VINS on wheels

正如我们所知，VINS有 4 个不可观的自由度，包括全局位置(x, y, z) 3 个自由度，yaw角。但是对于平面机器人的某些特殊运动，会增加额外不可观的自由度。比如尺度等。为了提高VINS对于轮式机器人的性能，通过融合两个额外的信息源：（1）里程计的测量（2）平面运动的约束。

轮式里程计提供低频，经常有噪声，只有间歇性可靠的轮子运动测量。另一方面，这些测量包含在匀加速运动下对提高VINS精度有用的尺度信息。

根据轮式里程计的数据可以得到局部2D的线性速度和旋转角速度：

$$v = \frac{r_l w_l + r_r w_r}{2}, w = \frac{r_r w_r - r_l w_l}{a} \tag{1}$$

这里w_l, w_r分别是左右轮的旋转速度，r_l, r_r分别是左右轮的半径，a表示左右轮的间距(baseline)。

里程计的线速度测量包含绝对尺度信息，因此里程计数据不仅改善了VINS的定位精度，还提供了在机器人匀加速运动导致VINS的尺度不可观时，VINS的尺度信息。为了用一种鲁棒的方式处理含噪声的里程计数据，而不是像式(1)那样用作速度更新，作者提出了将里程计数据积分并将产生的 2 D的位移估计融合到 3 D VINS中。

1.测量模型推导

假设连续两次里程计读数，运动是平面的。因此在连续两帧里程计之间的转换包含一个绕z轴的旋转角度$\phi_{O_k}^{O_{k+1}}$得到的主轴旋转$C_{O_{k+1}}^{O_k}$和$x-y$平面的平移$p_{O_k}^{O_{k+1}}$，这通过积分里程计的线速度和旋转角速度得到。

$$C_{O_{k+1}}^{O_k} = C_z(\phi_{O_k}^{O_{k+1}}) \tag{2}$$

$$\phi_k = \phi_{O_k}^{O_{k+1}} + n_\phi \tag{3}$$

$$\boldsymbol{d}_k = \Lambda \boldsymbol{p}_{O_k}^{O_{k+1}} + \boldsymbol{n}_d, \Lambda = [\boldsymbol{e}_1 \ \boldsymbol{e}_2]^T \tag{4}$$

这里$[n_\phi \ \boldsymbol{n}_d^T]^T$是一个$3 \times 1$的零均值高斯噪声向量，$\boldsymbol{e}_1 = [1, 0, 0]^T, \boldsymbol{e}_2 = [0, 1, 0]^T$，　Λ是一个2×3的向量。

