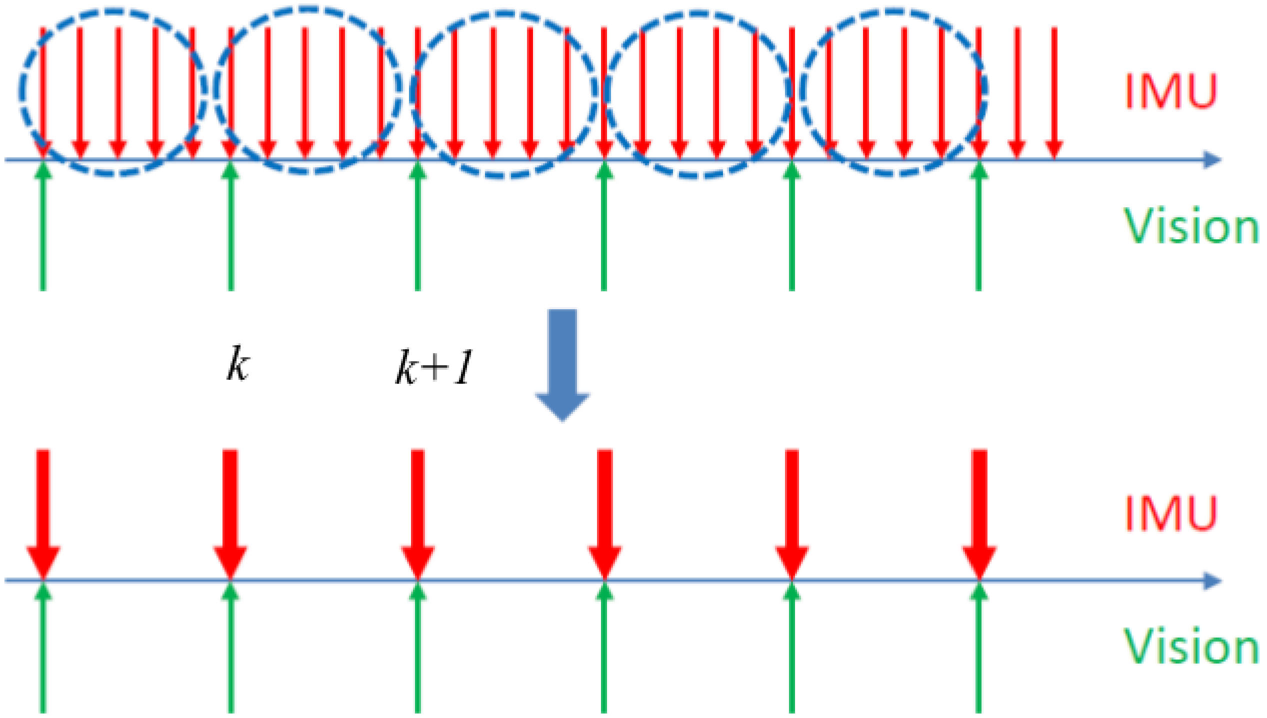
IMU预积分及误差状态动力学

On-Manifold预积分指的是通过将选定关键帧之间的IMU测量积分为单个相对运动约束,避免在优化问题中出现太多的IMU优化变量。如下图所示：



1 预备知识

1.1 IMU测量

真实的加速度a_t和真实的角速度w_t(世界坐标系)从IMU的含噪声和重力的测量数据a_m和w_m获取（机体坐标系，一般跟IMU坐标系相同）：

$$a_m = {R_B^W}^T(a_t^W + g^W) + b_{a_t} + n_a \tag{1}$$

$$w_m = w_t^W + b_{w_t} + n_w \tag{2}$$

这里加上重力向量$g^w = [0, 0, g]^T$，是一个矢量运算。因此真实的测量为：

$$a_t^W = R_B^W(\hat{a}_t - b_{a_t} - n_a) - g^W \tag{3}$$

$$w_t^W = \hat{w}_t - b_{w_t} - n_w \tag{4}$$

这里，$\hat{a}_t,\hat{w}_t$是IMU坐标系下的读数。我们假设IMU加速度和陀螺仪的测量加性噪声是高斯的:

$$n_a \sim \mathcal{N}(0,\sigma_a^2), n_w \sim \mathcal{N}(0,\sigma_w^2) \tag{5}$$

