

光纤陀螺仪随机误差的 Allan 方差分析^{*}

吴 一, 杨孟兴, 韦 明, 刘永红

(中国航天时代电子公司第十六研究所, 西安 710100)

[摘要] 文中应用 Allan 方差法对某型光纤陀螺的静态输出信号进行了分析, 为提高光纤陀螺的性能提供了依据。

[关键词] Allan 方差法; 光纤陀螺; 随机误差分析

[中图分类号] TJ765.2 [文献标识码] A

Random Error Analysis of Fiber Optic Gyro Using Allan Variance Method

WU Yi, YANG Meng-xing, WEI Ming, LIU Yong-hong

(The 16th Institute, China Aerospace Times Electronics Corporation, Xi'an 710100, China)

Abstract: In this paper, allan variance is adopted to analyzing the static output of a type of fiber optic gyro. The conclusion provides reference for improving the performance of the fiber optic gyro.

Key words: allan variance; fiber optic gyro; random error analysis

1 引言

Allan 方差法最初是由美国国家标准局的 David Allan 提出的。其突出特点是能非常容易地对各种类型的误差源和整个噪声统计特性进行细致的表征与辨识。它是 IEEE 公认的陀螺仪参数分析的标准方法。Allan 方差法的基本依据为: 光纤陀螺的各种噪声分布在不同的频段上。Allan 方差和功率谱密度 (Power Spectral Density, PSD) 之间的关系如下^[1]:

$$\sigma^2(\tau) = 4 \int_0^\infty S_\omega(f) \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df \quad (1)$$

式中 $S_\omega(f)$ 是随机噪声 $\omega(t)$ 的功率谱密度 (PSD), f 是频率 (Hz)。利用这种定量关系, 就可以在时域上根据光纤陀螺的输出得到光纤陀螺中各误差源的类型和幅度。

2 Allan 方差分析法^[2]

光纤陀螺仪输出数据的采样周期为 T_s , 由于光纤陀螺直接输出的是脉冲数, 设每个采样周

期得到的脉冲数为 x_i , 共采集 N 个数据。将 N 个数据分成 K 组, 每组 M 个数据, 即 $N = K \times M$ 。第 j 个采样周期 T 内的平均角速度即认为是第 j 时刻的瞬时角速度 Ω_j , 其值为:

$$\Omega_j = \frac{S \times x_j}{T} \quad j = 1, \dots, N \quad (2)$$

式中, S 为光纤陀螺的脉冲当量 (角秒 / 脉冲)。

每组的平均角速度值为:

$$\bar{\Omega}_k(M) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \Omega_{(k-1)M+i} \quad k = 1, \dots, K \quad (3)$$

Allan 方差定义为:

$$\sigma_A^2(\tau) = \frac{1}{2} ([\bar{\Omega}_{K+1}(M) - \bar{\Omega}_K(M)]^2 \cong \frac{1}{2(K-1)} \sum_{k=1}^{K-1} [\bar{\Omega}_{k+1}(M) - \bar{\Omega}_k(M)]^2 \quad (4)$$

符合 (\cdot) 表示总体平均, $\tau = M \times T$ 为指定的相关时间。 $M = 1, 2, \dots, M_{\max}; M_{\max} \leq \frac{N-1}{2}$ 。式 (3)

和式 (4) 的递推式为:

$$\bar{\Omega}_k(m) = \frac{m-1}{m} \bar{\Omega}_m(m-1) + \frac{1}{m} \Omega_{(k-1)M+m}; \quad m = 1, \dots, ; k = 1, \dots, K \quad (5)$$

* 收稿日期: 2005-09-26

作者简介: 吴一 (1981-), 男, 硕士研究生, 研究方向: 捷联惯测技术。

$$\sigma_k^2(m) = \frac{k-2}{k-1} \sigma_{k-1}^2(m) + \frac{1}{2(k-1)} (\bar{\Omega}_k - \bar{\Omega}_{k-1}); m = 1, \dots, M; k = 1, 2, \dots, K \quad (6)$$