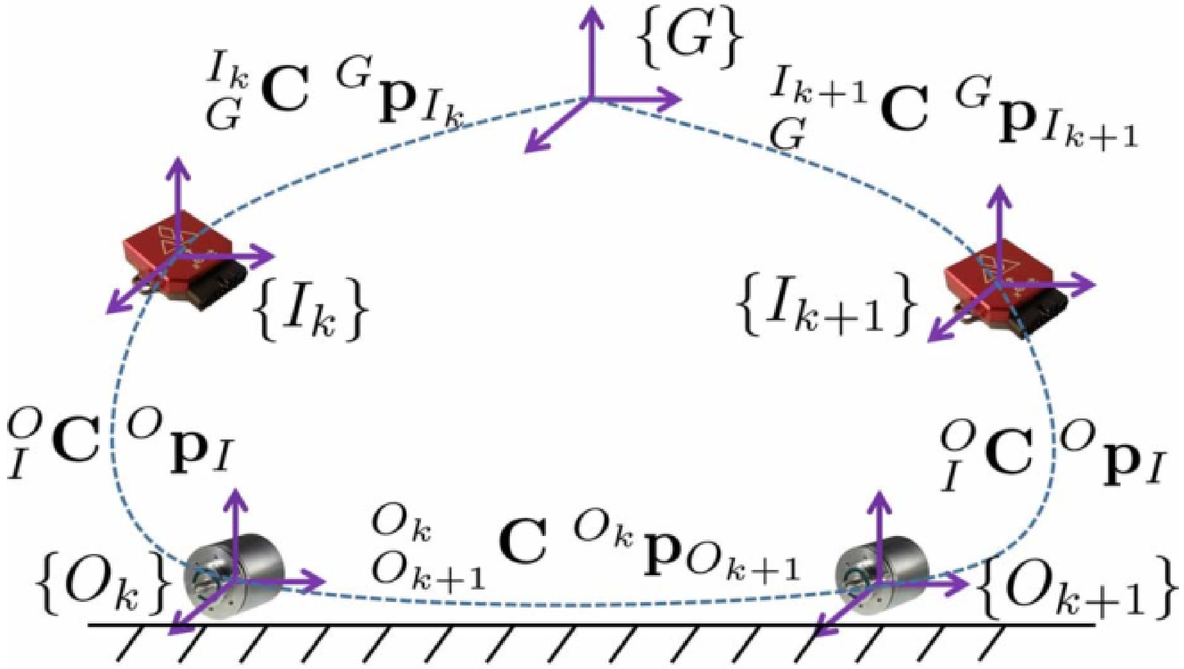

Fig. 1. Geometric relation between the IMU, $\{I\}$, and odometer, $\{O\}$, frames when the robot moves from time step k to $k+1$.

如上图所示，连续两帧里程计之间的转换可以推导如下，注意都是从时刻k到时刻$k+1$：

旋转部分：

$$C^{O_k}_{O_{k+1}} = C^O_I C^{I_k}_G (C^{I_{k+1}}_G)^T (C^O_I)^T \tag{5}$$

平移部分： $p^{O_{k+1}}_{O_k}$表示从O_k指向O_{k+1}的向量，根据图１的位姿转换关系，推导如下：

$$p^{O_{k+1}}_{O_k} = p^I_O + C^O_I p^{O_{k+1}}_{I_k} \tag{6}$$

又因为

$$p^{I_{k+1}}_{I_k} = p^{O_{k+1}}_{I_k} + C^{I_k}_{O_{k+1}} p^I_O \tag{7}$$

所以有

$$p^{O_{k+1}}_{I_k} = p^{I_{k+1}}_{I_k} - C^{I_k}_{O_{k+1}} p^I_O \tag{8}$$

将式(８)代入式(6)可得：

$$p_{O_k}^{O_{k+1}} = p_O^I + C_I^O(p_{I_k}^{I_{k+1}} - C_{O_{k+1}}^{I_k} p_O^I) \tag{9}$$

又因为G系的存在，将$p_{I_k}^{I_{k+1}}$表示到I_k上,

$$p_{I_k}^{I_{k+1}} = C_G^{I_k}(p_G^{I_{k+1}} - p_G^{I_k}) \tag{10}$$

并将$C_{O_{k+1}}^{I_k}$根据旋转关系可得：

$$C_{O_{k+1}}^{I_k} = C_G^{I_k}(C_G^{I_{k+1}})^T(C_I^O)^T \tag{11}$$

因此将式(11)(10)代入式(9)，将$C_G^{I_k}$提出括号，整理可得：

$$p_{O_k}^{O_{k+1}} = p_O^I + C_I^O C_G^{I_k}(p_G^{I_{k+1}} - p_G^{I_k} - (C_G^{I_{k+1}})^T(C_I^O)^T p_O^I) \tag{12}$$

其中C_I^O和p_O^I表示从imu到odom的外参。

2.雅各比和残差推导

根据上面推导的测量模型，分别对旋转和平移求残差和雅各比：

旋转部分：由于式(2)和式(5)相等，并在旋转矩阵中利用小角度近似，得到误差方程(四元数残差转成角轴残差,最终转到里程计坐标系上)：

$$\delta\boldsymbol{\phi} = C_I^O\delta\boldsymbol{\theta}_{I_k} - C_I^O\hat{C}_G^{I_k}(\hat{C}_G^{I_{k+1}})^T\delta\boldsymbol{\theta}_{I_{k+1}} - n_\phi\boldsymbol{e}_3 \tag{13}$$

