

Hybrid Optimization in Photoacoustic Image Reconstruction: Integrating NSGA-III and Tikhonov Regularization

by

Maximiliano Galindo
Author Qualifications

Submitted in fulfilment of the requirements for the degree of
Master of Science

Universidad Nacional Autónoma de México
November 2021

Abstract

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Finishing a PhD is like moving a mountain. Luckily, you only have to move one rock at a time.

(Reddit somewhere: pg. ??)

Acknowledgements

(this section is presently blank)

Contribution statement

Declaration by author

(this section is presently incomplete)

Supervisors

Title. Supervisor One¹, Title. Supervisor Two², Title. Supervisor Three¹, and Title. Supervisor Four^{3,4}

¹A *long* affiliation (e.g., School)
allows for three (e.g., Faculty)
lines to be specified (e.g., Institution)

²A *short* affiliation (e.g., Department)
only has two (e.g., Company)

³A supervisor may have
multiple affiliations

⁴An affiliation may be used by
multiple supervisors

List of publications

(this section is presently incomplete)

Publications included in this thesis

(to be completed)

Submitted manuscripts included in this thesis

(to be completed)

Other publications during candidature

(to be completed)

Contents

List of Figures

List of Tables

Chapter 1

Introduction

1.1 Imágenes Fotoacústicas

La generación de imágenes utilizando el efecto fotoacústico se ha establecido como una técnica no invasiva valiosa para investigar la composición y estructura de diversos materiales. Este método combina el alto contraste de las imágenes ópticas con la penetración profunda de la detección ultrasónica, lo que lo hace especialmente relevante en aplicaciones biomédicas. El efecto fotoacústico ocurre cuando un material fotoabsorbente absorbe pulsos de luz, lo que genera aumentos localizados de temperatura y, posteriormente, cambios de presión mecánica. Estas ondas de presión se propagan como señales fotoacústicas, las cuales son detectadas por transductores ultrasónicos para crear imágenes.

Las aplicaciones de las imágenes fotoacústicas abarcan diversos campos, con especial importancia en la investigación y el diagnóstico biomédico. Se utilizan ampliamente para evaluar estructuras arteriales, monitorear los niveles de oxigenación tisular, realizar endoscopias gastrointestinales y llevar a cabo imágenes *in vivo* de procesos moleculares y celulares en modelos experimentales. Además, las imágenes fotoacústicas han demostrado ser útiles para estudiar el cerebro y sus funciones en animales, proporcionando información tanto en estados saludables como patológicos.

La reconstrucción de imágenes a partir de señales fotoacústicas requiere un modelado preciso y técnicas computacionales avanzadas. Métodos como la Reversión Temporal, el algoritmo de Retardo y Suma, y las técnicas de Regularización son ampliamente utilizados. Sin embargo, estos métodos enfrentan desafíos debido a la naturaleza mal condicionada del problema de reconstrucción, donde pequeños errores en los datos pueden resultar en grandes desviaciones en las imágenes reconstruidas.

Esta investigación introduce un enfoque novedoso para la reconstrucción de imágenes fotoacústicas, cambiando el enfoque de los métodos tradicionales de regularización hacia la optimización multi-objetivo. Al aprovechar algoritmos evolutivos, este enfoque explora un conjunto diverso de soluciones sin la necesidad de predefinir un parámetro de regularización óptimo. La cuidadosa selección de los objetivos permite equilibrar restricciones en competencia, como la precisión, la estabilidad y el realismo físico en el proceso de reconstrucción.

1.1.1 Preguntas de Investigación

La naturaleza mal condicionada del problema de reconstrucción en las imágenes fotoacústicas plantea preguntas críticas sobre cómo equilibrar mejor las compensaciones entre precisión, esta-

bilidad y plausibilidad física de las soluciones. Esta investigación busca responder a la siguiente pregunta principal:

¿Cómo puede la optimización multiobjetivo mejorar la estimación de los parámetros de regularización en la reconstrucción de imágenes fotoacústicas, y cómo se compara esto con los métodos tradicionales como la curva-L?

