给出代码的公式推导。

假设含有$\mathrm{n_T}$个相机，第i ($\mathrm{i}=1,2,\dots,\mathrm{n_T}$)个相机的位姿为$\mathbf{T}_\mathrm{i}=(\mathbf{R}_\mathrm{i}^{cw},\mathbf{C}_\mathbf{i}^{\boldsymbol{w}})$，其中$\mathbf{R}_\mathrm{i}^{cw}$为相机的旋转矩阵（从世界坐标系到相机坐标系），$\mathbf{C}_\mathbf{i}^{\boldsymbol{w}}$为相机光心在世界坐标系中的坐标。于是，该相机的平移向量$\mathbf{t}_\mathrm{i}=-\mathbf{R}_\mathrm{i}^{cw}\mathbf{C}_\mathbf{i}^{\boldsymbol{w}}$。假设总计$\mathrm{n_P}$个三维特征点，第$\mathrm{j}$ ($\mathrm{j}=1,2,\dots,\mathrm{n_P}$)个三维点记为$\mathbf{P}_\mathbf{j}^{\boldsymbol{w}}$。现在需要调整三维点坐标和相机位姿，因此状态变量为所有相机的位姿和所有三维特征点的坐标。采用 Bundle Adjustment 的方式，其优化问题为：

$$\min_{\mathbf{T}_\mathrm{i},\mathbf{P}_\mathbf{j}^{\boldsymbol{w}}}\sum_{\mathrm{ij}}\left\|\mathbf{e}_\mathrm{ij}\right\|_{\boldsymbol{\Sigma}}^2,$$

其中$\mathbf{e}_\mathrm{ij}=-\widehat{\mathbf{p}}_\mathrm{ij}+\overline{\mathbf{p}}_\mathrm{ij}$为重投影误差，$\boldsymbol{\Sigma}$为协方差矩阵（代码中为单位阵$\mathbf{I}_2$）。$\widehat{\mathbf{p}}_\mathrm{ij}$为三维点$\mathbf{P}_\mathbf{j}^{\boldsymbol{w}}$在相机$\mathbf{T}_\mathrm{i}$中的观测（二维特征点坐标），$\overline{\mathbf{p}}_\mathrm{ij}$为根据针孔相机成像模型$\mathbf{P}_\mathbf{j}^{\boldsymbol{w}}$在相机$\mathbf{T}_\mathrm{i}$中的预测坐标，也就是：

$$\lambda_\mathrm{ij}\begin{pmatrix}\overline{\mathbf{p}}_\mathrm{ij}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_x&&\\&f_y&\\&&1\end{pmatrix}\mathbf{R}_\mathrm{i}^{cw}\left(\mathbf{P}_\mathbf{j}^{\boldsymbol{w}}-\mathbf{C}_\mathbf{i}^{\boldsymbol{w}}\right),$$

其中$\mathrm{diag}\left(f_x,f_y,1\right)$为代码中的内参数矩阵。令$\mathbf{P}_\mathrm{ij}^{c}=\mathbf{R}_\mathrm{i}^{cw}\left(\mathbf{P}_\mathbf{j}^{\boldsymbol{w}}-\mathbf{C}_\mathbf{i}^{\boldsymbol{w}}\right)=(x,y,z)^\top$，于是容易得$\overline{\mathbf{p}}_\mathrm{ij}=\left(f_x x/z,f_y y/z\right)^\top$。

信息矩阵为$\mathbf{H}=\mathbf{J}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{J}$，$\mathbf{J}$为重投影误差向量对状态变量的 Jacobian 矩阵。为了计算$\mathbf{J}$，需要计算$\mathbf{J}_{\mathbf{T}_\mathrm{i}}=\frac{\partial\mathbf{e}_\mathrm{ij}}{\partial\mathbf{T}_\mathrm{i}}$和$\mathbf{J}_{\mathbf{P}_\mathrm{j}}=\frac{\partial\mathbf{e}_\mathrm{ij}}{\partial\mathbf{P}_\mathrm{j}}$：

