

# paper reading

文章对比分析了对VI状态估计中的不可观的状态（gaude freedom）的3种不同操作：1. 将不可观的状态固定到特定的值，2. 在这些不可观状态设置先验，3. 任其在优化过程中自由演化。

## 1. 问题描述

V I 系统优化问题的目标函数（代价函数）：

$$J(\boldsymbol{\theta}) \doteq \underbrace{\|\mathbf{r}^V(\boldsymbol{\theta})\|_{\Sigma_V}^2}_{\text{Visual}} + \underbrace{\|\mathbf{r}^I(\boldsymbol{\theta})\|_{\Sigma_I}^2}_{\text{Inertial}},$$

待优化参数：

$$\boldsymbol{\theta} \doteq \{\mathbf{p}_i, \mathbf{R}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{X}_j\},$$

由于V I 系统的全局位置和yaw不可观，4个自由度。上述3种处理不可观状态方式对应的优化参数和H矩阵的维度：

TABLE I: Three gauge handling approaches considered. ( $n = 9N + 3K$  is the number of parameters in (2))

	Size of parameter vec.	Hessian (Normal eqs)
Fixed gauge	$n - 4$	inverse, $(n - 4) \times (n - 4)$
Gauge prior	$n$	inverse, $n \times n$
Free gauge	$n$	pseudoinverse, $n \times n$

## 2. 3种方式具体处理

第一种将不可观的状态固定，不参与优化。此时优化问题变成了在没有不可观状态的小参数空间进行优化，因此其优化问题的H矩阵是可逆的。这是一种非常强的约束。第二种是用额外的惩罚增加目标函数。第三种方式是使用奇异的H的伪逆隐式地附加约束。

### A. 前两种方式对于旋转参数的处理

在使用GN或者LM算法迭代优化过程中更新旋转变量的标准方法是在局部坐标系中：

$$\mathbf{R}^{q+1} = \text{Exp}(\delta\boldsymbol{\phi}^q)\mathbf{R}^q.$$

设定 $\delta\boldsymbol{\phi}^q$ 中关于z轴旋转的角度为0，则固定了关于 $\mathbf{R}^q$ 的yaw部分。

然而，连续几次旋转更新后，

$$\mathbf{R}^Q = \prod_{q=0}^{Q-1} \text{Exp}(\delta\phi^q) \mathbf{R}^0,$$

并不能保证 $\mathbf{R}^q$ 对 $\mathbf{R}^0$ 的yaw保持固定。虽然对于yaw的固定和先验，对于任意相机位姿都可以，但是通常的做法是相对于第一帧相机位姿。因此对于其他相机位姿，采用正常的左乘李群更新，对于第一帧相机位姿采用如下方式更新：

$$\mathbf{R}_0 = \text{Exp}(\Delta\phi_0) \mathbf{R}_0^0,$$

这里 $\Delta\phi_0$ 初始化为0。实际上 $\Delta\phi_0$ 模长为 $\pi$ 的时候有奇异值，但是当初始旋转向量的模长小于 $\pi$ 的时候，该方法是适用的，真实系统中大多数情况是这样，比如由视觉前端提供一个旋转。

### B.3种不同方式的处理

第一种固定不可观的状态：在整个优化过程中固定第一帧相机位姿的位置和yaw：

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0^0, \quad \Delta\phi_{0z} \doteq \mathbf{e}_z^\top \Delta\phi_0 = 0,$$

固定这些参数向量，等价于在残差对这些参数向量的雅各比矩阵的对应列设置为0。

第二种设定先验的方法是在原来的目标函数上加上一个惩罚：

$$\|\mathbf{r}_0^P\|_{\Sigma_0^P}^2, \quad \text{where} \quad \mathbf{r}_0^P(\boldsymbol{\theta}) \doteq (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_0^0, \Delta\phi_{0z}).$$

第三种是任其自由演化，为了处理 $H$ 矩阵的奇异问题，通常加上 $H$ 矩阵的伪逆或者阻尼因子(单位阵 $I$ )使得优化问题有一个比较好的参数更新。

### 3. 结论

- A.上述三种方式处理的结果，精度几乎一致
- B.第二种设置先验的方式，需要选择合适的先验权重，以避免计算量增加
- C.在适当的权重下，第二种设定先验的方式与第一种固定状态的方式有几乎相同的性能（精度和计算代价）
- D.第三种任其自由演化的方式，比其他两种方法稍快，因为需要更少的迭代次数就能收敛。

### 4. 关于3种方式的协方差比较

第三种自由演化处理方式的参数协方差与其他两种方式不同，不能直接以有意义的方式解释。但是可以通过一个线性转换：

The covariance from the free gauge approach  $\text{Cov}^*(\boldsymbol{\theta})$  at an estimate  $\boldsymbol{\theta}$  can be transformed into the covariance of a given gauge fixation  $\mathcal{C}$  (10) by the following formula [14]:

$$\text{Cov}(\boldsymbol{\theta}_C) \approx \left( \mathbb{Q}_{\boldsymbol{\theta}_C}^C \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_C}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) \text{Cov}^*(\boldsymbol{\theta}) \left( \mathbb{Q}_{\boldsymbol{\theta}_C}^C \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_C}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^{\top}, \quad (12)$$

将第三种自由演化的协方差转换为第二种固定状态的协方差。