其中有

$$\lfloor\delta\boldsymbol{\phi}\rfloor_\times = \mathrm{I}_3 - C_z(\phi_k)(\hat{C}_{O_{k+1}}^{O_k})^T$$

$$\hat{C}_{O_{k+1}}^{O_k} = C_I^O\hat{C}_G^{I_k}(\hat{C}_G^{I_{k+1}})^T(C_I^O)^T \tag{14}$$

这里$\hat{C}$表示旋转矩阵的估计，并且$\delta\boldsymbol{\theta}$是对应四元数参数化的误差状态，(参考《后端非线性优化》式(13), 应该是说的扰动，对扰动求导)，$C_z(\phi_k)$表示测量，$\hat{C}_{O_{k+1}}^{O_k}$表示预测(估计)。向量$\delta\boldsymbol{\phi}$的第三项表示测量和估计之间平面旋转的角度误差。在式(15)上左乘$\boldsymbol{e}_3^T$得到残差，是个标量：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_3^T\delta\boldsymbol{\phi} \tag{15}$$

残差对误差状态求雅各比矩阵：

$$\mathrm{H}_{\delta\theta_{I_k}} = \boldsymbol{e}_3^T C_I^O, \mathrm{H}_{\delta\theta_{I_{k+1}}} = -\boldsymbol{e}_3^T C_I^O \hat{C}_G^{I_k} (\hat{C}_G^{I_{k+1}})^T \quad (16)$$

平移部分：将式(12)代入式(4)中，得到残差：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{d}_k - \Lambda(\boldsymbol{p}_O^I + C_I^O \boldsymbol{\xi}) \quad (17)$$

其中

$$\boldsymbol{\xi} = \hat{C}_G^{I_k} (\hat{p}_G^{I_{k+1}} - \hat{p}_G^{I_k} - (\hat{C}_G^{I_{k+1}})^T (\hat{C}_I^O)^T p_O^I)$$

对$p_{I_{k+1}}^G$， $p_{I_k}^G$求雅各比，跟上式$\hat{p}_G^{I_{k+1}}$，$\hat{p}_G^{I_k}$符号相反：

$$\mathrm{H}_{p_{I_k}} = -\Lambda C_O^I \hat{C}_G^{I_k}, \quad \mathrm{H}_{p_{I_{k+1}}} = \Lambda C_O^I \hat{C}_G^{I_k} \quad (18)$$

对$\delta\theta_{I_k}$求雅各比，需要将参考坐标系转到I_k，省略掉不相关的部分：

$$\mathrm{H}_{\delta\theta_{I_k}} = \frac{\partial r}{\partial \delta\theta_{I_k}} = \lim_{\delta\theta_{I_k}\to 0} \frac{-\Lambda C_I^O (\hat{C}_{I_k}^G \exp([\delta\theta_{I_k}]_\times))^T (\hat{p}_G^{I_{k+1}} - \hat{p}_G^{I_k} - (\hat{C}_G^{I_{k+1}})^T (\hat{C}_I^O)^T p_O^I)}{\delta\theta_{I_k}}$$

$$= \lim_{\delta\theta_{I_k}\to 0} \frac{-\Lambda C_I^O (I - [\delta\theta_{I_k}]_\times) \hat{C}_G^{I_k} (\hat{p}_G^{I_{k+1}} - \hat{p}_G^{I_k} - (\hat{C}_G^{I_{k+1}})^T (\hat{C}_I^O)^T p_O^I)}{\delta\theta_{I_k}}$$

