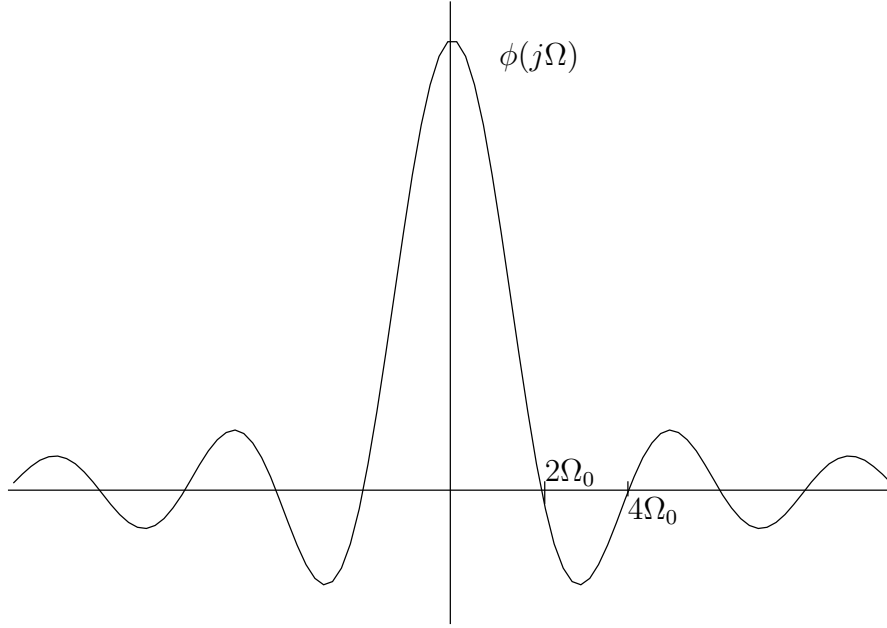
La fonction de forme est donnée par :

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= 1 \text{ pour } t \in \left[-\frac{\Delta T}{4}, \frac{\Delta T}{4}\right] \\ &= 0 \text{ autrement}\end{aligned}$$

La transformée de Fourier  $\phi(j\Omega)$  de la fonction de forme est donnée par

$$\begin{aligned}\phi(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{-j\Omega t} dt \\ &= \int_{-\frac{\Delta T}{4}}^{\frac{\Delta T}{4}} e^{-j\Omega t} dt \\ &= \frac{2}{\Omega} \sin\left(\Omega \frac{\Delta T}{4}\right) \\ &= \frac{\Delta T}{2} \frac{\sin\left(\Omega \frac{\Delta T}{4}\right)}{\Omega \frac{\Delta T}{4}} \\ &= \frac{\Delta T}{2} \operatorname{sinc}\left(\Omega \frac{\Delta T}{4}\right)\end{aligned}$$

Cette dernière expression est représentée à la figure suivante



Comme en outre  $\delta(\Omega - k\Omega_0) = \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{\Delta T})$ , seules les harmoniques impaires subsistent puisque  $\text{sinc } \Omega\frac{\Delta T}{4} = 0$  pour  $\Omega = \frac{4k\pi}{\Delta T}$  et que  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{\Delta T}$ . Ce résultat est logique puisque la fonction périodique étudiée est paire.

## 12.2 Transformée de Fourier d'une suite périodique

On développe une fonction périodique  $\tilde{x}(t)$  de période  $\Delta T$  en série de Fourier :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\Omega_0 t}$$

où  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{\Delta T}$ . Si on échantillonne cette fonction périodique de manière à obtenir une suite périodique et si  $T$  est la période d'échantillonnage, on doit avoir  $N T = \Delta T$ , avec  $N$  entier positif. On forme ainsi une suite périodique de période  $N$ .

$$T = \frac{\Delta T}{N} \text{ ou } f_s = N f_0$$

La fréquence d'échantillonnage  $f_s$  est donc un multiple de la fréquence fondamentale  $f_0 = \frac{1}{\Delta T}$  du signal périodique. La suite périodique  $\tilde{x}(n)$  obtenue peut être exprimée en utilisant les résultats du paragraphe précédent :

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n) &= \tilde{x}(t)|_{t=nT} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j\Omega_0 knT} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{NT} knT} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{N} kn} \end{aligned}$$

Il est important de noter que, contrairement au cas du développement en série de Fourier des fonctions périodiques continues, il n'y a que  $N$  suites d'exponentielles complexes distinctes ayant une pulsation  $\frac{2\pi}{N}k$  qui soient un multiple entier de la pulsation fondamentale  $\frac{2\pi}{N}$  de la suite périodique.

De cette constatation, il ressort que

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{X}(k)}{N} e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

ou

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

où  $1/N$  a été introduit dans un but de normalisation, et où  $\tilde{X}(k)/N$  est la somme de tous les coefficients  $C_k$  affectant les suites cissoïdales  $e^{j(\frac{2\pi}{N}k)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}(k+N)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}(k+2N)n} = \dots \forall k \in ]-\infty, +\infty[$  par pas de  $N$ .

Une suite périodique de période  $N$  peut donc être également développée en série de Fourier, mais cette série est de longueur finie  $N$ . On démontre dans la suite que les coefficients  $\tilde{X}(k)$  sont également les éléments d'une suite périodique  $\tilde{X}(k)$  de période  $N$ . En effet, énonçons tout d'abord le lemme suivant :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kr} = \begin{cases} 1 & \text{si } r = mN \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

En effet, dans le cas où  $r \neq mN$  on a une somme de vecteurs uniformément répartis sur la circonférence du cercle de rayon 1 dans le plan complexe.

En outre,

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

en multipliant les deux membres par  $e^{-j\frac{2\pi}{N}nr}$

$$\tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nr} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} e^{-j\frac{2\pi}{N}nr}$$

et en sommant suivant  $n$  de 0 à  $N-1$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nr} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-r)}$$

En permutant les deux sommations du 2d membre et en mettant  $\tilde{X}(k)$  en évidence

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nr} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-r)}$$

où :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-r)} = \begin{cases} 1 & \text{si } k-r \text{ est un multiple de } N \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Dès lors, comme  $k$  et  $r$  ne peuvent varier qu'entre 0 et  $N - 1$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nr} = \tilde{X}(r)$$

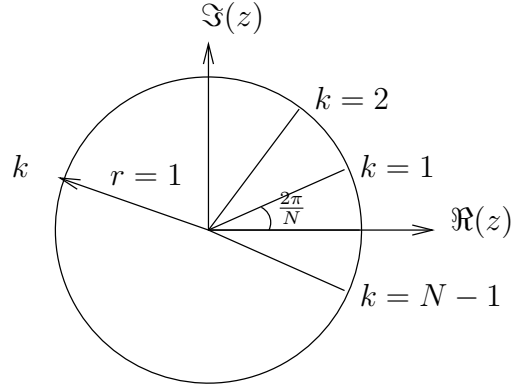
La suite  $\tilde{X}(r)$  obtenue est périodique de période  $N$ . En effet

$$\begin{aligned} \tilde{X}(r) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} rn} \\ \tilde{X}(r + lN) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} (r+lN)n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} rn} e^{-j \frac{2\pi}{N} lnN} \\ &= \tilde{X}(r) \end{aligned}$$

La suite  $\tilde{X}(k)$  peut enfin être interprétée comme la suite des échantillons de la transformée en  $z$  d'une seule période de  $\tilde{x}(n)$ , échantillonnée sur la circonférence du cercle de rayon 1, avec une période d'échantillonnage de  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$

$$\tilde{X}(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j \frac{2\pi}{N} k}}$$

avec  $X(z)$ , la transformée en  $z$  d'une période de  $\tilde{x}(n)$



## 12.3 Les séries de Fourier discrètes ou DFS

### 12.3.1 Définition

Les séries de Fourier discrètes ou DFS (Discrete Fourier Series) sont définies par la paire d'expressions suivantes

- le développement en série de Fourier discrète de la suite périodique ou transformée DFS inverse

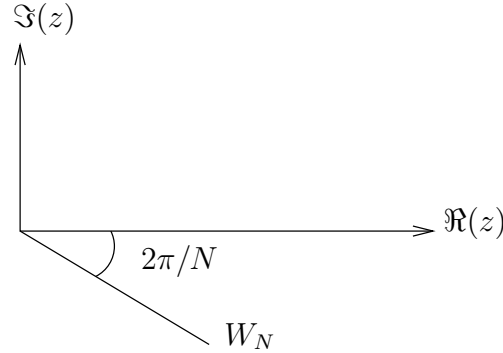
$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

- l'expression des coefficients de ce développement ou transformation DFS directe

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

On convient en outre de noter

$$W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}}$$



Dès lors, la transformation DFS s'écrit sous la forme suivante :

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn}$$

et

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn}$$

### 12.3.2 Forme matricielle de la transformée DFS

Si on décrit  $\tilde{x}(n)$  et  $\tilde{X}(k)$  par une seule période sous forme vectorielle (le vecteur  $\tilde{x}$  a comme composantes tous les éléments d'une période de  $\tilde{x}(n)$  et le vecteur  $\tilde{X}$  a comme composantes tous les éléments de  $\tilde{X}(k)$ ), on peut écrire l'expression de la transformée DFS sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(0) \\ \tilde{X}(1) \\ \dots \\ \tilde{X}(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdot & W_N^{N-1} \\ \cdot & W_N^2 & W_N^4 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}(0) \\ \tilde{x}(1) \\ \dots \\ \tilde{x}(N-1) \end{bmatrix}$$

La matrice

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdot & W_N^{N-1} \\ \cdot & W_N^2 & W_N^4 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

est appelée matrice de Fourier et est symétrique.

La transformée DFS peut donc s'écrire  $\tilde{X} = F \tilde{x}$  et la transformée DFS inverse  $\tilde{x} = \frac{1}{N} F^* \tilde{X}$  où  $F^*$  est la matrice associée de  $F$ . Il en résulte l'expression suivante, vraie  $\forall \tilde{x}$  :

$$\tilde{x} = \left[ \frac{1}{N} F^* F \right] \tilde{x}$$

et donc

$$\frac{1}{N} F^* F = I \text{ (matrice unité) ou } F^{-1} = \frac{1}{N} F^*$$

La transformée DFS est donc unitaire à un facteur  $\sqrt{\frac{1}{N}}$  près.

### 12.3.3 Propriétés des transformées DFS de suites périodiques de même période $N$

On démontre facilement les propriétés suivantes

Suites	Coefficients DFS
<u>Linéarité</u> $a \tilde{x}_1(n) + b \tilde{x}_2(n)$	$a \tilde{X}_1(k) + b \tilde{X}_2(k)$
<u>Décalage</u> $\tilde{x}(n + m)$ $W_N^{ln} \tilde{x}(n)$	$W_N^{-km} \tilde{X}(k)$ $\tilde{X}(k + l)$
<u>Suites de période <math>N</math></u>	
$\tilde{x}^*(n)$	$\tilde{X}^*(-k)$
$\tilde{x}^*(-n)$	$\tilde{X}^*(k)$
$\mathcal{Re}[\tilde{x}(n)]$	$\tilde{X}_e(k)$ partie conjuguée symétrique de $\tilde{X}(k)$
$j\mathcal{Im}[\tilde{x}(n)]$	$\tilde{X}_o(k)$ partie conjuguée antisymétrique de $\tilde{X}(k)$
$\tilde{x}_e(n)$	$\Re[\tilde{X}(k)]$
$\tilde{x}_o(n)$	$j\Im[\tilde{X}(k)]$
$\tilde{x}_1(n) \cdot \tilde{x}_2(n)$	$\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l) \cdot \tilde{X}_2(k-l)$
$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) \tilde{h}(n-k)$	$\tilde{X}(k) \tilde{H}(k)$

### 12.3.4 La convolution cyclique

La dernière propriété est relative à la convolution cyclique étudiée ci-dessous. Elle se démontre facilement comme indiqué ci-après.

On définit la convolution cyclique de deux suites périodiques  $\tilde{x}(n)$  et  $\tilde{h}(n)$  de même période  $N$  par

$$\tilde{y}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) \tilde{h}(n-k)$$

Par application de la transformée DFS on obtient :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{y}(n) W_N^{rn} &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) \tilde{h}(n-k) W_N^{rn} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) W_N^{kr} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{h}(n-k) W_N^{r(n-k)} \right] \\
 \tilde{Y}(r) &= \tilde{X}(r) \tilde{H}(r)
 \end{aligned} \tag{12.1}$$

### 12.3.5 Forme matricielle de la convolution cyclique

La convolution cyclique

$$\tilde{y}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) \tilde{h}(n-k)$$

peut également s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(0) \\ \tilde{y}(1) \\ \vdots \\ \tilde{y}(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{h}(0) & \tilde{h}(N-1) & \tilde{h}(N-2) & \dots & \tilde{h}(1) \\ \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) & \tilde{h}(N-1) & \dots & \tilde{h}(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{h}(N-1) & \tilde{h}(N-2) & \dots & \tilde{h}(1) & \tilde{h}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(0) \\ \tilde{x}(1) \\ \vdots \\ \tilde{x}(N-1) \end{bmatrix}$$

où la matrice ci-dessus est notée  $H$  :

$$\tilde{y} = H \tilde{x}$$

La 1ère colonne est constituée par les éléments d'une période de la suite  $\tilde{h}(n)$ . Il suffit de faire glisser une colonne d'un élément vers le bas pour trouver la colonne suivante, le dernier élément venant en première position. Les colonnes (les lignes) de cette matrice sont donc formées par circulation de la première colonne (ligne). C'est pourquoi la matrice est appelée circulante.

Une matrice circulante n'a que  $N$  éléments différents et les éléments d'une même diagonale (principale ou secondaire) sont identiques.

Enfin, une matrice modale de  $H$  est la matrice de Fourier associée  $F^*$ . En effet, si  $\tilde{Y} = F\tilde{y}$ ,  $\tilde{X} = F\tilde{x}$  et  $\tilde{H} = F\tilde{h}$ , l'expression (12.1) n'est rien d'autre que le résultat de l'opération de diagonalisation de la convolution cyclique, puisque, en multipliant la forme matricielle

$$\tilde{y} = H\tilde{x}$$

à gauche par la matrice de Fourier  $F$ , on trouve

$$\tilde{Y} = \left[ \frac{1}{N} F H F^* \right] \tilde{X} \tag{12.2}$$

Or l'expression (12.1) s'écrit aussi

$$\tilde{Y} = \Lambda \tilde{X}$$

où  $\Lambda$  est la matrice diagonale dont les éléments sont les éléments  $\tilde{H}(r)$  de la transformée DFS de  $\tilde{h}(n)$ . En comparant avec l'expression (12.2), on trouve finalement que

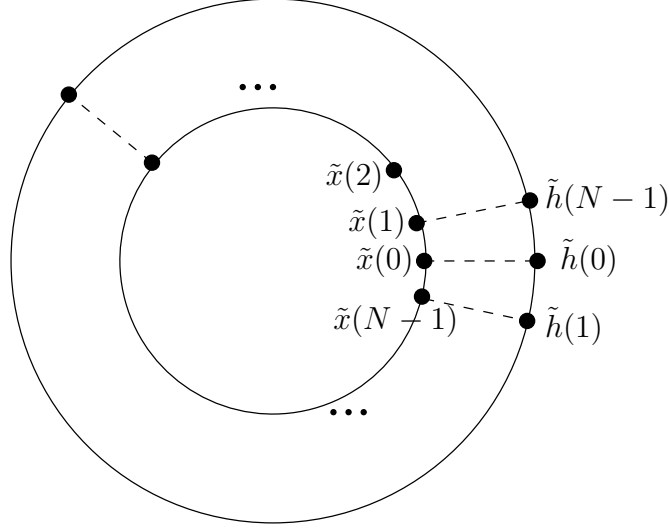
$$\Lambda = \Lambda_H = \frac{1}{N} F H F^*$$

C'est-à-dire que la matrice  $F$  est une matrice modale inverse de  $H$  et que les éléments de  $\tilde{H}$  sont les valeurs propres de la matrice circulante  $H$ .

C'est donc la transformée DFS qui diagonalise la convolution cyclique.

### 12.3.6 Interprétation de la convolution cyclique

On peut imaginer 2 roues à rayons et concentriques dont une est fixe et l'autre est mobile.



Pour chaque variation de  $n$  d'une unité, la roue mobile est décalée d'un "cran" :

$$\begin{aligned}
 y(0) &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) \tilde{h}(0-k) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) \tilde{h}(N-k) \\
 y(1) &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) \tilde{h}(1-k) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) \tilde{h}(N-(k-1)) \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Après  $N$  "crans", la roue mobile revient à son point de départ. Pour chaque valeur de  $n$  et donc après avoir décalé la roue mobile de  $n$  "crans", on fait le produit des points qui se font face. On additionne ensuite tous ces produits.  $\tilde{y}(n)$  est périodique, de période  $N$  d'où la notation.

### 12.3.7 Echantillonnage de la transformée en $z$ d'une suite suivant le cercle de rayon 1

Soit  $x(n)$  une suite quelconque. La transformée en  $z$  de la suite  $x(n)$  est donnée par

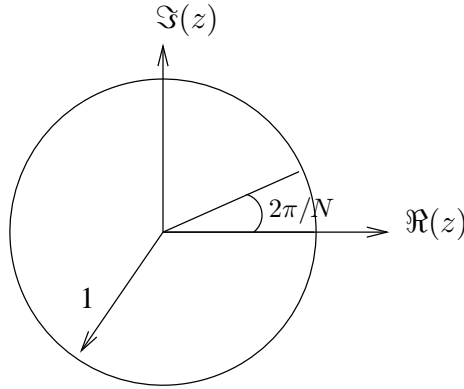
$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

La transformée de Fourier de la suite  $x(n)$  est donnée par

$$\mathcal{F}\{x(k)\} = \mathcal{Z}\{x(n)\}|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega})$$

On échantillonne ensuite  $X(e^{j\omega})$  suivant  $\omega$  de manière à obtenir une suite  $\tilde{X}(k)$  périodique de période  $N$ , correspondant à la période  $2\pi$  de  $X(e^{j\omega})$ . Le pas d'échantillonnage vaut donc  $\frac{2\pi}{N}$





$$\tilde{X}(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega_k = \frac{2\pi}{N}k}$$

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Les éléments de la suite périodique  $\tilde{X}(k)$  peuvent être considérés comme les coefficients du développement en série de Fourier d'une suite périodique  $\tilde{x}(n)$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

A ce stade, on se pose la question de savoir quelle est la relation qui existe entre la suite de départ  $x(n)$  et la suite  $\tilde{x}(n)$  ainsi obtenue. En remplaçant  $\tilde{X}(k)$  par sa valeur :

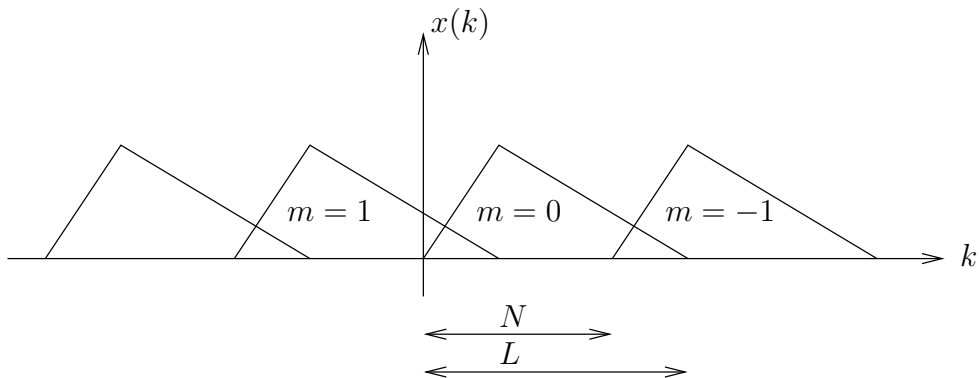
$$\begin{aligned} \tilde{x}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l) e^{-j\frac{2\pi}{N}kl} e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(l-n)} \end{aligned}$$

où

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k(l-n)} = \begin{cases} 1 & \text{si } l-n = mN \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$n = l - mN$ , peu importe le signe de  $m$  pourvu que  $l - n$  soit multiple de  $N$

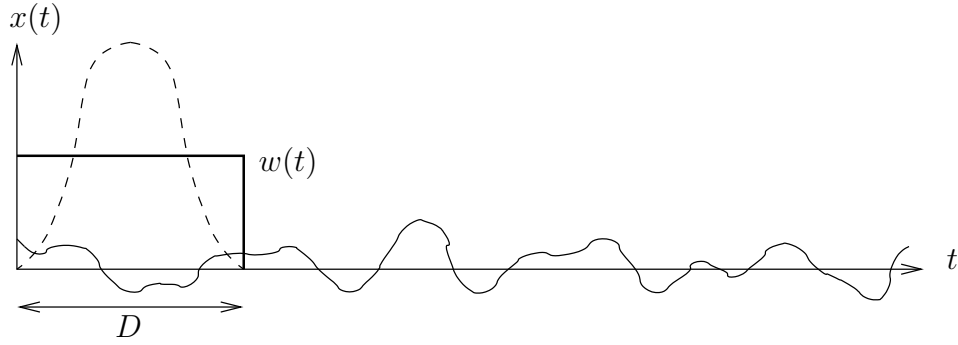
$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n + mN)$$



Soit  $L$  la longueur de la suite  $x(n)$  exprimée en nombre d'échantillons. On se rend compte que si on a choisi sur le cercle de rayon 1 un nombre  $N$  d'échantillons plus petit que la longueur de la suite  $x(n)$  ( $L > N$ ), de l'information a été perdue. Pour qu'il n'y ait pas de perte d'information lors de l'échantillonnage de  $X(e^{j\omega})$ , il faut et il suffit que

$$N \geq L$$

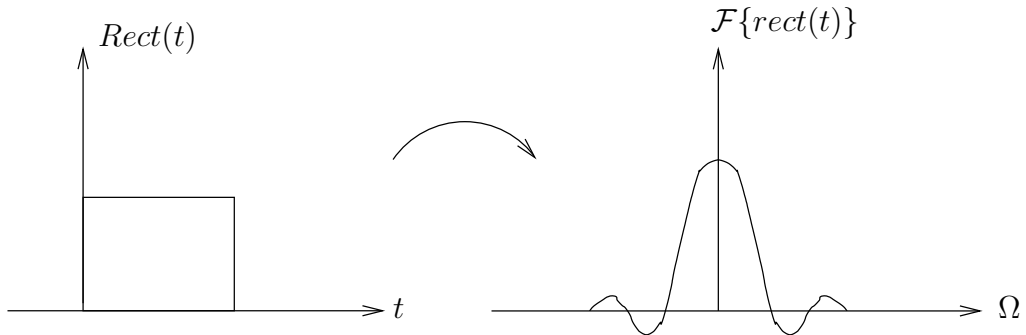
Cela suppose que la suite originale  $x(n)$  soit de longueur finie. Dans le cas où les signaux ne sont pas de longueur finie, on est confronté au problème de troncature.



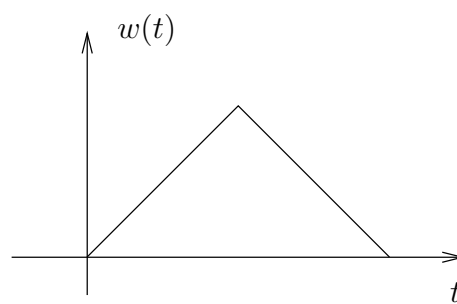
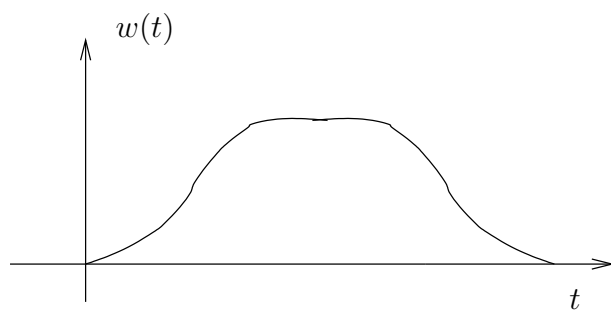
Pour illustrer ce problème, imaginons que l'on désire analyser un signal à l'aide d'un ordinateur. On multiplie à cette intention le signal par une fenêtre  $w(t)$ . Par exemple, pour une fenêtre rectangulaire,  $w(t) = 1$  pendant l'échantillonnage de longueur  $D$  et vaut zéro autrement. Il est possible d'appliquer d'autres types de fenêtre : une fenêtre triangulaire par exemple. La transformée de Fourier du nouveau signal est

$$\mathcal{F}\{x(t) w(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\Omega') W(j(\Omega - \Omega')) d\Omega' = G(j\Omega)$$

Pour que  $G$  soit égal à  $X$ , il faut que  $\frac{1}{2\pi}W(j\Omega)$  soit une impulsion de Dirac, élément neutre de la convolution dont la transformée inverse vaut 1 de  $-\infty$  à  $+\infty$ , ce qui revient donc à tout échantillonner. Cela ne résout pas notre problème. Pour résoudre ce problème de manière approchée, on essaye de trouver une fenêtre telle que sa transformée soit proche d'une Dirac. La transformée de Fourier d'une fenêtre rectangulaire est un sinus cardinal.



La fenêtre qui convient le moins est la fenêtre rectangulaire : elle correspond à ne prendre aucune précaution. Il existe heureusement d'autres fenêtres beaucoup plus efficaces et couramment utilisées comme la fenêtre de Hamming, de Hanning ou la fenêtre triangulaire.





# La transformée de Fourier discrète

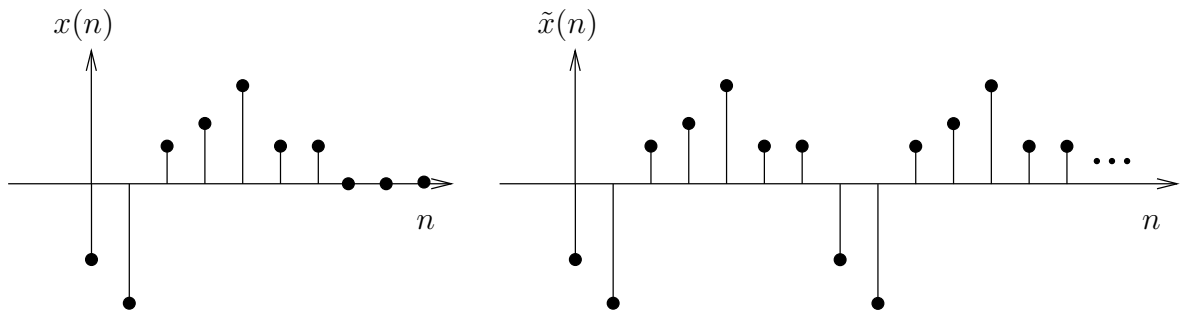
## 13.1 Définition

Soit une suite  $x(n)$  quelconque mais de longueur finie égale à  $N$ . Supposons que  $x(n) = 0$  sauf dans l'intervalle  $0 \leq n \leq N - 1$ . La version périodique de la suite  $x(n)$  est donc donnée par

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n + mN)$$

Comme il n'y a pas de superposition entre les termes  $x(n + mN)$  de la sommation pour les différentes valeurs de  $m$ , on peut également écrire

$$\tilde{x}(n) = x(n \text{ modulo } N) = [x(n)]_N$$



Comme la suite  $\tilde{x}(n)$  est périodique, les coefficients de son développement en série de Fourier sont donnés par

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

On fait ensuite correspondre à la suite périodique  $\tilde{X}(k)$  une suite de longueur finie  $X(k)$ , constituée d'une seule période de  $\tilde{X}(k)$ .

$$X(k) = \tilde{X}(k) \text{ Rect}_N(k)$$

C'est-à-dire

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} & 0 \leq k \leq N - 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

ou sous forme matricielle :

$$X = Fx$$

Il s'agit, par définition, de la transformée de Fourier discrète ou DFT (Discrete Fourier Transform). En outre, si on connaît  $X(k)$ , on peut retrouver  $x(n)$ , en rendant  $X(k)$  périodique :

$$\tilde{X}(k) = [X(k)]_N$$

en appliquant ensuite la transformée DFS inverse de  $\tilde{X}(k)$  :

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

et finalement en ne gardant qu'une seule période de  $\tilde{x}(n)$  :

$$x(n) = \tilde{x}(n) \text{ Rect}_N(k)$$

ou simplement en calculant directement

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

soit, sous forme matricielle :

$$x = \frac{1}{N} F^* X$$

Il s'agit par définition de la transformée de Fourier discrète inverse

**Remarque :**

La FFT (Fast Fourier Transform) est un algorithme rapide qui effectue la DFT. L'application brutale des formules décrites ci-dessus pour calculer la DFT exige  $N^2$  opérations pour  $N$  éléments. La FFT effectue, en réalité, beaucoup de permutations grâce aux propriétés de symétrie de la matrice  $F$  de Fourier. Ces permutations sont aisément réalisées en langage C par l'utilisation de pointeurs. En changeant la valeur de ces pointeurs, on effectue des changements d'adresses. Les  $N^2$  opérations sont ainsi réduites à  $N \log_2 N$  opérations.

---

# Caractéristiques de systèmes discrets

---

## 14.1 Introduction

Un système (discret) est défini comme un dispositif transformant un signal d'entrée  $x(n)$  en un signal de sortie  $y(n)$ .

Le but de ce chapitre est de décrire les différentes représentations possibles<sup>1</sup> pour des systèmes discrets, les implémentations possibles et d'analyser les propriétés de tels systèmes.

La discussion se limitera aux systèmes causaux, linéaires et permanents (invariants).

## 14.2 Représentation

### 14.2.1 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle, notée  $h(n)$  est par définition la réponse du système à une sollicitation impulsionnelle  $x(n) = \delta(n)$ .

On distingue les système à réponse impulsionnelle finie, dénotés "FIR" (Finite Impulse Response) et les systèmes à réponse impulsionnelle infinie, dénotés "IIR" (Infinite Impulse Response). Il est à noter que les systèmes FIR sont inconditionnellement stables.

### 14.2.2 Fonction de transfert

La fonction de transfert notée  $H(z)$  est la transformée en Z de  $h(n)$  avec

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}. \quad (14.1)$$

et évidemment un domaine de convergence constitué d'un cercle centré à l'origine, l'origine étant éventuellement exclue.

---

1. La discussion se limite aux descriptions externes, c.à.d. aux descriptions que l'on peut obtenir sur base d'un examen externe du système considéré comme une boîte noire. Les descriptions internes seront vue au cours ES322 (Control Systems).

### 14.2.3 Transmittance

La transmittance notée  $H(e^{j\omega})$  est la transformée de Fourier de  $h(n)$  ou l'évaluation de la transformée en  $Z$  en  $z = e^{j\omega}$  et peut aussi s'obtenir en sollicitant le système au moyen d'exponentielles complexes.

En pratique, on dispose plutôt de la transformée de Fourier discrète de  $h(n)$ ,  $H(k)$ .