应用递推式可以减小运算量,减少运算中的存储,提高运算速度。

Allan 方差的估计是基于有限长度数据,估计的可信度依赖于独立的组数。而 Allan 方差估计值是一个随机量,估计的可信度随独立组数 K 增加而提高。Allan 方差估计的百分比误差为^[3]:

$$\text{估计误差} = \frac{100}{\sqrt{2(K-1)}} \% \quad (7)$$

3 光纤陀螺的噪声分析

光纤陀螺的核心部分是由光纤线圈组成的干涉仪,其对旋转角速度的测量是通过萨格奈克(Sagnac)效应来完成的,然后在实际系统中,萨格奈克(Sagnac)效应非常微弱,这主要是由于构成光纤陀螺的各个元件都是噪声源,而且存在各种各样的寄生效应,这样便引起光纤陀螺的输出漂移和标度因素的不稳定性,从而影响光纤陀螺的性能;这里对影响光纤陀螺性能的几项最基本的噪声源予以分析,以便为光纤陀螺性能的改进提供一定的依据。

3.1 角度随机游走^[4]

角度随机游走(Angle Random Walk)是积分宽带速率功率谱密度的结果,这一误差的主要来源是:光子的自发辐射(导致两波频率 f_{cw} 和 f_{acw} 有波动)、探测器的散粒噪声、机械抖动。另外,其它具有比采样时间短的相关时间的高频噪声也可引起光纤陀螺的随机游走。

角度随机游走噪声一般带宽小于 10Hz,因此在大部分姿态控制系统的带宽之内。故此,如果不能精确确定角度随机游走,它有可能成为限制姿态控制系统的主要误差源。

当 N 为噪声幅度时,该随机过程的特征是具有角速度白噪声功率谱:

$$S_n(f) = N^2 \quad (8)$$

式(8)中, N 为角度随机游走系数。将(8)代入式(1)并积分得:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{N^2}{\tau} \quad (9)$$

式(9)表明:在 $\sigma(\tau)$ 对 τ 双对数(log-log)曲线

图中,角度随机游走噪声得斜率为 $-\frac{1}{2}$,而且角度随机游走系数 N 的值可在 $\tau = 1$ 时估计出。

3.2 零偏稳定性(1/f 噪声、闪烁噪声)

零偏稳定性(Bias Instability)噪声主要是由角速率数据中的低频零偏波动引起,其来源为光纤陀螺中放电组件、等离子体放电、电路噪声或环境噪声。另外,产生随机闪烁的部件也可引起零偏稳定性。这一噪声的速率功率谱为:

$$S_n(f) = \begin{cases} \left(\frac{B^2}{2\pi}\right) \frac{1}{f}, & f \leq f_0 \\ 0, & f > f_0 \end{cases} \quad (10)$$

式(10)中, B 为零偏稳定性系数, f_0 为截止频率。将式(10)代入式(1)并积分得:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{2B^2}{\pi} \left[\ln 2 - \frac{\sin^3 x}{2x^2} (\sin x + 4x \cos x) + C_i(2x) - C_i(4x) \right] \quad (11)$$

式(11)中, $x = \pi f_0 \tau$, C_i 为余弦积分函数。在 $\sigma(\tau)$ 对 τ 双对数(log-log)曲线图中,由曲线的平直部分便可估计出零偏稳定性系数 B 。

3.3 速率随机游走

速率随机游走(Rate Random Walk)是宽带角加速度功率谱密度积分的结果,其来源不太确定,可能是具有长相关时间的指数相关噪声的极限情况,也可能是由于晶体振荡器的老化效应。这一噪声的速率功率谱密度为:

$$S_n(f) = \left(\frac{K}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{f^2} \quad (12)$$

式(12)中, K 为速率随机游走系数。将式(12)代入式(1)并积分得:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{K^2 \tau}{3} \quad (13)$$

式(13)表明:在 $\sigma(\tau)$ 对 τ 双对数(log-log)曲线图中,速率随机游走噪声的斜率为 $\frac{1}{2}$,而且角速率随机游走系数 K 的值可在 $\tau = 3$ 时估计出。