加速度和陀螺仪的偏差用随机游走模型表示，其导数是高斯的:

$$n_{b_a} \sim \mathcal{N}(0,\sigma_{b_a}^2), n_{b_w} \sim \mathcal{N}(0,\sigma_{b_w}^2) \tag{6}$$

$$\dot{b_{a_t}} = n_{b_a}, \dot{b_{w_t}} = n_{b_w} \tag{7}$$

1.2 PVQ的连续形式

给定两帧图像b_k和b_{k+1}，其位置，速度，方向状态量可以通过在世界坐标系中对时间间隔$[k,k+1]$内的IMU测量积分得到（这里是连续形式）：

$$p_{b_{k+1}}^W = p_{b_k}^W + v_{b_k}^W \triangle t_k + \iint_{t\in[t_k,t_{k+1}]} (R_B^W(\hat{a}_t - b_{a_t} - n_a) - g^W)dt^2$$

$$v_{b_{k+1}}^W = v_{b_k}^W + \int_{t\in[t_k,t_{k+1}]} (R_B^W(\hat{a}_t - b_{a_t} - n_a) - g^W)dt$$

$$q_{b_{k+1}}^W = q_{b_k}^W \otimes \int_{t\in[t_k,t_{k+1}]} \frac{1}{2}\Omega(\hat{w}_t - b_{w_t} - n_w)q_t^{b_k}dt \tag{8}$$

这里

$$\Omega(w) = \begin{vmatrix} -[w]_\times & w \\ -w^T & 0 \end{vmatrix}, [w]_\times = \begin{vmatrix} 0 & -w_x & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{vmatrix} \tag{9}$$

1.3 PVQ的中值法离散形式

这里先回顾下两种最基本的数值积分方法：欧拉法和中值法。欧拉法假设在时间间隔内状态变量的导数$f(.)$是常数，因此：

$$x_{n+1} = x_n + \triangle t f(t_n,x_n) \tag{10}$$

中值法假设状态变量在时间间隔内的导数是区间中点处的导数，并进行一次迭代计算状态变量在中点处的值：

$$x_{n+1}=x_n+\triangle tf(t_n+\frac{1}{2}\triangle t,\frac{1}{2}\triangle tf(t_n,x_n)) \tag{11}$$

这个中值法可以通过下面两步解释。首先，用欧拉法积分到中点处，

$$k_1=f(t_n,x_n) \tag{12}$$

$$x(t_n+\frac{1}{2}\triangle t)=x_n+\frac{1}{2}\triangle tk_1 \tag{13}$$

然后再求在中点处的导数k_2:

$$k_2=f(t_n+\frac{1}{2}\triangle t,x(t_n+\frac{1}{2}\triangle t)) \tag{14}$$

因此得到:

$$x_{n+1}=x_n+\triangle tk_2 \tag{15}$$

下面正式给出两个相邻时刻中值积分形式：

$$p_{b_{k+1}}^W=p_{b_k}^W+v_{b_k}^W\triangle t+\frac{1}{2}\bar{a}_m\triangle t^2$$
$$v_{b_{k+1}}^W=v_{b_k}^W+\bar{a}_m\triangle t$$

$$q_{b_{k+1}}^W=q_{b_k}^W\otimes\begin{vmatrix}1\\ \frac{1}{2}\bar{w}_m\triangle t\end{vmatrix} \tag{16}$$