### 14.2.4 Equations aux différences

#### 14.2.4.1 Introduction

Pour autant que la fonction de transfert du système soit rationnelle, soit un quotient de polynômes en  $z$

$$H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\sum_{p=0}^M b_p z^{-p}}{\sum_{q=0}^N a_q z^{-q}}, \quad (14.2)$$

la relation entre l'entrée et la sortie du système peut aussi s'écrire sous la forme d'une équation aux différences

$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left( \sum_{p=0}^M b_p x(n-p) - \sum_{q=1}^N a_q y(n-q) \right). \quad (14.3)$$

Cette expression s'obtient en prenant la transformée en  $Z$  inverse de  $Y(z) = H(z)X(z)$  qui s'obtient immédiatement en exploitant la propriété de décalage  $x(n-1) \Leftrightarrow z^{-1}X(z)$ .

#### 14.2.4.2 Moyenne mobile

Lorsque  $N = 0$ ,  $H(z)$  se réduit à

$$H(z) = \frac{1}{a_0} \sum_{p=0}^M b_p z^{-p}, \quad (14.4)$$

soit

$$y(n) = \frac{1}{a_0} \sum_{p=0}^M b_p x(n-p) \quad (14.5)$$

ce qui revient à effectuer la moyenne pondérée des  $M$  derniers échantillons et justifie ainsi la dénomination de moyenne mobile (Moving Average, MA). Les systèmes MA ne possèdent que des zéros et aucun pôles. Leur réponse impulsionnelle est finie (FIR) et sont donc inconditionnellement stables.

#### 14.2.4.3 Système autorégressif

Lorsque  $M = 0$ ,  $H(z)$  se réduit à

$$H(z) = \frac{1}{\sum_{q=0}^N a_q z^{-q}}, \quad (14.6)$$

et donc

$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left( x(n) - \sum_{q=1}^N a_q y(n-q) \right). \quad (14.7)$$



Cette expression est purement autorégressive, c.à.d. que  $y(n)$  ne dépend que des valeurs de  $y(n)$  aux instants précédents ainsi que du dernier échantillon  $x(n)$  du signal d'entrée. De tels systèmes sont donc réputés autorégressifs (Auto Regressive, AR).

Il est à noter qu'un système AR ne possède que des pôles et aucun zéro.

#### 14.2.4.4 Systèmes ARMA

Parfois aussi appelés modèle ARMA d'un système, il s'agit d'une combinaison (mise en cascade) d'un système AR et d'un système MA, soit l'expression (14.2).

#### 14.2.4.5 Exemple

A titre d'exemple, considérons l'équation aux différences suivante

$$y(n) = y(n-1) + x(n) - x(n-N). \quad (14.8)$$

Cette expression est strictement égale à

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k) \quad (14.9)$$

qui dénote un système FIR. En effet, ces deux expressions ont la même transformée en Z

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} = \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k}, \quad (14.10)$$

le pôle en  $z = 1$  n'étant qu'apparent, vu qu'il est compensé par un zéro.

Ceci montre d'une part qu'il ne faut pas se fier à l'apparence auto-régressive d'une expression pour en conclure quant au caractère FIR ou IIR de la réponse impulsionnelle.

Et d'autre part, l'utilité de l'expression auto-régressive (14.8) est que celle-ci ne nécessite que 2 opérations de calcul par échantillon alors que (14.9) en nécessiterait  $N$ , soit nettement plus.

## 14.3 Implémentation

### 14.3.1 Convolution dans le domaine temporel

Etant donné la réponse impulsionnelle d'un système, la sortie d'un tel système provoquée par un signal d'entrée  $x(n)$  est donnée par la sommation de Duhamel

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) \quad (14.11)$$

Pour autant que la réponse impulsionnelle soit finie, la somme est alors elle aussi finie et peut être implémentée. En supposant que  $x(n)$  n'est disponible que pour  $n \geq 0$ , il faut définir les valeurs de  $x(n)$  pour  $n < 0$ . En traitement des signaux, il est d'usage de prendre  $x(n) = 0$  pour  $n < 0$ . En traitement d'images il existe par contre différentes approches discutées au Chapitre ??.

Dans le cas d'une réponse impulsionnelle infinie, on pourrait imaginer de limiter la somme à un nombre fini de termes, mais cela reviendrait à tronquer la réponse impulsionnelle infinie et ainsi à

en faire une réponse impulsionnelle finie. Les effets de cette troncature sont étudiés au Chapitre ??.

### 14.3.2 Implementation au moyen de la transformée de Fourier discrète

Sur le principe, la convolution peut s'implémenter au moyen de la transformée de Fourier

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \quad (14.12)$$

cependant, pour des applications numériques, il est nécessaire d'utiliser la DFT soit

$$Y(k) = H(k)X(k) \quad 0 \leq k < N. \quad (14.13)$$

Pour pouvoir utiliser cette expression, il faut que

- $X(k)$ ,  $H(k)$  et donc  $x(n)$  et  $h(n)$  aient la même longueur ;
- que le résultat de la convolution,  $y(n)$  puisse lui-aussi être représenté par un signal de même longueur. Dans le cas contraire, il y aurait recouvrement temporel du résultat.

En effet, fondamentalement, (14.13) implémente une convolution cyclique de période  $N$ .

Supposons le signal  $x(n)$  de longueur  $N_x$ , la réponse impulsionnelle de longueur  $N_h$  tels que

$$x(n) = 0 \quad \text{pour } n < 0 \text{ ou } n \geq N_x \quad (14.14)$$

et

$$h(n) = 0 \quad \text{pour } n < 0 \text{ ou } n \geq N_h. \quad (14.15)$$

Le résultat du produit de convolution

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) \quad (14.16)$$

est donc nul pour  $n < 0$  et  $n \geq N_x + N_h - 1$ .

Le signal  $y(n)$  est donc de longueur  $N_y = N_x + N_h - 1$  et si  $N$  est pris inférieur à  $N_y$ , il y aura recouvrement temporel du signal  $y(n)$ .

Pour pouvoir utiliser (14.13), il faut donc choisir  $N \geq N_y$  et, si nécessaire, prolonger  $x(n)$  et  $h(n)$  avec des zéros (zero padding) pour que leur longueur atteigne  $N$  avant d'en calculer la DFT.

### 14.3.3 Implementation de l'équation aux différences

L'implémentation de (14.3) ne nécessite pas de commentaires particuliers, mis à part la nécessité de disposer des conditions initiales. Il s'agit des valeurs en  $n = 0$  de  $y(n - q)$  pour  $0 < q \leq N$  et, le cas échéant, des valeurs de  $x(n - p)$  pour  $0 < p \leq M$ .

## 14.4 Propriétés

### 14.4.1 Phase linéaire - délai de groupe

Comme décrit au Chapitre 4, un décalage temporel donne lieu à une phase linéaire (en fréquence) dans la transformée de Fourier

$$Y(\omega) = e^{j\omega t_0} X(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = x(t + t_0) \quad (14.17)$$

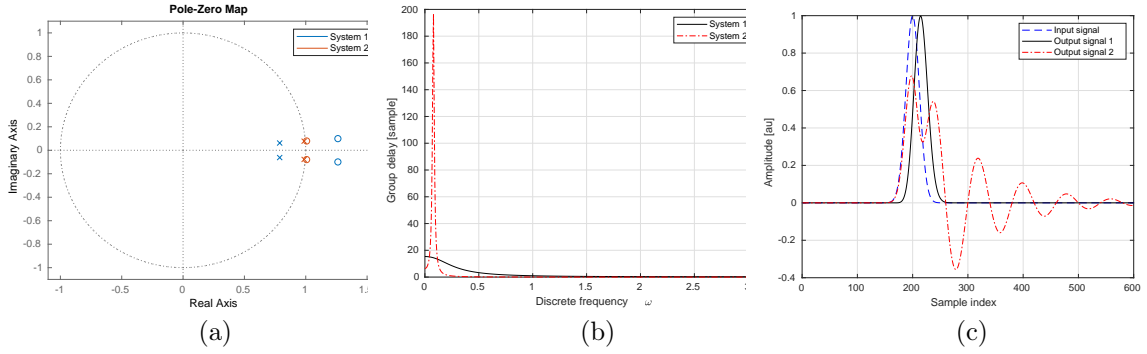


Figure 14.1 – Illustration de l’effet d’un délais de group non constant

où  $\omega t_0$  est le terme de phase linéaire. La valeur  $t_0$  est dénommée “délai de groupe” et exprime le délai entre le signal d’entrée et le signal de sortie.

Le délai de groupe introduit par un système est défini comme la dérivée de la phase par rapport à la fréquence angulaire

$$\tau(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \quad (14.18)$$

où  $\phi(\omega)$  est la phase de la transmittance du système.

Une phase non linéaire (en fréquence) donnera donc lieu à un délai de groupe dépendant de la fréquence. Cela provoquera alors une distortion du signal, certaines fréquences progressant plus rapidement que d’autres au travers du système. Pour la plupart des applications, il est donc hautement désirable que le système possède une phase la plus linéaire possible.

A titre d’exemple, considérons deux systèmes différents, ayant chacun deux pôles et deux zéros disposés comme indiqué à la figure 14.1 (a). Le délais de groupe est illustré à la figure 14.1 (b) et comme on peut le voir en comparant le délais de groupe des deux systèmes, celui du système 2 présente un pic prononcé tandis que celui du système 1 évolue de manière moins abrupte. Le signal d’entrée considéré est une impulsion gaussienne. Comme on peut le voir à la figure 14.1 (c), le signal à la sortie du système 1 a été retardé de quelques échantillons, tandis que le signal à la sortie du système 2 est fortement déformé. Cette déformation est due au fait que les diverses composantes fréquentielles du signal ne sont pas soumises au même délais. Cet exemple illustre le fait qu’un délais de groupe non constant mène à une distortion du signal, distortion qui peut rendre le signal inutilisable, par exemple dans des systèmes de télécommunication numériques.



Troisième partie

Les signaux stochastiques



# Les signaux stochastiques continus

## 15.1 Variables aléatoires – Rappels

Une expérience aléatoire (ou un essai aléatoire) est une expérience dont on ne peut prédire le résultat. Un jet de dé est un exemple typique d'une telle expérience aléatoire.

Un événement aléatoire  $\zeta$  est le résultat d'une telle expérience aléatoire. Et, considérant l'expérience aléatoire du jet d'un dé, l'événement serait la face du dé qui apparaît lorsque le dé a fini de rouler. Tous les événements (aléatoires) pouvant résulter d'une expérience forment l'ensemble  $S$  (sampling space).

Enfin, une variable aléatoire  $X(\zeta)$  est une correspondance entre l'espace des événements  $\zeta \in S$  et l'ensemble des nombres complexes. La variable aléatoire sera notée par une majuscule tandis qu'une réalisation de cette variable aléatoire sera notée par une minuscule  $x = X(\zeta)$  et correspond donc à un nombre complexe. Toujours dans l'exemple du dé ci-dessus, la correspondance entre chaque face du dé (chaque événement) et l'ensemble des nombres complexes est donnée par le chiffre inscrit sur chacune des faces du dé.

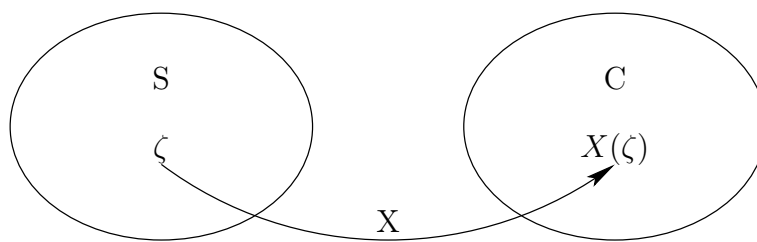


Figure 15.1 – Variable aléatoire

On peut citer comme autres exemples de fonctions aléatoires

- L'heure de levé du jour  $\zeta$  (le caractère aléatoire ne provient pas de la mécanique céleste, mais du choix aléatoire du jour)
- Les points de l'élève  $\zeta$  (en l'occurrence, les points d'un élève particulier ne sont bien évidemment pas aléatoires mais le choix de l'élève dont on considère les points l'est).

Une variable aléatoire est caractérisée par, de manière équivalente

- Sa fonction de distribution cumulée, soit la probabilité que la variable aléatoire  $X$  soit

inférieure à une valeur seuil  $x$

$$F_X(x) = \Pr(X < x) \quad (15.1)$$

— Sa densité de probabilité

$$p_X(x) = f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (15.2)$$

On peut alors définir l'espérance mathématique d'une variable aléatoire comme

$$E\{X\} = m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x)dx \quad (15.3)$$

et les moments centrés d'ordre  $m$  par

$$\gamma_X^{(m)} = E\{(X - m_X)^m\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^m p_X(x)dx \quad (15.4)$$

avec la variance de la variable aléatoire  $X$  comme cas particulier

$$\sigma_X^2 = \gamma_X^{(2)} \quad (15.5)$$

## 15.2 Fonctions aléatoires

Une fonction aléatoire est une variable aléatoire paramétrée par une variable indépendante, par exemple le temps  $t$  telle que  $X(t; \zeta)$  et peut s'écrire plus simplement  $X(t)$ . Fixer  $\zeta = \zeta_0$  revient à considérer une réalisation particulière de l'expérience aléatoire, le résultat étant une fonction déterministe  $z(t) = X(t; \zeta_0)$  dépendant du temps. De manière similaire, fixer le temps  $t = t_0$  revient à avoir une variable aléatoire  $Z(\zeta) = X(t_0; \zeta)$ .

Exemples

— Considérons la variable aléatoire  $X(t; \zeta)$  représentant la température pendant l'année  $\zeta$ . Clairement, la température pendant l'année  $\zeta_0$ ,  $x(t) = X(t; \zeta = \zeta_0)$ , est une fonction du temps parfaitement déterministe. Par contre la température au 1er janvier de chaque année doit être considérée comme une variable aléatoire.

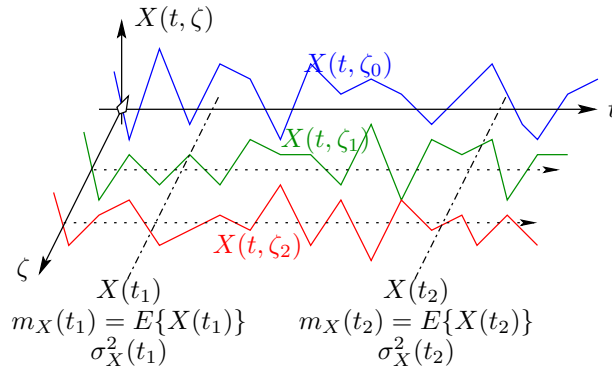


Figure 15.2 – Illustration d'une fonction aléatoire.

De manière similaire aux variables aléatoires, les fonctions aléatoires sont caractérisées par leur densité de probabilité qui, en toute généralité, dépend de la variable indépendante

$$p_X(x, t)$$

avec

$$\Pr(X(t) < x; t) = \int_{-\infty}^x p_X(x, t)dx \quad (15.6)$$



### 15.2.1 Fonctionnelles certaines relatives à une fonction aléatoire $X(t)$

Les fonctions définies ci-dessous permettent une certaine caractérisation d'une fonction aléatoire. Ces fonction sont parfaitement déterministes.

#### 15.2.1.1 Espérance mathématique (moment du 1er ordre)

Il s'agit de la fonctionnelle certaine  $m_X(t)$  définie par

$$m_X(t) = E_\zeta\{X(t; \zeta)\} = \int x(t)p_X(x(t))dx \quad (15.7)$$

et qui représente la moyenne de  $X$  à l'instant  $t$  et, en toute généralité, dépend de  $t$ .

#### 15.2.1.2 Autocovariance (moment centré du 2d ordre)

Il s'agit de la fonctionnelle certaine  $\Gamma_X(t, t')$  telle que pour deux instants  $t$  et  $t'$

$$\Gamma_X(t, t') = E\{[X(t) - m_X(t)][X(t') - m_X(t')]^*\} \quad (15.8)$$

Il en résulte la propriété suivante

$$\Gamma_X(t, t') = \Gamma_X^*(t', t). \quad (15.9)$$

La variance d'une fonction aléatoire  $\sigma_X^2(t)$  est donnée par

$$\sigma_X^2(t) = \Gamma_X(t, t) = E\{|X(t) - m_X(t)|^2\} \quad (15.10)$$

et est donc par définition une fonction réelle. Cette dernière expression exprime que la variance est, d'une manière générale, fonction de la variable indépendante  $t$ .

On aura en outre par définition

$$\sigma_X^2(t) \geq 0 \quad (15.11)$$

et de manière similaire,

$$|\Gamma_X(t, t')| \leq \sqrt{\sigma_X^2(t)\sigma_X^2(t')} \quad (15.12)$$

#### 15.2.1.3 Autocorrélation (moment *non* centré du 2d ordre)

La fonction d'autocorrélation est définie par

$$R_X(t, t') = E\{X(t)X^*(t')\} \quad (15.13)$$

et est liée à la fonction d'autocovariance par

$$\Gamma_X(t, t') = R_X(t, t') - m_X(t)m_X^*(t') \quad (15.14)$$

#### 15.2.1.4 Covariance mutuelle de deux fonctions aléatoires

Il s'agit de la fonctionnelle certaine  $\Gamma_{XY}(t, t')$  définie par

$$\Gamma_{XY}(t, t') = E\{[X(t) - m_X(t)][Y(t') - m_Y(t')]^*\}. \quad (15.15)$$

On aura en outre

$$|\Gamma_{XY}(t, t')| \leq \sqrt{\sigma_X^2(t)\sigma_Y^2(t')}. \quad (15.16)$$

### 15.2.2 Opérations élémentaires sur les fonctions aléatoires

Soit  $Y(t) = a(t)X(t) + b(t)$  où  $a(t)$  et  $b(t)$  sont des fonctions déterministes, on vérifie facilement que

$$m_Y(t) = a(t)m_X(t) + b(t) \quad (15.17)$$

$$\Gamma_Y(t, t') = a(t)a^*(t')\Gamma_X(t, t') \quad (15.18)$$

$$\sigma_Y^2(t) = |a(t)|^2\sigma_X^2(t). \quad (15.19)$$

et avec  $Z(t) = c(t)U(t) + d(t)$  où  $c(t)$  et  $d(t)$  sont des fonctions déterministes, alors

$$\Gamma_{YZ}(t, t') = a(t)\Gamma_{XU}(t, t')c^*(t'). \quad (15.20)$$

### 15.2.3 Stationnarité des fonctions aléatoires

#### 15.2.3.1 Stationnarité au sens strict

On dit d'une fonction aléatoire qu'elle est stationnaire au sens strict si ses densités de probabilité conjointes ne dépendent pas de la variable indépendante, soit  $\forall n \in N, \forall t_1, \dots, t_n \in R$  la distribution de  $\mathbf{X}(t) = [X(t + t_1), \dots, X(t + t_n)]$  ne dépend pas de  $t$ .

La vérification de cette propriété implique la connaissance des densités de probabilité conjointes ce qui est rarement le cas.

#### 15.2.3.2 Stationnarité au sens faible

Comme la vérification de la condition de stationnarité au sens strict est difficile voir impossible, on est amené par défaut à la définition d'une stationnarité moins contraignante, la stationnarité au sens faible.

On dit d'une fonction aléatoire qu'elle est faiblement stationnaire si

- son espérance mathématique est indépendante de la variable indépendante  $E\{X(t)\} = m$  et
- sa fonction d'autocovariance ne dépend que de la différence  $\tau = t - t'$ ,

$$\Gamma_X(t, t') = \Gamma_X(t, t - \tau) = \Gamma_X(\tau) = E\{[X(t) - m_X][X(t - \tau) - m_X]^*\} \quad (15.21)$$

La figure 15.3 présente un signal non stationnaire (à gauche) et à droite un signal faiblement stationnaire. Le signal faiblement stationnaire a été délibérément fabriqué en considérant de 0 à 1000 et de 2000 à 3000 une variable aléatoire ayant une distribution uniforme tandis que de 1000 à 2000 et à partir de 3000 une variable aléatoire ayant une distribution Gaussienne, ces deux distributions étant paramétrés afin de produire une variable aléatoire ayant la même variance.

Les propriétés suivantes résultent de la (faible) stationnarité :

- La variance est constante

$$\sigma_X^2(t) = \Gamma_X(0) = \sigma_X^2 \quad (15.22)$$

- On a  $\Gamma_X(\tau) = \Gamma_X^*(-\tau)$  et si la fonction aléatoire est réelle, la fonction d'autocorrélation est paire  $\Gamma_X(\tau) = \Gamma_X(-\tau)$ .
- $\Gamma_X(\tau) = R_X(\tau) - m_X^2$
- La relation (15.12) devient  $|\Gamma_X(\tau)| \leq \sigma_X^2$  et en général, la fonction d'autocovariance est décroissantes en fonction de  $|\tau|$  comme illustré à la figure 15.4.

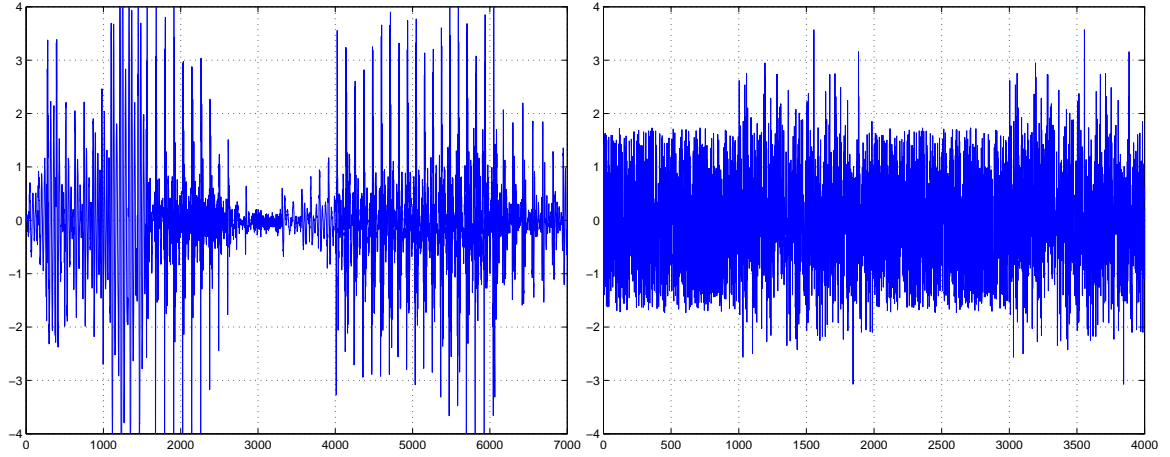


Figure 15.3 – Exemple d'un signal non stationnaire (à gauche) et d'un signal faiblement stationnaire (à droite).

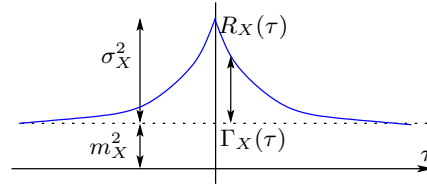


Figure 15.4 – Illustration des relations entre  $\Gamma_X$ ,  $R_X$ ,  $m_X$  et  $\sigma_X^2$  pour une variable aléatoire réelle.

## 15.2.4 Bruits blancs

### 15.2.4.1 Bruit blanc

Un bruit blanc est une fonction stochastique faiblement stationnaire de moyenne nulle et ayant comme fonction d'autocovariance

$$\Gamma(\tau) = a\delta(\tau) \quad (15.23)$$

où  $a > 0$  est l'intensité de ce bruit blanc. Il en résulte que la variance d'un bruit blanc est infinie.

La définition du bruit blanc ne fait pas directement intervenir sa distribution et des bruits blancs peuvent donc très bien avoir des distributions différentes comme l'illustre la figure 15.5. Si l'on veut entièrement décrire un bruit blanc, il sera donc en outre nécessaire de préciser sa

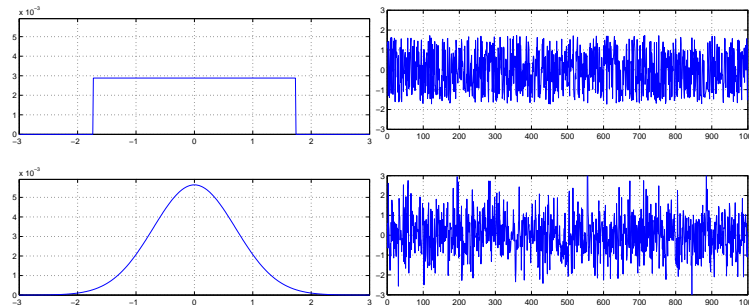


Figure 15.5 – Bruit blanc : Distribution (gauche) et une réalisation correspondante (droite).

distribution. Dans le domaine des télécommunications et des radars, un bruit Gaussien (c.à.d. ayant une distribution Gaussienne) est couramment considéré. Dans le domaine de l'imagerie, on considère plus volontier un bruit ayant une distribution de Poisson, car l'intensité (le nombre de photons) ne peut être négative.

#### 15.2.4.2 Bruit blanc généralisé

Un bruit blanc généralisé est une fonction aléatoire de moyenne nulle et ayant comme fonction d'autocovariance

$$\Gamma(t, t') = f(t)\delta(t - t') \quad (15.24)$$

où  $f(t) \geq 0$  est l'intensité de ce bruit blanc. Il en résulte qu'un bruit blanc généralisé n'est pas nécessairement stationnaire.

### 15.3 Ergodicité

#### 15.3.1 Continuité d'une fonction aléatoire

##### 15.3.1.1 Convergence d'une suite de variables aléatoires

Considérons une suite de variables aléatoires  $\{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$  ainsi que la variable aléatoire  $X$ .

La suite  $\{X_n\}$  converge en probabilité vers la variable aléatoire  $X$  ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} p(|X_n - X| < \varepsilon) = 1 \quad (15.25)$$

ce que l'on note

$$X_n \rightarrow^p X \quad (15.26)$$

La suite  $\{X_n\}$  converge en moyenne quadratique vers la variable aléatoire  $X$  ssi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{|X_n - X|^2\} = 0 \quad (15.27)$$

ce que l'on note<sup>1</sup>

$$\text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} X_n = X \quad (15.28)$$

La convergence en moyenne quadratique implique la convergence en probabilité.

##### 15.3.1.2 Convergence d'une suite de fonctions aléatoires

Une fonction aléatoire  $X(t)$  tend en moyenne quadratique vers une autre fonction aléatoire  $Y(t)$  si

$$E\{|X(t) - Y(t)|^2\} = 0 \quad (15.29)$$

ce qui peut encore s'écrire

$$X(t) \stackrel{\text{a.s.}}{=} Y(t) \quad (15.30)$$

---

1. l.i.m. se lit "limes in medio".

### 15.3.2 Moyennes temporelles de fonctions aléatoires

#### 15.3.2.1 Moyenne temporelle d'une fonction aléatoire

La moyenne temporelle d'une fonction aléatoire  $X(t)$  est définie par

$$\overline{X}_T(t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} X(t') dt'. \quad (15.31)$$

Cette fonction est évidemment une fonction aléatoire, en général dépendante de  $t$ .

On voit immédiatement que dans le cas où  $X(t)$  est faiblement stationnaire,

$$m_{\overline{X}_T} = E\{\overline{X}_T(t)\} = E\{X(t)\} = m_X \quad (15.32)$$

et qu'il s'agit donc d'un estimateur non biaisé de la moyenne.

#### 15.3.2.2 Moyenne temporelle quadratique d'une fonction aléatoire

La moyenne temporelle quadratique d'une fonction aléatoire  $X(t)$  est définie par

$$|\overline{X}_T(t)|^2 = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} |X(t')|^2 dt'. \quad (15.33)$$

Cette moyenne quadratique est une fonction aléatoire en général dépendante de  $t$ .

#### 15.3.2.3 Autocovariance "temporelle" d'une fonction aléatoire

La fonction d'autocovariance temporelle de  $X(t)$  est une variable aléatoire  $\Phi_X^T(\tau, t)$  définie par

$$\Phi_X^T(\tau, t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} [X(t' + \tau) - \overline{X}_T(t' + \tau)] [X(t') - \overline{X}_T(t')]^* dt'. \quad (15.34)$$

L'autocovariance "temporelle" est une fonction aléatoire de  $\tau$  et dépend en général de  $t$ .

Si  $X(t)$  est une fonction aléatoire faiblement stationnaire et si la variance de  $\overline{X}_T(t)$  est nulle,  $\Phi_X^T$  ne dépendra que de  $\tau$  et on aura

$$E\{\Phi_X^T(\tau, t)\} = \Gamma_X(\tau) \quad (15.35)$$

et on voit qu'il s'agit donc d'un estimateur non biaisé de la fonction d'autocovariance.

#### 15.3.2.4 Covariance mutuelle "temporelle" de deux fonctions aléatoires

La fonction de covariance mutuelle temporelle des fonctions aléatoires  $X(t)$  et  $Y(t)$  est une fonction aléatoire  $\Phi_{XY}^T(\tau, t)$  définie par

$$\Phi_{XY}^T(\tau, t) = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} [X(t' + \tau) - \overline{X}_T(t' + \tau)] [Y(t') - \overline{Y}_T(t')]^* dt'. \quad (15.36)$$

La covariance mutuelle "temporelle" est une fonction aléatoire de  $\tau$  et dépend en général de  $t$ .

### 15.3.3 Processus stochastique ergodique

Un processus stochastique est dit ergodique si ses moyennes temporelles convergent en moyenne quadratique vers les moments correspondants.

#### 15.3.3.1 Ergodisme au premier ordre

Un processus aléatoire est dit ergodique en moyenne ou ergodique au premier ordre si la moyenne temporelle  $\overline{X}_T(t)$  converge en moyenne quadratique vers l'espérance mathématique  $m_X(t)$

$$\text{l.i.m.}_{T \rightarrow \infty} \overline{X}_T(t) = m_X(t) \quad (15.37)$$

ce qui implique que la variance de  $\overline{X}_T(t)$  pour  $T \rightarrow \infty$  tende vers 0.

#### 15.3.3.2 Ergodisme au second ordre

Un processus aléatoire est dit *ergodique au second ordre* ou encore *ergodique au sens large* si, outre l'ergodicité au premier ordre, on a

$$\text{l.i.m.}_{T \rightarrow \infty} \Phi_X^T(\tau, t) = \Gamma_X(\tau, t) \quad (15.38)$$

#### 15.3.3.3 Discussion

Des définition ci-dessus découle que pour autant qu'un processus soit ergodique, il est permis de remplacer la moyenne sur des réalisations indépendante par une moyenne temporelle obtenue sur base d'une réalisation unique. On conçoit aisément l'intérêt pratique de l'ergodicité.

#### 15.3.3.4 Hypothèse ergodique

Le problème essentiel réside dans la détermination si un processus est ergodique ou non. Ceci nécessiterait la connaissance des moyennes sur des réalisations indépendantes et est de ce fait en pratique extrêmement difficile à vérifier. On en est donc réduit à supposer de manière aveugle que les processus étudiés sont ergodiques (au sens large) afin de pouvoir remplacer les moyennes sur des réalisation indépendantes par des moyennes temporelles. Ceci constitue l'hypothèse ergodique.

## 15.4 Analyse harmonique des fonctions aléatoires

### 15.4.1 Introduction

Dans ce chapitre, la notion de densité spectral (encore appelée densité spectrale de puissance) est introduite, permettant ainsi de caractériser un processus stochastique dans le domaine fréquentiel.

Dans un but de simplification et afin de se concentrer sur l'essentiel, les fonction aléatoire considérées seront de moyenne nulle. De même, nous postulons que les différentes intégrales convergent.