3.4 速率斜坡

速率斜坡(Rate Ramp)本质上是一种确定性误差,而不是随机噪声。它在陀螺仪输入输出特性中的出现可能是由于光纤陀螺的光强在长时间内有非常缓慢而单调的变化,也可能是由于在同一方向上平台保持一非常小的加速度,或者

是由于外界环境引起光纤陀螺的温度变化,而从表现为光纤陀螺的真实输入,即

$$\Omega = R t \tag{14}$$

式(14)中, R 为速率斜坡系数,对包含式(14)给出的输入输出数据进行 Allan 方差分析可得:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{R^2 \tau^2}{2} \tag{15}$$

式(15)表明:在 $\sigma(\tau)$ 对 τ 双对数(log-log)曲线图中,速率斜坡噪声的斜率为1,而且速率斜坡系数 R 的值可在 $\tau = \sqrt{2}$ 时估计出。另外,这种噪声的速率功率谱密度为:

$$S_{\Omega}(f) = \frac{R^2}{(2\pi f)^3} \tag{16}$$

3.5 量化噪声

量化噪声(Quantization Noise)是由于传感器输出的量化性质及光纤陀螺的数字输出特性造成的,量化噪声代表了传感器的最低分辨率水平。量化噪声的角度功率谱密度为:

$$S_{\theta}(f) = \begin{cases} \tau_0 Q^2 \left(\frac{\sin^2(\pi f \tau_0)}{(\pi f \tau_0)^2} \right) \\ \approx \tau_0 Q^2 \end{cases} \quad f < \frac{1}{2\tau_0} \tag{16}$$

式(16)中, Q 为量化噪声系数。 Q 的理论极限为: $S/\sqrt{12}$, S 为光纤陀螺的标度因素。由方程:

$$S_{\Omega}(f) = (2\pi f)^2 S_{\theta}(2\pi f) \tag{17}$$

式(17)和式(16)可得速率功率谱密度为:

$$S_{\Omega}(f) = \begin{cases} \frac{4Q^2}{\tau_0} \sin^2(\pi f \tau_0) \\ \approx (2\pi f)^2 \tau_0 Q^2 \end{cases} \quad f < \frac{1}{2\tau_0} \tag{18}$$

将式(18)代入式(1)并积分可得:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{3Q^2}{\tau^2} \tag{19}$$

式(19)表明:在 $\sigma(\tau)$ 对 τ 双对数曲线中,量化噪声的斜率为-1,而且量化噪声系数 Q 的值可在 $\tau = \sqrt{3}$ 时估计出。

3.6 其他噪声项

如下所述的噪声项也可能包括在光纤陀螺仪的输出数据中。

(1) 马尔可夫噪声

马尔可夫噪声(Markov noise)的特点是一按指数规律衰减的有限相关时间函数,其速率功率谱密度为:

$$S_{\Omega}(f) = \frac{(q_c T_c)^2}{1 + (2\pi f T_c)^2} \tag{20}$$

式(20)中, q_c 为噪声幅度, T_c 为相关时间。将式(20)代入式(1)并积分可得:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{(q_c T_c)^2}{\tau} \left[1 - \frac{T_c}{2\tau} (3 - 4e^{-\frac{\tau}{T_c}} + e^{-\frac{2\tau}{T_c}}) \right] \tag{21}$$

由式(21)可知:

$$\text{当 } \tau \gg T_c \text{ 时, } \sigma^2(\tau) = \frac{(q_c T_c)^2}{\tau} \tag{22}$$

$$\text{当 } \tau \ll T_c \text{ 时, } \sigma^2(\tau) = \frac{q_c^2}{3} \tau \tag{23}$$

若令 $N = q_c T_c$,则式(22)表示角度随机游走的Allan方差, $q_c T_c$ 便为角度随机游走系数;同理,式(23)表示速率随机游走的Allan方差, q_c 便为速率随机游走系数。