A partir de esta pregunta, el estudio aborda las siguientes subpreguntas:

- RQ1: *¿Cuáles son las limitaciones del método de la curva-L para estimar parámetros de regularización óptimos en la reconstrucción de imágenes fotoacústicas?*
- RQ2: *¿Cómo pueden los algoritmos de optimización multiobjetivo como NSGA-II mejorar la estimación del parámetro de regularización λ ?*
- RQ3: *¿Qué impacto tiene la introducción de objetivos adicionales, como la penalización de la negatividad, en la calidad de las imágenes reconstruidas?*
- RQ4: *¿Cómo se comparan las soluciones obtenidas mediante optimización multiobjetivo en rendimiento e interpretabilidad con las derivadas de métodos tradicionales de un solo objetivo?*

1.1.2 Contribuciones

Esta investigación aporta las siguientes contribuciones clave:

- C1: Desarrollo de un marco de optimización multiobjetivo para estimar el parámetro de regularización λ en la reconstrucción de imágenes fotoacústicas.
- C2: Introducción y análisis de objetivos adicionales, como la penalización de valores negativos en la solución reconstruida, para mejorar el realismo físico.
- C3: Análisis comparativo de las soluciones basadas en NSGA-II frente a los métodos tradicionales de la curva-L, destacando fortalezas y debilidades.
- C4: Evaluación integral de frentes de Pareto para visualizar las compensaciones entre objetivos en competencia en la reconstrucción de imágenes.
- C5: Implementación de un *pipeline* reproducible para la generación de datos sintéticos y evaluación de métodos de reconstrucción.
- C6: Identificación de correlaciones y dependencias entre objetivos de reconstrucción, guiando mejoras algorítmicas futuras.

1.2 Reconstrucción de Imágenes

Desafíos de Problemas Mal Condicionados

Se discuten los desafíos matemáticos al resolver $y = \mathbf{H}d + \mathbf{w}$, particularmente cuando \mathbf{H} está mal condicionada. Se resalta el papel de la regularización para estabilizar las soluciones.

Métodos Existentes

Se proporciona una visión general de la regularización de Tikhonov, el método de la curva-L y sus limitaciones en aplicaciones prácticas.

1.3 Optimización Multiobjetivo

Algoritmos Evolutivos en Problemas Inversos

Se introduce NSGA-II y su aplicabilidad en la optimización multiobjetivo. Se discute cómo genera soluciones diversas que representan compensaciones entre objetivos en competencia.

Objetivos en Imágenes Fotoacústicas

Se detallan los objetivos utilizados en esta investigación:

- Minimización del residual.
- Regularización para la estabilidad de la solución.
- Penalización de valores negativos.

1.4 Visión General

Este reporte organiza los avances logrados en la aplicación de la optimización multiobjetivo a la reconstrucción de imágenes fotoacústicas en los siguientes capítulos:

Capítulo 1: Introducción a la Reconstrucción de Imágenes Fotoacústicas y Metodologías de Optimización Multiobjetivo.

Capítulo 2: Optimización Multiobjetivo para la Estimación del Parámetro de Regularización en Reconstrucción de Imágenes Fotoacústicas.

Capítulo 3: Análisis Comparativo de NSGA-II y Métodos Tradicionales de Curva-L.

Capítulo 4: Correlación y Dependencia entre Objetivos en Reconstrucción de Imágenes Fotoacústicas.

Cada capítulo desarrolla de manera detallada los métodos, análisis y resultados relacionados con su respectivo enfoque, integrando el marco teórico con los experimentos realizados y discutiendo las implicaciones de los hallazgos.

Chapter 2

Literature review

2.1 Revisión de Literatura

2.1.1 Reconstrucción de Imágenes Fotoacústicas

La imagen fotoacústica combina los principios de la óptica y la acústica para generar imágenes a partir de señales ultrasónicas. Estas señales son producidas por materiales que absorben pulsos de luz, lo que genera un aumento de temperatura y ondas de presión mecánica detectables por transductores ultrasónicos. Esta técnica es ampliamente utilizada en aplicaciones biomédicas, como la evaluación de tejidos arteriales, la monitorización de oxigenación tisular y estudios cerebrales in vivo en modelos animales [?].

El proceso de reconstrucción de imágenes implica la captura y análisis de las señales registradas por sensores. Entre los métodos clásicos se encuentran *Time Reversal* y *Delay and Sum*, conocidos por su rapidez pero limitados frente a ruido y problemas mal condicionados. En este contexto, la regularización de Tikhonov se ha convertido en una herramienta esencial para estabilizar los problemas mal planteados [?].