### 15.4.2 Représentation orthogonale

Considérons dans un premier temps la décomposition d'une fonction aléatoire  $X(t)$  dans une base de fonctions  $\phi(\omega, t)$  paramétrées en  $\omega$

$$X(t) = \int_{D_\omega} F(\omega) \phi(\omega, t) d\omega. \quad (15.39)$$

Les coefficients de cette décomposition sont obtenus en utilisant

$$F(\omega) = \int_{D_t} X(t') \phi^*(\omega, t') dt'. \quad (15.40)$$

Cette décomposition n'est possible que pour autant que les fonctions de bases  $\phi(\omega, t)$  et  $\phi^*(\omega, t')$  satisfassent des relations d'orthogonalité. En remplaçant (15.40) dans (15.39) on obtient

$$\int_{D_\omega} \phi(\omega, t) \phi^*(\omega, t') d\omega = \delta(t - t') \quad (15.41)$$

et de manière analogue, en remplaçant (15.39) dans (15.40) on obtient

$$\int_{D_t} \phi(\omega, t) \phi^*(\omega', t) dt = \delta(\omega - \omega'). \quad (15.42)$$

Les conditions de reconstruction imposent donc des condition d'orthogonalité aux fonctions de base  $\phi(\omega, t)$ .

Il est à noter que comme  $X(t)$  est une fonction aléatoire,  $F(\omega)$  sera aussi une fonction aléatoire.

La transformée de Fourier, ayant comme fonctions de base

$$\phi(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-j\omega t} \quad (15.43)$$

est un exemple d'une telle décomposition orthogonale.

### 15.4.3 Transformation de Karhunen-Loève

La transformation de Karhunen-Loève s'obtient en imposant une condition supplémentaire à  $F(\omega)$ , à savoir que l'on impose que  $F(\omega)$  soit un bruit blanc généralisé, soit

$$E\{F(\omega)F^*(\omega')\} = \lambda(\omega)\delta(\omega - \omega') \quad (15.44)$$

et donc

$$\begin{aligned} E\{F(\omega)F^*(\omega')\} &= E\left\{\int_{D_t} \int_{D_t} X(t')^* \phi(\omega', t') X(t) \phi^*(\omega, t) dt dt'\right\} \\ &= \int_{D_t} \phi^*(\omega, t) dt \int_{D_t} \Gamma_X(t, t') \phi(\omega', t') dt' \end{aligned}$$

Il en résulte que les fonctions de base devront satisfaire l'équation intégrale suivant

$$\int_{D_t} \Gamma_X(t, t') \phi(\omega', t') dt' = \lambda(\omega') \phi(\omega', t) \quad (15.45)$$

afin de garantir que  $F(\omega)$  soit un bruit blanc généralisé. Cette équation peut s'interpréter comme imposant que  $\phi(\omega, t)$  soient les fonctions propres du noyaux  $\Gamma_X(t, t')$ ,  $\lambda(\omega')$  étant la valeur propre correspondante.

Il est à noter que de par la condition imposée à  $F(\omega)$ , on aura nécessairement

$$E\{|F(\omega)|^2\} = \lambda(\omega) \geq 0. \quad (15.46)$$

### 15.4.3.1 Exemple

Considérons un bruit blanc  $X(t)$  ayant comme fonction d'autocovariance  $\Gamma_X(t, t') = \sigma_X^2 \delta(t - t')$ . Les fonctions propres de  $\Gamma_X(t, t')$  devront donc satisfaire

$$\begin{aligned} \int_{D_t} \Gamma_X(t, t') \phi(\omega, t') dt' &= \int_{D_t} \sigma_X^2 \delta(t - t') \phi(\omega, t') dt' \\ &= \sigma_X^2 \phi(\omega, t) \end{aligned}$$

et comme on peut le voir, cette relation est satisfaite pour n'importe quelle fonction de base  $\phi(\omega, t)$ , qui devra néanmoins répondre aux conditions d'orthogonalité décrites ci-dessus. Il en ressort aussi que  $\lambda(\omega)$  est constant, ce qui est une des propriétés des bruits blancs.

## 15.4.4 Densité spectrale de puissance

### 15.4.4.1 Définition

Dans le cas des fonctions aléatoires stationnaires au sens large,  $\Gamma_X(t, t') = \Gamma_X(t - t')$  et l'équation intégrale (15.45) définissant  $\phi(\omega, t)$  devient

$$\int_{D_t} \Gamma_X(t - t') \phi(\omega, t') dt' = \lambda(\omega) \phi(\omega, t). \quad (15.47)$$

Le membre de gauche de cette équation est une intégrale de convolution qui admet comme fonction propre

$$\phi(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-j\omega t} \quad (15.48)$$

ce qui implique

$$\int_{D_t} \Gamma_X(t - t') e^{-j\omega(t-t')} dt' = \lambda(\omega) \quad (15.49)$$

ou encore, en définissant la *densité spectrale (de puissance) de  $X(t)$*  par  $S_X(\omega) = \lambda(\omega)$ ,

$$\mathcal{F}\{\Gamma_X(\tau)\} = S_X(\omega) \quad (15.50)$$

ou encore, comme  $E\{|F(\omega)|^2\} = \lambda(\omega)$ ,

$$S_X(\omega) = E\{|F(\omega)|^2\}. \quad (15.51)$$

L'unité de la densité spectrale de puissance est le  $W/Hz$ .

### 15.4.4.2 Interprétation physique

On a par définition  $\sigma_X^2 = \Gamma_X(0)$  ou encore,  $\Gamma_X$  étant la transformée de Fourier inverse de  $S_X$ ,

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega \quad (15.52)$$

ce qui peut s'interpréter en disant que  $S_X(\omega)$  décrit la manière dont l'énergie du signal se répartit en fréquence, ce qui en justifie le nom.



### 15.4.4.3 Estimation sur base de la fonction d'autocovariance temporelle

Comme la fonction d'autocovariance n'est en général pas disponible, il est pertinent d'étudier ce que serait le résultat qui serait obtenu si on remplaçait la fonction d'autocovariance par la fonction d'autocovariance temporelle. On considère qu'une réalisation observée pour  $t \in [-T, T]$  est disponible. Soit

$$S_X^T(\omega) = \int_{-2T}^{2T} \Phi_X^{2T}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (15.53)$$

où les bornes de l'intégrale sont limitées à  $[-2T, 2T]$  vu que  $\Phi_X^{2T}(\tau)$  sera nulle pour  $|\tau| > 2T$ .  $S_X^T(\omega)$  est bien évidemment une fonction aléatoire dont l'espérance mathématique est

$$\begin{aligned} E\{S_X^T(\omega)\} &= \int_{-2T}^{2T} E\{\Phi_X^{2T}(\tau)\} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) \Gamma_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned}$$

Comme on peut le voir, la fonction d'autocovariance  $\Gamma_X(\tau)$  est multipliée par une fonction fenêtre  $\left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right)$  avant de subir une transformée de Fourier. L'espérance mathématique de  $S_X^T(\omega)$  résultera donc de la convolution de la densité spectrale de puissance  $S_X(\omega)$  avec la transformée de Fourier d'une fenêtre triangulaire. L'effet sera une diminution de la résolution spectrale de l'estimation de la densité spectrale de puissance par rapport à sa vraie valeur. Plus  $T$  sera élevé, moins cet effet sera important.

Pour autant qu'il y ait convergence, on aura évidemment

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E\{S_X^T(\omega)\} = S_X(\omega)$$

ce qui montre que pour  $T$  tendant vers l'infini,  $S_X^T$  est un estimateur non biaisé de la densité spectrale de puissance.

## 15.5 Transformation linéaire de fonctions aléatoires

### 15.5.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de généraliser le concept de réponse fréquentielle aux signaux aléatoires.

Nous rappelons ici que la sortie d'un système linéaire caractérisé par sa réponse impulsionnelle  $h(t, t')$  est donnée par l'intégrale de Duhamel

$$y(t) = \int x(t') h(t, t') dt' \quad (15.54)$$

Dans le cas des distributions Gaussiennes, on peut se contenter de caractériser des signaux aléatoires par leur moyenne et leur fonction d'autocorrélation. Les autres moments d'ordre supérieurs fournissent des informations supplémentaires si les distributions ne sont pas Gaussiennes. Le but des développements qui suivent est de faire le lien entre les caractéristiques du signal d'entrée  $x(t)$  et celles du signal de sortie  $y(t)$ .

## 15.5.2 Moyenne et fonction d'autocorrélation

### 15.5.2.1 Moyenne

La moyenne du processus de sortie est donnée par

$$m_Y(t) = E\{y(t)\} = \int h(t, t') E\{x(t')\} dt' = \int h(t, t') m_X(t') dt' \quad (15.55)$$

et l'on voit que la moyenne du signal de sortie est le résultat de l'intégrale de Duhamel appliqué à la moyenne du signal d'entrée.

Dans le cas d'un système invariant et d'un signal d'entrée stationnaire, on aura

$$m_Y = E\{y(t)\} = \int h(t - t') E\{x(t')\} dt' = m_X \int h(t - t') dt' \quad (15.56)$$

et l'on constate que la moyenne du signal de sortie sera elle aussi constante. De plus, cette moyenne sera égale à la moyenne du signal d'entrée multipliée par la composante DC de la réponse impulsionnelle.

### 15.5.2.2 Fonction d'autocorrélation

Considérons le cas d'un signal d'entrée stationnaire. On aura donc

$$R_{YY}(t, t + \tau) = E\{y(t)y^*(t - \tau)\} \quad (15.57)$$

$$= E\left\{\int h(\rho)x(t - \rho)d\rho \int h^*(-\rho')x^*(t - \tau + \rho')d\rho'\right\} \quad (15.58)$$

$$= \int \int h(\rho)h^*(-\rho')E\{x(t - \rho)x^*(t - \tau + \rho')\}d\rho d\rho' \quad (15.59)$$

mais comme  $x(t)$  est supposé stationnaire,  $E\{x(t - \rho)x^*(t - \tau + \rho')\}$  ne dépendra que de  $\tau - (\rho + \rho')$  soit

$$R_{YY}(t, t + \tau) = \int \int h(\rho)h^*(-\rho')R_{XX}(\tau - (\rho + \rho'))d\rho d\rho' = R_{YY}(\tau) \quad (15.60)$$

et la fonction d'autocorrélation de la sortie  $y(t)$  ne dépendra elle aussi que de  $\tau$ . Donc le signal de sortie d'un système linéaire et permanent excité par un signal d'entrée stationnaire sera lui aussi stationnaire.

L'équation (15.60) peut encore s'écrire

$$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau). \quad (15.61)$$

### 15.5.2.3 Fonction de corrélation entre l'entrée et la sortie

La fonction de corrélation entre un signal stationnaire  $x(t)$  à l'entrée d'un système et le signal de sortie de ce système  $y(t)$  est donné par

$$R_{XY}(t, t - \tau) = E\{x(t)y^*(t - \tau)\} = E\left\{x(t) \int h^*(-\rho)x^*(t - \tau + \rho)d\rho\right\} \quad (15.62)$$

$$= \int E\{x(t)x^*(t - \tau + \rho)\}h^*(-\rho)d\rho \quad (15.63)$$

ce qui, comme  $x(t)$  est supposé stationnaire, se réduit à

$$R_{XY}(\tau) = \int R_{XX}(\tau - \rho)h^*(-\rho)d\rho. \quad (15.64)$$

Et cette expression peut s'écrire comme étant la convolution entre  $R_{XX}(\tau)$  et  $h^*(-\tau)$

$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h^*(-\tau). \quad (15.65)$$

De manière similaire, on peut obtenir l'expression

$$R_{YX}(\tau) = \int R_{XX}(\tau - \rho)h(\rho)d\rho = R_{XX}(\tau) * h(\tau). \quad (15.66)$$

#### 15.5.2.4 Application

L'expression (15.65) donne lieu à une application importante de la fonction de corrélation, à savoir l'identification des systèmes linéaires. Si le signal d'entrée est un bruit blanc, sa fonction d'autocorrélation sera

$$R_{XX}(\tau) = \sigma^2\delta(\tau) \quad (15.67)$$

et on constate immédiatement que la fonction de corrélation entre l'entrée et la sortie sera égale à la réponse impulsionnelle du système, à la constant  $\sigma^2$  près

$$R_{XY}(\tau) = \sigma^2h(\tau) \quad (15.68)$$

ce qui donne une méthode simple permettant de déterminer la réponse impulsionnelle d'un système.

### 15.5.3 Densité spectrale de puissance du signal de sortie

Dans la section précédente, la sortie d'un système linéaire a été décrite sur base des propriétés du processus d'entrée. En particulier, les propriétés temporelles (fonction d'autocorrélation) ont été utilisés. Le fait que pour autant que le processus d'entrée soit stationnaire, le processus aléatoire de sortie le soit aussi permet d'utiliser la transformé de Fourier des différentes fonctions d'autocorrélations pour arriver à la description spectrale du processus aléatoire de sortie. On suppose dans ce qui suit que les processus sont de moyenne nulle te sorte que la corrélation se confonde avec la covariance.

La densité spectrale de puissance est aisément obtenue en prenant la transformée de Fourier de (15.61). La transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle  $h(\tau)$  sera notée  $H(\omega)$  et la transformée de Fourier de  $h^*(-\tau)$  est égale à  $H^*(\omega)$ . On obtient donc

$$S_{YY}(\omega) = S_{XX}(\omega)H(\omega)H^*(\omega) = S_{XX}(\omega)|H(\omega)|^2 \quad (15.69)$$

Cette expression a une applications importante lorsque le signal d'entrée est un bruit blanc. Dans ce cas,  $S_{XX}$  sera constante et la densité spectrale de puissance du processus de sortie  $S_{YY}(\omega)$  sera égale au module au carré de la transmittance isochrone du système. Il est à noter que cette méthode ne donne pas d'information sur la phase de la transmittance isochrone.

De manière similaire, on déduit de (15.65)

$$S_{XY}(\omega) = S_{XX}(\omega)H(\omega) \quad (15.70)$$

et de (15.66)

$$S_{YX}(\omega) = S_{XX}(\omega)H^*(\omega) \quad (15.71)$$



# Les signaux stochastiques à temps discret

## 16.1 Introduction

Les concepts définis pour les signaux stochastiques à temps continu ont une définition fort similaire dans le cas de signaux stochastiques à temps discret. Dans un but de concision, ces concepts ne seront répétés que dans la mesure où leur interprétation change.

## 16.2 Fonction aléatoire discrète

Une fonction aléatoire discrète est une variable aléatoire paramétrée par une variable indépendante discrète que nous dénoterons par  $n$ , telle que  $X(n; \zeta)$  ou plus simplement  $X(n)$ , où  $\zeta$  dénote l'événement aléatoire considéré.

On définit de manière similaire au cas continu

- l'espérance mathématique  $m_X(n)$ ,
- l'autocovariance  $\Gamma_X(n, n')$ ,
- la variance  $\sigma_X^2(n)$ ,
- l'autocorrélation  $R_X(n, n')$  et
- la covariance mutuelle de deux fonctions aléatoires  $\Gamma_{XY}(n, n')$ .

De même, les concepts de stationnarité et stationnarité faible s'étendent immédiatement et conservent leur propriétés. Il convient cependant de noter que l'autocovariance d'un processus (faiblement) stationnaire  $X(n)$  ne dépendra que de  $k = n - n'$  et se notera donc  $\Gamma_X(k)$ . Une remarque similaire s'applique à l'autocorrélation.

Les moyennes temporelles et le concept d'ergodicité se généralise de manière immédiate. De même en ce qui concerne l'analyse harmonique et la transformation linéaire de fonctions aléatoires discrètes.

### 16.2.1 Bruit blanc discret

Un bruit blanc discret est un bruit blanc généralisé faiblement stationnaire soit ayant comme fonction d'autocovariance

$$\Gamma_X(k) = a\delta(k) \quad (16.1)$$

avec  $E\{X(n)\} = 0$  et  $a$  est appelé l'intensité du bruit blanc.

Un bruit blanc généralisé discret est une suite aléatoire de moyenne nulle définie par

$$\Gamma_X(n, n') = f(n)\delta(n - n') \quad (16.2)$$

avec  $E\{X(n)\} = 0$ .

On notera que, contrairement au cas continu, la variance  $\sigma_X^2(n)$  d'un bruit blanc (généralisé) discret n'est pas infinie et vaut  $f(n)$ .

## 16.3 Suites aléatoires de longueur finie

### 16.3.1 Définitions

Une suite aléatoire de longueur finie  $N$  est un vecteur  $\mathbf{X}$  dont chacune des  $N$  composantes est une variable aléatoire

$$\mathbf{X}^T = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N]$$

où  $X_n$  est une variable aléatoire.

Les concepts définis pour les fonctions aléatoires discrètes se généralisent aisément mais prennent parfois une forme particulière qu'il est intéressant de discuter.

### 16.3.2 Fonctionnelles certaines du premier et du second ordre

#### 16.3.2.1 Moyenne

La moyenne d'une suite aléatoire  $\mathbf{X}$  de longueur  $N$  est un vecteur  $\mathbf{m}_X$  dont les composantes sont les espérances des éléments correspondants du vecteur  $\mathbf{X}$

$$\mathbf{m}_X^T = [m_{X_1} \ m_{X_2} \ \dots \ m_{X_N}]$$

avec  $m_{X_n} = E\{X_n\}$ .

Dans le cas d'une suite stationnaire, on aura  $m_{X_n} = m_X$  soit une moyenne indépendante de  $n$ .

#### 16.3.2.2 Covariance

La covariance est une matrice  $N \times N$  définie par

$$\mathbf{C}_X = E\{(\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)(\mathbf{X} - \mathbf{m}_X)^*\} \quad (16.3)$$

l'élément  $(n, p)$  de cette matrice est donc donné par

$$c_{np} = E\{(X_n - m_{X_n})(X_p - m_{X_p})^*\} \quad (16.4)$$

et représente la covariance entre les composantes  $X_n$  et  $X_p$  de  $\mathbf{X}$ . Il en résulte que les éléments diagonaux de  $\mathbf{C}_X$  sont les variances des différentes composantes de  $\mathbf{X}$ .

La covariance  $\mathbf{C}_X$  est hermitienne, en vertu des propriétés de la covariance  $c_{np} = c_{pn}^*$

$$\mathbf{C}_X = \mathbf{C}_X^*. \quad (16.5)$$

Dans le cas d'une suite stationnaire, la covariance entre deux éléments de  $\mathbf{X}$  ne dépend que de l'écart entre l'indice de ces deux éléments et la matrice de covariance adopte une forme particulière dite Töplitz

$$\mathbf{C}_X = \begin{pmatrix} \sigma^2 & c_1 & c_2 & \cdots & \\ c_1^* & \sigma^2 & c_1 & \cdots & \\ c_2^* & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \vdots & & & & \ddots & c_1 & \sigma^2 \end{pmatrix} \quad (16.6)$$

c.à.d. telle que les diagonales primaire et secondaires sont constituées respectivement d'éléments constants.

On note encore que la matrice de covariance d'un bruit blanc généralisé est donc une matrice diagonale. Et si le bruit blanc est (faiblement) stationnaire, la matrice de covariance est proportionnelle à la matrice identité

$$\mathbf{C}_X = \sigma_X^2 \mathbf{I}. \quad (16.7)$$

### 16.3.3 La transformée de Karhunen-Loève

#### 16.3.3.1 Décomposition orthogonale

On considère une décomposition orthogonale de la suite aléatoire  $\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \Phi \boldsymbol{\xi} \quad (16.8)$$

et la reconstruction correspondante

$$\boldsymbol{\xi} = \Phi^\dagger \mathbf{X} \quad (16.9)$$

qui ne tient que si

$$\Phi \Phi^\dagger = \mathbf{I}. \quad (16.10)$$

#### 16.3.3.2 Bruit blanc généralisé

Pour obtenir la transformée de Karhunen-Loève, la base de décomposition  $\Phi$  est choisie telle que  $\boldsymbol{\xi}$  soit un bruit blanc généralisé, soit

$$E\{\boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}^\dagger\} = \Lambda \quad (16.11)$$

en d'autres mots, que la matrice de covariance de  $\boldsymbol{\xi}$  soit diagonale.

En combinant (16.9) et (16.11), on obtient

$$E\{\boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}^\dagger\} = E\{\Phi^\dagger \mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger \Phi\} = \Phi^\dagger \mathbf{C}_X \Phi = \Lambda \quad (16.12)$$

et l'on voit que les vecteurs de la base permettant de transformer  $\mathbf{X}$  en un bruit blanc généralisé est constituée des vecteurs propres de la matrice de covariance de  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{C}_X$ . La matrice  $\Lambda$  est évidemment formée des valeurs propres correspondantes.

### 16.3.3.3 Reconstruction parfaite

La reconstruction s'obtient par application de (16.8)

$$\mathbf{X} = \Phi \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \phi_0 & \phi_1 & \cdots & \phi_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{N-1} \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{N-1} \phi_n \xi_n \quad (16.13)$$

### 16.3.3.4 Reconstruction partielle

Cela étant dit, dans certaines applications, il peut s'avérer intéressant de ne faire qu'une reconstruction partielle, en ne considérant qu'un sous-ensemble des fonctions de base

$$\hat{\mathbf{X}} = \sum_{n=0}^{L-1} \phi_n \xi_n. \quad (16.14)$$

Une analyse de l'erreur de reconstruction permet de déterminer quelles sont les fonctions de base à choisir en priorité

$$E\{|\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}|^2\} = E\left\{\left|\sum_{n=L}^{N-1} \phi_n \xi_n\right|^2\right\} \quad (16.15)$$

$$= E\left\{\sum_{n=L}^{N-1} \sum_{m=L}^{N-1} \xi_m^* \phi_m^\dagger \phi_n \xi_n\right\} \quad (16.16)$$

$$= \sum_{n=L}^{N-1} \sum_{m=L}^{N-1} E\{\xi_n \xi_m^*\} \phi_m^\dagger \phi_n \quad (16.17)$$

$$= \sum_{n=L}^{N-1} \lambda_n \phi_n^\dagger \phi_n = \sum_{n=L}^{N-1} \lambda_n \quad (16.18)$$

$$(16.19)$$

et l'on voit que l'erreur de reconstruction est égale à la somme des valeurs propres "inutilisées". Le meilleur choix consiste donc à commencer la reconstruction en considérant les fonctions propre par ordre d'amplitude décroissante des valeurs propres correspondantes.

### 16.3.3.5 Applications

La transformée de Karhunen-Loève a de très nombreuses applications. Citons-en deux :

**Compression d'images :** Lorsque l'on doit transmettre un ensemble d'images fortement corrélées, il peut être judicieux d'exploiter cette corrélation pour ne transmettre qu'une seule fois les composantes corrélées. L'idée est donc d'appliquer la transformation de Karhunen-Loève afin de transformer les différentes images corrélées en un ensemble d'images non corrélées entre elles, appelées images propres, et ensuite d'effectuer une reconstruction partielle sur base d'une partie des images propres.

La suite stochastique  $\mathbf{X}(\zeta)$  est donc formée des éléments  $X_n(\zeta)$  qui sont égaux à la valeur du pixel  $\zeta$  de l'image  $n$ . L'événement aléatoire est le choix d'un pixel. La suite stochastique  $\boldsymbol{\xi}_n(\zeta)$  est constituée du pixel  $\zeta$  de l'image propre  $n$ .



Le gain de compression provient du fait que l'on n'effectue la reconstruction que sur base d'une partie des images propres. Les images propres non retenues, correspondant aux valeurs propres les plus faibles, n'étant sensé contribuer que faiblement à l'erreur de reconstruction.

On notera que s'il y a  $N$  images à décorréler, la matrice de covariance aura une taille  $N \times N$ .

**Analyse en composantes principales :** l'idée centrale ici est de décomposer les vecteurs de données (mesures) en composantes décorrélées.  $\mathbf{X}(\zeta)$  correspondra à la mesure  $\zeta$ . La composante  $\xi(\zeta_0)$  sera responsable du gros de l'énergie du signal, tandis que les dernières composantes  $\xi(\zeta_{N-1})$  ne contiendra souvent que du bruit.

Si chaque vecteur de données (mesure) comprend  $N$  valeurs (mesures) individuelles, la matrice de covariance aura une taille  $N \times N$ .



# L'échantillonnage d'une fonction stochastique

## 17.1 Relation entre les fonctionnelles certaines d'une fonction stochastique continue et de celle de ses échantillons

### 17.1.1 Introduction

Dénotons  $X_c(t; \zeta)$  une fonction aléatoire continue et  $X_d(n; \zeta)$  une fonction aléatoire discrète telle que  $X_d(n; \zeta)$  soient les échantillons de  $X_c(t; \zeta)$

$$X_d(n; \zeta) = X_c(nT; \zeta). \quad (17.1)$$

La moyenne de  $X_d$  sera évidemment égale aux échantillons de la moyenne de  $X_c$ .

De même, la fonction d'autocorrélation de  $X_d$  sera égale aux échantillons de la fonction d'autocorrélation de  $X_c$

$$R_{X_d}(n_1, n_2) = E\{X_d(n_1)X_d(n_2)^*\} = E\{X_c(n_1T)X_c(n_2T)^*\} = R_{X_c}(n_1T, n_2T) \quad (17.2)$$

et de même pour la fonction d'autocovariance

$$\Gamma_{X_d}(n_1, n_2) = \Gamma_{X_c}(n_1T, n_2T) \quad (17.3)$$

### 17.1.2 Cas des suites de longueur finies

En considérant la suite  $\mathbf{X}(\zeta)$  composée de  $N$  échantillons de la fonction aléatoire discrète  $X_d(n; \zeta)$ , soit

$$\mathbf{X}(\zeta) = [X_d(0; \zeta), X_d(1; \zeta), \dots, X_d(N-1; \zeta)]^T \quad (17.4)$$

on aura que la matrice de covariance de  $\mathbf{X}$  sera composé d'échantillons de la fonction d'autocovariance de  $X_d$

$$\mathbf{C}_X = \begin{pmatrix} \Gamma_{X_d}(0, 0) & \Gamma_{X_d}(0, 1) & \cdots & \Gamma_{X_d}(0, N-1) \\ \Gamma_{X_d}(1, 0) & \Gamma_{X_d}(1, 1) & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{X_d}(N-1, 0) & \Gamma_{X_d}(N-1, 1) & \cdots & \Gamma_{X_d}(N-1, N-1) \end{pmatrix} \quad (17.5)$$

où l'on voit que cette matrice est bien Hermitienne,  $\mathbf{C}_X = \mathbf{C}_X^\dagger$ . Et si  $X_c$  est stationnaire, on aura

$$\mathbf{C}_X = \begin{pmatrix} \Gamma_{X_d}(0) & \Gamma_{X_d}(1) & \cdots & \Gamma_{X_d}(N-1) \\ \Gamma_{X_d}(-1) & \Gamma_{X_d}(0) & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{X_d}(-N+1) & \Gamma_{X_d}(-N+2) & \cdots & \Gamma_{X_d}(0) \end{pmatrix} \quad (17.6)$$

et  $\mathbf{C}_X$  est donc Töplitz.

## 17.2 Echantillonnage d'une fonction stochastique

### 17.2.1 Rappel – Reconstruction d'un signal sur base de ses échantillons

Le théorème de Shannon montre que si la fréquence d'échantillonnage a été choisie correctement, la reconstruction d'un signal déterministe  $x(t)$  à bande limitée à partir de ses échantillons  $x(n)$  s'obtient en utilisant l'interpolateur idéal

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \operatorname{sinc} \frac{\pi}{T}(t - nT). \quad (17.7)$$

### 17.2.2 Echantillonnage de la fonction d'autocovariance

Comme la fonction d'autocovariance  $\Gamma_X(\tau)$  est une fonction déterministe, pour autant qu'elle soit à bande limitée, la formule de reconstruction donnée dans la section précédente peut être utilisée pour reconstruire la fonction d'autocovariance continue à partir de ses échantillons

$$\Gamma_X(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Gamma_X(k) \operatorname{sinc} \frac{\pi}{T}(t - nT) \quad (17.8)$$

sous la même condition par rapport à la fréquence d'échantillonnage.

### 17.2.3 Echantillonnage d'une fonction aléatoire

Il est facile de montrer [9, Chap 3.5.1] que pour autant que la fonction d'autocovariance soit à bande limitée et que la fréquence d'échantillonnage ait été choisie telle que la formule de reconstruction s'applique, une fonction aléatoire continue peut être reconstruite au sens des moindres carrés à partir de ses échantillons

$$\hat{X}_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_d(k) \operatorname{sinc} \frac{\pi}{T}(t - nT) \quad (17.9)$$

où la fonction reconstruite converge en moyenne quadratique vers  $X_c(t)$

$$E\{|\hat{X}_c(t) - X_c(t)|^2\} = 0 \quad (17.10)$$

ou encore

$$\hat{X}_c(t) \stackrel{\text{a.s.}}{=} X_c(t). \quad (17.11)$$

On voit donc que le théorème de l'échantillonnage s'applique aussi aux fonctions aléatoires, la grandeur déterminant la fréquence d'échantillonnage étant alors la fonction d'autocovariance ou, de manière équivalente, la densité spectrale de puissance qui sont toutes les deux des grandeurs déterministes.

# Estimation spectrale

## 18.1 Introduction

Le but de l'estimation spectrale est d'estimer la densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire (de la fonction aléatoire continue  $X(t)$  donc) sur base d'un nombre fini de réalisations discrètes  $\mathbf{X}$  de ce signal.

Il y a deux sources d'erreur

- Le nombre d'échantillons, qui va typiquement influencer la résolution spectrale.
- Le nombre fini de réalisations disponibles, ce qui va induire une variance non nulle sur la grandeur estimée.

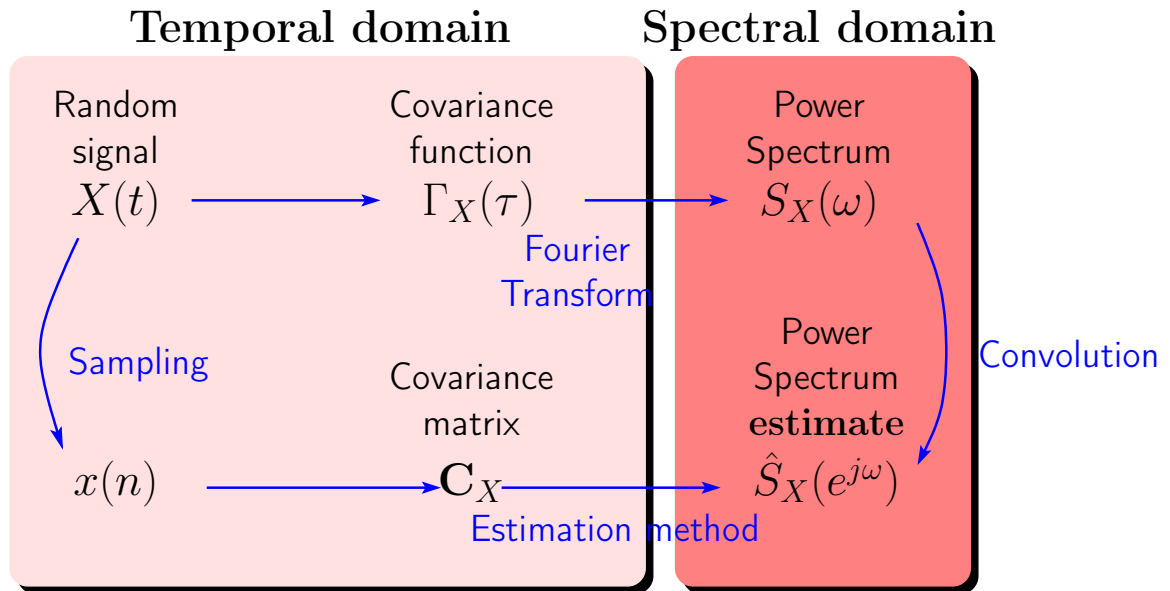


Figure 18.1 – Illustration du processus d'estimation.