(2) 正弦噪声

正弦噪声(Sinusoidal Noise)是一种系统性误差,其功率谱密度由几个不同频率表征。高频噪声是由激光放电过程中等离子振荡而产生的;低频噪声是由于环境的周期性变化而引起测试平台的低速运动而引起的。包含单一频率的正弦噪声的功率谱密度可表示为:

$$S_{\Omega}(f) = \frac{1}{2} \Omega_0^2 [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \tag{24}$$

式(24)中, Ω_0 为速率幅度, f_0 为噪声幅度, δ 为Dirac函数,其表达式:

$$\delta(\tau) = \begin{cases} \infty, \tau = 0 \\ 0, \tau \neq 0 \end{cases} \tag{25}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$$

将式(24)代入式(1)并积分可得:

$$\sigma^2(\tau) = \Omega_0^2 \left(\frac{\sin^2 \pi f_0 \tau}{\pi f_0 \tau} \right)^2 \tag{26}$$

在式(26)的 $\sigma(\tau)$ 对 τf_0 的双对数(log-log)曲线图上,当 $\tau f_0 \ll 1$ 时, $\sigma(\tau)$ 正比于 τ ,斜率为+1;而当 $\tau f_0 \gg 1$ 时,就表现为以斜率-1衰减的具有许多峰值正弦式的波形。

由上面所述可以得出 Allan 方差相对于相关时间 τ 的双对数理论图如图1所示。

4 光纤陀螺误差分析

估计 Allan 方差时,其与实验所用陀螺仪的

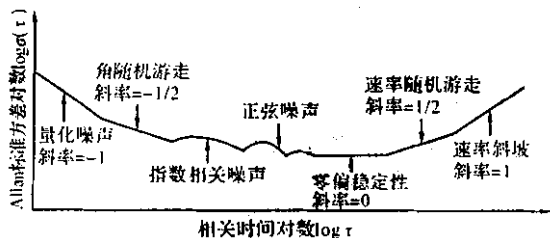


图1 Allan 方差分析光纤陀螺误差双对数理论图类型和数据获取的环境有关,实验数据中可能存在各种成分的随机噪声。若各噪声源统计独立,则 Allan 方差是各类型误差的平方和。这里假设各误差源统计独立,则 Allan 方差可以表示为一种或者几种误差源的平方和。如下式所示:

$$\sigma^2(\tau) = \sigma_N^2(\tau) + \sigma_B^2(\tau) + \sigma_K^2(\tau) + \sigma_Q^2(\tau) + \sigma_R^2(\tau) + \sigma_M^2(\tau) + \sigma_S^2(\tau) + \dots \quad (27)$$

光纤陀螺输入输出特性数据中通常包括五项噪声源:角度随机游走、零偏稳定性、速率随机游走、速率斜坡和量化噪声。这5项噪声源的误差系数分别用 N 、 B 、 K 、 R 、 Q 表示。其值的求取可用最小二乘法对下式进行拟合,即:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{R^2 \tau^2}{2} + \frac{K^2 \tau}{3} + B^2 \left[\frac{2}{\pi} \right] \ln 2 + \frac{N^2}{\tau} + \frac{3Q^2}{\tau^2} \quad (28)$$

将式(28)简化可得:

$$\sigma^2(\tau) = \sum_{n=-2}^2 C_n \tau^n \quad (29)$$

式(29)中, $\tau = kT_0$, T_0 为采样周期。则拟合出的误差系数为:

$$\begin{aligned} N &= \frac{\sqrt{C_{-1}}}{60} \quad (^\circ/h^{1/2}) \\ B &= \frac{\sqrt{C_0}}{0.664} \quad (^\circ/h) \\ K &= 60\sqrt{3C_1} \quad (^\circ/h^{3/2}) \\ R &= 3600\sqrt{2C_2} \quad (^\circ/h^2) \\ Q &= \frac{10^6 \pi \sqrt{C_{-2}}}{180 \times 3600 \times \sqrt{3}} \quad (\mu rad) \end{aligned} \quad (30)$$