2.1.2 Modelo de Espacio de Estados Lineales para la Reconstrucción Fotoacústica

El problema de reconstrucción puede formularse como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{d} + \mathbf{w}, \quad (2.1)$$

donde \mathbf{y} representa las mediciones, \mathbf{H} es la matriz de propagación acústica, \mathbf{d} el vector de absorción y \mathbf{w} un término de ruido. Resolver este sistema frecuentemente requiere técnicas avanzadas debido a su sensibilidad al ruido y a la naturaleza mal condicionada de \mathbf{H} [?].

2.1.3 Regularización de Tikhonov y el Método de la Curva L

La regularización de Tikhonov introduce un término de penalización para estabilizar la solución:

$$\hat{\mathbf{d}} = \arg \min_{\mathbf{d}} \{ \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{d}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{d}\|_2^2 \}, \quad (2.2)$$

donde λ controla el equilibrio entre fidelidad a los datos y estabilidad de la solución [?].

El método de la curva L selecciona λ graficando la norma del residuo contra la norma de regularización en escala logarítmica. El vértice de la curva representa el mejor compromiso entre ambos criterios [?]. Sin embargo, esta metodología puede ser subjetiva y computacionalmente costosa en problemas de alta dimensionalidad.

2.2 Métodos de Optimización Multi-Objetivo

2.2.1 Introducción a la Optimización Multi-Objetivo

La optimización multi-objetivo busca soluciones que equilibren múltiples criterios simultáneamente. En la reconstrucción fotoacústica, los objetivos típicos incluyen minimizar el residuo y garantizar la estabilidad de la solución, generando un frente de Pareto que representa compromisos entre estos objetivos [?].

2.2.2 NSGA-II en la Reconstrucción Fotoacústica

NSGA-II es un algoritmo evolutivo diseñado para problemas multi-objetivo. Este método clasifica soluciones en términos de dominancia y promueve la diversidad del frente de Pareto [?]. Su capacidad para manejar múltiples objetivos simultáneamente lo hace ideal para explorar alternativas en la estimación del parámetro de regularización y mejorar la reconstrucción.

2.3 Desafíos y Limitaciones

A pesar de los avances, la reconstrucción de imágenes fotoacústicas enfrenta desafíos significativos:

- Sensibilidad al ruido en las mediciones.
- Dificultad para determinar un valor óptimo de λ en escenarios complejos.
- Limitaciones computacionales en técnicas tradicionales como la curva L.

Este trabajo aborda estas limitaciones mediante el uso de NSGA-II para explorar un conjunto de soluciones que optimizan objetivos múltiples, incluyendo la positividad y la estabilidad, superando las limitaciones de métodos tradicionales como el de la curva L.

Chapter 3

Methodology

3.1 Generación de Datos Sintéticos

Los experimentos realizados en este estudio se basan en datos sintéticos generados utilizando el Modelo de Espacio de Estados Lineales descrito en la Sección ???. Este enfoque permite controlar de manera precisa el nivel de ruido (σ) y la cantidad de muestras, proporcionando un entorno controlado para evaluar la efectividad de los métodos propuestos.

El problema subyacente de reconstrucción se formula como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{d} + \mathbf{w}, \quad (3.1)$$

donde:

- \mathbf{y} : Mediciones simuladas obtenidas a partir del modelo,
- \mathbf{H} : Matriz del sistema que modela la propagación acústica,
- \mathbf{d} : Vector que describe las propiedades de absorción,
- \mathbf{w} : Ruido con distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

El vector μ , que describe el perfil de absorción, se calcula a partir de \mathbf{d} utilizando relaciones del modelo físico descritas en la Sección ???

3.1.1 Regularización de Tikhonov

La regularización de Tikhonov se emplea para estabilizar la solución de este problema mal condicionado. La formulación matemática se expresa como:

$$\hat{\mathbf{d}} = \arg \min_{\mathbf{d}} \{ \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{d}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{d}\|_2^2 \}, \quad (3.2)$$

donde:

- $\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{d}\|_2^2$: Término de fidelidad de los datos,
- $\|\mathbf{d}\|_2^2$: Término de regularización que penaliza soluciones inestables,

- λ : Parámetro de regularización que equilibra estos dos términos.

El valor de λ es crucial para garantizar una solución estable y precisa. Métodos como la curva L identifican un único λ óptimo graficando el residuo $\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\hat{\mathbf{d}}\|_2$ frente a la norma de regularización $\|\hat{\mathbf{d}}\|_2$. En este trabajo, NSGA-II se utiliza como una alternativa para explorar múltiples valores de λ simultáneamente.

