

## ch1 ex.3

1.

$$\begin{aligned}\frac{\partial(R^{-1}p)}{\partial R} &= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{(R \exp([\delta\theta]_{\times}))^{-1}p - R^{-1}p}{\delta\theta} \\ &= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{(I - [\delta\theta]_{\times})R^{-1}p - R^{-1}p}{\delta\theta} \\ &= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{-[\delta\theta]_{\times} R^{-1}p}{\delta\theta} \\ &= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{[R^{-1}p]_{\times} \delta\theta}{\delta\theta} \\ &= [R^{-1}p]_{\times}\end{aligned}$$

2.

$$\frac{\partial \ln(R_1 R_2^{-1})^{\vee}}{\partial R_2} = \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\ln[R_1 (R_2 \exp([\delta\theta]_{\times}))^{-1}]^{\vee} - \ln(R_1 R_2^{-1})^{\vee}}{\delta\theta}$$

根据 $SO(3)$ 的伴随性质 $R^T \exp([\delta\theta]_{\times}) R = \exp([R^T \delta\theta]_{\times})$ ：

$$\begin{aligned}&= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\ln\{R_1 [\exp([R_2 \delta\theta]_{\times}) R_2]^{-1}\}^{\vee} - \ln(R_1 R_2^{-1})^{\vee}}{\delta\theta} \\ &= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\ln[R_1 R_2^{-1} (\exp([R_2 \delta\theta]_{\times}))^{-1}]^{\vee} - \ln(R_1 R_2^{-1})^{\vee}}{\delta\theta}\end{aligned}$$

这里扰动求逆等价于绕角轴反向旋转，由此可得：

$$= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\ln[R_1 R_2^{-1} \exp([-R_2 \delta\theta]_{\times})]^{\vee} - \ln(R_1 R_2^{-1})^{\vee}}{\delta\theta}$$

再根据 $\ln[R(\exp([\delta\theta]_{\times}))]^{\vee} = \ln(R)^{\vee} + J_r^{-1} \delta\theta$ , 可得：

$$= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\ln[R_1 R_2^{-1} \exp([-R_2 \delta\theta]_{\times})]^{\vee} - \ln(R_1 R_2^{-1})^{\vee}}{\delta\theta}$$

$$= \lim_{\delta\theta \rightarrow 0} \frac{\ln(R_1 R_2^{-1})^{\vee} + J_r^{-1} (\ln(R_1 R_2^{-1})^{\vee}) (-R_2 \delta\theta) - \ln(R_1 R_2^{-1})^{\vee}}{\delta\theta}$$

$$= -J_r^{-1} (\ln(R_1 R_2^{-1})^{\vee}) R_2$$