$$= \lim_{\delta\theta_{I_k}\to 0} \frac{-\Lambda C_I^O [\delta\theta_{I_k}]_\times \hat{C}_G^{I_k} (\hat{p}_G^{I_{k+1}} - \hat{p}_G^{I_k} - (\hat{C}_G^{I_{k+1}})^T (\hat{C}_I^O)^T p_O^I)}{\delta\theta_{I_k}}$$

$$= \lim_{\delta\theta_{I_k}\to 0} \frac{\Lambda C_I^O [\boldsymbol{\xi}]_\times \delta\theta_{I_k}}{\delta\theta_{I_k}}$$

$$= \Lambda C_I^O [\boldsymbol{\xi}]_\times \quad (19)$$

对$\delta\theta_{I_{k+1}}$求雅各比，需要将参考坐标系转到I_{k+1}，并省略掉不相关的部分：

$$\mathrm{H}_{\delta\theta_{I_{k+1}}} = \frac{\partial r}{\partial \delta\theta_{I_{k+1}}} = \lim_{\delta\theta_{I_{k+1}} \to 0} \frac{-\Lambda C_I^O \hat{C}_G^{I_k} (\hat{p}_G^{I_{k+1}} - \hat{p}_G^{I_k} - (\hat{C}_G^{I_{k+1}})^T \exp[\delta\theta_{I_{k+1}}]_\times (\hat{C}_I^O)^T p_O^I)}{\delta\theta_{I_{k+1}}}$$

$$= \lim_{\delta\theta_{I_{k+1}} \to 0} \frac{-\Lambda C_I^O \hat{C}_G^{I_k} (\hat{p}_G^{I_{k+1}} - \hat{p}_G^{I_k} - \hat{C}_{I_{k+1}}^G (I + [\delta\theta_{I_{k+1}}]_\times)(\hat{C}_I^O)^T p_O^I)}{\delta\theta_{I_{k+1}}}$$

$$= \lim_{\delta\theta_{I_{k+1}} \to 0} \frac{\Lambda C_I^O \hat{C}_G^{I_k} \hat{C}_{I_{k+1}}^G [\delta\theta_{I_{k+1}}]_\times (\hat{C}_I^O)^T p_O^I}{\delta\theta_{I_{k+1}}}$$

$$= \lim_{\delta\theta_{I_{k+1}} \to 0} \frac{-\Lambda C_I^O \hat{C}_G^{I_k} \hat{C}_{I_{k+1}}^G [(\hat{C}_I^O)^T p_O^I]_\times \delta\theta_{I_{k+1}}}{\delta\theta_{I_{k+1}}}$$

$$= -\Lambda C_I^O \hat{C}_G^{I_k} \hat{C}_{I_{k+1}}^G [(\hat{C}_I^O)^T p_O^I]_\times$$

$$= -\Lambda C_I^O \hat{C}_G^{I_k} (\hat{C}_G^{I_{k+1}})^T [(\hat{C}_I^O)^T p_O^I]_\times \qquad (20)$$

3.约束信息融合进VINS

已知具体的运动约束信息，可以提供有助于改善VINS定位精度的额外信息。一个运动流形可以在数学上表示为一个几何约束，$\boldsymbol{g}(\mathrm{x}) = \mathbf{0}$，这里的$\boldsymbol{g}$通常是状态x的非线性函数。有两种方式把这种约束信息结合到VINS中去。

3.1 确定约束

一个标准的VINS估计器(滤波或者优化的)优化一个代价函数$\mathcal{C}(\mathrm{x})$，其来自于传感器的信息(imu,相机，码盘等)，然而运动流形被描述成优化问题的一种确定约束：

$$\min \ \mathcal{C}(\mathrm{x}) \, , s.t. \, \boldsymbol{g}(\mathrm{x}) = \mathbf{0} \qquad (21)$$