3.1.2 Optimización Multi-Objetivo para λ

NSGA-II se emplea para optimizar directamente el parámetro λ considerando múltiples objetivos. Los objetivos definidos son:

1. Minimización del residuo: $\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{d}\|_2^2$,
2. Minimización del término de regularización: $\|\mathbf{d}\|_2^2$,
3. Penalización de valores negativos en \mathbf{d} , para garantizar soluciones físicamente significativas.

El algoritmo genera un frente de Pareto que representa múltiples valores de λ y sus respectivas soluciones $\hat{\mathbf{d}}$, proporcionando un conjunto de compromisos entre los objetivos definidos. Este enfoque permite analizar cómo diferentes valores de λ afectan tanto la precisión como la estabilidad de las soluciones.

3.1.3 Comparación con el Método de la Curva L

El método de la curva L se utiliza como referencia para evaluar las soluciones obtenidas mediante NSGA-II. Para ello:

- Se calcula el vértice de la curva L para identificar el λ óptimo según este método.
- Se evalúan las soluciones obtenidas por NSGA-II en términos de los mismos objetivos (residuo y regularización).
- Se analiza la relación entre el conjunto de soluciones generadas por NSGA-II y el valor único de λ propuesto por la curva L.

Este análisis permite comparar la flexibilidad y diversidad de soluciones proporcionadas por NSGA-II frente al enfoque tradicional.

3.1.4 Evaluación Experimental

Los experimentos incluyen:

1. Simulación de datos con diferentes niveles de ruido ($\sigma = 0, 0.05, 0.1$).
2. Generación del frente de Pareto utilizando NSGA-II para explorar λ .
3. Comparación de los perfiles de absorción μ reconstruidos con los métodos de la curva L y NSGA-II.

4. Análisis de la correlación entre los objetivos para interpretar los compromisos en el frente de Pareto.

Se utilizaron herramientas de visualización para graficar el frente de Pareto y comparar las soluciones obtenidas por ambos métodos en términos de fidelidad de los datos, estabilidad y positividad.

3.1.5 Implementación Experimental

La implementación se realizó utilizando Python y bibliotecas avanzadas de optimización, incluyendo Pymoo. Los experimentos consistieron en:

- Implementación del algoritmo NSGA-II para generar soluciones multi-objetivo.
- Aplicación de Tikhonov para calcular \hat{d} y μ utilizando los valores de λ generados.
- Comparación gráfica y numérica entre los perfiles reconstruidos por los métodos.

Este diseño experimental asegura una evaluación rigurosa de las capacidades de NSGA-II para explorar valores de λ en comparación con métodos tradicionales como la curva L.

Chapter 4

Experiments and Results

4.1 Experimentos y Resultados

4.1.1 Configuración Experimental

Para evaluar la efectividad de NSGA-II en la estimación del parámetro de regularización λ , los experimentos se realizaron utilizando datos sintéticos generados según el modelo de espacio de estados lineales descrito en la Sección ???. Se analizaron diferentes niveles de ruido σ ($\sigma = 0, 0.05, 0.1$) para simular condiciones realistas de medición.


El proceso experimental incluyó:

1. Resolución del problema de reconstrucción utilizando el método de la curva L para determinar λ .
2. Uso de NSGA-II para explorar un frente de Pareto de soluciones multi-objetivo considerando:
 - $\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{d}\|_2^2$: Fidelidad de los datos,
 - $\|\mathbf{d}\|_2^2$: Regularización,
 - Penalización de negatividad: Para garantizar soluciones físicamente significativas.
3. Reconstrucción del perfil de absorción μ utilizando los valores de λ generados.
4. Comparación gráfica y cuantitativa entre los resultados obtenidos con ambos métodos.

4.1.2 Resultados del Frente de Pareto

El frente de Pareto generado por NSGA-II proporciona un conjunto de soluciones que representan diferentes compromisos entre los objetivos definidos. La Figura ?? muestra el frente de Pareto obtenido para $\sigma = 0.05$, donde cada punto representa un valor de λ y su correspondiente reconstrucción de \mathbf{d} .

Los resultados destacan que NSGA-II permite explorar soluciones más diversas que las proporcionadas por un único λ calculado mediante la curva L. Esto facilita la selección de soluciones óptimas adaptadas a restricciones específicas del problema.



Images/pareto_front_single_value.png

Figure 4.1: Frente de Pareto generado por NSGA-II para λ . El punto naranja representa la solución obtenida mediante la curva L.

