ex.3

计算LM算法的迭代步长：

已知LM的正则方程为：

$$(J^TJ+\mu I)\triangle\mathbf{x}=-J^Tf,\mu\geq 0 \tag{1}$$

其中，f表示残差函数，等式右边表示目标函数F的梯度负方向：

$$(J^TJ+\mu I)\triangle\mathbf{x}=-F',\mu\geq 0 \tag{2}$$

由于J^TJ是一个半正定矩阵，因此对J^TJ进行特征值分解为：

$$J^TJ=V\Lambda V^T \tag{3}$$

且有

$$VV^T=I \tag{4}$$

将(3)(4)代入(2)中可得：

$$(V\Lambda V^T+\mu VV^T)\triangle\mathbf{x}=-F' \tag{5}$$

将V提到括号左边，将V^T提到括号右边，

$$V(\Lambda+\mu I)V^T\triangle\mathbf{x}=-F' \tag{6}$$

等式两边左乘V^T可得,

$$(\Lambda+\mu I)V^T\triangle\mathbf{x}=-V^TF' \tag{7}$$

化简：

$$\triangle\mathbf{x}=-V(\Lambda+\mu I)^{-1}V^TF' \tag{8}$$

写成分块矩阵的形式，其中F'是$n\times 1$的列向量，V是$n*n$的矩阵，V_i表示V第i列的特征向量,

$$\triangle\mathbf{x} = -\begin{pmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\lambda_1+\mu)^{-1} & & & \\ & (\lambda_2+\mu)^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\lambda_n+\mu)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \\ \vdots \\ V_n^T \end{pmatrix} F' \tag{9}$$

整理：

$$\triangle\mathbf{x} = -\begin{bmatrix} (\lambda_1+\mu)^{-1}V_1 & (\lambda_2+\mu)^{-1}V_2 & \cdots & (\lambda_n+\mu)^{-1}V_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \\ \vdots \\ V_n^T \end{pmatrix} F' \tag{10}$$

继续化简：

$$\triangle\mathbf{x} = -[\frac{V_1V_1^T}{(\lambda_1+\mu)} + \frac{V_2V_2^T}{(\lambda_2+\mu)} + \cdots + \frac{V_nV_n^T}{(\lambda_n+\mu)}]F' \tag{11}$$

由于$V_iV_i^T$是$n*n$方阵，所以F'左边是n个矩阵相加，化简：

$$\triangle\mathbf{x} = -\sum_{i=0}^{n} \frac{V_iV_i^T}{(\lambda_i+\mu)}F' \tag{12}$$