其中，

$$\bar{a}_m=\frac{1}{2}[R_k(a_k-b_{a_k})-g^W+R_{k+1}(a_{k+1}-b_{a_k}-g^W)]$$

$$\bar{w}_m=\frac{1}{2}(w_k+w_{k+1})-b_{w_k} \tag{17}$$

注意：这里均没有考虑IMU加速度和陀螺仪的噪声。

1.4 误差状态动力学

我们希望在一个惯性系统中通过积分含零偏和噪声的IMU测量数据写出误差状态方程。但是这个积分过程会随着时间增长而发生漂移。为了避免这种漂移，通常我们会融合一些绝对位置信息，比如GPS或者vision。那么我们为啥要写出误差状态动力学呢？

1.方向的误差状态是最小的，可以避免过度参数化相关的问题，以及由此带来的相关协方差矩阵奇异性的风险。

2.误差状态系统总是在远点附近运行，因此远离可能的参数奇点，框架锁或类似问题，从而保证线性化有效性在任何时候都有效。

3.误差状态量通常是很小的量，这意味着高阶项可以忽略。这使得雅各比的计算会比较容易和快速。

2 IMU预积分

从上面的积分项，可以看出IMU状态更新需要第K帧世界坐标系下的旋转，位置和速度。当在优化过程中，这些状态变量会随着优化迭代进行发生变化，此时就需要重新积分两帧之间的IMU测量。为了避免重复积分，这里采用预积分的思想：即将参考坐标系从世界坐标系转换到局部坐标系,在式子（8）左右两边同时左乘 $R_W^{b_k}$:

$$R_W^{b_k} p_{b_{k+1}}^W = R_W^{b_k}(p_{b_k}^W + v_{b_k}^W \triangle t_k - \frac{1}{2} g^W \triangle {t_k}^2) + \alpha_{b_{k+1}}^{b_k}$$

$$R_W^{b_k} v_{b_{k+1}}^W = R_W^{b_k}(v_{b_k}^W - g^W \triangle t_k) + \beta_{b_{k+1}}^{b_k}$$

$$q_W^{b_k} \otimes q_{b_{k+1}}^W = \gamma_{b_{k+1}}^{b_k} \tag{18}$$

其中，

$$\alpha_{b_{k+1}}^{b_k} = \iint_{t \in [t_k, t_{K+1}]} R_t^{b_k}(\hat{a}_t - b_{a_t} - n_a) dt^2$$

$$\beta_{b_{k+1}}^{b_k} = \int_{t \in [t_k, t_{K+1}]} R_t^{b_k}(\hat{a}_t - b_{a_t} - n_a) dt$$

$$\gamma_{b_{k+1}}^{b_k} = \int_{t \in [t_k, t_{k+1}]} \frac{1}{2} \Omega(\hat{w}_t - b_{w_t} - n_w) \gamma_t^{b_k} dt \tag{19}$$

由此可以看到把b_k当做参考坐标系后，积分项可以单独通过IMU的测量得到。当IMU测量的bias估计改变时，如果改变很小，通过积分项关于偏差的一阶近似来调整$\alpha_{b_{k+1}}^{b_k}$,$\beta_{b_{k+1}}^{b_k}$,$\gamma_{b_{k+1}}^{b_k}$。由于bias也是需要优化的变量，如果变化太大，则需要重新积分。这里假设预积分的变化量与bias是线性关系：

$$\alpha_{b_{k+1}}^{b_k} \approx \hat{\alpha}_{b_{k+1}}^{b_k} + J_{b_a}^{\alpha} \delta b_a + J_{b_w}^{\alpha} \delta b_w$$

$$\beta_{b_{k+1}}^{b_k} \approx \hat{\beta}_{b_{k+1}}^{b_k} + J_{b_a}^{\beta} \delta b_a + J_{b_w}^{\beta} \delta b_w$$

$$\gamma_{b_{k+1}}^{b_k} = \hat{\gamma}_{b_{k+1}}^{b_k} \otimes \begin{vmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} J_{b_w}^{\gamma} \delta b_w \end{vmatrix} \tag{20}$$