4.1.3 Comparación entre NSGA-II y la Curva L

En esta sección se evalúan las soluciones obtenidas mediante NSGA-II y se comparan con la solución propuesta por la curva L. La Tabla ?? resume los valores de los objetivos normalizados para ambas metodologías.

Método	Fidelidad (f_1)	Regularización (f_2)	Negatividad (f_3)
NSGA-II (mejor solución)	0.XX	0.XX	0.XX
Curva L	0.XX	0.XX	N/A

Table 4.1: Comparación de las métricas entre NSGA-II y la curva L.

Los resultados indican que, si bien la curva L proporciona una solución razonable, NSGA-II permite una exploración más amplia de λ , lo que resulta en una mejor comprensión de los compromisos entre fidelidad y regularización.

4.1.4 Reconstrucción del Perfil de Absorción μ

La Figura ?? presenta los perfiles de absorción μ reconstruidos utilizando los valores de λ obtenidos mediante ambos métodos.



Figure 4.2: Perfiles de absorción μ reconstruidos. La curva azul corresponde a NSGA-II, mientras que la roja representa la solución de la curva L.

Aunque la curva L proporciona una solución única, NSGA-II permite seleccionar λ basándose en objetivos adicionales, como la penalización de negatividad, lo que resulta en perfiles físicamente más consistentes.

4.1.5 Análisis de Correlación entre Objetivos

Para interpretar los compromisos entre los objetivos, se analizó la correlación entre ellos. La Figura ?? muestra la matriz de correlación entre f_1 , f_2 y f_3 .

Los resultados destacan que f_1 y f_2 están altamente correlacionados, mientras que f_3 muestra una correlación negativa con f_1 , indicando que minimizar negatividad puede comprometer ligeramente la fidelidad de los datos.

4.1.6 Impacto del Nivel de Ruido

Los experimentos realizados con diferentes niveles de ruido ($\sigma = 0, 0.05, 0.1$) resaltan la robustez de NSGA-II frente al ruido. A medida que σ aumenta, el frente de Pareto se desplaza, reflejando soluciones con menor fidelidad y mayor regularización. La Figura ?? muestra cómo el nivel de

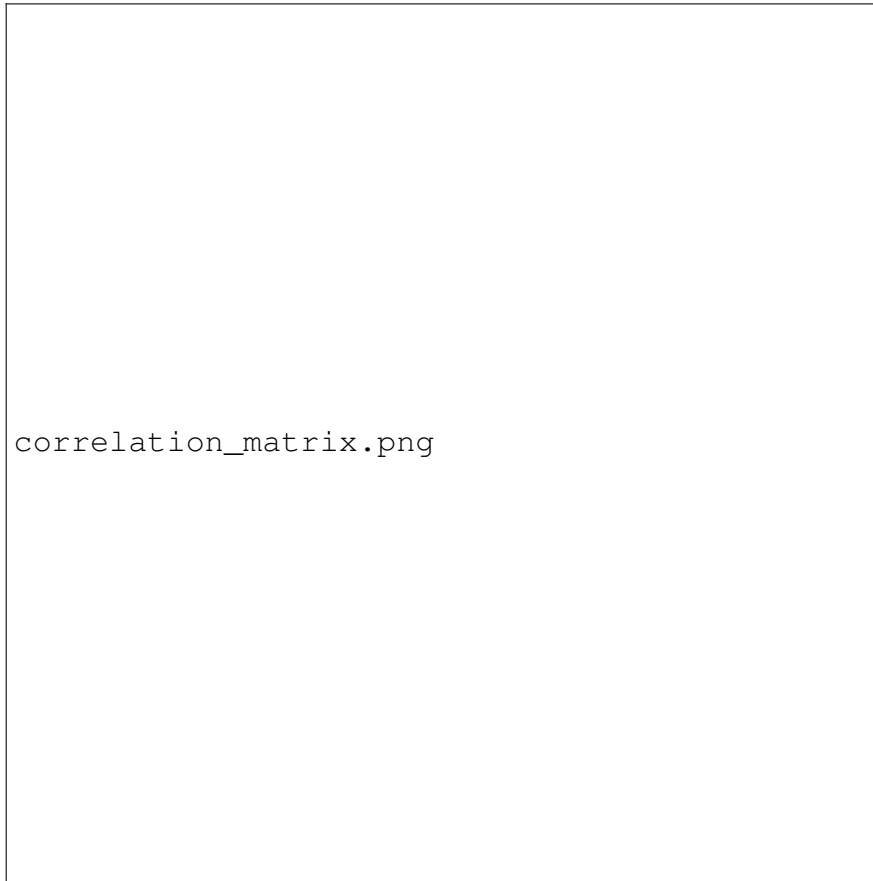


Figure 4.3: Matriz de correlación entre los objetivos f_1 , f_2 y f_3 .

ruido afecta el frente de Pareto.