La figure 18.1 illustre les relations existant entre les différentes grandeurs. La densité spectrale de puissance  $S_X(\omega)$  est la transformée de Fourier de la fonction d'autocovariance  $\Gamma_X(\tau)$ . Par contre il existe plusieurs manières d'obtenir une estimation de la densité spectrale de puissance du processus

continu sur base des échantillons du processus discret.

## 18.2 Estimation

### 18.2.1 Préliminaires

Dans les chapitres précédents, il a notamment été démontré que la densité spectrale de puissance était égale à la transformée de Fourier de la fonction d'autocovariance

$$S_X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{\Gamma_X(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Gamma_X(k) e^{-j\omega k} \quad (18.1)$$

ou encore que la densité spectrale de puissance était égale à la moyenne du carré de la transformée de Fourier de la fonction aléatoire

$$S_X(e^{j\omega}) = E\{|F(e^{j\omega})|^2\} \quad (18.2)$$

et on pourrait intuitivement se dire que la densité spectrale de puissance  $S_X(e^{j\omega})$  d'un processus  $X(t)$  pourrait s'obtenir en prenant l'espérance mathématique de la transformée de Fourier d'une suite aléatoire de longueur finie  $X_M(n)$ , cette suite étant obtenue en prenant  $2M$  échantillons successifs le processus continu de départ  $X(t)$

$$S_X(e^{j\omega}) = \lim_{M \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2M+1} \left| \sum_{n=-M}^M X_M(n) e^{-j\omega n} \right|^2 \right\} \quad (18.3)$$

soit, en explicitant le carré

$$S_X(e^{j\omega}) = \lim_{M \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M \sum_{m=-M}^M X_M^*(m) X_M(n) e^{-j\omega(n-m)} \right\} \quad (18.4)$$

et en rentrant l'espérance mathématique dans la sommation et en introduisant la fonction d'autocovariance  $\Gamma_X(n-m)$

$$S_X(e^{j\omega}) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M \sum_{m=-M}^M \Gamma_X(n-m) e^{-j\omega(n-m)}. \quad (18.5)$$

Or, on vérifie aisément l'identité suivante

$$\sum_{n=-M}^M \sum_{m=-M}^M f(n-m) = \sum_{k=-2M}^{2M} (2M+1-|k|) f(k) \quad (18.6)$$

qui une fois introduite dans (18.5) donne

$$S_X(e^{j\omega}) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-2M}^{2M} (2M+1-|k|) \Gamma_X(k) e^{-j\omega k} \quad (18.7)$$

ou en réécrivant le terme en  $k$

$$S_X(e^{j\omega}) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=-2M}^{2M} \left( 1 - \frac{|k|}{2M+1} \right) \Gamma_X(k) e^{-j\omega k} \quad (18.8)$$

et en prenant la limite, on obtient finalement

$$S_X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Gamma_X(k) e^{-j\omega k} \quad (18.9)$$

ce qui confirme notre intuition initiale et que l'on peut écrire

$$S_X(e^{j\omega}) = \lim_{M \rightarrow \infty} E \{ |\mathcal{F}\{X_M(n)\}|^2 \}. \quad (18.10)$$

Il est à noter que cette expression ne permet pas d'estimer la densité spectrale de puissance en pratique étant donné que nous serons d'une part typiquement incapable de calculer l'espérance mathématique de l'expression et d'autre part tout aussi incapable de prendre la limite à l'infini.

### 18.2.2 Périodogramme

Le principe de base du périodogramme est de partir de (18.10) et d'une part de laisser tomber l'espérance mathématique et d'autre part de ne pas prendre la limite ce qui donne

$$S_X^{\text{Per}}(e^{j\omega}) = \left( \frac{1}{2M+1} \right) \left| \sum_{n=-M}^M x(n) e^{-j\omega n} \right|^2. \quad (18.11)$$

On obtient donc un estimateur qui est une fonction aléatoire et qui a donc une moyenne et une variance. Examinons dans un premier temps la moyenne que l'on obtient à partir de (18.8)

$$E\{S_X^{\text{Per}}(e^{j\omega})\} = \mathcal{F} \left\{ 1 - \frac{|k|}{2M+1} \right\} * S_X(e^{j\omega}) \quad (18.12)$$

où l'on a pris la transformé de Fourier du terme (déterministe) de droite pour faire apparaître la densité spectrale de puissance  $S_X(e^{j\omega})$ . On constate que l'effet de la longueur limitée du signal est de convoluer la densité spectrale de puissance avec un terme qui va avoir pour effet de réduire la résolution spectrale de l'estimateur.

Le calcul de la variance de  $S_X^{\text{Per}}(e^{j\omega})$  est plus compliqué et le lecteur intéressé pourra se référer à [5, Chap. 4.3] dont nous reprenons le résultat pour un bruit blanc

$$\text{var}(S_X^{\text{Per}}(e^{j\omega})) \approx |S_X(e^{j\omega})|^2 \left[ 1 + \left( \frac{\sin(2M+1)\omega}{(2M+1)\sin\omega} \right)^2 \right] \quad (18.13)$$

soit, pour des pulsation non proche de 0 ou  $\pm\pi$ ,

$$\text{var}(S_X^{\text{Per}}(e^{j\omega})) \approx |S_X(e^{j\omega})|^2 \quad (18.14)$$

et l'on constate que l'écart-type (la racine carrée de la variance) aura le même ordre de grandeur que la quantité à estimer, ce qui en fait un estimateur extrêmement médiocre. Cela est bien sûr du au fait d'avoir purement et simplement négligé l'espérance mathématique. On constate aussi que cette variance est indépendante du nombre d'échantillons considérés  $M$ . Elle ne diminuera donc pas pour de grand  $M$ .

Cette variabilité est illustrée à la figure 18.2 pour un processus consistant en une sinusoïde dans un bruit blanc.

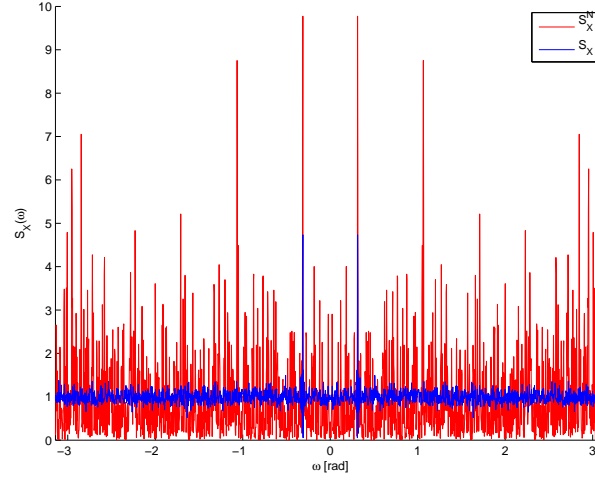


Figure 18.2 – Illustration de la variabilité élevée du périodogramme. En bleu, la densité spectrale de puissance  $S_X$  et en rouge le périodogramme, d'un processus consistant en une sinusoïde dans un bruit blanc.

### 18.2.3 Estimateur de Welch

L'idée centrale de l'estimateur de Welch est de partir de (18.10), de ne pas prendre la limite pour  $M$  tendant vers l'infini mais de remplacer l'espérance par une moyenne.

Les différentes réalisations sont obtenues en découpant le signal discret  $X(n)$  en fenêtres se chevauchant. On calcule le périodogramme du signal dans chaque fenêtre et on prend la moyenne de ces différents périodogrammes.

Comme  $M$  sera plus petit, la résolution fréquentielle sera réduite. La variance de l'estimateur sera aussi réduite grâce à la moyenne, pour autant que les différentes quantités moyennées soient indépendantes.

Il y a donc un compromis à trouver entre la résolution spectrale et la variance de l'estimateur.



## Quatrième partie

### Les filtres



---

# Conception de filtres invariants

---

## 19.1 Introduction

Les filtres invariants sont des filtres dont les coefficients ne dépendent pas du temps. Et en particulier, les coefficients sont indépendants du signal d'entrée.

Les filtres adaptatifs, qui s'adaptent au signal d'entrée lorsque ses caractéristiques évoluent avec le temps, font l'objet du chapitre 20.

## 19.2 Spécification des filtres

Les filtres invariants sont d'ordinaire spécifiés en tant que filtres sélectifs en fréquence. C.à.d. que l'on spécifie le comportement en amplitude et en phase en fonction de la pulsation  $\omega$ . Bien que d'autres variantes existent, les filtres sélectifs en fréquence principaux sont les filtres passe-bas, qui préservent les composantes du signal ayant une fréquence inférieure à la fréquence de coupure, les filtres passe-haut qui préservent les composantes du signal ayant une fréquence supérieure à la fréquence de coupure, les filtres passe-bande qui préservent les composantes du signal situées entre une fréquence de coupure basse et une fréquence de coupure haute et les filtre stop-bande qui éliminent (ou atténuent) les composantes du signal situées entre une fréquence de coupure basse et une fréquence de coupure haute.

Une spécification typique pour un filtre passe-bas est illustrée à la figure 19.1. La fréquence de coupure est  $\omega_1$  et détermine la fréquence jusqu'à laquelle les composantes du signal doivent être préservées, c.à.d. la fin de la bande passante du filtre. Le paramètre  $\varepsilon$  détermine l'atténuation ou l'amplification maximale dans la bande passante.  $\omega_2$  est la fréquence à partir de laquelle le signal doit être rejeté, c.à.d. le début de la bande d'arrêt. Et le paramètre  $\beta$  décrit l'atténuation minimale du signal dans la bande d'arrêt. Le domaine spectral entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$  est appelé la bande de transition.

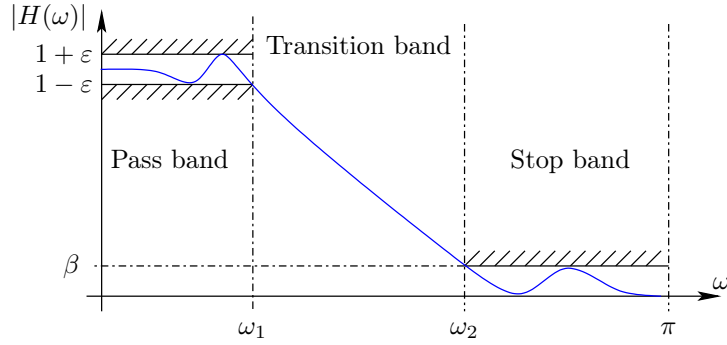


Figure 19.1 – Exemple de spécification pour un filtre passe-bas.

## 19.3 Filtres FIR ou filtres IIR

### 19.3.1 Introduction

Comme décrit au chapitre 14, il y a deux grandes classes de filtres invariants : les filtres à réponse impulsionnelle finie (FIR) et les filtres à réponse impulsionnelle infinie (IIR). À côté de la durée de leur réponse impulsionnelle, ils diffèrent aussi par leur performance. En général, par rapport aux filtres FIR, les filtres IIR présentent une atténuation dans la bande d'arrêt supérieure pour un même nombre de paramètres, c.à.d. pour un même nombre de coefficients. Par contre, les filtres FIR sont les seuls filtres capables de présenter une phase linéaire (see Section 14.4.1) et donc de filtrer sans distortion.

### 19.3.2 Ordre

L'ordre d'un filtre est défini par le nombre de pôles et de zéros de la transmittance du filtre. Et le nombre de zéros et de pôles dépend du nombre de coefficients du filtre.

En général, au plus haut l'ordre du filtre, au plus raide pourra être l'atténuation dans la bande de transition. À titre d'illustration, mentionnons que pour des filtres analogiques, il est bien connu que l'atténuation d'un filtre du  $N$ -ème ordre est donnée par

$$N \times 20dB \text{ par décade} \quad (19.1)$$

(ou  $N \times 6dB$  par octave). La largeur de la bande de transition décroît donc avec l'ordre du filtre.

Par contre la longueur de la réponse impulsionnelle et le délais de groupe augmentent avec l'ordre.

## 19.4 Conception des filtres IIR

Il existe plusieurs méthodes de conception des filtres IIR. Les paragraphes suivants présentent la méthode de conception par prototypage et une méthode de conception par optimisation.

### 19.4.1 Conception par prototypage

La conception par prototypage consiste à concevoir un filtre numérique en partant de la transmittance d'un filtre analogique. Les filtres analogiques sont connus depuis longtemps et ont été abondamment étudiés et sont caractérisés par leur transmittance

$$H(s) = \frac{\sum_{p=0}^M b_p s^p}{\sum_{q=0}^N a_q s^q} \quad (19.2)$$

Le filtre numérique est obtenu en calculant la transmittance discrète  $H(z)$  à partir de  $H(s)$ . Ceci peut s'interpréter comme une correspondance entre le plan  $s$  et le plan  $z$ .

### 19.4.2 Filtres prototypes

Les paragraphes suivants décrivent un certain nombre de filtre analogiques classiques. Il est à noter que ces filtres s'implémentent aisément au moyen de composants discrets.

#### 19.4.2.1 Filtre de Butterworth

Les filtres de Butterworth ont la transmittance suivante

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} \quad (19.3)$$

où  $N$  est l'ordre du filtre et  $\Omega_c$  la fréquence de coupure à  $-3dB$ . La réponse en fréquence ainsi

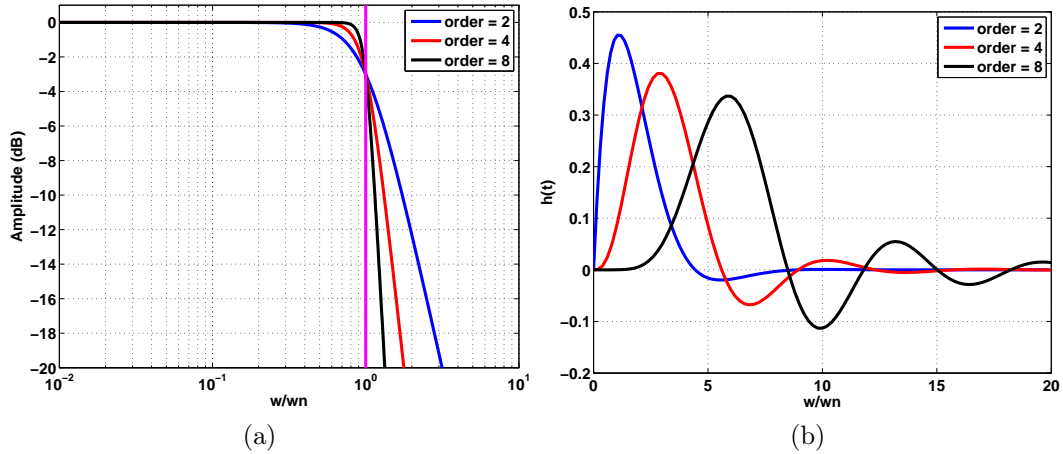


Figure 19.2 – Transmittance du filtre de Butterworth (a) et réponse impulsionnelle (b).

que la réponse impulsionnelle sont illustrée à la figure 19.2 pour différents ordres du filtre.

Le filtre de Butterworth est conçu pour avoir la réponse fréquentielle la plus plate dans la bande passante.

### 19.4.2.2 Les filtres de Chebyshev

Il y a deux types de filtres de Chebyshev. Le filtre de type I est équiripple dans la bande passante et monotone dans la bande d'arrêt, tandis que le filtre de type II est monotone dans la bande passante et équiripple dans la bande d'arrêt.

Les filtres de type I sont caractérisés par

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_p)} \quad (19.4)$$

où  $N$  est l'ordre du filtre,  $\Omega_p$  la fréquence angulaire limite de la bande passante et  $\varepsilon$  est lié à l'amplitude du ripple dans la bande passante.  $T_N(x)$  est le polynôme de Chebyshev d'ordre  $N$  défini par

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x) & |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} x) & |x| > 1 \end{cases} \quad (19.5)$$

Les filtres de type II sont caractérisés par

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 [T_N^2(\Omega_s/\Omega_p)/T_N^2(\Omega_s/\Omega)]} \quad (19.6)$$

où  $\Omega_s$  est la fréquence de début de la bande d'arrêt. Il est à noter que ce filtre aura aussi bien des pôles que des zéros.

La réponse fréquentielle de chaque type de filtre de Chebyshev est illustrée à la figure 19.3 pour différents ordres. Les filtres de Chebyshev de Type-I minimisent l'erreur entre la transmittance du

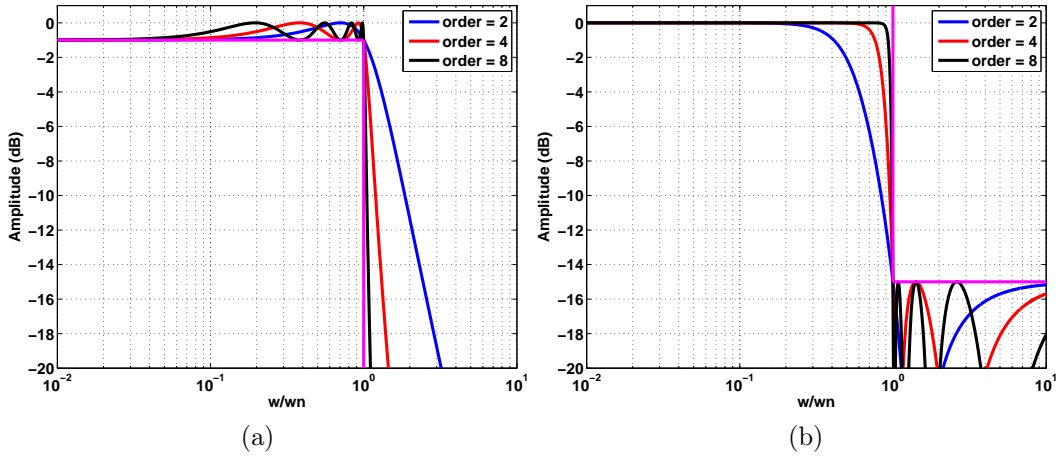


Figure 19.3 – Transmittance des filtres de Chebyshev : (a) Type I et (b) Type II.

filtre et le filtre idéalisé, tout en introduisant un ripple.

Typiquement, les filtres de Chebyshev seront à même d'atteindre les spécifications imposées avec un ordre plus faible que les filtres de Butterworth. De manière similaire, pour un même ordre de filtre, la bande de transition d'un filtre de Chebyshev sera plus faible que celle d'un filtre de Butterworth.

### 19.4.2.3 Les filtres de Bessel

Les filtres de Bessel sont caractérisés par

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{B_N(s)} \quad (19.7)$$

où  $N$  est l'ordre du filtre et  $B_N(s)$  est le polynôme de Bessel d'ordre  $N$

$$B_N(s) = \sum_{k=0}^N \frac{(2N-k)!}{2^{N-k} k! (N-k)!} s^k. \quad (19.8)$$

La réponse en fréquence, la réponse impulsionnelle et le délais de groupe sont illustrés à la figure 19.4 pour différents ordres. La faible augmentation de la longueur de la réponse impulsionnelle

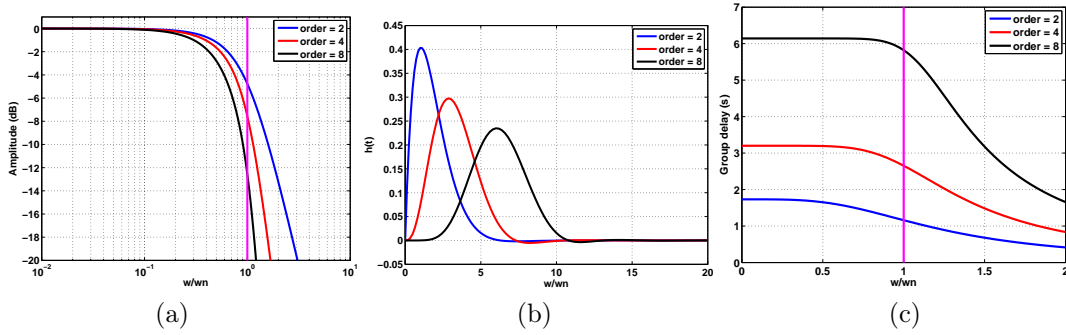


Figure 19.4 – Transmittance (a), réponse impulsionnelle (b) et délais de groupe (c) pour un filtre de Bessel.

comparée à celle du filtre de Butterworth est à noter (Figure 19.2).

Le filtre de Bessel a le délais de groupe le plus plat dans la bande passante. Le délais de group en fonction de la pulsation angulaire est illustré à la figure 19.4 (c). La correspondance entre le délais de groupe et le délais apparent de la réponse impulsionnelle est à noter (figure 19.4 (b)).

### 19.4.2.4 Comparaison

Un comparaison de la réponse fréquentielle, du délais de groupe des trois filtres est donnée à la figure 19.5. Comme décrit ci-dessus, le filtre de Chebyshev a la bande de transition la plus étroite et le filtre de Bessel a la bande de transition la plus large. Par contre le filtre de Chebyshev a le délais de groupe le plus irrégulier, ce qui provoquera donc une distortion du signal, tandis que le filtre de Bessel présente le délais de groupe le plus constant.

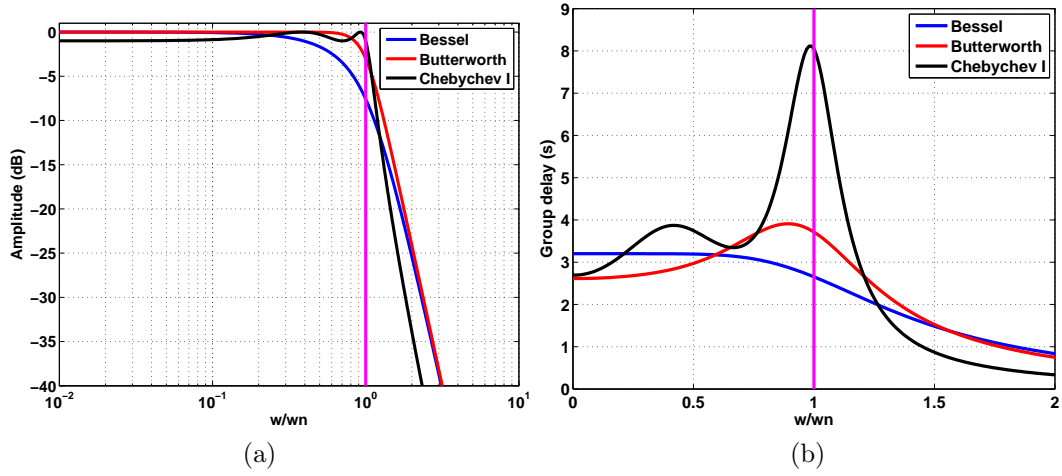


Figure 19.5 – Comparaison de (a) la réponse fréquentielle et (b) du délai de group des trois filtres prototypes.

### 19.4.3 Correspondance continu-discret

#### 19.4.4 Introduction

Les développements initiaux de la conversion continu-discret ont été provoqués par la nécessité de simuler des systèmes continus au moyens d'ordinateurs, c.à.d. par des systèmes à temps discret.

Dans le contexte de ce cours, les méthodes de conversion seront utilisées comme un moyen pour concevoir un filtre discret en utilisant des filtres continus comme prototype.

##### 19.4.4.1 Conditions minimales

Les propriétés principales des filtres doivent être retenues. Comme la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle des systèmes continus et la transformée en Z de la réponse impulsionnelle des systèmes discrets caractérisent les filtres, la conversion peut être vue comme une mise en correspondance du plan  $s$  vers le plan  $z$ . De plus, il est souhaitable que les axes des fréquence correspondent autant que possible et donc que l'axe imaginaire du plan  $s$  soit mis en correspondance avec le cercle unité du plan  $z$  et que le demi-plan à gauche de l'axe imaginaire soit mis en correspondance avec l'intérieur du cercle unité. Si ceci est vérifié, le système discret obtenu par conversion d'un système continu stable au moyen d'une mise en correspondance sera stable, ce qui est une condition essentielle.

##### 19.4.4.2 Invariance de la réponse impulsionnelle

L'idée de base de cette méthode de conversion est que la réponse impulsionnelle du filtre discret est obtenue par échantillonnage de la réponse impulsionnelle du filtre continu.

$$h_d(n) = h(nT) \quad (19.9)$$



où  $T$  est la période d'échantillonnage. La transmittance des filtres sont donc reliés par

$$H_d(z)|_{z=e^{sT}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H\left(s - j\frac{2\pi k}{T}\right) \quad (19.10)$$

où l'aliasing du à l'échantillonnage est évident.

Il convient de noter qu'à cause de l'aliasing, il n'est possible de réaliser ni filtre passe-haut ni filtre stop-bande au moyen de cette méthode.

La mise en correspondance qui est effectuée peut être notée  $z \Leftrightarrow e^{sT}$  est illustrée à la Figure 19.6

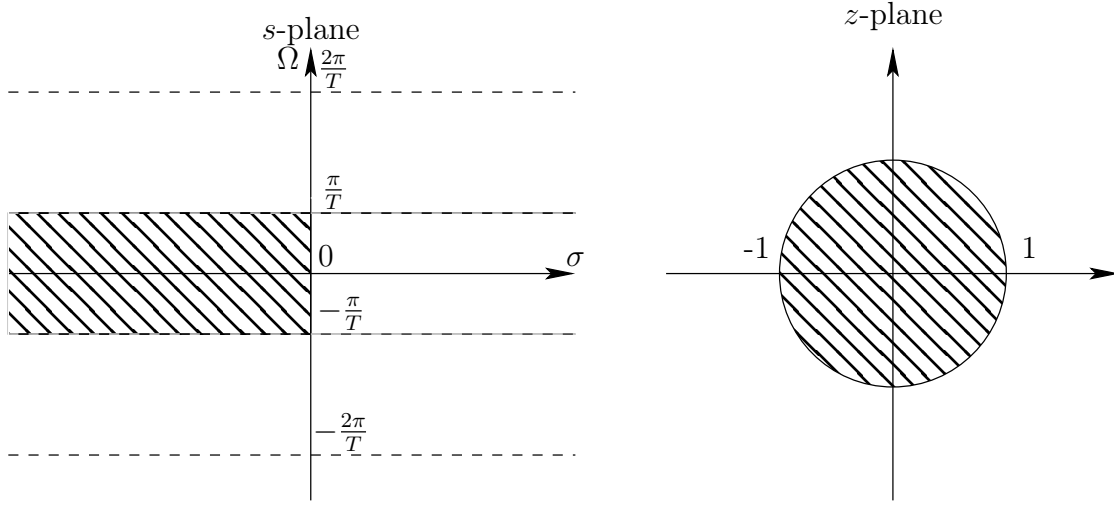


Figure 19.6 – Illustration de la correspondance qu'implique la méthode de l'invariance de la réponse impulsionnelle.

Comme la réponse impulsionnelle du filtre est infinie, il n'est pas pratique de concevoir le filtre discret en échantillonnant effectivement la réponse impulsionnelle. Il est préférable d'obtenir  $H_d(z)$  directement comme suit. Supposons que  $H(s)$  n'a que des pôles simples,  $H(s)$  peut alors se décomposer en fractions simples

$$H(s) = \sum_{k=1}^K \frac{A_k}{s - p_k} \quad (19.11)$$

où  $p_k$  est le  $k$ -ème pôle de  $H(s)$ . La contribution à la réponse impulsionnelle due au  $k$ -ème pôle est

$$h_k(t) = A_k e^{p_k t} u(t) \quad (19.12)$$

où  $u(t)$  est l'échelon unité. La réponse impulsionnelle échantillonnée est évidemment donnée par

$$h_{dk}(t) = A_k e^{p_k nT} u(nT) \quad (19.13)$$

et la transformé en Z par

$$H_{dk}(z) = \frac{A_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}} \quad (19.14)$$

d'où

$$H_d(z) = \sum_{k=1}^K \frac{A_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}} \quad (19.15)$$

et la transmittance est être obtenue en combinant les  $K$  transmittances du premier ordre en parallèle.

Si cette méthode est utilisée pour synthétiser un filtre numérique, la fréquence d'échantillonnage est (presque) irrelevante. En effet, les caractéristiques du filtre et en particulier la fréquence de coupure  $\omega$  sont données dans le domaine discret. Ces caractéristiques sont dans un premier temps converties dans le domaine continu afin de pouvoir concevoir le filtre continu qui servira de prototype, donnant ainsi  $\Omega = \omega/T$ . Donc si la fréquence d'échantillonnage est augmentée, la fréquence de coupure du filtre continu  $\Omega$  sera aussi augmentée. Donc augmenter la fréquence d'échantillonnage pour résoudre un problème d'aliasing n'est, dans ce cas, pas une solution.

#### 19.4.4.3 Solution numérique de l'équation différentielle

Comme un système continu peut typiquement être décrit par une équation différentielle et un système discret peut typiquement être décrit par une équation aux différences, une idée naturelle est de faire les deux, ou, autrement dit, d'approcher la dérivée par la différence première

$$\frac{dh(t)}{dt} \Longleftrightarrow \frac{h_d(n) - h_d(n-1)}{T}. \quad (19.16)$$

avec  $h_d(n) = h(nT)$ . En prenant la transformée de Laplace du terme de gauche et la transformée en  $Z$  du terme de gauche de cette équation, on obtient la correspondance suivante

$$s \Longleftrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T} \quad (19.17)$$

ou, de manière équivalente

$$\frac{1}{1 - sT} \Longleftrightarrow z \quad (19.18)$$

Cette mise en correspondance est illustrée à la Figure 19.7. Comme la mise en correspondance

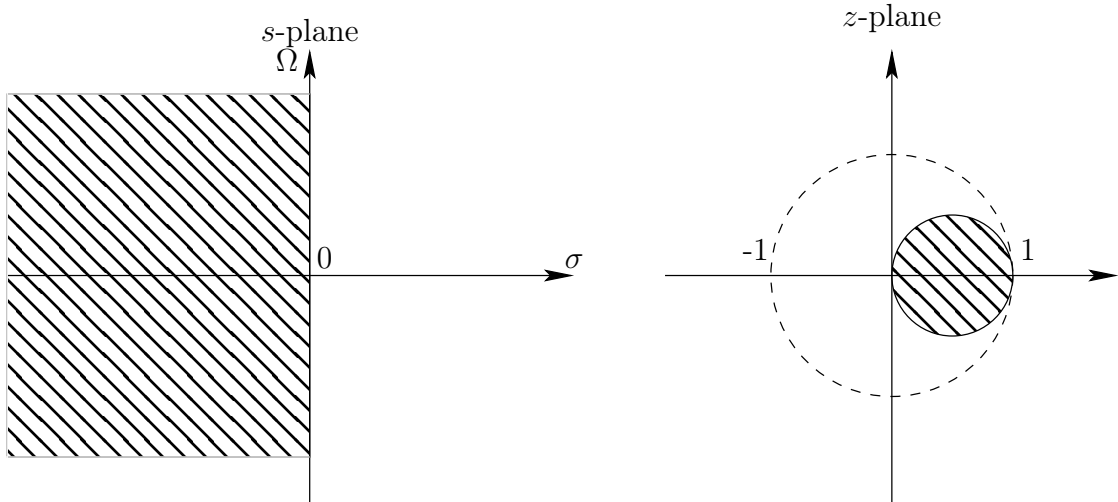


Figure 19.7 – Illustration de la mise en correspondance qu'implique la solution numérique de l'équation différentielle

de l'axe imaginaire du plan  $s$  avec le cercle unité du plan  $Z$  n'est acceptable qu'autour de  $s = 0$ , le filtre continu ne sera correctement approché qu'autour de l'origine. Cette transformation n'est donc utilisable que si la réponse désiré est situé autour de l'origine, et donc un filter passe-bas.