在一开始，$\alpha_{b_k}^{b_k}$,$\beta_{b_k}^{b_k}$是0，$\gamma_{b_k}^{b_k}$是单位四元数。注意加性噪声n_w,n_a是未知的，实现中当做0处理。IMU预积分的欧拉法更新步骤如下：

$$\hat{\alpha}_{i+1}^{b_k} = \hat{\alpha}_{i}^{b_k} + \hat{\beta}_{i}^{b_k} \delta t + \frac{1}{2} R(\hat{\gamma}_{i}^{b_k})(\hat{\alpha}_i - b_{a_i}) \delta t^2$$

$$\hat{\beta}_{i+1}^{b_k} = \hat{\beta}_{i}^{b_k} + R(\hat{\gamma}_{i}^{b_k})(\hat{\alpha}_i - b_{a_i}) \delta t$$

$$\hat{\gamma}_{i+1}^{b_k} = \hat{\gamma}_{i}^{b_k} \otimes \hat{\gamma}_{i+1}^{i} = \hat{\gamma}_{i}^{b_k} \otimes \begin{vmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(\hat{w}_i - b_{w_i}) \delta t \end{vmatrix} \tag{21}$$

i是对应时间间隔$[t_k, t_{k+1}]$的离散时刻，δt是两个IMU测量i和$i+1$的时间间隔。

然后给出IMU预积分的中值法更新步骤：

$$\hat{\alpha}_{i+1}^{b_k} = \hat{\alpha}_{i}^{b_k} + \hat{\beta}_{i}^{b_k} \delta t + \frac{1}{2} \overline{\hat{\alpha}} \delta t^2$$

$$\hat{\beta}_{i+1}^{b_k} = \hat{\beta}_{i}^{b_k} + \overline{\hat{\beta}} \delta t$$

$$\hat{\gamma}_{i+1}^{b_k} = \hat{\gamma}_{i}^{b_k} \otimes \hat{\gamma}_{i+1}^{i} = \hat{\gamma}_{i}^{b_k} \otimes \begin{vmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \overline{\hat{w}} \delta t \end{vmatrix} \tag{21}$$

其中，

$$\overline{\hat{\alpha}} = \frac{1}{2}[q_i(\hat{\alpha}_i - b_{a_i}) + q_{i+1}(\hat{\alpha}_{i+1} - b_{\alpha_i})]$$

$$\overline{\hat{w}} = \frac{1}{2}(\hat{w}_i + \hat{w}_{i+1}) - b_{w_i} \tag{22}$$

2.1 连续时间下的误差动力学

为简化起见，忽略了所有高阶项和重力的变化。参考《四元数数学基础》5.3节。

$$\dot{\delta p} = \delta v$$
$$\dot{\delta v} = -R[\hat{a}_t - b_a]_\times \delta\theta - R\delta b_a - Rn_a$$
$$\dot{\delta\theta} = -[\hat{w}_t - b_w]_\times \delta\theta - \delta b_w - w_n$$
$$\dot{b_a} = n_{b_a}$$
$$\dot{b_w} = n_{b_w} \tag{23}$$

这里δp,δv,$\delta\theta$对应IMU预积分中的$\delta\alpha$,$\delta\beta$,$\delta\gamma$分别对应位置，速度，方向的变化量。其中方向的变化量用$\delta\theta$来表示。可以写出：

$$\begin{vmatrix} \delta\dot{\alpha}_t^{b_k} \\ \delta\dot{\beta}_t^{b_k} \\ \delta\dot{\theta}_t^{b_k} \\ \delta\dot{b}_{a_t} \\ \delta\dot{b}_{w_t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_t^{b_k}[\hat{a}_t - b_{a_t}]_\times & -R_t^{b_k} & 0 \\ 0 & 0 & -[\hat{w}_t - b_{w_t}]_\times & 0 & -I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta\alpha_t^{b_k} \\ \delta\beta_t^{b_k} \\ \delta\theta_t^{b_k} \\ \delta b_{a_t} \\ \delta b_{w_t} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_t^{b_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_a \\ n_w \\ n_{b_a} \\ n_{b_w} \end{vmatrix} = F_t \delta z_t^{b_k} + G_t n_t \tag{24}$$