在常温下(25℃左右),将某型号光纤陀螺放在水平固定平台上,光纤陀螺的敏感轴指天。测试时对光纤陀螺进行 2h 的零漂数据采集,采样时间间隔为 1s。图2为光纤陀螺输出零漂的部分原始数据。图3为光纤陀螺随机漂移的 Allan 方差相对于相关时间的双对数图。对图3中的 Allan 标准方差($\sigma(\tau)$)与相关时间(τ)的双对数

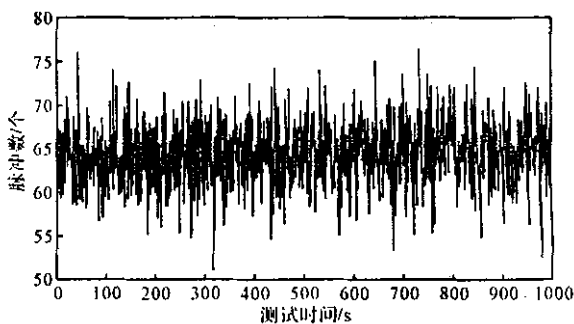


图2 光纤陀螺零漂部分原始数据

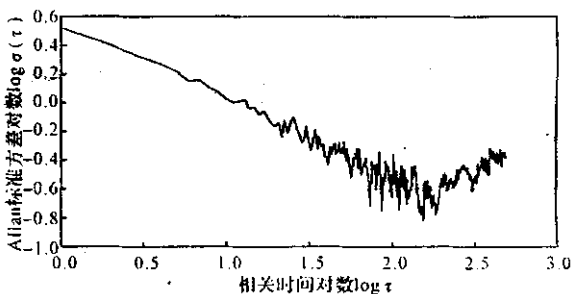


图3 光纤陀螺 Allan 方差双对数图

曲线进行最小二乘拟合可得各误差系数,拟合结果如下:

$$\begin{aligned} N &= 0.0663 \quad (^\circ/h^{1/2}), B = 0.6107 \quad (^\circ/h) \\ K &= 3.0695 \quad (^\circ/h^{3/2}), R = 3.3316 \quad (^\circ/h^2) \\ Q &= 5.3728 \quad (\mu rad) \end{aligned}$$

由上得出如下结论:

(1) 速率随机游走、速率斜坡和量化噪声是主要的噪声源。

(2) 角度随机游走和零偏稳定性系数比较小,而角度随机游走大约为零,这说明几乎没有角速度白噪声。

(3) 速率斜坡比较大,通过图2,可以清楚的看出这里有趋势项在陀螺的漂移中。

5 结论

从以上分析和实验结果可知,使用 Allan 方差法能够有效地分离出光纤陀螺仪中的主要随机误差源。另外,通过分析光纤陀螺零漂数据的 Allan 方差,可以得知各类噪声源对光纤陀螺性能所造成的影响,从而对造成光纤陀螺性能下降的因素作出改进。为提高光纤陀螺性能提供研究方向。

(下转第724页)