对于VINS而言，代价函数利用非线性最小二乘，上式可以通过高斯牛顿法迭代求解。

3.2 随机约束

实际上，运动流形从不准确地满足，当机器人在平面行走时，roll和pitch角是随着时间变化的。为了考虑平面的不确定性，需要将运动模型建立成一个随机约束$\boldsymbol{g}(\mathrm{x})=\boldsymbol{n}$，这里$\boldsymbol{n}$假设为一个 0 均值高斯白噪声，其协方差为$\mathrm{R}$，并把这个随机约束信息当做另一个代价融合到代价函数中去：

$$\min\ \mathcal{C}(\mathrm{x})+||\boldsymbol{g}(\mathrm{x})||^2_{\mathrm{R}} \tag{22}$$

注意上式(22)可以用标准的VINS估计器求解。更多的是，这种随机约束相比确定约束对于排除outliers的错误信息更具有灵活性。特别的，使用马氏距离检测那些最不可能满足平面约束的情况，比如当机器人过坎时，临时删除约束。

3.3 对应平面的特殊流形

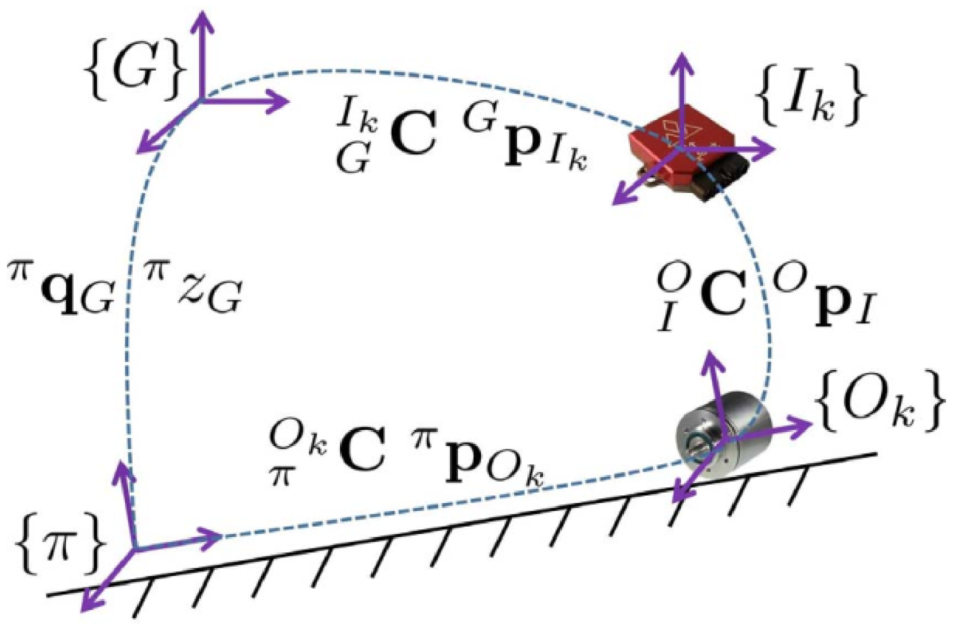

Fig. 3. Geometric relationship between the IMU, $\{I\}$, odometer, $\{O\}$, and plane, $\{\pi\}$, frames when the robot moves on the plane, at time step k.

平面坐标系$\{\pi\}$的$x-y$平面与物理平面重合，并用一个 2 自由的四元数参数化这个平面，q_G^π，表示平面坐标系和全局坐标系的旋转，z_π^G表示全局坐标系远点到平面的垂直距离。四元数q_G^π的误差状态被定义为一个2×1的向量$\delta\theta_\pi$，所以状态误差$\delta q\equiv[\frac{1}{2}\delta\theta_\pi^T\ 0\ 1]^T$。注意这里的参数化认为在3D平面有 3 个自由度。如图 3 所示。