#### 19.4.4.4 Transformation bilinéaire

En utilisant un raisonnement similaire à celui tenu dans la section précédente, on peut considérer l'équivalence entre l'intégrale continue et son équivalent discret

$$\int_0^{nT} x(t') dt' = y(nT) \iff y_d(n) = y_d(n-1) + \frac{T}{2}(x(n) + x(n-1)) \quad (19.19)$$

auquel correspond l'équivalence suivante

$$\frac{1}{s} \iff \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (19.20)$$

ou encore

$$z \iff \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} \quad (19.21)$$

La transformation du cercle unité  $z = e^{j\omega}$  donne

$$s \iff \frac{2}{T} j \tan \frac{\omega}{2} \quad (19.22)$$

ce qui correspond à l'axe imaginaire. Il y a donc une correspondance non linéaire entre l'axe des fréquences discret  $\omega$  et les fréquences continues  $\Omega$

$$\Omega \iff \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2} \quad (19.23)$$

Comme la fréquence continue infinie est mise en correspondance avec  $\pi$ , il n'y a aucun problème d'aliasing, comme illustré à la Figure 19.8. La transformation bilinéaire déforme cependant l'axe

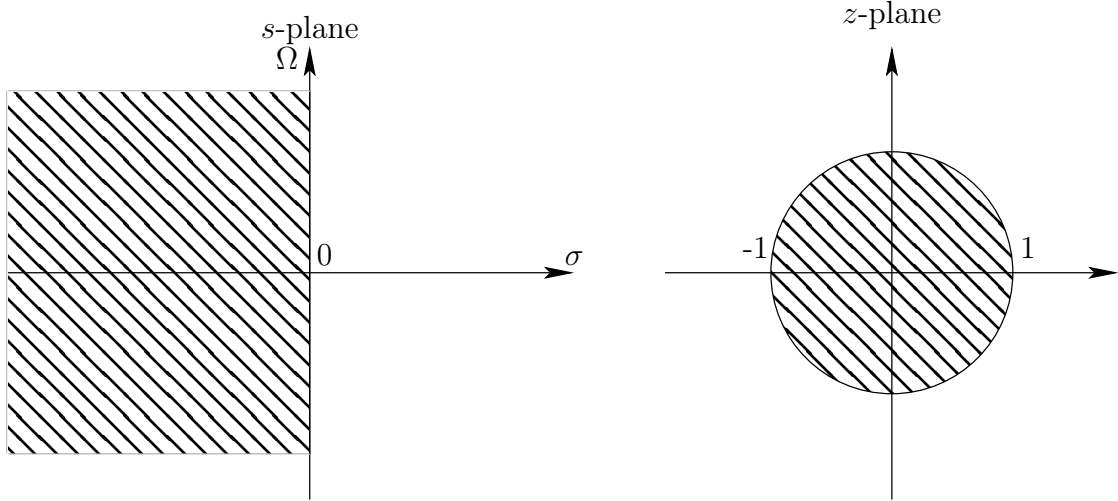


Figure 19.8 – Illustration de la mise en correspondance qu'implique la transformation bilinéaire

des fréquences. L'utilisation de cette transformation n'est appropriée que lorsque la déformation de l'axe des fréquence est acceptable comme par exemple lorsque la réponse du filtre est constante par section. En particulier, cette transformation ne préserve *pas* l'éventuelle linéarité de la phase d'un filtre.

Afin de pouvoir utiliser la transformation bilinéaire pour concevoir un filtre discret, les étapes suivantes doivent être exécutées

1. Conversion des spécifications du filtre numérique vers les spécifications du filtre analogique en utilisant (19.23).
2. Synthèse du filtre analogique sur base de ses spécifications.
3. Application de la transformation bilinéaire à la fonction de transfert du filtre analogique pour obtenir la fonction de transfert du filtre discret.

### 19.4.5 Conception optimale de filtres IIR

Les méthodes de conception sur base de prototype décrites dans les sections précédentes ne sont utilisables que lorsqu'un filtre analogique satisfaisant est disponible. Il n'existe cependant pas de prototype analogique pour des spécifications arbitraires. Dans ce cas, une méthode de conception optimale peut être utilisée. Ces méthodes sont typiquement appliquées dans le domaine discret afin de fournir directement un filtre numérique sans nécessiter de mise en correspondance.

La méthode présentée ci-dessous est connue sous le nom de la méthode de Prony [7, Section 5.3.3]. Celle-ci consiste en la conception d'un filtre IIR tel que sa réponse impulsionnelle corresponde à une réponse impulsionnelle donnée. Soit

$$h_d(n), \quad n = 0, \dots, L-1 \quad (19.24)$$

la réponse impulsionnelle souhaitée. Nous considérons la conception d'un filtre IIR à  $N$ -poles. Sa transformée en  $Z$  est donc donnée par

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (19.25)$$

où les coefficients  $b_0$  et  $a_k$  sont à déterminer.

Le principe de la conception est d'imposer que la réponse impulsionnelle  $H_d(z)$  filtrée par l'inverse du filtre  $1/H(z)$  donne une impulsion unité. La sortie du filtre inverse avec  $H_d(z)$  comme entrée est donnée par

$$V(z) = \frac{H_d(z)}{H(z)}. \quad (19.26)$$

L'expression de  $V(z)$  dans le domaine temporel donne

$$b_0 v(n) = h_d(n) - \sum_{k=1}^N a_k h_d(n-k) \quad (19.27)$$

et comme nous imposons que  $v(n)$  approche une impulsion unité, c.à.d.,  $v(0) = 1$ , le choix de

$$b_0 = h_d(0) \quad (19.28)$$

et la minimisation de  $v(n)$  pour  $n \neq 0$  au sens des moindres carrés est raisonnable. Les coefficients  $a_k$  seront donc calculés tels que la fonction de coût

$$J = \sum_{n=1}^{+\infty} v(n)^2 \quad (19.29)$$

soit minimale. Cette fonction de coût peut se réécrire comme

$$J = \frac{1}{b_0} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} h_d(n)^2 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} h_d(n) \sum_{k=1}^N a_k h_d(n-k) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^N a_k h_d(n-k) \right)^2 \right) \quad (19.30)$$

Les coefficients  $a_k$  qui minimisent  $J$  doivent donc satisfaire l'équation

$$\frac{\partial J}{\partial a_k} = 0 \quad (19.31)$$

ou

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h_d(n)h_d(n-k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^N a_i h_d(n-i)h_d(n-k). \quad (19.32)$$

Définissons la matrice  $\mathbf{M}$  comme

$$\mathbf{M}_{k,i} = \sum_{n=1}^{+\infty} h_d(n-i)h_d(n-k), \quad (19.33)$$

le vecteur  $\mathbf{d}$  come

$$\mathbf{d}(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_d(n)h_d(n-k) \quad (19.34)$$

et le vecteur de coefficients  $\mathbf{a}$  comme

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_N]^T. \quad (19.35)$$

L'expression (19.32) peut donc se réécrire comme

$$\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{d} \quad (19.36)$$

avec comme solution

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{d}. \quad (19.37)$$

On peut montrer que la matrice  $M$  est définie positive, garantissant ainsi l'existence de son inverse.

## 19.5 Conception de filtres FIR

### 19.5.1 Introduction

Les propriétés des filtres FIR sont dans un premier temps passées en revue. Ensuite, parmi les méthodes qui existent, la méthode de conception des filtres FIR au moyen de fenêtres est décrite.

### 19.5.2 Propriétés des filtres FIR

#### 19.5.2.1 Stabilité

Les filtres FIR sont inconditionnellement stables.

#### 19.5.2.2 Linéarité de la phase

Un filtre FIR possède une phase linéaire si et seulement si sa fonction de transfert peut s'écrire comme

$$H(\omega) = e^{-j(\alpha\omega + \beta \operatorname{sign} \omega)} |G(\omega)| \quad (19.38)$$

c.à.d., si la phase de la fonction de transfert est une fonction linéaire de  $\omega$ , d'où le nom.

De manière générale, cela impose une condition de symétrie à la réponse impulsionnelle du filtre FIR, soit

- $\beta = 0$  :  $h(n) = h(N - n - 1)$ , soit une réponse impulsionnelle paire
- $\beta = \pm\pi/2$  :  $h(n) = -h(N - n - 1)$ , soit une réponse impulsionnelle impaire.

### 19.5.3 Conception au moyen de fenêtres

L'idée de base est de partir d'une réponse impulsionnelle d'un filtre idéal  $h_D(n)$  et de la tronquer en multipliant cette réponse impulsionnelle par une fonction fenêtre  $w(n)$

$$h(n) = h_D(n)w(n). \quad (19.39)$$

Si un filtre idéal (passe-base, passe-haut ou passe-bande) est considéré, la fenêtre déterminera l'atténuation dans la bande d'arrêt et la largeur de la bande de transition.

La fonction de transfert  $H(\omega)$  sera égale à la convolution de la fonction de transfert du filtre idéal avec celle de la fenêtre. De manière générale, la transformée de Fourier d'une fenêtre présentera un maximum à l'origine et ira en diminuant avec la fréquence. La largeur de la fonction de transfert autour de l'origine est déterminé par la longueur de la fenêtre et la longueur de la fenêtre sera donc déterminante pour la largeur de la bande de transition.

Il existe beaucoup de fonctions fenêtre et une comparaison de ces fonctions s'impose. Les exemples de filtres ci-dessous ont été obtenus en tronquant la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas idéal ayant une fréquence de coupure  $\omega = \frac{\pi}{2}$ . Les fenêtres sont comparées à la fenêtre rectangulaire.

#### 19.5.3.1 Famille des fenêtres polynomiales

La fenêtre rectangulaire, la fenêtre triangulaire et des fenêtres d'ordre supérieurs appartiennent à cette famille.

**19.5.3.1.1 Fenêtre rectangulaire** Pour mémoire, l'expression de la fenêtre rectangulaire est donnée par

$$w(n) = 1, \quad n = -N/2, \dots, N/2 \quad (19.40)$$

et sa fonction de transfert par

$$W(\omega) = \frac{\sin \omega N/2}{\sin \omega/2} \quad (19.41)$$

**19.5.3.1.2 Fenêtre de Bartlett** Aussi appelée fenêtre triangulaire, son expression est donnée par

$$w(n) = 1 - \frac{2|n|}{N+1} \quad (19.42)$$

et comme cette fenêtre peut s'obtenir par la convolution de deux fenêtres rectangulaires, sa fonction de transfert est donnée par

$$W(\omega) = \frac{2}{N} \frac{\sin^2 \omega N/4}{\sin^2 \omega/2} \quad (19.43)$$

**19.5.3.1.3 Fenêtre polynomiale** De manière plus générale, la fonction de transfert des fenêtres polynomiales prend la forme générale

$$W(\omega) = \frac{1}{A} \frac{\sin^m \omega N/2m}{\sin^m \omega/2} \quad (19.44)$$

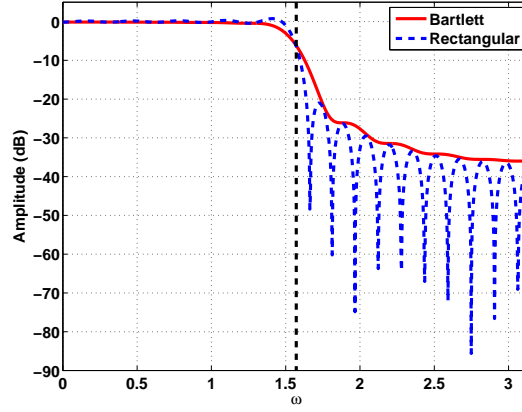


Figure 19.9 – Réponse en fréquence (fenêtre de Bartlett).

où  $A$  est tel que  $w(0) = 1$  ou, en d'autres mots,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} W(\omega) d\omega = 1 \quad (19.45)$$

afin de garantir que la fonction fenêtre n'ait pas d'effet sur l'amplitude du signal.

### 19.5.3.2 Famille des fenêtres “Raised cosine”

L'idée générale de ces fenêtres est d'annuler les lobes secondaires de la fonction rectangulaire en additionnant des versions décalées de la fenêtres.

**19.5.3.2.1 Fenêtre en cosinus** Obtenues en additionnant deux fenêtres rectangulaires décalées, son expression est donnée par

$$w(n) = \frac{1}{2} (e^{j\frac{\pi n}{N}} + e^{-j\frac{\pi n}{N}}) = \cos \frac{\pi n}{N} \quad |n| < \frac{N}{2} \quad (19.46)$$

où les deux exponentielles sont responsables du décalage dans le domaine fréquentiel.

**19.5.3.2.2 Fenêtre de Hanning** La fenêtre de Hanning considère trois fenêtres rectangulaires décalées et son expression est donc donnée par

$$w(n) = \frac{1}{4} (e^{j2\pi\frac{n}{N}} + 2 + e^{-j2\pi\frac{n}{N}}) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{2\pi n}{N} \right) \quad |n| < \frac{N}{2} \quad (19.47)$$

**19.5.3.2.3 Fenêtre de Hamming** La fenêtre de Hamming est une généralisation particulière de la fenêtre de Hanning

$$w(n) = \alpha + (1 - \alpha) \cos \frac{2\pi n}{N} \quad |n| < \frac{N}{2} \quad (19.48)$$

où  $\alpha = 0.54$ . La caractéristique principale de la fenêtre de Hamming est que le premier lobe secondaire subit une atténuation élevé.

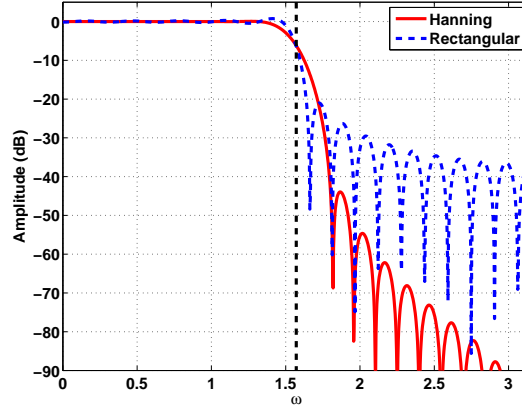


Figure 19.10 – Réponse en fréquence (fenêtre de Hanning).

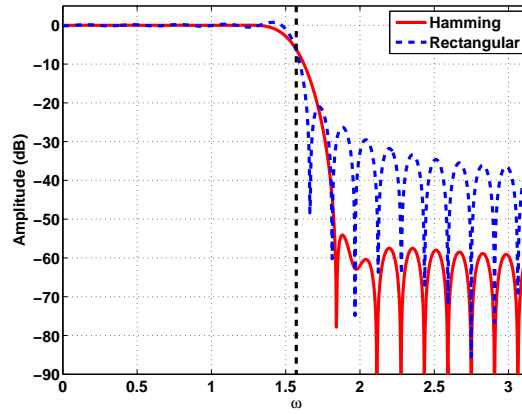


Figure 19.11 – Réponse en fréquence (fenêtre de Hamming).

**19.5.3.2.4 Fenêtre de Blackman** La méthode peut être généralisée en superposant des fenêtres rectangulaires décalées et pondérées de manière appropriées. L'expression générale de ces fenêtres est

$$w(n) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^K a_k \cos \frac{2\pi nk}{N} \quad |n| < \frac{N}{2} \quad (19.49)$$

où les coefficients  $a_k$  satisfont

$$a_0 + 2 \sum_{k=1}^K a_k = 1. \quad (19.50)$$

### 19.5.3.3 Résumé

L'effet des différentes fenêtres est être résumé dans la table ci-dessous, donnant l'amplitude du plus grand lobe secondaire et la largeur du lobe principal.



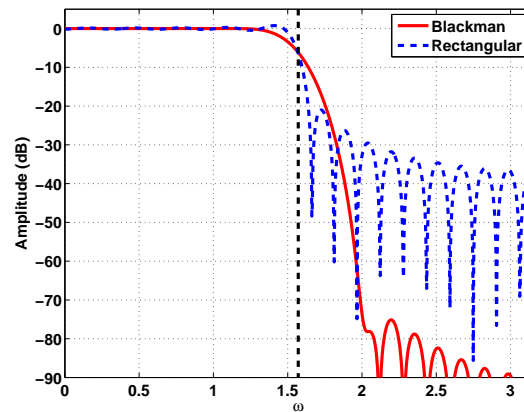


Figure 19.12 – Réponse en fréquence (fenêtre de Blackman).

Fenêtre	Amplitude du plus grand lobe secondaire	Largeur du lobe principal
Rectangulaire	-13 dB	$\frac{4\pi}{N}$
Bartlett	-25 dB	$\frac{8\pi}{N}$
Hanning	-31 dB	$\frac{8\pi}{N}$
Hamming	-41 dB	$\frac{8\pi}{N}$
Blackman	-57 dB	$\frac{12\pi}{N}$

Table 19.1 – Table résumant les caractéristiques des différentes fenêtres

Comme on peut le voir, en général, au plus l'atténuation des lobes secondaires est élevée, au plus le lobe principal est large. Lorsque qu'elle sont utilisées pour concevoir des filtres FIR, cela se traduit par une largeur de la bande de transition d'autant plus élevée que l'atténuation dans la bande d'arrêt est élevée, pour un ordre donné du filtre. Augmenter l'ordre du filtre donne lieu à une bande de transition plus étroite.



# Filtres adaptatifs

## 20.1 Introduction

La conception classique des filtres se concentre sur la conception de filtres sélectifs en fréquence. Au contraire, la théorie des filtres optimaux a pour objectif de concevoir des filtres qui optimisent une fonction de coût. Plus précisément, les filtres adaptatifs sont typiquement utilisés pour transformer un signal d'entrée tel qu'il corresponde à un signal prototype, tel qu'illustré à la figure 20.1. Le but sera donc de minimiser le signal d'erreur.

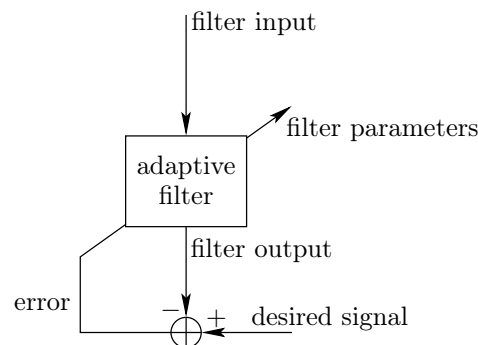


Figure 20.1 – Prototype de filtre adaptatif

Un filtre est caractérisé par ses paramètres (ses coefficients). La conception d'un filtre optimum consiste à choisir ces paramètres tels qu'une fonction de coût particulière soit minimisée. Cette fonction de coût peut être définie dans un cadre déterministe ou dans un cadre statistique. Dans l'approche statistique, et en absence de connaissance a priori concernant le signal, la fonction de coût la plus utilisée est l'erreur au sens des moindres carrés moyens. Pour un signal d'entrée stationnaire, la minimisation de l'erreur au sens des moindres carrés moyens donne les filtres de Wiener, qui seront discutés ci-après. Dans une approche déterministe, la somme du carré des erreurs est utilisée comme fonction de coût et est appelée "moindres carrés". Une formulation récursive de cet algorithme mène à l'algorithme "Recursive Least Squares" qui sera aussi discuté ci-après.

### 20.1.1 Structure des filtres adaptatifs

Seul le cas des filtres FIR numériques seront considérés. Un filtre FIR est caractérisé par ses coefficients  $h_i$ , où  $i$  désigne l'index du coefficient. S'il s'agissait d'un filtre stationnaire, ces coefficients formeraient la réponse impulsionnelle du filtre. Pour tenir compte d'une possible variation des coefficients dans le temps, ceux-ci sont notés  $h_i(n)$  où  $n$  représente le temps auquel le coefficients est considéré. Donc, pour un filtre de longueur  $N$ , la sortie  $y(n)$  du filtre sera reliée au signal d'entrée  $x(n)$  par la sommation de Duhamel

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i^*(n) x(n-i) \quad (20.1)$$

où  $h_i(n)$  représente le  $i$ -ème coefficient du filtre à l'instant  $n$ . Dans certaines applications telles que la formation de faisceaux, le signal d'entrée n'est pas formé d'échantillons successif d'un signal mais plutôt d'échantillons pris simultanément sur plusieurs (signaux d') entrées. On parle dans ce cas d'un combinateur linéaire ou d'un filtre spatial. Un filtre spatial peut être vue comme un filtre d'ordre zéro à plusieurs entrées. La sortie du filtre pourra donc s'exprimer par

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i^*(n) x_i(n) \quad (20.2)$$

où  $x_i(n)$  désigne la  $i$ -ème entrée à l'instant  $n$ . Un tel filtre spatial est un cas particulier d'un filtre FIR à plusieurs entrées.

En définissant le vecteur d'entrée  $\mathbf{x}(n)$  à l'instant  $n$  par

$$\mathbf{x}(n) = \{x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)\}^T \quad (20.3)$$

l'équation (20.1) peut se réécrire comme un produit scalaire entre le vecteur  $\mathbf{h}(n)$  des coefficients du filtre à l'instant  $n$  et le vecteur d'entrée  $\mathbf{x}(n)$  au même moment

$$y(n) = \mathbf{h}^\dagger(n) \mathbf{x}(n) \quad (20.4)$$

où

$$\mathbf{h}(n) = \{h_0(n), h_1(n), \dots, h_{N-1}(n)\}^T \quad (20.5)$$

représente la réponse impulsionnelle du filtre à l'instant  $n$ . La même notation que (20.4) vaut pour (20.2) si  $\mathbf{x} = \{x_0(n), x_1(n), \dots, x_{N-1}(n)\}^T$ .

### 20.1.2 Applications des filtres adaptatifs

Un filtre adaptatif est par définition capable de fonctionner dans un environnement inconnu et capable de suivre les variations des caractéristiques statistiques du signal d'entrée. Ces filtres ont été appliqués avec succès dans des domaines variés tels que la communication, la régulation, les radars, les sonars, la sismologie, le traitement d'images, ... Quelques applications des filtres adaptatifs dans certains de ces domaines sont présentées ci-dessous.

#### 20.1.2.1 Identification des systèmes

Dans ce cas, le filtre est utilisé pour fournir la meilleure estimation d'un système inconnu (fig. 20.2). Le système (inconnu) et le filtre adaptatif sont alimentés par le même signal d'entrée  $x(n)$ ;

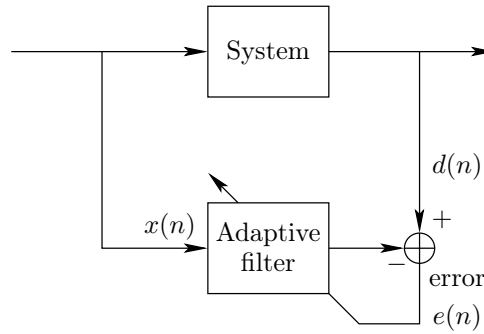


Figure 20.2 – Diagramme de l'utilisation d'un filtre adaptatif pour faire de l'identification de système

la sortie du système est la réponse souhaitée  $d(n)$  du filtre. L'algorithme d'adaptation ajustera les coefficients du filtre adaptatif afin de produire une erreur d'estimation  $e(n)$  qui soit la plus petite possible. Dans ce cas particulier, les coefficients du filtre sont les quantités d'intérêt et forment le modèle du système inconnu.

Parmi les applications pratiques, citons la modélisation d'un canal radio, afin de l'équaliser ou encore l'utilisation des paramètres du canal ainsi modélisé dans un décodeur (de Viterbi). Dans ce cas, l'émetteur conviendrait avec le récepteur d'une séquence d'apprentissage particulière, ce qui permet au récepteur de connaître à l'avance [une partie] du signal de sortie, c.à.d.  $d(n)$ . Une telle séquence d'apprentissage est émise de manière périodique afin de suivre les changements du canal. L'adaptation des coefficients sur base du signal d'erreur n'est bien entendu effectuée que pendant la séquence d'apprentissage.

### 20.1.2.2 Suppression d'écho

La suppression d'écho (fig 20.3) est très similaire à l'application précédente<sup>1</sup>. Dans ce cas, on cherche à estimer le trajet de l'écho afin de soustraire une version synthétisée de l'écho du signal "far end" fournissant ainsi un signal qui ne contient plus d'écho. Le signal d'intérêt est le "signal d'erreur résiduel"  $e(n)$ . Les hypothèses sous-jacentes sont que d'une part que l'écho est une version filtrée et retardée du signal "far-end" et que le signal "near-end" n'est pas corrélé avec le signal "far-end". Si ce n'est pas le cas, les coefficients du filtre sont adaptés lorsqu'il n'y a pas de signal "near-end".

Une application pratique de la suppression d'écho est le système main-libre pour les téléphones mobiles (fig 20.4). ou encore la suppression du clutter statique dans les radars (bistatiques).

### 20.1.2.3 Modélisation inverse

Dans ce cas, l'entrée du filtre adaptatif est la sortie du système inconnu, tandis que le signal désiré est le signal d'entrée appliqué au système inconnu. Il est à noter que le filtre adaptatif ne sera pas nécessairement égal à l'inverse de la fonction de transfert du système car l'inverse pourrait ne

1. Les termes far-end et near-end proviennent du domaine des télécommunication où il y a un interlocuteur éloigné (far end) et un interlocuteur proche (near end) qui veulent communiquer. Le signal "far end" est le signal en provenance de l'interlocuteur éloigné tandis que le signal "near end" provient de l'interlocuteur proche.

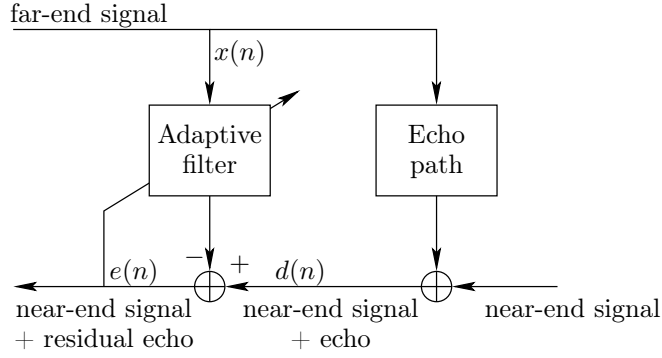


Figure 20.3 – Diagramme d'une suppression d'écho

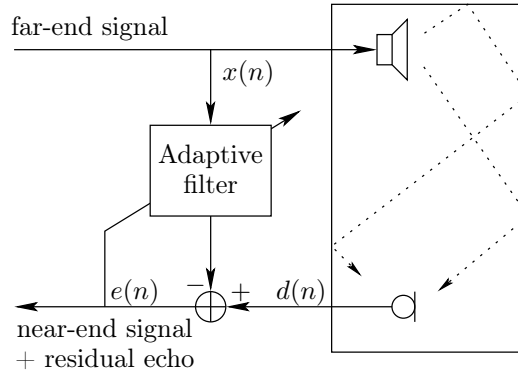


Figure 20.4 – Suppression d'écho acoustique

pas exister (ou pourrait être instable).

Parmi les applications pratiques de ceci, citons l'égalisation de canal, afin d'inverser les distortions introduites par un canal de communication.

## 20.2 Le filtre de Wiener

Dans la théorie du filtre de Wiener, tous les signaux sont vus comme des réalisations d'un processus stochastique. Dans un environnement stationnaire, la théorie du filtre de Wiener décrit comment calculer un filtre optimum étant donné des caractéristiques statistiques des signaux. Le filtre

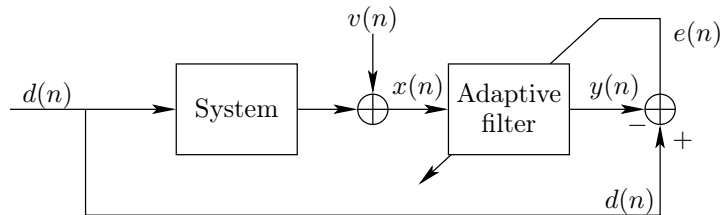


Figure 20.5 – Modélisation inverse

optimum est ensuite utilisé comme un filtre à coefficients constants, ce qui explique la nécessité que les signaux soient statistiquement stationnaires.

### 20.2.1 Le critère d'erreur du moindre carré moyen

Les coefficients du filtre  $h_i(n)$  sont adaptés afin de minimiser une certaine fonction de coût. L'erreur moyenne quadratique (MSE) est définie comme la moyenne du carré de l'erreur d'estimation, c.à.d. la moyenne du carré de la différence entre la réponse désirée  $d(n)$  et la réponse  $y(n)$  du filtre à l'instant  $n$

$$J_{\text{MSE}} = \mathcal{E}[|e(n)|^2] = \mathcal{E}[|d(n) - y(n)|^2] \quad (20.6)$$

où  $\mathcal{E}[\cdot]$  est l'espérance et  $e(n)$  est le signal d'erreur à l'instant  $n$ . Pour les filtres FIR, cette équation peut se réécrire en utilisant (20.4)

$$J_{\text{MSE}}(\mathbf{h}) = \mathcal{E}[|d(n) - \mathbf{h}^\dagger(n)\mathbf{x}(n)|^2] \quad (20.7)$$

Cette fonction de coût est probabiliste par nature puisqu'elle implique une espérance. En explicitant le carré et en distribuant l'espérance, on obtient

$$J_{\text{MSE}}(\mathbf{h}) = \mathcal{E}[|d(n)|^2] + \mathbf{h}^\dagger \mathcal{E}[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^\dagger(n)]\mathbf{h} - \mathbf{h}^\dagger \mathcal{E}[\mathbf{x}(n)d^*(n)] - \mathcal{E}[\mathbf{x}^\dagger(n)d(n)]\mathbf{h}. \quad (20.8)$$

Et en prenant en compte la définition de la matrice d'autocovariance  $\mathbf{R}_{xx}$  ou simplement  $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} = \mathcal{E}[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^\dagger(n)] = \begin{pmatrix} r_{00} & r_{01} & \cdots & r_{0,N-1} \\ r_{10} & r_{11} & \cdots & r_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{N-1,0} & r_{N-1,1} & \cdots & r_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \quad (20.9)$$

où

$$r_{kl} = \mathcal{E}[x(n-k)x^*(n-l)], \quad (20.10)$$

et la définition du vecteur de cross-covariance  $\mathbf{p}_{dx}$  ou simplement  $\mathbf{p}$

$$\mathbf{p} = \mathcal{E}[\mathbf{x}(n)d^*(n)] = [p_0, p_1, \dots, p_{N-1}]^T \quad (20.11)$$

$J_{\text{MSE}}(\mathbf{h})$  peut se réécrire comme

$$J_{\text{MSE}}(\mathbf{h}) = \mathcal{E}[|d(n)|^2] - \mathbf{h}^\dagger \mathbf{p} - \mathbf{p}^\dagger \mathbf{h} + \mathbf{h}^\dagger \mathbf{R} \mathbf{h} \quad (20.12)$$

qui est une fonction quadratique du vecteur  $\mathbf{h}$  ayant un seul minimum global pour autant que  $\mathbf{R}$  soit définie positive<sup>2</sup>.