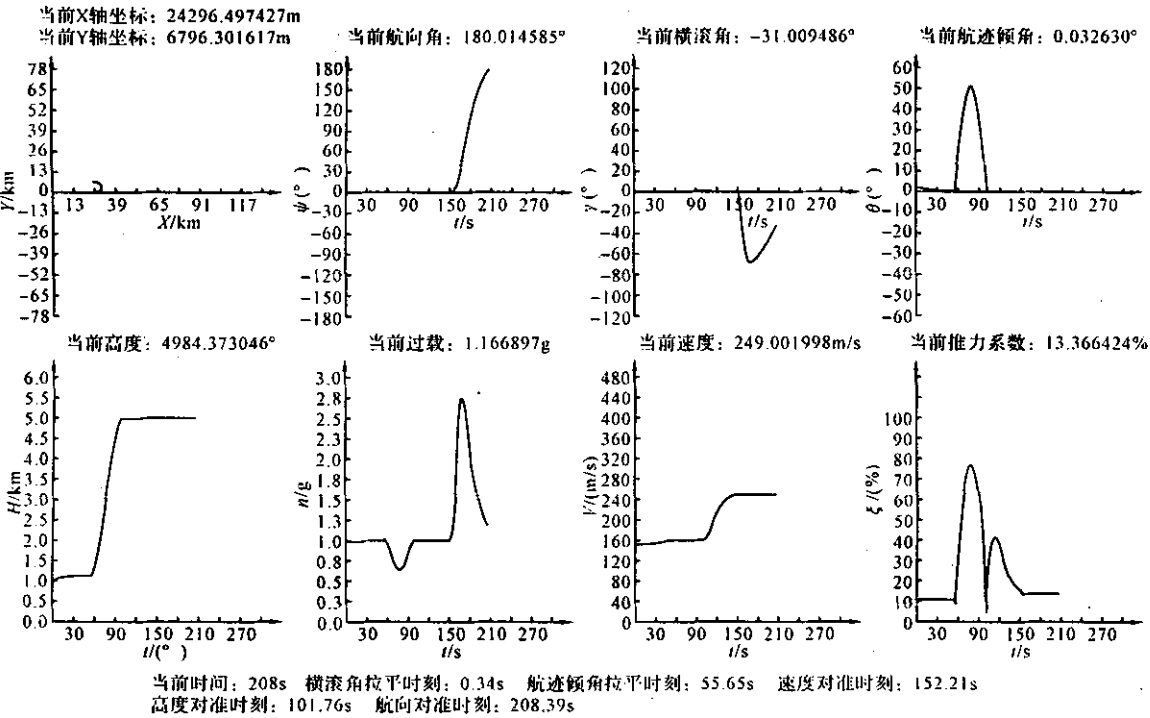


图 2 飞行轨迹控制系统参数曲线图

表 1 飞行轨迹控制系统参数

对准	起始状态	期望状态	结束状态	误差
速度 m/s	150	250	250.988791	0.998791
高度 m	1000	5000	4986.680615	13.319385
航向角	0°	180°	180.003661°	0.003661°

结果分析:为了实现在无人机在轰炸中的自动飞行,提出了轨迹的自动控制问题,讨论了轨迹控制系统的实现问题并使用遗传算法进行了优化.该原理能使飞机的投弹过程完全自动化.从图 2 和表 1 中可以看出,飞行轨迹的精度达到

了投弹得要求,过载也在飞机的设计范围之内,满足了投弹条件,从而具有一定的可行性.

[参 考 文 献]

[1] 彭可茂,申攻璋,文传原. 综合飞行/火力/推进控制系统建模[J]. 系统仿真学报,1999, 11(4) .

[2] 龚诚,刘春. 可构成空一地攻击条件的判据[J]. 系统工程理论与实践,2000, (5).

[3] 苏小林,阎晓霞. 基于遗传算法的 PID 控制器参数优化技术[J]. 电力系统及其自动化学报,1997, (2).

[4] 周雪琴,计算机控制系统[M]. 西安:西北工业大学出版社,1998.

[5] 金传伟,基于遗传算法的 PID 参数优化与仿真[J]. 微计算机信息,2002, 18 (7).

(上接第 720 页)

[参 考 文 献]

[1] Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Laser Gyros[Z]. IEEE Std 647-1995.

[2] 韦明,杨孟兴,屈孝池. 环形激光陀螺仪随机误差的 Allan 方差分析[J]. 弹箭与制导学报,2005,25 (2),495-498.

[3] Lawrence C. Ng, Darryl J Pines. Characterization of Ring Laser Gyro Performance Using the Allan variance Method[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics. 1997,20(1):211~214.

[4] Lawrence N C, Darryll P J. Characterization of ring laser gyro performance using the Allan variance method[J]. Journal of guidance, Control and Dynamics. 1997, 20(1):211-214.

[5] 刘巧光,许辅义,滕云鹤,等. 环形激光陀螺仪随机误差模型的研究[J]. 清华大学学报(自然科学版). 1999,39(2):71~74.