2.2 连续时间下误差的协方差及雅各比

上式（24）可以简化为：

$$\delta \dot{z}_t^{b_k} = F_t \delta z_t^{b_k} + G_t n_t \tag{25}$$

根据导数的定义：

$$\delta \dot{z}_t^{b_k} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta z_{t+\delta t}^{b_k} - \delta z_t^{b_k}}{\delta t}$$

$$\delta z_{t+\delta t}^{b_k} = \delta z_t^{b_k} + \delta \dot{z}_t^{b_k} \delta t = (I + F_t \delta t) \delta z_t^{b_k} + (G_t \delta t) n_t = F \delta z_t^{b_k} + V n_t \tag{26}$$

这里$F = I + F_t \delta t$,$V = G_t \delta t$。值得一提的是上式给出了对非线性系统的线性化过程，这意味着下一时刻IMU状态的误差与当前时刻IMU状态的误差成线性关系，我们可以根据当前时刻预测下一时刻状态的均值和协方差。上式给出的是误差均值的预测，下面给出误差的协方差预测：

$$P_{t+\delta t}^{b_k} = (I + F_t \delta t) P_t^{b_k} (I + F_t \delta t)^T + (G_t \delta t) Q (G_t \delta t)^T \tag{27}$$

上式给出了误差协方差的迭代公式，初始值$P_{b_k}^{b_k} = 0$。其中Q表示噪声项的对角协方差矩阵，参考《四元数数学基础》5.4.3节内容：

$$Q^{12 \times 12} = \begin{vmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{b_a}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{b_w}^2 \end{vmatrix} \tag{28}$$

与此同时，IMU状态误差$\delta z^{b_k}_{b_{k+1}}$的一阶雅各比$J_{b_{k+1}}$也可以利用式（26）类似的方式迭代：

$$J_{t+\delta t} = (I + F_t \delta t) J_t \tag{29}$$

式（20）中IMU状态误差关于bias的线性化过程中的雅各比$J^{\alpha}_{b_a}$是$J_{b_{k+1}}$的一个子块，对应$\frac{\delta\alpha^{b_k}_{b_{k+1}}}{\delta b_{a_k}}$。其余的雅各比子块也是类似的意义。

2.3 离散时间下的误差动力学

这里我们同样使用中值法积分处理离散情形。根据上一节的内容，我们可以知道:

2.3.1 方向误差的导数连续形式为：

$$\delta\dot{\theta}^{b_k}_t = -[\hat{w}_t - b_{w_t}]_\times \delta\theta_t - \delta b_{w_t} - n_w \tag{30}$$

则中值法离散形式为：

$$\delta\dot{\theta}_i = -[\frac{\hat{w}_i + \hat{w}_{i+1}}{2} - b_{w_i}]_\times \delta\theta_i - \frac{n_{w_i} + n_{w_{i+1}}}{2} - \delta b_{w_i} \tag{31}$$

由此根据导数定义可得：

$$\delta\theta_{i+1} = [I - [\frac{\hat{w}_i + \hat{w}_{i+1}}{2} - b_{w_i}]_\times \delta t]\delta\theta_i - \delta t \frac{n_{w_i} + n_{w_{i+1}}}{2} - \delta t \delta b_{w_i} \tag{32}$$

令：

$$f_{11} = I - [\frac{\hat{w}_i + \hat{w}_{i+1}}{2} - b_{w_i}]_\times \delta t$$

$$v_{11} = v_{13} = -\frac{\delta t}{2}$$

$$f_{14} = -\delta t$$

2.3.2 速度误差的导数连续形式为：

$$\delta\dot{\beta}^{b_k}_t = -R^{b_k}_t [\hat{a}_t - b_{a_t}]_\times \delta\theta_t - R^{b_k}_t \delta b_{a_t} - R^{b_k}_t n_a \tag{33}$$