### 20.2.2 Les équations normales

Le minimum est obtenu en imposant que le gradient de la fonction de coût soit nul

$$\frac{\partial J_{\text{MSE}}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = 0 - 2\mathbf{p} - 0 + 2\mathbf{R}\mathbf{h} = 0 \quad (20.13)$$

---

2.  $\mathbf{R}$  étant une matrice de covariance, celle-ci est d'office hermitienne et définie semi-positive. Le cas dégénéré où  $\mathbf{R}$  aurait une ou plusieurs valeur propre nulle ne sera pas considéré ici et la matrice sera supposée définie positive.

Le filtre de Wiener est donc obtenu en résolvant un système d'équations linéaires, connues sous le nom d'équations normales<sup>3</sup>

$$\mathbf{R}\mathbf{h} = \mathbf{p} \quad (20.14)$$

qui est un système de  $N$  équations linéaires. Pour obtenir ce système d'équations, on suppose que la matrice d'auto-corrélation  $\mathbf{R}$  et le vecteur de cross-corrélation  $\mathbf{p}$  sont donnés. On peut donc dire que la théorie des filtres de Wiener traite du cas des statistiques connues. Cela veut dire que l'information statistique à propos du processus stochastique est connue.

En substituant cette dernière expression dans (20.12), on obtient l'expression de la MSE minimale, obtenue par le filtre de Wiener

$$J_{\text{MSE}_{\min}} = \mathcal{E}[|d|^2(n)] - \mathbf{p}^\dagger \mathbf{h}_{\text{WF}} \quad (20.15)$$

qui, en prenant en compte les équations normales et la propriété hermitienne de  $\mathbf{R}$ , peut aussi se réécrire comme

$$J_{\text{MSE}_{\min}} = \mathcal{E}[|d|^2(n)] - \mathbf{h}_{\text{WF}}^\dagger \mathbf{R} \mathbf{h}_{\text{WF}} \quad (20.16)$$

L'erreur moyenne quadratique peut aussi s'exprimer sous forme quadratique en soustrayant (20.16) de (20.12) et en prenant en compte les équations normales

$$J_{\text{MSE}} - J_{\text{MSE}_{\min}} = -\mathbf{h}^\dagger \mathbf{R} \mathbf{h}_{\text{WF}} - \mathbf{h}_{\text{WF}}^\dagger \mathbf{R}^\dagger \mathbf{h} + \mathbf{h}^\dagger \mathbf{R} \mathbf{h} + \mathbf{h}_{\text{WF}}^\dagger \mathbf{R} \mathbf{h}_{\text{WF}} \quad (20.17)$$

ou

$$J_{\text{MSE}} = J_{\text{MSE}_{\min}} + (\mathbf{h}_{\text{WF}} - \mathbf{h})^\dagger \mathbf{R} (\mathbf{h}_{\text{WF}} - \mathbf{h}) \quad (20.18)$$

ce qui montre explicitement l'optimalité du filtre de Wiener  $\mathbf{h}_{\text{WF}}$ .

### 20.2.3 Le principe d'orthogonalité

Le filtre optimum est le filtre qui minimise la fonction de coût  $J_{\text{MSE}}$  ou de manière équivalente, le filtre pour lequel la dérivée partielle de la fonction de coût est nulle

$$\frac{\partial J_{\text{MSE}}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = \frac{\partial \mathcal{E}[e^*(n)e(n)]}{\partial \mathbf{h}} = \mathcal{E} \left[ \frac{\partial e^*(n)}{\partial \mathbf{h}} e(n) + e^*(n) \frac{\partial e(n)}{\partial \mathbf{h}} \right] \quad (20.19)$$

où  $e(n) = d(n) - y(n)$ . Comme  $d(n)$  est indépendant de  $\mathbf{h}$ , on obtient, en utilisant (20.4),

$$\frac{\partial e(n)}{\partial \mathbf{h}} = -\frac{\partial y(n)}{\partial \mathbf{h}} = -2\mathbf{x}(n) \quad (20.20)$$

et en utilisant ces résultats dans (20.19), on obtient

$$\frac{\partial J_{\text{MSE}}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = -2\mathcal{E}[e^*(n)\mathbf{x}(n)] \quad (20.21)$$

Si les coefficients du filtre sont les coefficients optimaux, (20.19) sera nul. Donc, si  $e_0(n)$  est l'erreur d'estimation lorsque le filtre est optimum, (20.21) devient

$$\mathcal{E}[e_0^*(n)\mathbf{x}(n)] = 0 \quad (20.22)$$

ce qui est connu sous le nom de principe d'orthogonalité. Ceci montre que à l'optimum du filtre de Wiener, l'erreur d'estimation est totalement décorrélée du signal d'entrée du filtre, c.à.d. des échantillons utilisés pour l'estimation.

3. Elles sont aussi connues sous le nom d'équations de Wiener-Hopf.



### 20.2.4 Filtre de Wiener illimité

Dans les paragraphes précédents, l'expression du filtre de Wiener a été obtenu en supposant une réponse impulsionnelle finie. Si on se débarrasse de cette limitation, les mêmes expressions pour les équations de Wiener-Hopf restent valables à la différence que les matrices et vecteurs impliqués ont une dimension infinie. En supposant que  $x(n)$  est un processus stationnaire, c.à.d.  $\mathcal{E}[x(n)x^*(n+l)] = r_l$ , la matrice  $\mathbf{R}$  aura alors une structure Toeplits ce qui mène à

$$\mathbf{R}\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & r_0 & r_1 & r_2 & \cdots \\ \cdots & r_{-1} & r_0 & r_1 & \cdots \\ \cdots & r_{-2} & r_{-1} & r_0 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ h_{-1} \\ h_0 \\ h_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ p_{-1} \\ p_0 \\ p_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{p} \quad (20.23)$$

Le produit matrice-vecteur du membre de droite peut être vu comme la convolution de  $r_k$  avec  $h_k$ . En prenant la transformée de Fourier, on obtient

$$R(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = P(e^{j\omega}) \quad (20.24)$$

où

$$R(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r_k e^{-jk\omega} \quad (20.25)$$

est la densité spectrale du processus  $x$  et

$$P(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k e^{-jk\omega} \quad (20.26)$$

est le spectre croisé de  $d$  et  $x$ . Finalement, le filtre de Wiener illimité est donné par l'expression

$$H(e^{j\omega}) = \frac{P(e^{j\omega})}{R(e^{j\omega})} \quad (20.27)$$

Il en résulte une interprétation intéressante. Cette expression montre que la réponse fréquentielle du filtre de Wiener est, pour une fréquence particulière, déterminé par le rapport de la densité de spectre croisé de  $d$  et  $x$  à la densité spectrale de  $x$ , à la même fréquence.

### 20.2.5 Application : Modélisation inverse

La modélisation inverse est aussi appelée égalisation de canal en télécommunication ou déconvolution en traitement d'images. La figure 20.6 illustre un scénario d'égalisation de canal. Les échantillons  $d(n)$  sont transmis via un canal de communication avec fonction de transfert  $F(z)$ . Le signal à la sortie du canal est contaminé par un bruit additif  $v(n)$  supposé non corrélé avec les données  $d(n)$ . Le signal bruité  $x(n)$  passe par un égaliseur  $H(z)$  pour obtenir une estimation  $y(n)$  du signal d'entrée de départ. Le canal peut donc être modélisé par

$$X(z) = D(z)F(z) + V(z) \quad (20.28)$$

où les majuscules dénotent la transformée en  $z$  du signal dénoté par les minuscules. Comme  $d(n)$  et  $v(n)$  ne sont pas corrélés, la densité spectrale de  $x(n)$  est donnée par

$$R_{xx}(e^{j\omega}) = R_{dd}|F(e^{j\omega})|^2 + R_{vv}(e^{j\omega}) \quad (20.29)$$

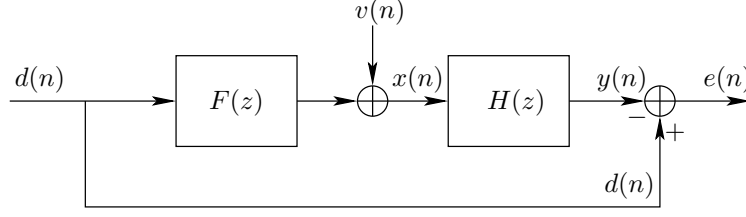


Figure 20.6 – Modélisation inverse

et le cross-spectrum de  $d(n)$  et  $x(n)$  est donné par

$$P_{dx} = F^*(e^{j\omega})R_{dd} \quad (20.30)$$

donc, de (20.27), l'expression du filtre de Wiener est dans ce cas donné par

$$H(e^{j\omega}) = \frac{F^*(e^{j\omega})R_{dd}(e^{j\omega})}{|F(e^{j\omega})|^2 R_{dd}(e^{j\omega}) + R_{vv}(e^{j\omega})} \quad (20.31)$$

Il s'agit de la solution générale au problème d'égalisation lorsqu'il n'y a pas de contrainte sur la longueur de l'égaliseur.

Le résultat peut s'interpréter comme suit. Les termes du dénominateur  $|F(e^{j\omega})|^2 R_{dd}(e^{j\omega})$  et  $R_{vv}(e^{j\omega})$  représentent respectivement la densité spectrale du signal et la densité spectrale du bruit à la sortie du canal. Il est important de noter que les différentes fréquences sont traitées de manière indépendante par l'égaliseur.

Pour les fréquences où le signal utile  $|F(e^{j\omega})|^2 R_{dd}(e^{j\omega})$  domine le signal de sortie, le filtre se comporte presque comme le filtre inverse  $F^{-1}(e^{j\omega})$ , ce qui est le résultat souhaité. Par contre, aux fréquences où la densité spectrale du bruit domine le signal de sortie, on aura  $H(e^{j\omega}) \approx 0$  avec comme effet que la sortie sera nulle. La justification est que pour ces fréquences, il n'est pas possible de reconstruire le signal utile étant donné qu'il y a trop de bruit à ces fréquences.

La figure 20.7 montre  $H(e^{j\omega})$  obtenu en supposant une densité spectrale de puissance constante aussi bien pour le bruit que pour le signal.

## 20.3 L'algorithme des moindres carrés moyen (Least Mean Square – LMS)

### 20.3.1 Introduction

La filtre de Wiener traite du cas où les statistiques des signaux sont données. Cependant, dans la plupart des applications, seules des suites de données sont fournies. On verra ci-dessous que l'algorithme des moindres carrés moyen (Least Mean Square – LMS) remplace la fonction de coût  $J_{\text{MSE}} = \mathcal{E}[|e(n)|^2]$  par une estimation instantanée (grossière)  $\hat{J}_{\text{MSE}} = |e(n)|^2$ .

### 20.3.2 Dédution de l'algorithme LMS

La fonction de coût MSE est

$$J_{\text{MSE}} = \mathcal{E}[|e(n)|^2] \quad (20.32)$$

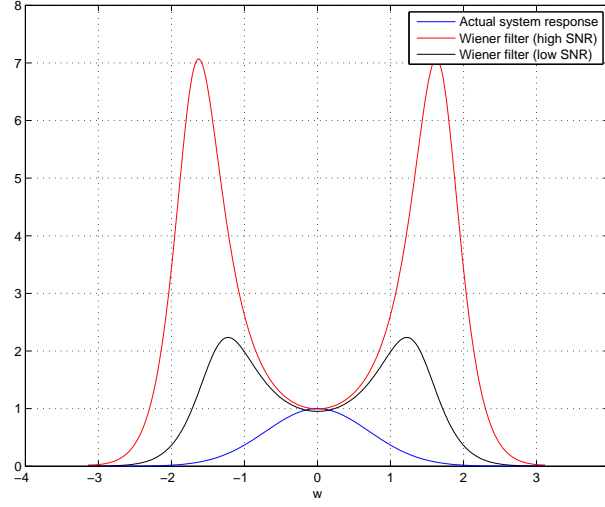


Figure 20.7 – Amplitude de la transmittance du canal  $F(e^{j\omega})$ , du filtre de Wiener  $H(e^{j\omega})$  (pour deux valeurs de la densité spectrale de puissance du bruit)

et la solution minimisant  $J_{\text{MSE}}$  peut être obtenue en résolvant les équation de Wiener-Hopf (20.14)

$$\mathcal{E}[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^\dagger(n)]\mathbf{h} = \mathcal{E}[\mathbf{x}(n)d^*(n)]. \quad (20.33)$$

Au lieu de résoudre ce système d'équations par une méthode directe pour trouver le minimum de  $J_{\text{MSE}}$ , on peut directement minimiser  $J_{\text{MSE}}$  en utilisant l'algorithme du gradient (algorithme de la plus forte pente – steepest descent). Il en résulte l'itération suivante

$$\mathbf{h}(k+1) = \mathbf{h}(k) + \frac{\mu}{2} \left[ \frac{-\partial J_{\text{MSE}}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} \right]_{\mathbf{h}=\mathbf{h}(k)} \quad (20.34)$$

ou, en substituant la dérivée partielle, (20.13)

$$\mathbf{h}(k+1) = \mathbf{h}(k) + \mu(\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{h}(k)). \quad (20.35)$$

Comme on peut le voir, l'estimation “suivante”  $\mathbf{h}(k+1)$  est égale à l'estimation présente  $\mathbf{h}(k)$  auquel un terme de correction est ajouté dans la direction du plus fort gradient, qui est à l'opposée de la direction du gradient de  $J_{\text{MSE}}$ .  $\mu$  est le paramètre déterminant le pas et indique l'ampleur du déplacement dans la direction du plus fort gradient.

Une itération de ce processus (20.35) peut se ré-écrire comme

$$\mathbf{h}(k+1) = \mathbf{h}(k) + \mu(\mathcal{E}[\mathbf{x}(n)d^*(n)] - \mathcal{E}[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^\dagger(n)]\mathbf{h}(k)). \quad (20.36)$$

La première modification est que l'index d'itération  $k$  est changé en l'index du temps  $n$ , ce qui s'interprète comme un algorithme récursif avec une mise à jour des coefficients du filtre à chaque fois qu'un nouvel échantillon est disponible. Ceci donne

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) + \mu(\mathcal{E}[\mathbf{x}(n)d^*(n)] - \mathcal{E}[\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^\dagger(n)]\mathbf{h}(n)). \quad (20.37)$$

Ensuite, on élimine l'opérateur de l'espérance mathématique. Ceci signifie que le gradient est remplacé par une estimation grossière. Ceci mène à

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) + \mu\mathbf{x}(n)(d(n)^* - \mathbf{x}^\dagger(n)\mathbf{h}(n)) \quad (20.38)$$

ou, si la valeur *a priori* du gradient instantané  $\mathbf{x}(n+1)(d^*(n+1) - \mathbf{x}^\dagger(n+1)\mathbf{h}(n))$  est prise à la place de la valeur *a posteriori*  $\mathbf{x}(n)(d^*(n) - \mathbf{x}^\dagger(n)\mathbf{h}(n))$ , on obtient finalement

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) + \mu \mathbf{x}(n+1)(d^*(n+1) - \mathbf{x}^\dagger(n+1)\mathbf{h}(n)) \quad (20.39)$$

qui est la formule LMS.

Comme on peut le voir à cette dernière équation, l'intérêt principal de l'algorithme LMS qui l'a rendu populaire est sa simplicité.

La substitution du gradient instantané à la place du "vrai" gradient a un impact majeur sur les propriétés de convergence. Les deux aspects que nous traiterons dans les paragraphes suivants sont d'une part les contraintes sur la valeur de  $\mu$  et d'autre part le "mismatch" ou MSE en excès qui en résulte.

### 20.3.3 Analyse de la convergence

La convergence de l'algorithme du plus fort gradient est dans un premier temps analysé avant d'analyser la convergence de l'algorithme LMS.

En prenant en compte l'expression du filtre de Wiener

$$\mathbf{R}\mathbf{h}_{\text{WF}} = \mathbf{p} \quad (20.40)$$

l'équation (20.35) peut se ré-écrire comme

$$\mathbf{h}(k+1) - \mathbf{h}_{\text{WF}} = (I - \mu\mathbf{R})[\mathbf{h}(k) - \mathbf{h}_{\text{WF}}] \quad (20.41)$$

ou, de manière récursive

$$\mathbf{h}(k+1) - \mathbf{h}_{\text{WF}} = (I - \mu\mathbf{R})^{k+1}[\mathbf{h}(0) - \mathbf{h}_{\text{WF}}] \quad (20.42)$$

ce qui indique que le vecteur d'erreur sur les coefficients du filtre est multiplié par  $(I - \mu\mathbf{R})$  à chaque itération. L'erreur sur les coefficients du filtre devrait diminuer à chaque itération, ce qui n'est le cas que si les valeurs propres de  $(I - \mu\mathbf{R})$  sont strictement plus petites que 1 en valeur absolue. Comme  $\mathbf{R}$  est hermitienne et supposée définie positive, on a

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}^\dagger \quad (20.43)$$

où  $\mathbf{T}$  est une matrice orthogonale dont les colonnes forment des vecteurs propres et  $\mathbf{\Lambda}$  est une matrice diagonale avec les valeurs propres correspondantes  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_i\}$ . Ceci mène à

$$\mathbf{h}(k+1) - \mathbf{h}_{\text{WF}} = (I - \mu\mathbf{R})^{k+1}[\mathbf{h}(0) - \mathbf{h}_{\text{WF}}] = \mathbf{T}\text{diag}\{1 - \mu\lambda_i\}^{k+1}\mathbf{T}^\dagger[\mathbf{h}(0) - \mathbf{h}_{\text{WF}}] \quad (20.44)$$

donc, pour avoir convergence de l'algorithme du plus fort gradient, on doit avoir

$$-1 < 1 - \mu\lambda_i < 1 \quad \forall i. \quad (20.45)$$

Comme les valeurs propres  $\lambda_i$  sont toutes réelles et positives, la condition nécessaire et suffisante pour avoir convergence est

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad (20.46)$$

où  $\lambda_{\max}$  est la plus grande valeur propre de  $\mathbf{R}$ . Si l'on ne connaît pas les valeurs propres de  $\mathbf{R}$ , on peut utiliser une borne supérieure conservative pour  $\lambda_{\max}$  à savoir

$$\lambda_{\max} < \sum_{i=1}^N \lambda_i = \text{trace}\{\mathbf{R}\}. \quad (20.47)$$

Dans le cas stationnaire, on aura  $\text{trace}\{\mathbf{R}\} = Nr_0 = N\mathcal{E}[|x|^2]$  ce qui mène à

$$0 < \mu < \frac{2}{N\mathcal{E}[|x|^2]}. \quad (20.48)$$

On doit de plus mentionner que des problèmes de convergence sont à attendre lorsque  $\lambda_{\max} \gg \lambda_{\min}$ , c.à.d. lorsque  $\mathbf{R}$  est mal conditionné.<sup>4</sup>

La vitesse de convergence peut être analysée en projetant l'erreur commise sur les coefficients du filtre sur les vecteurs propres qui diagonalisent  $\mathbf{R}$ . On note

$$\mathbf{T} = [\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_N] \quad (20.49)$$

et

$$v_i = \mathbf{t}_i^\dagger (\mathbf{h}(0) - \mathbf{h}_{\text{WF}}) \quad (20.50)$$

la  $i$ -ème erreur commise sur les coefficient du filtre projeté sur le vecteur propre  $\mathbf{t}_i$ . On peut donc ré-écrire (20.44) comme

$$\mathbf{h}(k+1) = \mathbf{h}_{\text{WF}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{t}_i (1 - \mu\lambda_i)^{k+1} v_i \quad (20.51)$$

où  $\lambda_i$  est la valeur propre associée avec le vecteur propre  $\mathbf{t}_i$ . Cette expression montre que chaque mode converge indépendamment des autres modes. Et comme on peut le voir, les modes correspondant aux valeurs propres les plus petites auront les décroissances les plus lentes.

Pour encore analyser la convergence de l'algorithme LMS, il est utile de ré-écrire (20.39) comme

$$\mathbf{h}(n+1) - \mathbf{h}_{\text{WF}} = (I - \mu\mathbf{x}(n+1)\mathbf{x}^\dagger(n+1)) (\mathbf{h}(n) - \mathbf{h}_{\text{WF}}) + \mu\mathbf{x}(n+1) (d^*(n+1) - \mathbf{x}^\dagger(n+1)\mathbf{h}_{\text{WF}}) \quad (20.52)$$

en prenant l'espérance des deux membres de cette équation. Comme le second terme du membre de droite s'évanouit eu égard au principe d'orthogonalité, on obtient

$$\mathcal{E}[\mathbf{h}(n+1) - \mathbf{h}_{\text{WF}}] = \mathcal{E}[(I - \mu\mathbf{x}(n+1)\mathbf{x}^\dagger(n+1))(\mathbf{h}(n) - \mathbf{h}_{\text{WF}})] \quad (20.53)$$

et en faisant certaines hypothèses d'indépendance (non détaillées ici), on peut écrire

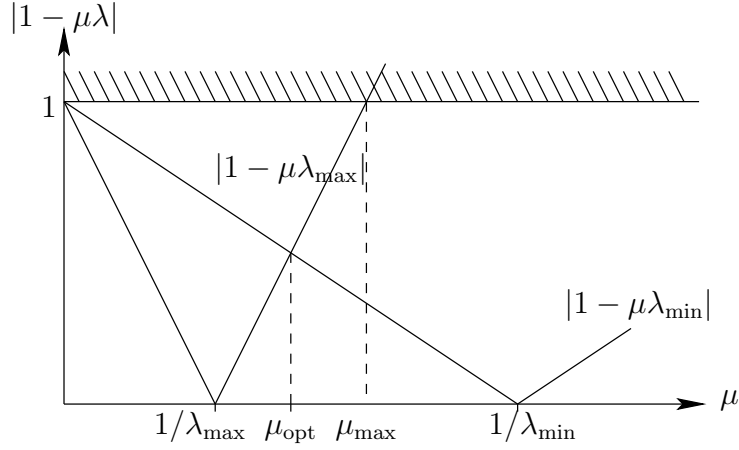
$$\mathcal{E}[\mathbf{h}(n+1) - \mathbf{h}_{\text{WF}}] = (I - \mu\mathcal{E}[\mathbf{x}(n+1)\mathbf{x}^\dagger(n+1)])\mathcal{E}[(\mathbf{h}(n) - \mathbf{h}_{\text{WF}})] \quad (20.54)$$

ou

$$\mathcal{E}[\mathbf{h}(n+1) - \mathbf{h}_{\text{WF}}] = (I - \mu\mathbf{R})\mathcal{E}[(\mathbf{h}(n) - \mathbf{h}_{\text{WF}})]. \quad (20.55)$$

Ceci montre que le comportement moyen de l'algorithme LMS est celui du plus fort gradient. On peut donc dire que l'algorithme LMS est convergent en moyenne, c.à.d. que l'espérance de  $\mathbf{h}(n)$  converge vers  $\mathbf{h}_{\text{WF}}$  pour  $n \rightarrow \infty$  pour autant que le pas  $\mu$  satisfasse aux bornes de convergence.

4. Même si l'autocorrélation d'un signal décroît avec la distance, la matrice de covariance  $\mathbf{R}$  n'est pas toujours mal conditionnée car seuls les  $N$  premiers échantillons de la fonction de covariance sont considérés.

Figure 20.8 – Valeur de  $|1 - \mu\lambda_i|$  pour  $\lambda_{\min}$  et pour  $\lambda_{\max}$ .

### 20.3.4 Effect de l'écart entre les valeurs propres

Comme montré ci-dessus, la vitesse de convergence dépend des valeurs propres de la matrice d'auto-corrélation  $\mathbf{R}$ . En règle générale, un grand écart entre les valeurs propres donne lieu à une vitesse de convergence médiocre.

Nous cherchons maintenant la valeur optimale pour le pas  $\mu$ , qui donne la vitesse de convergence la plus élevée. De la discussion ci-dessus il découle que la vitesse de convergence est déterminée par la plus grande valeur de

$$|1 - \mu\lambda_i| \quad (20.56)$$

La valeur de  $|1 - \mu\lambda_i|$  en fonction de  $\mu$  pour  $\lambda_i = \lambda_{\min}$  et  $\lambda_i = \lambda_{\max}$  est illustrée à la Figure 20.8. Les valeurs pour d'autres valeurs propres se situent entre ces deux extrêmes.

La valeur optimale de  $\mu$  est celle qui donne lieu à la plus petite valeur maximale de  $|1 - \mu\lambda_i|$ . Cette optimum est atteint lorsque

$$1 - \mu_{\text{opt}}\lambda_{\min} = -(1 - \mu_{\text{opt}}\lambda_{\max}) \quad (20.57)$$

soit

$$\mu_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}. \quad (20.58)$$

Comme on peut le voir, la vitesse de convergence est déterminée par

$$\beta = 1 - \mu_{\text{opt}}\lambda_{\min} = \frac{\lambda_{\max}/\lambda_{\min} - 1}{\lambda_{\max}/\lambda_{\min} + 1} \quad (20.59)$$

où  $0 \leq \beta \leq 1$ . La vitesse de convergence la plus élevée est obtenue pour  $\beta \approx 0$ , c.à.d., lorsque  $\lambda_{\min} \approx \lambda_{\max}$ , c.à.d., lorsque l'écart entre les valeurs propres est faible.

De manière plus générale, le rapport  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$  joue un rôle fondamental. Comme on le verra plus loin, les valeurs propres maximale et minimale sont liées à la valeur maximale et minimale de la densité spectrale de puissance de  $\mathbf{x}$ . Ceci signifie que la vitesse de convergence est liée à la forme de la densité spectrale de puissance. Une distribution de l'énergie très différente entre différentes bandes de fréquences introduit de grands écarts entre les vitesses de convergence des différents modes. Les bandes fréquentielles pour lesquelles l'énergie est proportionnellement faible sont dites faiblement excitées.

### 20.3.5 Mismatch

La véritable différence entre LMS et l'algorithme de la plus forte pente est que LMS travaille avec des estimations instantanées de la direction du gradient, tandis que l'algorithme de la plus forte pente utilise la véritable direction du gradient. Il en résulte que, même lorsque l'algorithme LMS atteint  $\mathbf{h}_{\text{WF}}$ , il continuera à évoluer car le gradient instantané ne sera jamais exactement égal à zéro. Et donc

$$J_{\text{MSE}}(\mathbf{h}_{\text{LMS}}(\infty)) > J_{\text{MSE}}(\mathbf{h}_{\text{WF}}). \quad (20.60)$$

Le MSE en excès  $J_{\text{ex}}(\infty)$  et le mismatch  $\mathcal{M}$  sont définis comme suit

$$J_{\text{MSE}}(\mathbf{h}_{\text{LMS}}(\infty)) = J_{\text{MSE}}(\mathbf{h}_{\text{WF}}) + J_{\text{ex}}(\infty) = J_{\text{MSE}}(\mathbf{h}_{\text{WF}})(1 + \mathcal{M}) \quad (20.61)$$

avec, partant de (20.18),

$$J_{\text{ex}}(k) = (\mathbf{h}_{\text{LMS}}(k) - \mathbf{h}_{\text{WF}})^\dagger \mathbf{R} (\mathbf{h}_{\text{LMS}}(k) - \mathbf{h}_{\text{WF}}). \quad (20.62)$$

On peut prouver que l'algorithme LMS converge au sens du moindre carré moyen, c.à.d. que  $J_{\text{MSE}}(\mathbf{h}_{\text{LMS}}(k))$  converge vers une valeur finie si et seulement si le pas est tel que

$$0 < \mu < \frac{2}{\sum_{i=1}^N \lambda_i}. \quad (20.63)$$

Cette borne est beaucoup plus serrée que la borne de convergence en moyenne. Dans le cas FIR, on aura  $\sum_{i=1}^N \lambda_i = \text{trace}\{\mathbf{R}\} = \sum_{n=0}^{N-1} r_{nn} = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{E}[|x(n)|^2]$  ou pour un signal stationnaire pour lequel  $r_{nn} = r_0 = \mathcal{E}[|x(n)|^2]$ ,

$$0 < \mu < \frac{2}{N\mathcal{E}[|x(n)|^2]}. \quad (20.64)$$

La borne supérieure de  $\mu$  est donc inversement proportionnelle à la longueur du filtre  $N$ . Donc, la convergence de l'algorithme LMS sera plus lente pour des filtres plus longs.

On peut aussi montrer que

$$\mathcal{M} = \frac{J_{\text{ex}}(\infty)}{J_{\text{MSE}}(\mathbf{h}_{\text{WF}})} = \frac{\mu \sum_{i=1}^N \lambda_i}{2 - \mu \sum_{i=1}^N \lambda_i} \quad (20.65)$$

ce qui, lorsque le pas  $\mu$  est suffisamment faible pour que

$$\mu \sum_{i=1}^N \lambda_i \ll 2 \quad (20.66)$$

se réduit à

$$\mathcal{M} = \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^N \lambda_i. \quad (20.67)$$

Ceci montre que le mismatch  $\mathcal{M}$  varie linéairement avec  $\mu$ . Le mismatch  $\mathcal{M}$  fournit une mesure utile du coût de l'adaptativité. Par exemple, un mismatch de 10% signifie que l'algorithme adaptatif produira en moyenne une erreur quadratique (après adaptation) qui est 10% plus grande que l'erreur moyenne quadratique optimale  $J_{\text{MSE}}(\mathbf{h}_{\text{WF}})$ . Un mismatch de 10% est d'ordinaire considéré comme satisfaisant.

Evidemment, le choix de  $\mu$  sera un compromis entre une vitesse de convergence élevée et un faible excès d'erreur moyenne quadratique.

### 20.3.6 Résumé et discussion

Les paramètres de l'algorithme LMS sont la longueur du filtre (FIR) considéré  $N$  et le pas  $\mu$ . Les coefficients du filtre adaptatif  $h_i(n)$  au temps  $n$  sont obtenus à partir des données disponibles au moyen de l'équation suivante

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) + \mu \mathbf{x}(n+1)(d^*(n+1) - \mathbf{x}^\dagger(n+1)\mathbf{h}(n)) \quad (20.68)$$

avec comme valeur initiale  $\mathbf{h}(0) = \mathbf{0}$ .