推导如下：

旋转部分用 2 个自由度约束(2×1的向量)，这里不是位姿中，旋转的表示方式$C_{O_k}^\pi$,仅表示一个旋转约束(roll,pitch角度约束)：

$$C_\pi^{O_k} = \Lambda C_I^O C_G^{I_k}(C_G^\pi)^T \mathrm{e}_3 = 0 \tag{23}$$

平移部分,垂直距离为 0 ,先以全局坐标系G为参考系：

$$p_G^{I_k} = p_G^{O_k} + C_{O_k}^G p_O^I$$
$$= p_G^{O_k} + (C_G^{I_k})^T (C_I^O)^T p_O^I$$

所以有得到坐标系O在全局坐标系中的平移：

$$p_G^{O_k} = p_G^{I_k} - (C_G^{I_k})^T (C_I^O)^T p_O^I$$

通过旋转将参考坐标系从G转换到坐标系π,然后选取z坐标，得到O_k在平面π上的垂直距离：

$$\mathrm{e}_3^T C_G^\pi (p_G^{I_k} - (C_G^{I_k})^T (C_I^O)^T p_O^I)$$

所以平面π上的垂直距离约束为：

$$\mathrm{e}_3^T C_G^\pi (p_G^{I_k} - (C_G^{I_k})^T (C_I^O)^T p_O^I) = 0 \tag{24}$$

最后将里程计坐标系O在平面运动的几何约束表示为：

$$\boldsymbol{g}(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} \Lambda C_I^O C_G^{I_k} (C_G^\pi)^T \mathrm{e}_3 \\ z_\pi^G + \mathrm{e}_3^T C_G^\pi (p_G^{I_k} - (C_G^{I_k})^T (C_I^O)^T P_O^I) \end{bmatrix} = 0 \tag{25}$$

其中，垂直方向的约束还加上了平面和全局坐标系的垂直距离。

接下来推导下平面运动模型的雅各比，

旋转部分：

对$\delta\theta_{I_k}$求雅各比，将参考坐标系转到I_k，省略掉不必要的部分:

$$\mathrm{H}_{\delta\theta_{I_k}} = \frac{\partial r}{\partial \delta\theta_{I_k}} = \lim_{\delta\theta_{I_k}\to 0} \frac{\Lambda C_I^O (C_{I_k}^G \exp([\delta\theta_{I_k}]_\times))^T (C_G^\pi)^T \mathrm{e}_3}{\delta\theta_{I_k}}$$

$$= \lim_{\delta\theta_{I_k}\to 0} \frac{\Lambda C_I^O (I - [\delta\theta_{I_k}]_\times) C_G^{I_k} (C_G^\pi)^T \mathrm{e}_3}{\delta\theta_{I_k}}$$

$$= \lim_{\delta\theta_{I_k}\to 0} \frac{-\Lambda C_I^O [\delta\theta_{I_k}]_\times C_G^{I_k} (C_G^\pi)^T \mathrm{e}_3}{\delta\theta_{I_k}}$$

$$= \lim_{\delta\theta_{I_k}\to 0} \frac{\Lambda C_I^O [C_G^{I_k} (C_G^\pi)^T \mathrm{e}_3]_\times \delta\theta_{I_k}}{\delta\theta_{I_k}}$$

$$= \Lambda C_I^O [C_G^{I_k} (C_G^\pi)^T \mathrm{e}_3]_\times \tag{26}$$

对$\delta\theta_\pi$求雅各比，将参考坐标系转到π，省略掉不必要的部分:

$$\mathrm{H}_{\delta\theta_\pi} = \frac{\partial r}{\partial \delta\theta_{I_k}} = \lim_{\delta\theta_\pi\to 0} \frac{\Lambda C_I^O C_G^{I_k} C_\pi^G \exp([\delta\theta_\pi]_\times)\mathrm{e}_3}{\delta\theta_\pi}$$

$$= \lim_{\delta\theta_\pi\to 0} \frac{\Lambda C_I^O C_G^{I_k} C_\pi^G (I + [\delta\theta_\pi]_\times)\mathrm{e}_3}{\delta\theta_\pi}$$