则中值法离散形式为：

$$\delta\dot{\beta}_i = -\frac{1}{2}R_i[\hat{a}_i - b_{a_i}]_\times \delta\theta_i - \frac{1}{2}R_{i+1}[\hat{a}_{i+1} - b_{a_i}]_\times \delta\theta_{i+1} - \frac{1}{2}(R_i + R_{i+1})\delta b_{a_i}$$

$$-\frac{1}{2}R_i n_{a_i} - \frac{1}{2}R_{i+1}n_{a_{i+1}} \tag{34}$$

将式（32）代入上式可得：

$$\delta\dot{\beta}_i = -\frac{1}{2}R_i[\hat{a}_i - b_{a_i}]_\times \delta\theta_i - \frac{1}{2}R_{i+1}[\hat{a}_{i+1} - b_{a_i}]_\times$$

$$\{[I - [\frac{\hat{w}_i + \hat{w}_{i+1}}{2} - b_{w_i}]_\times \delta t]\delta\theta_i - \frac{n_{w_i} + n_{w_{i+1}}}{2}\delta t - \delta b_{w_i}\delta t\}$$

$$-\frac{1}{2}(R_i + R_{i+1})\delta b_{a_i} - \frac{1}{2}R_i n_{a_i} - \frac{1}{2}R_{i+1}n_{a_{i+1}}$$

继续整理：

$$\delta\dot{\beta}_i = \{-\frac{1}{2}R_i[\hat{a}_i - b_{a_i}]_\times - \frac{1}{2}R_{i+1}[\hat{a}_{i+1} - b_{a_i}]_\times [I - [\frac{\hat{w}_i + \hat{w}_{i+1}}{2} - b_{w_i}]_\times \delta t]\}\delta\theta$$

$$+\frac{1}{4}R_{i+1}[\hat{a}_{i+1} - b_{a_i}]_\times (n_{w_i} + n_{w_{i+1}})\delta t + \frac{1}{2}R_{i+1}[\hat{a}_{i+1} - b_{a_i}]_\times \delta b_{w_i}\delta t$$

$$-\frac{1}{2}(R_i + R_{i+1})\delta b_{a_i} - \frac{1}{2}R_i n_{a_i} - \frac{1}{2}R_{i+1}n_{a_{i+1}}$$

根据导数定义可得：

$$\delta\beta_{i+1} = \delta\beta_i + f_{21}\delta\theta_i - \frac{1}{2}(R_i + R_{i+1})\delta t\delta b_{a_i} + f_{24}\delta b_{w_i}$$

$$-\frac{1}{2}R_i\delta t n_{a_i} - \frac{1}{2}R_{i+1}\delta t n_{a_{i+1}} + v_{21}n_{w_i} + v_{23}n_{w_{i+1}} \tag{35}$$

令：

$$f_{21}=-\frac{1}{2}R_i[\hat{a}_i-b_{a_i}]_\times\delta t-\frac{1}{2}R_{i+1}[\hat{a}_{i+1}-b_{a_i}]_\times[I-[\frac{\hat{w}_i+\hat{w}_{i+1}}{2}-b_{w_i}]_\times\delta t]\delta t$$

$$f_{22}=I$$

$$f_{23}=-\frac{1}{2}(R_i+R_{i+1})\delta t$$

$$f_{24}=\frac{1}{2}R_{i+1}[\hat{a}_{i+1}-b_{a_i}]_\times\delta t^2$$

$$v_{20}=-\frac{1}{2}R_i\delta t$$

$$v_{21}=v_{23}=\frac{1}{4}R_{i+1}[\hat{a}_{i+1}-b_{a_i}]_\times\delta t^2$$

$$v_{22}=-\frac{1}{2}R_{i+1}\delta t$$

2.3.3 位置误差导数的连续形式：

$$\delta\dot{\alpha}_t^{b_k}=\delta\beta_t^{b_k} \tag{36}$$

则中值法离散形式为：

$$\delta\dot{\alpha}_i=\frac{1}{2}\delta\beta_i+\frac{1}{2}\delta\beta_{i+1} \tag{37}$$