$$\mathbf{J}_{\mathbf{P}_\mathrm{j}}=\frac{\partial\mathbf{e}_\mathrm{ij}}{\partial\mathbf{P}_\mathrm{j}}=\frac{\partial\overline{\mathbf{p}}_\mathrm{ij}}{\partial\mathbf{P}_\mathrm{j}}=\frac{\partial\overline{\mathbf{p}}_\mathrm{ij}}{\partial\mathbf{P}_\mathrm{ij}^{c}}\cdot\frac{\partial\mathbf{P}_\mathrm{ij}^{c}}{\partial\mathbf{P}_\mathrm{j}}=\begin{pmatrix}f_x/z&0&-f_x x/z^2\\0&f_y/z&-f_y y/z^2\end{pmatrix}\cdot\mathbf{R}_\mathrm{i}^{cw}$$

$$\mathbf{J}_{\mathbf{T}_\mathrm{i}}=\frac{\partial\mathbf{e}_\mathrm{ij}}{\partial\mathbf{T}_\mathrm{i}}=\frac{\partial\overline{\mathbf{p}}_\mathrm{ij}}{\partial\mathbf{T}_\mathrm{i}}=\frac{\partial\overline{\mathbf{p}}_\mathrm{ij}}{\partial\mathbf{P}_\mathrm{ij}^{c}}\cdot\frac{\partial\mathbf{P}_\mathrm{ij}^{c}}{\partial\mathbf{T}_\mathrm{i}}=\begin{pmatrix}f_x/z&0&-f_x x/z^2\\0&f_y/z&-f_y y/z^2\end{pmatrix}\cdot\frac{\partial\mathbf{P}_\mathrm{ij}^{c}}{\partial\mathbf{T}_\mathrm{i}}$$

参考《视觉 SLAM 十四讲》的 76 页，可得到$\frac{\partial\mathbf{P}_\mathrm{ij}^{c}}{\partial\mathbf{T}_\mathrm{i}}=\left(-\left[\mathbf{P}_\mathrm{ij}^{c}\right]_\times\quad\mathbf{I}_3\right)$（使用 SE(3)的左扰动，旋转在前，平移在后），于是

$$\mathbf{J}_{\mathbf{T}_\mathrm{i}}=\begin{pmatrix}\frac{f_x}{z}&0&-\frac{f_x x}{z^2}\\0&\frac{f_y}{z}&-\frac{f_y y}{z^2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&z&-y&1&&\\-z&0&x&&1&\\y&-x&0&&&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{f_x xy}{z^2}&\left(1+\frac{x^2}{z^2}\right)f_x&-\frac{f_x y}{z}&\frac{f_x}{z}&0&-\frac{f_x x}{z^2}\\-\left(1+\frac{y^2}{z^2}\right)f_y&\frac{f_y xy}{z^2}&\frac{f_y x}{z}&0&\frac{f_y}{z}&-\frac{f_y y}{z^2}\end{pmatrix}$$

所以，$\mathbf{H}=\mathbf{J}^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{J}=\sum_{ij}\mathbf{J}_\mathrm{ij}^\top\mathbf{J}_\mathrm{ij}$。不考虑$\mathbf{J}_\mathrm{ij}$中零矩阵的位置，有

$$\mathbf{J}_\mathrm{ij}^\top\mathbf{J}_\mathrm{ij}=\begin{pmatrix}\mathbf{J}_{\mathbf{T}_\mathrm{i}}^\top\\\mathbf{J}_{\mathbf{P}_\mathrm{j}}^\top\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{J}_{\mathbf{T}_\mathrm{i}}&\mathbf{J}_{\mathbf{P}_\mathrm{j}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{J}_{\mathbf{T}_\mathrm{i}}^\top\mathbf{J}_{\mathbf{T}_\mathrm{i}}&\mathbf{J}_{\mathbf{T}_\mathrm{i}}^\top\mathbf{J}_{\mathbf{P}_\mathrm{j}}\\\mathbf{J}_{\mathbf{P}_\mathrm{j}}^\top\mathbf{J}_{\mathbf{T}_\mathrm{i}}&\mathbf{J}_{\mathbf{P}_\mathrm{j}}^\top\mathbf{J}_{\mathbf{P}_\mathrm{j}}\end{pmatrix}。$$