$$= \lim_{\delta\theta_\pi\to 0} \frac{\Lambda C_I^O C_G^{I_k} C_\pi^G [\delta\theta_\pi]_\times \mathrm{e}_3}{\delta\theta_\pi}$$

$$= \lim_{\delta\theta_\pi\to 0} \frac{-\Lambda C_I^O C_G^{I_k} C_\pi^G [\mathrm{e}_3]_\times \delta\theta_\pi}{\delta\theta_\pi}$$

$$= \Lambda C_I^O C_G^{I_k} C_\pi^G [-\mathrm{e}_3]_\times$$

注意这里有点问题，$\Lambda C_I^O C_G^{I_k} C_\pi^G [\mathrm{e}_3]_\times$是一个$2\times 3$的矩阵，但是残差$\Lambda C_I^O C_G^{I_k} (C_G^\pi)^T \mathrm{e}_3$是$2\times 1$的向量是 2 维的，$\pi$也是一个 2 自由度的参数，所以$\mathrm{H}_{\delta\theta_\pi}$应该是一个$2\times 2$的矩阵。分析下$[-\mathrm{e}_3]_\times$:

$$[\mathrm{e}_3]_\times = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

取左边两列，得到一个3×2的矩阵：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [-\mathrm{e}_2 \ \mathrm{e}_1]$$

因此最终得到一个2×2的雅各比矩阵：

$$\mathrm{H}_{\delta\theta_\pi} = \Lambda C_I^O C_G^{I_k} (C_G^\pi)^T [-\mathrm{e}_2 \ \mathrm{e}_1] \tag{27}$$

平移部分：

对$\delta\theta_{I_k}$求雅各比，将参考坐标系转到I_k:

$$\mathrm{H}_{\delta\theta_{I_k}} = \frac{\partial r}{\partial\delta\theta_{I_k}} = \lim_{\delta\theta_{I_k}\to 0} \frac{\mathrm{e}_3^T C_G^\pi (p_G^{I_k} - C_{I_k}^G \exp([\delta\theta_{I_k}]_\times)(C_I^O)^T P_O^I)}{\delta\theta_{I_k}}$$

$$= \lim_{\delta\theta_{I_k}\to 0} \frac{\mathrm{e}_3^T C_G^\pi (p_G^{I_k} - C_{I_k}^G \exp([\delta\theta_{I_k}]_\times)(C_I^O)^T P_O^I)}{\delta\theta_{I_k}}$$

$$= \lim_{\delta\theta_{I_k}\to 0} \frac{\mathrm{e}_3^T C_G^\pi (p_G^{I_k} - C_{I_k}^G (I + [\delta\theta_{I_k}]_\times)(C_I^O)^T P_O^I)}{\delta\theta_{I_k}}$$

$$= \lim_{\delta\theta_{I_k}\to 0} \frac{-\mathrm{e}_3^T C_G^\pi C_{I_k}^G [\delta\theta_{I_k}]_\times (C_I^O)^T P_O^I}{\delta\theta_{I_k}}$$

$$= \lim_{\delta\theta_{I_k}\to 0} \frac{\mathrm{e}_3^T C_G^\pi C_{I_k}^G [(C_I^O)^T P_O^I]_\times \delta\theta_{I_k}}{\delta\theta_{I_k}}$$

$$= \mathrm{e}_3^T C_G^\pi C_{I_k}^G [(C_I^O)^T P_O^I]_\times \tag{28}$$

对$\delta\theta_\pi$求雅各比，将

对$p_{\pi}^{I_k}$和z_{π}^{G}求雅各比，这个参考坐标系上面已经转到平面π：

$$\mathrm{H}_{p_{I_k}} = \mathrm{e}_3^T C_G^{\pi},\ \mathrm{H}_{z_G} = 1 \tag{30}$$