将式（35）代入上式可得：

$$\delta\dot{\alpha}_i=\delta\beta_i+\frac{1}{2}f_{21}\delta\theta_i-\frac{1}{4}(R_i+R_{i+1})\delta t\delta b_{a_i}+\frac{1}{2}f_{24}\delta b_{w_i}$$

$$-\frac{1}{4}R_i\delta t n_{a_i}-\frac{1}{4}R_{i+1}\delta t n_{a_{i+1}}+\frac{1}{2}v_{21}n_{w_i}+\frac{1}{2}v_{23}n_{w_{i+1}} \tag{38}$$

根据导数定义：

$$\delta\alpha_{i+1}=\delta\alpha_i+\delta t\delta\beta_i+\frac{1}{2}f_{21}\delta t\delta\theta_i-\frac{1}{4}(R_i+R_{i+1})\delta t^2\delta b_{a_i}+\frac{1}{2}f_{24}\delta t\delta b_{w_i}$$

$$-\frac{1}{4}R_i\delta t^2 n_{a_i}-\frac{1}{4}R_{i+1}\delta t^2 n_{a_{i+1}}+\frac{1}{2}v_{21}\delta t n_{w_i}+\frac{1}{2}v_{23}\delta t n_{w_{i+1}} \tag{39}$$

令：

$$v_{00}=-\frac{1}{4}R_i\delta t^2$$

$$v_{01}=v_{03}=\frac{\delta t}{2}v_{21}$$

$$v_{02}=-\frac{1}{4}R_{i+1}\delta t^2$$

$$f_{00}=I$$

$$f_{01}=\frac{\delta t}{2}f_{21}$$

$$f_{02}=\delta t$$

$$f_{03}=-\frac{1}{4}(R_i+R_{i+1})\delta t^2$$

$$f_{04}=\frac{\delta t}{2}f_{24}$$

根据式（7）可得：

$$
\delta b_{a_{k+1}} = \delta b_{a_k} + \delta t n_{b_a}
$$
$$
\delta b_{w_{k+1}} = \delta b_{w_k} + \delta t n_{b_w}
$$

令：

$$
f_{33} = f_{44} = I
$$
$$
v_{34} = v_{45} = \delta t
$$

由上可以写出离散时间下的误差动力学,这里交换了β,θ：

$$
\begin{vmatrix} \delta\alpha_{i+1} \\ \delta\theta_{i+1} \\ \delta\beta_{i+1} \\ \delta b_{a_{i+1}} \\ \delta b_{w_{i+1}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{00} & f_{01} & f_{02} & f_{03} & f_{04} \\ 0 & f_{11} & 0 & 0 & f_{14} \\ 0 & f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ 0 & 0 & 0 & f_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta\alpha_i \\ \delta\theta_i \\ \delta\beta_i \\ \delta b_{a_i} \\ \delta b_{w_i} \end{vmatrix}
$$

$$
+ \begin{vmatrix} v_{00} & v_{01} & v_{02} & v_{03} & 0 & 0 \\ 0 & v_{11} & 0 & v_{13} & 0 & 0 \\ v_{20} & v_{21} & v_{22} & v_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_{45} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_{a_i} \\ n_{w_i} \\ n_{a_{i+1}} \\ n_{w_{i+1}} \\ n_{b_a} \\ n_{b_w} \end{vmatrix} \tag{40}
$$

2.4 离散时间下误差的协方差及雅各比

将式（40）简写为：

$$
\delta z_{i+1}{}^{15\times 1} = F^{15\times 15}\delta z_i{}^{15\times 1} + V^{15\times 18} n_i^{18\times 1} \tag{41}
$$

则雅各比的迭代公式为：

$$J_{i+1}^{15\times15} = FJ_i \tag{42}$$

协方差的预测为：

$$P_{i+1}^{15\times15} = FP_iF^T + VQV^T \tag{43}$$

其中初始值$P_i = 0$。Q为表示噪声项的对角协方差矩阵：

$$Q^{18\times18} = \begin{vmatrix} \sigma_a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{b_a}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{b_w}^2 \end{vmatrix} \tag{44}$$