Les trois principaux facteurs affectant le comportement de l'algorithme LMS sont : le pas  $\mu$ , la longueur du filtre FIR considéré et les valeurs propres de la matrice de corrélation  $\mathbf{R}$  des données d'entrée. Leurs effets respectifs peuvent être résumés comme suit

1. Lorsque  $\mu$  est faible, l'adaptation est lente, ce qui peut s'interpréter comme un algorithme LMS ayant une grande "mémoire". L'excès d'erreur moyenne quadratique après adaptation est en moyenne faible grâce à la grande quantité de données utilisées par l'algorithme pour estimer le gradient.
2. Les propriétés de convergence de l'erreur moyenne quadratique dépendent de la longueur du filtre (voir (20.64)). La condition nécessaire et suffisante pour que  $J_{\text{MSE}}(\mathbf{h}(n))$  converge est que

$$0 < \mu < \frac{2}{\sum_{i=1}^N \lambda_i}. \quad (20.69)$$

Lorsqu'il est satisfait à cette condition, on dit que l'algorithme LMS est convergent au sens des moindres carrés moyens.

D'autre part, la condition nécessaire et suffisante pour que le filtre moyen  $\mathbf{h}(n)$  converge est que

$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_{\max}}. \quad (20.70)$$

Lorsqu'il est satisfait à cette seconde condition, on dit que l'algorithme LMS est convergent en la moyenne.

Ces deux dernières conditions impliquent qu'en choisissant  $\mu$  pour que  $J_{\text{MSE}}(\mathbf{h}(n))$  converge, la convergence de  $\mathbf{h}(n)$  est automatiquement garantie.

3. Lorsque les valeurs propres de la matrice de corrélation  $\mathbf{R}$  sont fort différentes, l'excès d'erreur moyenne quadratique de l'algorithme LMS est principalement déterminé par la valeur propre la plus grande tandis que la vitesse de convergence nécessaire à la convergence de  $\mathbf{h}(n)$  est déterminée par la valeur propre la plus faible. Lorsque l'écart entre les valeurs propres est grand, l'algorithme LMS ralentit car un grand nombre d'itérations est nécessaire à la convergence.

A nouveau, ce qui distingue l'algorithme LMS des autres algorithmes adaptatifs est la simplicité de son implémentation.

### 20.3.7 Exemple : Le prédictor linéaire

Nous allons concevoir un prédictor linéaire sur base de l'algorithme LMS. Le but du prédictor linéaire est de prédire l'échantillon  $x(n)$  sur base des échantillons  $x(i)$ ,  $i < n$ .



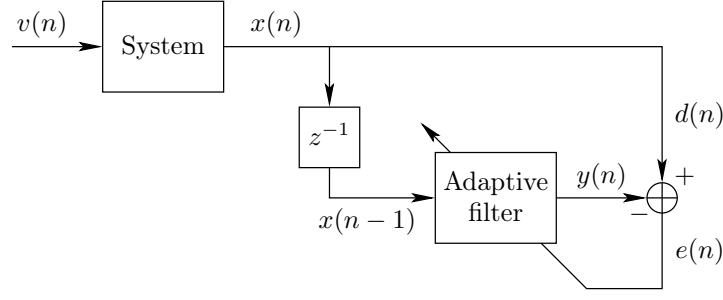


Figure 20.9 – Setup du système incluant le prédicteur linéaire

Le système considéré sera un système du second ordre, modélisé par l'équation

$$S(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (20.71)$$

où les valeurs assignées à  $a_1$  et  $a_2$  sont déterminent l'écart entre les valeurs propres de  $\mathbf{R}$ . Le signal d'entrée  $v(n)$  est un bruit blanc.

Le filtre adaptatif considéré aura deux coefficients,  $h_1$  et  $h_2$ . De l'équation ci-dessus, on aura

$$x(n) = v(n) - a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2) \quad (20.72)$$

et les coefficients optimaux du filtre seront donc  $h_1 = -a_1$  et  $h_2 = -a_2$ .

La figure 20.10 illustre l'effet de la valeur du pas  $\mu$ . Pour de grandes valeurs de  $\mu$ , on a en

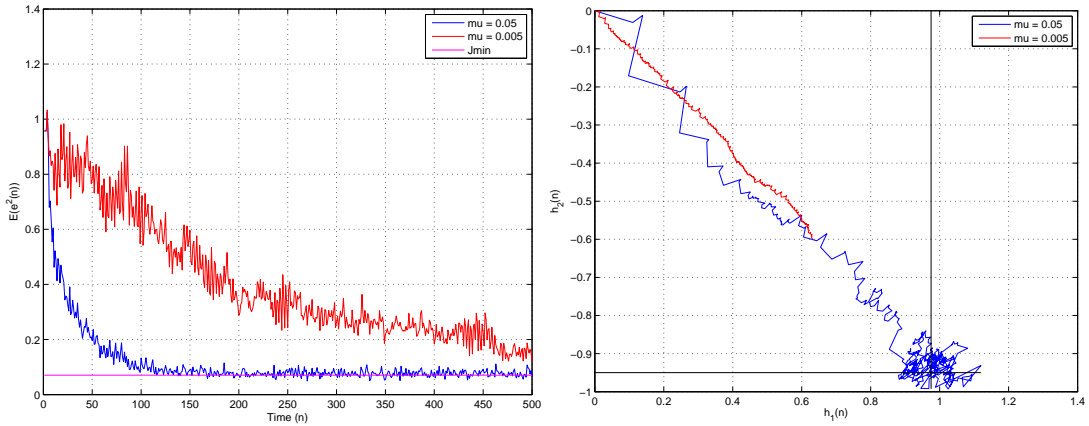


Figure 20.10 – Convergence de l'algorithme LMS pour un écart entre les valeurs propres de  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 3$ . A droite, évolution du filtre  $\mathbf{h}(n)$ .

effet une vitesse de convergence plus élevée que pour de petites valeurs de  $\mu$ . L'erreur moyenne converge vers une valeur un peu supérieure à la valeur minimale  $J_{\min}$ , eu égard au mismatch  $\mathcal{M}$  qui est de l'ordre de 5%. A droite de la figure, l'évolution des coefficients  $h_1$  et  $h_2$  est illustrée. On voit que pour de grandes valeurs de  $\mu$ , les pas vers la valeur optimale sont en effet grand, mais que l'algorithme ne se stabilise pas à la valeur optimale et erre autour de cette dernière. Ceci est dû au fait que l'estimation de la valeur instantanée du gradient, qui devrait être nul au minimum de

la fonction de coût  $\tilde{J}(n)$ , n'est pas estimée comme telle. Pour de plus faibles valeurs de  $\mu$ , les pas vers la solution optimale sont en effet plus petits, mais le filtre n'a pas convergé après 500 itérations.

La figure 20.11 illustre l'effet de l'écart entre les valeurs propres sur la convergence de l'algorithme

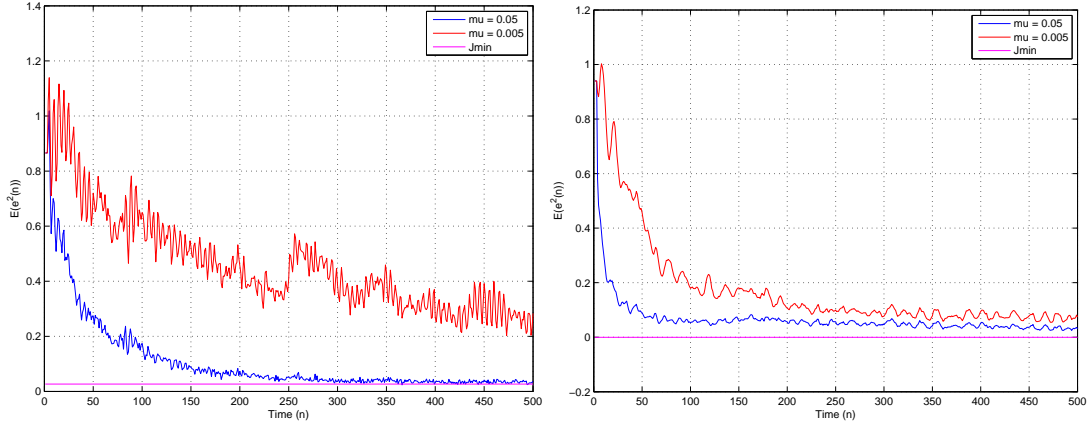


Figure 20.11 – Convergence de l'algorithme LMS pour des écarts entre les valeurs propres  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 10$  (gauche) et  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 100$  (droite).

LMS. On voit que, comme prévu, ce sont les plus petites valeurs propres qui dictent la vitesse de convergence. C'est bien visible sur la droite de la figure 20.11 où le premier mode, correspondant à la plus grande valeur propre, converge plutôt rapidement, tandis que le second mode, correspondant à la valeur propre la plus faible, n'a toujours pas convergé après 500 itérations.

### 20.3.8 LMS normalisé (NLMS)

Comme vu ci-dessus, la valeur optimale du pas dépend du niveau du signal  $x(n)$  au travers des valeurs propres de la matrice de covariance. Afin d'accélérer la convergence et évidemment d'éviter un comportement instable dû à un pas trop grand, il peut être judicieux de normaliser le pas.

le critère que l'on utilisera pour sélectionner le pas est la minimisation de l'erreur à postériori

$$e'(n) = d(n+1) - \mathbf{h}^\dagger(n+1)\mathbf{x}(n+1) \quad (20.73)$$

en amplitude. Ou, comme  $\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) + \mu\mathbf{x}(n+1)e^*(n)$ , l'erreur à postériori peut se ré-écrire comme

$$e'(n) = d(n+1) - \mathbf{h}^\dagger(n)\mathbf{x}(n+1) - \mu\mathbf{x}^\dagger(n+1)\mathbf{x}(n+1)e(n) = (1 - \mu\mathbf{x}^\dagger(n+1)\mathbf{x}(n+1))e(n) \quad (20.74)$$

qui est minimale pour

$$\mu = \frac{1}{\mathbf{x}^\dagger(n+1)\mathbf{x}(n+1)}. \quad (20.75)$$

ou, en d'autres mots, le pas doit être inversement proportionnel à l'énergie du signal.

Comme on peut le voir, ce choix de pas résultera en un mismatch relativement constant.

Une application directe de l'expression ci-dessus peut mener à des résultats aberrants, par exemple dans le cas où le signal deviendrait nul. L'expression

$$\mu = \frac{\tilde{\mu}}{\mathbf{x}^\dagger(n+1)\mathbf{x}(n+1) + \phi} \quad (20.76)$$

ou  $\tilde{\mu}$  et  $\phi$  sont des constantes peut constituer un choix plus fiable.  $\phi$  permet de se prémunir d'une division par zéro tandis que  $\tilde{\mu} < 1$  contrôle la vitesse de convergence et le mismatch.

### 20.3.9 LMS à pas variable

Comme discuté aux sections précédentes, il y a un compromis à trouver lors de la sélection du pas : une grande valeur peut être utile pour accélérer la convergence, tandis qu'une valeur plus faible donnera un mismatch  $\mathcal{M}$  lui aussi plus faible. Un compromis peut être atteint en considérant un pas variable.

Une approche heuristique possible consiste à considérer un pas différent pour chaque coefficient du filtre

$$h_i(n+1) = h_i(n) + \mu_i(n)e^*(n)x(n+1-i) \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (20.77)$$

où  $e^*(n)x(n+1-i) = g_i(n)$  peut s'interpréter comme la composante  $i$  du gradient instantané, lié au coefficient  $i$ . L'heuristique consiste alors à augmenter  $\mu_i(n)$  lorsque le gradient instantané  $g_i(n)$  reste de manière consistante du même signe, indiquant ainsi que le gradient reste dans la même direction. À l'inverse,  $\mu_i(n)$  décroît si le gradient instantané change de signe à chaque itération. Pour se prémunir de valeurs trop grandes ou trop petites du pas, on impose une valeur minimale et maximale. L'équation d'ajustement peut s'écrire comme

$$\mu_i(n) = \mu_i(n-1) + \rho \operatorname{sign}(g_i(n)) \operatorname{sign}(g_i(n-1)) \quad (20.78)$$

où  $\rho > 0$  est un paramètre gouvernant l'acroissement du pas.

L'équation récursive pour le filtre  $\mathbf{h}(n)$  devient alors

$$\mathbf{h}(n+1) = \mathbf{h}(n) + \mu(n)e^*(n)\mathbf{x}(n+1) \quad (20.79)$$

où  $\mu = \operatorname{diag}\{\mu_0, \dots, \mu_{N-1}\}$  est une matrice diagonale contenant les pas pour chaque coefficient.

## 20.4 L'algorithme des moindres carrés récursif

La théorie du filtre de Wiener traite du cas où les grandeurs statistiques sont données. Dans la plupart des cas, seule les données elles-mêmes sont disponibles. Dans ce cas, il est nécessaire de prévoir un algorithme d'adaptation du filtre qui, en observant la statistique des données, va optimiser le filtre.

En supposant les signaux stationnaires et ergodiques, il pourrait sembler raisonnable d'estimer la statistique des signaux en effectuant une moyenne temporelle des signaux. De manière équivalente, on peut utiliser une fonction de coût déterministe qui donnera des résultats identiques sans devoir faire d'hypothèse concernant la statistique des signaux. Ceci nous mènera à l'algorithme des moindres carrés et ensuite à celui des moindres carrés récursifs (Recursive Least Squares – RLS).

### 20.4.1 Le critère de l'erreur des moindres carrés

En définissant la suite  $e(n)$  comme

$$e(n) = d(n) - \mathbf{h}^\dagger \mathbf{x}(n), \quad (20.80)$$

le critère de l'erreur des moindres carrés consiste à prendre comme fonction de coût

$$J_{LS}(\mathbf{h}) = \sum_{n=0}^{L-1} |e(n)|^2 \quad (20.81)$$

en supposant une durée d'observation finie de longueur  $L$ . En définissant les vecteurs  $\mathbf{e} = \{e(0), e(1), \dots, e(L-1)\}^T$ ,  $\mathbf{d} = \{d(0), d(1), \dots, d(L-1)\}^T$  et la matrice

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(L-1)), \quad (20.82)$$

le vecteur d'erreur est alors donné par

$$\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{X}^T \mathbf{h}^* \quad (20.83)$$

et la fonction de coût peut se ré-écrire comme

$$J_{LS}(\mathbf{h}) = \|\mathbf{e}\|^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{e}^* = (\mathbf{d}^T - \mathbf{h}^\dagger \mathbf{X})(\mathbf{d}^* - \mathbf{X}^\dagger \mathbf{h}) \quad (20.84)$$

Le minimum de cette fonction de coût est obtenu en imposant que le gradient par rapport à  $\mathbf{h}$  soit nul

$$\frac{\partial J_{LS}(\mathbf{h})}{\partial \mathbf{h}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} (\mathbf{d}^T \mathbf{d}^* + \mathbf{h}^\dagger \mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger \mathbf{h} - \mathbf{d}^T \mathbf{X}^\dagger \mathbf{h} - \mathbf{h}^\dagger \mathbf{X} \mathbf{d}^*) = 0 + 2\mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger \mathbf{h} - 0 - 2\mathbf{X} \mathbf{d}^* = 0. \quad (20.85)$$

Et en définissant  $\mathbf{p} = \mathbf{X} \mathbf{d}^*$  et  $\mathbf{R} = \mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger$  qui est une matrice hermitienne semi-définie positive, le filtre optimum est alors obtenu en résolvant le système d'équations linéaires

$$\mathbf{R} \mathbf{h}_{LS} = \mathbf{p} \quad (20.86)$$

qui est connu sous le nom d'équations normales et ressemble aux équations de Wiener-Hopf à ceci près que  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{p}$  ne sont, ici, pas des matrices resp. vecteurs de covariance.

Pour ce filtre optimal, la fonction de coût vaut

$$J_{LS}(\mathbf{h}_{LS}) = \|\mathbf{d}\|^2 - \mathbf{p}^\dagger \mathbf{h}_{LS} \quad (20.87)$$

et en l'utilisant dans l'expression de la fonction de coût, on obtient

$$J_{LS}(\mathbf{h}) = J_{LS}(\mathbf{h}_{LS}) + (\mathbf{h} - \mathbf{h}_{LS})^\dagger \mathbf{R} (\mathbf{h} - \mathbf{h}_{LS}) \quad (20.88)$$

ce qui définit en effet une surface quadratique ayant un minimum unique, pour autant que  $\mathbf{R}$  ne soit pas définie négative.

Sous les hypothèses de stationnarité et d'ergodicité et pour de longues séquences  $L \rightarrow \infty$ , on peut montrer que  $\lim_{L \rightarrow \infty} \mathbf{h}_{LS} = \mathbf{h}_{WF}$ .

### 20.4.2 Calcul récursif

La procédure décrite à la section précédente est en pratique inapplicable car la plupart des applications nécessitent un traitement en temps (presque) réel et il n'est pas possible de bufferiser les données nécessaires à l'implémentation de la méthode. De plus, chaque fois qu'un nouvel échantillon est obtenu, il faudrait recalculer l'inverse de la matrice  $\mathbf{R}$  ce qui, d'un point de vue temps de calcul, n'est pas raisonnable. Nous allons maintenant décrire une méthode où chaque

nouveau échantillon est utilisé pour mettre à jour le filtre, de manière récursive. La version récursive de la méthode des moindres carrés (Least Squares – LS) et appelée moindres carrés récursifs (Recursive Least Squares – RLS).

Dans l'algorithme RLS, l'idée principale est de calculer à chaque instant  $n$  un filtre optimal à partir de *toutes* les données passées. De plus, le filtre à l'instant  $n + 1$  est calculé à partir du filtre à l'instant  $n$  et non pas à partir du début, ce qui est plus économe en temps de calcul.

La fonction de coût est donc définie comme

$$J_{\text{LS}}(\mathbf{h}) = \sum_{k=1}^n |e(k)|^2 = \sum_{k=1}^n |d(k) - \mathbf{h}^\dagger \mathbf{x}(k)|^2 \quad (20.89)$$

et la solution optimale à l'instant  $n$  est

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}(n) = \arg\{\min_{\mathbf{h}} \sum_{k=1}^n |e(k)|^2\} = \mathbf{R}^{-1}(n) \mathbf{p}(n) \quad (20.90)$$

où  $\mathbf{R}(n) = \mathbf{X}(n) \mathbf{X}^\dagger(n)$ ,  $\mathbf{p}(n) = \mathbf{X}(n) \mathbf{d}^*(n)$ ,  $\mathbf{d}(n) = [d(1), d(2), \dots, d(n)]^T$  et  $\mathbf{X}(n) = [\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(n)]$ . Calculer  $\mathbf{h}_{\text{LS}}(n + 1)$  revient à calculer

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}(n + 1) = \mathbf{R}^{-1}(n + 1) \mathbf{p}(n + 1) \quad (20.91)$$

mais ceci nécessiterait le calcul de l'inverse de la matrice  $N \times N$   $\mathbf{R}(n)$  à chaque itération, ce qui est particulièrement inefficace.

On a cependant

$$\mathbf{R}(n + 1) = \mathbf{R}(n) + \mathbf{x}(n + 1) \mathbf{x}^\dagger(n + 1) \quad (20.92)$$

et

$$\mathbf{p}(n + 1) = \mathbf{p}(n) + \mathbf{x}(n + 1) d^*(n + 1) \quad (20.93)$$

Le lemme de l'inversion des matrices donne  $(\mathbf{A} + \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{C}^\dagger)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{C}^\dagger \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^\dagger \mathbf{A}^{-1}$  pour autant que les inverses nécessaires existent. On considère le cas particulier

$$(\mathbf{A} + \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{a}^\dagger \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a}} \quad (20.94)$$

ou, particularisé avec  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{R}(n)$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{C} \equiv \mathbf{a} \equiv \mathbf{x}(n + 1)$ ,

$$\mathbf{R}^{-1}(n + 1) = \mathbf{R}^{-1}(n) - \frac{\mathbf{R}^{-1}(n) \mathbf{x}(n + 1) \mathbf{x}^\dagger(n + 1) \mathbf{R}^{-1}(n)}{1 + \mathbf{x}^\dagger(n + 1) \mathbf{R}^{-1}(n) \mathbf{x}(n + 1)} \quad (20.95)$$

ce qui permet de calculer  $\mathbf{R}^{-1}(n + 1)$  à partir de  $\mathbf{R}^{-1}(n)$  en seulement  $\mathcal{O}(N^2)$  opérations.

En définissant le vecteur de gain

$$\mathbf{k}(n + 1) = \frac{\mathbf{R}^{-1}(n) \mathbf{x}(n + 1)}{1 + \mathbf{x}^\dagger(n + 1) \mathbf{R}^{-1}(n) \mathbf{x}(n + 1)} \quad (20.96)$$

on peut écrire

$$\mathbf{R}^{-1}(n + 1) = \mathbf{R}^{-1}(n) - \mathbf{k}(n + 1) \mathbf{x}^\dagger(n + 1) \mathbf{R}^{-1}(n) \quad (20.97)$$

et en ré-arrangeant (20.96), nous obtenons

$$\mathbf{k}(n + 1) = (\mathbf{R}^{-1}(n) - \mathbf{k}(n + 1) \mathbf{x}^\dagger(n + 1) \mathbf{R}^{-1}(n)) \mathbf{x}(n + 1). \quad (20.98)$$

En utilisant (20.97) dans (20.98), nous obtenons encore

$$\mathbf{k}(n+1) = \mathbf{R}^{-1}(n+1)\mathbf{x}(n+1). \quad (20.99)$$

Finalement,

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}(n+1) = \mathbf{R}^{-1}(n+1)\mathbf{p}(n+1) \quad (20.100)$$

peut se ré-écrire comme

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}(n+1) = \mathbf{R}^{-1}(n+1)\mathbf{p}(n) + \mathbf{R}^{-1}(n+1)\mathbf{x}(n+1)d^*(n+1) = \mathbf{R}^{-1}(n+1)\mathbf{p}(n) + \mathbf{k}(n+1)d^*(n+1) \quad (20.101)$$

et en remplaçant  $\mathbf{R}^{-1}(n+1)$  par sa valeur en fonction de  $\mathbf{k}(n+1)$ , nous obtenons

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}(n+1) = \mathbf{R}^{-1}(n)\mathbf{p}(n) - \mathbf{k}(n+1)\mathbf{x}^\dagger(n+1)\mathbf{R}^{-1}(n)\mathbf{p}(n) + \mathbf{k}(n+1)d^*(n+1) \quad (20.102)$$

ou finalement

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}(n+1) = \mathbf{h}_{\text{LS}}(n) + \mathbf{k}(n+1)(d^*(n+1) - \mathbf{x}^\dagger(n+1)\mathbf{h}_{\text{LS}}(n)) \quad (20.103)$$

ou, en introduisant le résidu a priori <sup>5</sup>  $\epsilon(n+1) = d(n+1) - \mathbf{h}_{\text{LS}}^\dagger(n)\mathbf{x}(n+1)$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}(n+1) = \mathbf{h}_{\text{LS}}(n) + \mathbf{k}(n+1)\epsilon^*(n+1). \quad (20.104)$$

Ceci montre que l'on obtient la valeur du filtre à l'instant  $n+1$  en mettant à jour le filtre  $\mathbf{h}_{\text{LS}}(n)$  au moyen d'un terme correcteur. Le filtre est mis à jour dans la direction du vecteur de gain  $\mathbf{k}(n+1)$  proportionnellement à l'estimation de l'erreur a priori  $\epsilon(n+1)$ . Le résidu est l'erreur de prédiction des données à l'instant  $n+1$  lorsque le filtre de l'instant précédent est utilisé. Il est à noter que si  $\epsilon(n+1) = 0$ , le filtre  $\mathbf{h}(n)$  correspond aussi aux données de l'instant  $n+1$  et aucune mise à jour n'est ni nécessaire ni faite.

L'algorithme doit être initialisé. En général, on considère  $\mathbf{R}(0) = \delta I$  où  $\delta$  est une petite constante et  $\mathbf{h}_{\text{LS}}(0)$  est pris égal à une valeur arbitraire, disons  $\mathbf{0}$ .

### 20.4.3 RLS avec pondération exponentielle

L'algorithme RLS décrit ci-dessus calcule le filtre  $\mathbf{h}$  tel que le total du carré de l'erreur soit minimum. On obtient donc un filtre "moyen" globalement optimum, mais pas localement. En particulier, le filtre sera suboptimal si les caractéristiques du signal d'entrée changent. Par exemple dans le cas où le filtre adaptatif est utilisé pour faire de l'identification de système, si le système à identifié change au cours du temps, il serait souhaitable que le filtre puisse s'adapter au nouveau système. Ceci n'est possible que si le filtre est capable d'"oublier" les anciennes données et donc d'"oublier" les anciennes erreurs.

Cet "oubli" peut s'obtenir en modifiant la fonction de coût des moindres carrés comme suit

$$J_{\text{LS}}(\mathbf{h}(n)) = \sum_{k=1}^n \lambda^{n-k} |e(k)|^2 \quad (20.105)$$

où  $0 < \lambda \leq 1$  est un facteur de pondération ou facteur d'oubli. La mémoire du processus est infinie, mais les anciennes valeurs de  $|e(k)|^2$  se voient assigner un faible poids et ne jouent donc pas un

5. Il est à noter que le résidu a priori  $\epsilon$  diffère du résidu à posteriori  $\epsilon'$ .

le significatif. L'inverse de  $1 - \lambda$  peut en première approximation être vu comme une mesure de la "taille de la mémoire" de l'algorithme.

L'équation (20.90) reste valable, pour autant que les matrices  $\mathbf{X}(n)$  et  $\mathbf{d}(n)$  soient redéfinies comme  $\mathbf{X}(n) = [\lambda^{(n-1)/2}\mathbf{x}(1), \lambda^{(n-2)/2}\mathbf{x}(2), \dots, \lambda^0\mathbf{x}(n)]$ . et  $\mathbf{d}(n) = [\lambda^{(n-1)/2}d(1), \lambda^{(n-2)/2}d(2), \dots, \lambda^0d(n)]^T$ . Avec ces définitions, les équations (20.92) et (20.93) deviennent respectivement

$$\mathbf{R}(n+1) = \lambda\mathbf{R}(n) + \mathbf{x}(n+1)\mathbf{x}^\dagger(n+1) \quad (20.106)$$

et

$$\mathbf{p}(n+1) = \lambda\mathbf{p}(n) + \mathbf{x}(n+1)d^*(n+1). \quad (20.107)$$

A partir de cette équation, en définissant  $\mathbf{R}^{n|n+1} = \lambda\mathbf{R}(n)$  et en ré-utilisant le lemme de l'inversion des matrices (20.94) avec  $A \equiv [\mathbf{R}^{n|n+1}]^{-1}$ , l'équation (20.95) devient

$$\mathbf{R}^{-1}(n+1) = [\mathbf{R}^{n|n+1}]^{-1} - \frac{[\mathbf{R}^{n|n+1}]^{-1}\mathbf{x}(n+1)\mathbf{x}^\dagger(n+1)[\mathbf{R}^{n|n+1}]^{-1}}{1 + \mathbf{x}^\dagger(n+1)[\mathbf{R}^{n|n+1}]^{-1}\mathbf{x}(n+1)} \quad (20.108)$$

tandis que (20.103) reste

$$\mathbf{h}_{LS}(n+1) = \mathbf{h}_{LS}(n) + \mathbf{k}(n+1)(d^*(n+1) - \mathbf{x}^\dagger(n+1)\mathbf{h}_{LS}(n)) \quad (20.109)$$

mais avec une définition de  $\mathbf{k}(n+1)$  adaptée

$$\mathbf{k}(n+1) = \frac{[\mathbf{R}^{n|n+1}]^{-1}\mathbf{x}(n+1)}{1 + \mathbf{x}^\dagger(n+1)[\mathbf{R}^{n|n+1}]^{-1}\mathbf{x}(n+1)} \quad (20.110)$$

#### 20.4.4 Résumé et discussion

L'analyse de la convergence de l'algorithme RLS, bien que n'étant pas très complexe, sort du cadre de ce cours eu égard au temps limité. Les conclusions principales sont cependant résumées ci-dessous.

Si une valeur arbitraire  $\delta\mathbf{I}$  n'était pas utilisée comme valeur initiale pour la matrice de covariance  $\mathbf{R}$ , les coefficients du filtre auraient toujours la valeur optimale. Donc l'introduction d'une valeur initiale *incorrecte* introduit un biais sur les coefficients  $\mathbf{h}(n)$ . On peut montrer que ce biais évolue proportionnellement à  $1/n$  au gré des itérations et tendra donc vers zéro lorsque  $n \rightarrow \infty$ . On dit alors que l'algorithme RLS est convergent en moyenne.

De plus, on peut montrer que la norme de la matrice de covariance de l'erreur sur les coefficients du filtre décroît pratiquement linéairement avec le temps  $n$ . Donc l'estimation  $\mathbf{h}(n)$  obtenue au moyen du filtre RLS converge en norme vers la valeur optimale pratiquement linéairement dans le temps.

Finalement, concernant la convergence de l'erreur d'estimation  $J_{LS}$ , on peut montrer que

- L'algorithme RLS converge au sens des carrés moyens en environ  $2N$  itérations, où  $N$  est la longueur du filtre FIR considéré. Ceci signifie que la vitesse de convergence de l'algorithme RLS est typiquement un ordre de grandeur plus rapide que celle de l'algorithme LMS.
- Contrairement à l'algorithme LMS, la vitesse de convergence de l'algorithme RLS est pour l'essentiel insensible aux variations de l'écart entre les valeurs propres de la matrice de corrélation du vecteur d'entrée  $\mathbf{x}(n)$ .

- Lorsque le nombre d'itération  $n$  tend vers l'infini, l'algorithme RLS donne un mismatch de zéro. Ceci ne tient que pour un facteur d'oubli  $\lambda$  de 1.

Les propriétés de convergences de l'algorithme RLS nettement supérieures à celles de l'algorithme LMS sont obtenues au dépend d'un nombre d'opération par itération supérieur. Plus spécifiquement, le calcul du vecteur de gain  $k(n)$  nécessite l'adaptation d'une matrice  $N \times N$ . Et l'algorithme RLS nécessite donc de l'ordre de  $N^2$  opération par itération. Ceci contraste fortement avec l'algorithme LMS où seules  $N$  opérations par itérations sont nécessaires.

Enfin, l'expérience montre que l'algorithme RLS standard, lorsqu'il est exécuté pour une très longue durée, souffre d'une accumulation d'erreurs d'arrondi. Ces erreurs d'arrondis trouvent leur origine dans la formule de mise à jour de l'inverse de la matrice et provoquent la perte du caractère défini positif de la matrice  $\mathbf{R}(n)$  ce qui mène à des instabilités. Pour des applications réelles, des algorithmes de décompositions, par exemple QR [4] doivent être considérés.

### 20.4.5 Exemple : le prédictor linéaire

On considère le dispositif décrit à la section 20.3.7 mis à part que l'on considère l'algorithme d'adaptation RLS.

La convergence de l'algorithme est illustrée à la figure 20.12 où l'on voit aisément qu'effectivement, l'algorithme RLS converge beaucoup plus rapidement que l'algorithme LMS. De plus, la vitesse de convergence de l'algorithme RLS ne dépend pas de l'écart entre les valeurs

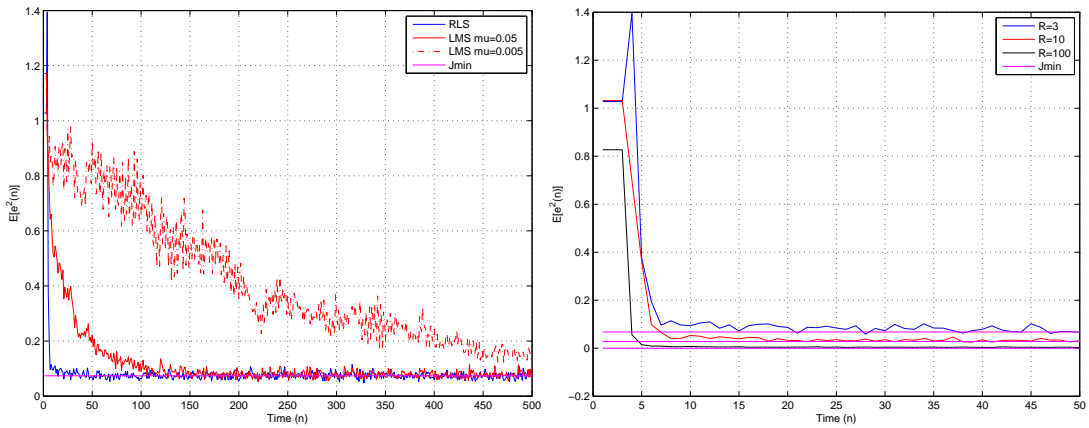


Figure 20.12 – Convergence de l'algorithme RLS pour un écart entre les valeurs propres de  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 3$  (gauche) et comparaison de la convergence pour des écarts entre les valeurs propres  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$  de 3, 10 et 100 (droite).

propres.

La figure 20.13 illustre la propriété de suivi d'un algorithme (RLS) adaptatif. Le système générant le signal à prédire est brusquement modifié à l'instant  $n = 250$  en changeant la valeur du coefficient  $a_1$ . Le filtre  $\mathbf{h}$  et en particulier le coefficient  $h_1$  est sensé suivre cette modification.



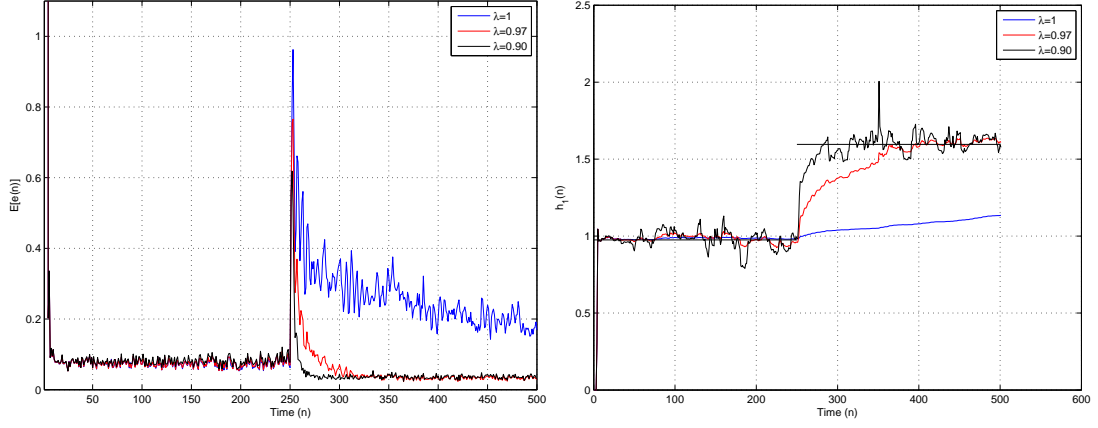


Figure 20.13 – Comportement de l’algorithme RLS pondéré pour un changement à l’instant  $n = 250$ . Gauche, évolution de l’erreur de prédiction pour différentes valeurs de  $\lambda$ . Droite, évolution du coefficient du filtre correspondant au coefficient modifié dans le système.

On peut voir que pour autant que  $\lambda < 1$ , le filtre est en effet capable de suivre un changement de paramètres du système qu’il doit prédire. Au contraire, si  $\lambda = 1$ , le filtre est incapable d’oublier les données passées et converge avec plus de difficultés vers la nouvelle valeur. Evidemment, plus  $\lambda$  est faible, au plus vite le filtre convergera vers les nouveaux coefficients, mais la valeur de régime sera aussi plus bruitée puisque le filtre ne calculera la moyenne que sur un faible nombre de données.

## 20.5 Estimation au sens du maximum de vraisemblance (Maximum likelihood)

### 20.5.1 Introduction

Considérons le problème d’estimation où l’on veut estimer le filtre  $\mathbf{h}$  d’un système linéaire en mesurant  $L$  réalisation de la sortie (bruitée)  $d$  du filtre ainsi que les données d’entrées  $\mathbf{x}$  correspondantes. Les mesures bruitées peuvent être modélisées par

$$d(n) = \mathbf{h}^T \mathbf{x}(n) + e(n) \quad (20.111)$$

où  $e(n)$  représente le bruit, et  $n = 1, \dots, L$ .

En définissant les vecteurs  $\mathbf{e} = \{e(0), e(1), \dots, e(L-1)\}^T$ ,  $\mathbf{d} = \{d(0), d(1), \dots, d(L-1)\}^T$  et la matrice

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(L-1)\}, \quad (20.112)$$

les  $L$  équations (20.111) peuvent se réécrire sous forme vectorielle

$$\mathbf{d} = \mathbf{X}^T \mathbf{h}^* + \mathbf{e}. \quad (20.113)$$

Si  $\mathbf{e} = 0$ , nous avons un ensemble de  $L$  équations avec  $N$  inconnues. Si  $L = N$ , (20.113) a en général une solution unique. Si  $L > N$ , (20.113) est un système surdéterminé et on pourrait vouloir trouver la solution la plus probable étant donné la présence de bruit. Et finalement, si  $L < N$ ,

on a un système sous-déterminé pour lequel à priori plusieurs solution existent. Cependant, en imposant des contraintes supplémentaires aux coefficients  $\mathbf{h}$ , le problème peut être régularisé pour arriver à une solution unique, ce qui est le propos de la discussion dans les paragraphes qui suivent.

### 20.5.2 Formulation du maximum de vraisemblance

Nous souhaitons donc trouver le filtre  $\mathbf{h}$  le plus probable étant donné les mesures faites  $\mathbf{d}$ . En d'autres mots, il faut calculer le filtre  $\mathbf{h}$  qui maximise  $p(\mathbf{h}|\mathbf{d})$ , qui est la probabilité de  $\mathbf{h}$  conditionnée par  $\mathbf{d}$ , les mesures. Nous cherchons donc

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \max_{\mathbf{h}} p(\mathbf{h}|\mathbf{d}). \quad (20.114)$$

En utilisant la relation de Bayes, on peut écrire

$$p(\mathbf{h}|\mathbf{d}) = \frac{p(\mathbf{d}|\mathbf{h})p(\mathbf{h})}{p(\mathbf{d})} \quad (20.115)$$

où  $p(\mathbf{d})$  est la probabilité à priori de faire les mesures  $\mathbf{d}$ ,  $p(\mathbf{h})$  est la probabilité à priori des coefficients du filtre  $\mathbf{h}$  et  $p(\mathbf{d}|\mathbf{h})$  est la probabilité de faire les mesures  $\mathbf{d}$  connaissant  $\mathbf{h}$ .

Il est important de noter que la valeur de  $\mathbf{h}$  où le maximum de 20.115) est atteint ne dépend pas de la probabilité à priori de faire les mesures  $\mathbf{d}$ . Il en découle que  $p(\mathbf{d})$  ne doit pas être connu ni estimé pour calculer le maximum.

De plus, (20.113) peut s'écrire

$$\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{X}^T \mathbf{h}^* \quad (20.116)$$

et lorsque  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{h}$  sont tous deux connus

$$p(\mathbf{d}|\mathbf{h}) = p(\mathbf{e}). \quad (20.117)$$

Et donc, en combinant (20.114), (20.115) et (20.117), on obtient

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \max_{\mathbf{h}} p(\mathbf{e})p(\mathbf{h}). \quad (20.118)$$

On en déduit que pour résoudre le problème d'estimation, la densité de probabilité du bruit  $p(\mathbf{e})$  doit être connue, ainsi que la densité de probabilité à priori  $p(\mathbf{h})$  des coefficients du filtre  $\mathbf{h}$ .

### 20.5.3 Estimation dans le cas de bruit blanc Gaussien

Nous considérons maintenant que le bruit est un bruit blanc Gaussien et est de moyenne nulle. Cela signifie que la matrice de covariance du bruit s'écrit  $\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}$ , où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité et  $\sigma^2$  la variance du bruit. Dans ce cas, la densité de probabilité du bruit s'écrit

$$p(\mathbf{e}) \propto e^{-\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{e}^T \mathbf{e}}. \quad (20.119)$$

Nous supposons de plus ne pas avoir de connaissance à priori concernant  $\mathbf{h}$ , c.à.d. que  $p(\mathbf{h})$  est une constante.

Donc (20.118) devient

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \max_{\mathbf{h}} e^{-\frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{d} - \mathbf{X}^T \mathbf{h}^*)^T (\mathbf{d} - \mathbf{X}^T \mathbf{h}^*)}. \quad (20.120)$$

Comme l'argument de l'exponentielle est une forme quadratique, l'exponentielle atteint son maximum par rapport à  $\mathbf{h}$  là où l'argument est minimal, c.à.d. où

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} (\mathbf{d} - \mathbf{X}^T \mathbf{h}^*)^T (\mathbf{d} - \mathbf{X}^T \mathbf{h}^*)^* = 0. \quad (20.121)$$

Nous avons donc

$$(\mathbf{d} - \mathbf{X}^T \mathbf{h}^*)^T (\mathbf{d} - \mathbf{X}^T \mathbf{h}^*)^* = \mathbf{d}^T \mathbf{d}^* - \mathbf{d}^T \mathbf{X}^\dagger \mathbf{h} - \mathbf{h}^\dagger \mathbf{X} \mathbf{d}^* + \mathbf{h}^\dagger \mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger \mathbf{h} \quad (20.122)$$

et sa dérivée par rapport à  $\mathbf{h}$  est

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} (\mathbf{d} - \mathbf{X}^T \mathbf{h}^*)^T (\mathbf{d} - \mathbf{X}^T \mathbf{h}^*)^* = 0 - 0 - 2\mathbf{X} \mathbf{d}^* + 2\mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger \mathbf{h} \quad (20.123)$$

ce qui, avec (20.121), implique que la solution optimale pour  $\mathbf{h}$  est donnée par

$$\hat{\mathbf{h}} = (\mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger)^{-1} \mathbf{X} \mathbf{d}^*. \quad (20.124)$$

Clairement, cette solution n'existe que si la matrice  $\mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger$  est régulière, c.à.d. si elle est inversible. Par construction, nous savons que cette matrice est définie non-négative. Elle sera définie positive, c.à.d. régulière, si  $\mathbf{X}$  a au moins  $N$  colonnes indépendantes ce qui implique bien entendu  $L \geq N$ , c.à.d. un système non sous-déterminé. Intuitivement, ce résultat était attendu car lorsque l'on a moins d'équations que d'inconnues, le système admet une infinité de solutions et de l'information supplémentaire (concernant la solution à sélectionner) est nécessaire pour choisir une solution unique.

De plus, cette expression est identique à celle que l'on avait obtenue en considérant la solution au sens des moindres carrés (voir (20.86)). Ceci signifie que la solution des moindres carrés est optimale lorsque l'on a affaire à un bruit blanc Gaussien.

#### 20.5.4 Estimation en présence de connaissance à priori

Considérons à nouveau le cas d'un bruit Gaussien, mais cette fois-ci en supposant une matrice de corrélation du bruit donnée par  $\mathbf{R}_e$ . De plus, nous supposons avoir une connaissance à priori à propos de la distribution de  $\mathbf{h}$ . Pour la démonstration, nous supposons que les coefficients  $\mathbf{h}$  ont une distribution Gaussienne de moyenne nulle donnée par

$$p(\mathbf{h}) \propto e^{-\mathbf{h}^\dagger \mathbf{R}_h^{-1} \mathbf{h}} \quad (20.125)$$

où  $\mathbf{R}_h$  est la matrice de covariance des coefficients  $\mathbf{h}$ . Cette matrice de covariance est supposée définie positive et est donc inversible. L'équation (20.118) devient donc

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg \max_{\mathbf{h}} e^{-(\mathbf{d} - \mathbf{X}^T \mathbf{h}^*)^T \mathbf{R}_e^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{X}^T \mathbf{h}^*)^*} e^{-\mathbf{h}^\dagger \mathbf{R}_h^{-1} \mathbf{h}} \quad (20.126)$$

et l'argument de l'exponentielle est maintenant

$$(\mathbf{d} - \mathbf{X}^T \mathbf{h}^*)^T \mathbf{R}_e^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{X}^T \mathbf{h}^*)^* + \mathbf{h}^\dagger \mathbf{R}_h^{-1} \mathbf{h} \quad (20.127)$$

On as

$$(\mathbf{d} - \mathbf{X}^T \mathbf{h}^*)^T \mathbf{R}_e^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{X}^T \mathbf{h}^*)^* + \mathbf{h}^\dagger \mathbf{R}_h^{-1} \mathbf{h} = \mathbf{d}^T \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{d}^* - \mathbf{d}^T \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{X}^\dagger \mathbf{h} - \mathbf{h}^\dagger \mathbf{X} \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{d}^* + \mathbf{h}^\dagger \mathbf{X} \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{X}^\dagger \mathbf{h} + \mathbf{h}^\dagger \mathbf{R}_h^{-1} \mathbf{h} \quad (20.128)$$

et sa dérivée par rapport à  $\mathbf{h}$  est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} ((\mathbf{d} - \mathbf{X}^T \mathbf{h}^*)^T \mathbf{R}_e^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{X}^T \mathbf{h}^*) + \mathbf{h}^\dagger \mathbf{R}_h^{-1} \mathbf{h}) = 0 - 0 - 2\mathbf{X} \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{d}^* + 2\mathbf{X} \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{X}^\dagger \mathbf{h} + 2\mathbf{R}_h^{-1} \mathbf{h} \quad (20.129)$$

ce qui, avec (20.121), implique que la solution optimale pour  $\mathbf{h}$  est donnée par

$$\hat{\mathbf{h}} = (\mathbf{X} \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{X}^\dagger + \mathbf{R}_h^{-1})^{-1} \mathbf{X} \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{d}^* \quad (20.130)$$

Comme  $\mathbf{R}_h$  est de rang plein, la matrice  $\mathbf{X} \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{X}^\dagger + \mathbf{R}_h^{-1}$  sera aussi garantie être de rang plein. Le problème admettra donc toujours une solution unique. Mathématiquement, l'effet de la matrice  $\mathbf{R}_h$  est de régulariser le problème inverse, c.à.d. de contraindre les solutions  $\mathbf{h}$  d'un problème qui pourrait être indéterminé.

Lorsque  $\mathbf{R}_h = \delta \mathbf{I}$ , l'opération  $\mathbf{X} \mathbf{R}_e^{-1} \mathbf{X}^\dagger + \mathbf{R}_h^{-1}$  s'appelle *diagonal loading* est souvent faite pour régulariser la solution des moindres carrés. Le cadre probabiliste offre donc une justification rigoureuse pour l'opération de *diagonal loading*.

## 20.6 Application : Formation de faisceau

### 20.6.1 Introduction

La formation de faisceau (beamforming) aussi appelée synthèse de réseau d'antennes, consiste à combiner les sortie d'un réseau (linéaire) d'antennes (de capteurs) afin de modifier le diagramme de rayonnement des antennes (des capteurs) individuelles. Dans des applications radar ou de télécommunications, ces capteurs sont les éléments d'antennes (dipôles, cornets ou antenne à fentes (slotted waveguide)) tandis qu'en sonar, les capteurs sont les hydrophones.

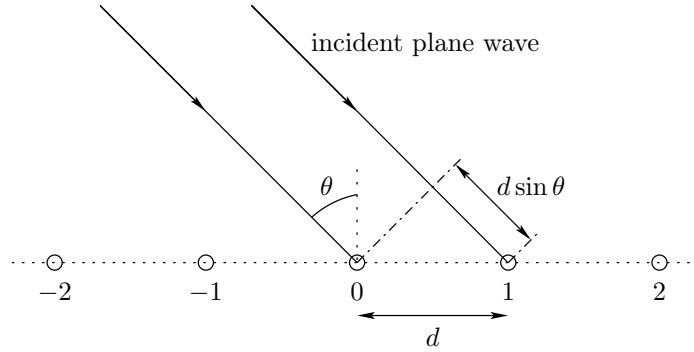


Figure 20.14 – Réseau linéaire de capteurs avec une onde plane incidente

Alors que les applications mentionnées au début de ce chapitre sont du type traitement temporel des signaux, la formation de faisceau est plutôt à voir comme un traitement spatial. En effet, les capteurs effectuent un échantillonnage spatial des signaux présents dans l'environnement. La formation de faisceau peut se voir comme un cas particulier du combinatoire linéaire où le vecteur  $\mathbf{x}(n)$  est composé des échantillons provenant de chaque capteur au temps  $n$ .

Un faisceau statique permet d'améliorer le diagramme de rayonnement des capteurs mais est incapable de rejeter des signaux d'interférence. Au contraire, la formation de faisceau adaptative

permettra d'annuler les interférences en plaçant un des zéros du diagramme de rayonnement dans la direction d'arrivée du signal d'interférence.

### 20.6.2 Multiple sidelobe canceler

Ce dispositif vise à éliminer de manière automatique les signaux provenant de directions qui ne sont pas la direction du lobe principal. Dans un premier temps, un réseau de formation de faisceaux (statique) est utilisé pour générer un ensemble de faisceaux orthogonaux. Le faisceau dont le lobe principal pointe dans la direction de laquelle le signal d'intérêt arrive est choisi comme faisceau de référence. Les autres faisceaux peuvent alors être combinés de manière adaptative pour annuler les éventuelles interférences provenant d'autres directions.

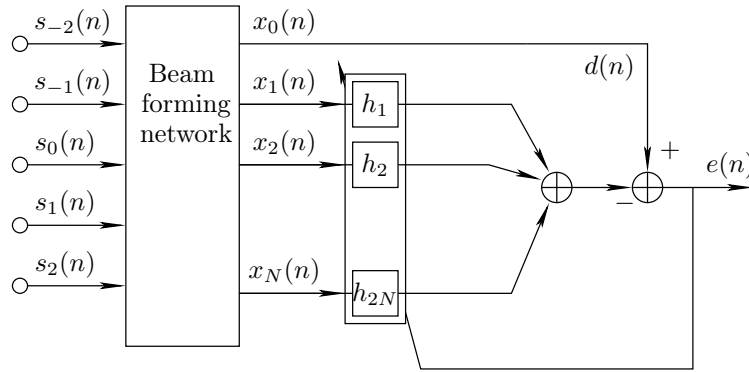


Figure 20.15 – Diagramme bloc d'un multiple sidelobe canceler

Le réseau de formation de faisceaux est obtenu en sommant les signaux arrivant à chaque capteur. Une onde plane incidente sur un réseau linéaire donne lieu à un délai spatial  $d \sin \theta$  entre le signal reçu par deux paires de récepteurs adjacents. Si l'onde plane est considérée comme monochromatique, ce délai spatial est converti en une différence de phase définie par

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta \quad (20.131)$$

où  $d$  est la distance entre deux capteurs,  $\theta$  la direction d'arrivée et  $\lambda$  la longueur d'onde du signal incident. L'onde plane telle que vue par les  $2N + 1$  capteurs du réseau linéaire peut donc être modélisée comme suit

$$\mathbf{s}_\phi(n) = s(n)\{e^{-jN\phi}, \dots, e^{-j\phi}, 1, e^{j\phi}, \dots, e^{jN\phi}\} \quad (20.132)$$

où  $s(n)$  sont les valeurs instantanées de l'onde plane au capteur de référence (capteur 0). Un faisceau est donc formé en sommant les signaux arrivant à chaque capteur, en introduisant un délai  $i\alpha$  dépendant du capteur considéré.

$$s(n)A(\phi, \alpha) = \sum_{i=-N}^N s_i(n)e^{-ji\alpha} = s(n) \sum_{i=-N}^N e^{ji\phi} e^{-ji\alpha} \quad (20.133)$$

ou, en sommant cette série, on obtient finalement

$$A(\phi, \alpha) = \frac{\sin((2N + 1)(\phi - \alpha)/2)}{\sin((\phi - \alpha)/2)} \quad (20.134)$$

En variant  $\alpha$  il sera possible de déplacer le lobe principal dans le range  $-\pi \leq \phi \leq \pi$ . Pour générer  $2N + 1$  faisceaux orthogonaux, on choisit les valeurs suivantes de  $\alpha$

$$\alpha = \frac{k\pi}{2N+1}, \quad k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \pm 2N. \quad (20.135)$$

Chacun des faisceaux présentera un zéro dans la direction du lobe principal des autres faisceaux (voir figure 20.16). Due à la symétrie du réseau, les valeurs des coefficients sont réelles.

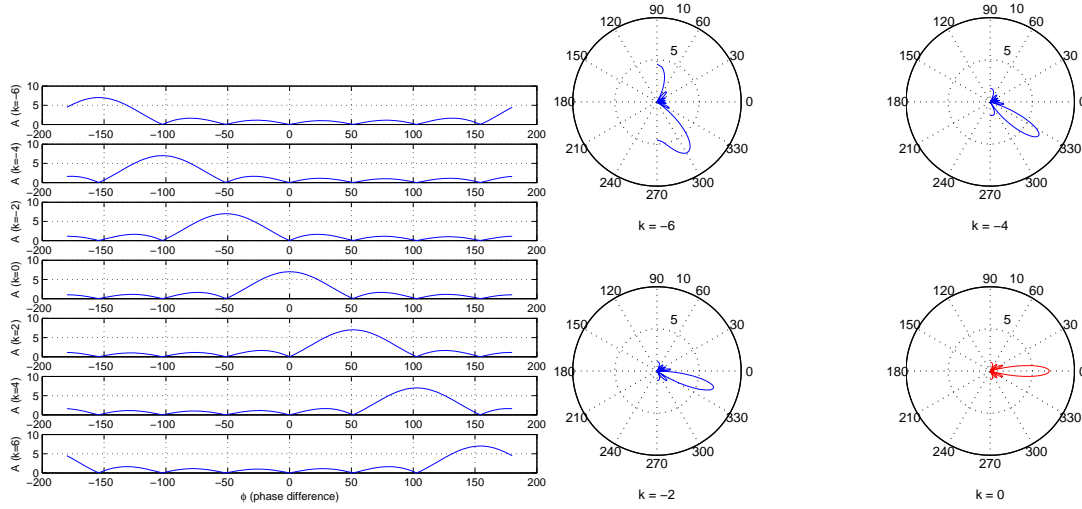


Figure 20.16 – Diagramme de rayonnement de chaque faisceau, en supposant un diagramme omnidirectionnel pour chacun des capteurs. Gauche : graphe de tous les faisceaux. Droite : graphe polaire des 4 premiers faisceaux, y compris le faisceau de référence.

Le signal de sortie de chacun des faisceaux est donné par

$$x_k(n) = s(n)A(\phi, \alpha_k). \quad (20.136)$$

Un de ces faisceaux est donc choisi comme faisceau de référence et est considéré comme le faisceau pointant dans la direction d'intérêt. Les autres faisceaux sont des faisceaux auxiliaires qui seront utilisés pour annuler d'éventuelles interférences en provenance d'autres directions. Ici, le faisceau principal correspond à  $\alpha = 0$  et le signal correspondant est  $x_0(n)$ . Il est à noter qu'une interférence ne doit être annulée que si elle se trouve dans un des lobes secondaire du faisceau de référence, d'où le nom de “side lobe canceler” pour ce dispositif.

Les signaux des faisceaux auxiliaires sont combinés au moyen d'un filtre adaptatif pour former un faisceau secondaire dont le signal est soustrait de celui provenant du faisceau de référence. Le signal résiduel est utilisé pour contrôler le processus adaptatif. Pour qu'il y ait convergence du processus adaptatif, il est essentiel que les signaux d'interférences soient décorrélés du signal d'intérêt. Sinon, le filter va s'adapter de façon à annuler le signal d'intérêt. Comme le faisceau de référence n'est pas modifié et que chacun des faisceaux auxiliaires présentent un zéro dans la direction du faisceau de référence, la conservation de l'amplitude du diagramme de rayonnement dans la direction du faisceau de référence est garantie. De plus, les  $2N$  degrés de liberté permettent d'annuler des interférences en provenance de  $2N$  directions différentes.

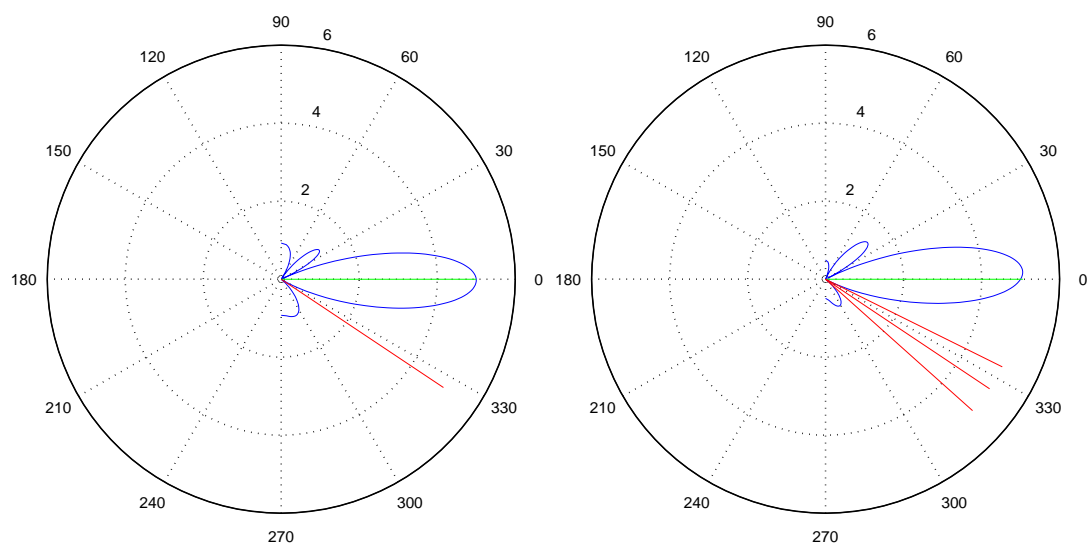


Figure 20.17 – Diagramme de rayonnement de l'adaptive sidelobe canceler pour interférence située à  $\theta = -50^\circ$  (gauche) et pour 3 interférences situées à  $\theta = \{-60^\circ, -70^\circ, -80^\circ\}$  (droite).





# Dérivée par rapport à un vecteur

---

## A.1 Définition

Soit  $J(\mathbf{h})$  une fonction scalaire d'un vecteur  $\mathbf{h}$  avec

$$h_n = a_n + jb_n. \quad (\text{A.1})$$

$J$  peut être considéré comme une fonction de  $a_i$  et de  $b_i$ . La dérivée de  $J$  par rapport à  $\mathbf{h}$  se définit comme suit

$$\frac{dJ}{d\mathbf{h}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial a_1} + j \frac{\partial J}{\partial b_1} \\ \frac{\partial J}{\partial a_2} + j \frac{\partial J}{\partial b_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial a_N} + j \frac{\partial J}{\partial b_N} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

## A.2 Exemple 1

Considérons la fonction

$$J = \mathbf{x}^\dagger \mathbf{h} \quad (\text{A.3})$$

où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{h}$  sont des vecteurs de longueur  $N$ .

Cela peut se ré-écrire comme

$$J = \sum_{n=1}^N x_n^* h_n \quad (\text{A.4})$$

ou encore

$$\frac{\partial J}{\partial a_k} = x_k^* \quad (\text{A.5})$$

et

$$\frac{\partial J}{\partial b_k} = jx_k^*. \quad (\text{A.6})$$

En substituant (A.5) et (A.6) dans (A.2), on obtient

$$\frac{d}{d\mathbf{h}}(\mathbf{x}^\dagger \mathbf{h}) = 0. \quad (\text{A.7})$$

### A.3 Exemple 2

Considérons la fonction

$$J = \mathbf{h}^\dagger \mathbf{x} \quad (\text{A.8})$$

où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{h}$  sont des vecteur de longueur  $N$ .

Cela peut se ré-écrire comme

$$J = \sum_{n=1}^N h_n^* x_n \quad (\text{A.9})$$

ou encore

$$\frac{\partial J}{\partial a_k} = x_k \quad (\text{A.10})$$

et

$$\frac{\partial J}{\partial b_k} = -j x_k. \quad (\text{A.11})$$

En substituant (A.10) et (A.11) dans (A.2), on obtient

$$\frac{d}{d\mathbf{h}}(\mathbf{h}^\dagger \mathbf{x}) = 2\mathbf{x}. \quad (\text{A.12})$$

### A.4 Exemple 3

Considérons la fonction

$$J = \mathbf{h}^\dagger \mathbf{R} \mathbf{h} \quad (\text{A.13})$$

où  $\mathbf{h}$  est un vecteur de longueur  $N$  et  $\mathbf{R}$  est une matrice  $N \times N$ .

Considérons tout d'abord

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{R}^\dagger \mathbf{h} \quad (\text{A.14})$$

et l'on peut ré-écrire (A.13) comme

$$J = \mathbf{x}_1^\dagger \mathbf{h} \quad (\text{A.15})$$

et donc, en traitant  $\mathbf{x}_1^\dagger$  comme constant,

$$\frac{d}{d\mathbf{h}}(\mathbf{x}_1^\dagger \mathbf{h}) = 0. \quad (\text{A.16})$$

Ensuite, en considérant

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{R} \mathbf{h} \quad (\text{A.17})$$

(A.13) peut être ré-écrite comme

$$J = \mathbf{h}^\dagger \mathbf{x}_2. \quad (\text{A.18})$$

Et à nouveau, en traitant  $\mathbf{x}_2$  comme une constante, on a

$$\frac{d}{d\mathbf{h}}(\mathbf{h}^\dagger \mathbf{x}_2) = 2\mathbf{x}_2. \quad (\text{A.19})$$

Finalement, en additionnant (A.16) et (A.19), nous obtenons

$$\frac{d}{d\mathbf{h}}(\mathbf{h}^\dagger \mathbf{R} \mathbf{h}) = 2\mathbf{R} \mathbf{h}. \quad (\text{A.20})$$

---

# Bibliographie

---

- [1] H. C. Andrews and B. R. Hunt. *Digital Image Restoration*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New-Jersey, USA, 1977.
- [2] D. M. Etter, A. O. Steinhardt, and S. L. Stoner. Least squares adaptive processing in military applications. *IEEE Signal Processing Magazine*, pages 66–73, May 2002.
- [3] B. Farhang-Boroujeny. *Adaptive Filters*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, England, 1999.
- [4] S. Haykin. *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New-Jersey, USA, 1986.
- [5] S. M. Kay. *Modern Spectral Estimation, Theory & Application*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [6] D. G. Manolakis, V. K. Ingle, and S. M. Kogon. *Statistical and Adaptive Signal Processing*. Artech House, Boston, MA, USA, 2005.
- [7] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer. *Digital Signal Processing*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New-Jersey, USA, 1975.
- [8] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab. *Signals and Systems*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New-Jersey, USA, 1996.
- [9] W. C. van Etten. *Introduction to Random Signals and Noise*. John Wiley & Sons, West Sussex, England, 2005.