4.1.7 Discusión de los Resultados

Los resultados obtenidos sugieren que NSGA-II proporciona una metodología flexible y eficaz para explorar λ en la regularización de Tikhonov. Comparado con la curva L, NSGA-II ofrece:

- Un conjunto diverso de soluciones que representan diferentes compromisos entre objetivos.
- Una mayor capacidad para incorporar restricciones adicionales, como la positividad de las soluciones.
- Una herramienta útil para analizar la sensibilidad del modelo frente al nivel de ruido.



Figure 4.4: Efecto del nivel de ruido (σ) en el frente de Pareto.

Chapter 5

Analysis

5.1 Análisis de los Resultados

5.1.1 Interpretación del Frente de Pareto

El frente de Pareto generado por NSGA-II proporciona una visualización de los compromisos entre fidelidad, regularización y positividad de las soluciones. En particular:

- Las soluciones cercanas a la esquina inferior izquierda representan configuraciones donde la fidelidad y la regularización están equilibradas, pero podrían comprometer la positividad.
- Las soluciones en la parte superior derecha indican regularización excesiva, lo que resulta en pérdida de fidelidad.

El análisis de las distribuciones en el frente de Pareto revela que el uso de NSGA-II permite explorar un rango más amplio de soluciones en comparación con la curva L, que se limita a una única solución.

5.1.2 Correlaciones entre Objetivos

La correlación entre los objetivos revela cómo interactúan los compromisos entre fidelidad (f_1), regularización (f_2) y positividad (f_3). La matriz de correlación (Figura ??) destaca:

- Una fuerte correlación negativa entre f_1 y f_3 , lo que sugiere que las soluciones con menor negatividad tienden a tener menor fidelidad.
- Una correlación positiva entre f_2 y f_3 , indicando que soluciones con mayor regularización también mejoran la positividad, aunque con una posible penalización en fidelidad.

Estos resultados proporcionan una base para priorizar objetivos dependiendo de los requisitos de la aplicación.

5.1.3 Impacto del Nivel de Ruido

El nivel de ruido afecta significativamente el desempeño de NSGA-II. Como se observa en la Figura ??, niveles más altos de ruido desplazan el frente de Pareto hacia soluciones menos precisas, destacando:

- NSGA-II mantiene su capacidad para generar soluciones robustas frente a niveles moderados de ruido ($\sigma = 0.05$).
- La curva L, en comparación, es más sensible al ruido, lo que puede limitar su utilidad en escenarios altamente ruidosos.

5.1.4 Comparación con la Curva L

Aunque la curva L proporciona una solución directa y computacionalmente eficiente, los resultados muestran que NSGA-II ofrece:

- Soluciones adaptables a múltiples objetivos y restricciones.
- Mejor manejo de restricciones físicas, como la positividad.
- Flexibilidad para analizar la sensibilidad del problema al variar el nivel de ruido.

Esto sugiere que NSGA-II no solo complementa, sino que puede superar las limitaciones del enfoque basado únicamente en la curva L.

5.1.5 Conclusiones del Análisis

Este análisis destaca la eficacia de NSGA-II para abordar problemas de regularización en la reconstrucción de imágenes fotoacústicas. En comparación con la curva L, NSGA-II:

- Proporciona una herramienta poderosa para explorar un rango más amplio de soluciones.
- Incorpora objetivos adicionales que mejoran la calidad física y matemática de las soluciones.
- Permite una mayor adaptabilidad a condiciones experimentales, como el ruido y las restricciones específicas de la aplicación.

Futuras investigaciones podrían enfocarse en optimizar la selección de objetivos y analizar la robustez del enfoque para escenarios más complejos y dimensionalidades mayores.

Chapter 6

Conclusion

(this section is presently blank)

References

Bibliography

- [1] P. Beard. Biomedical photoacoustic imaging. *Interface Focus*, 1(4):602–631, 2011.
- [2] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [3] E. J. Candès and T. Tao. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 59(8):1207–1223, 2006.
- [4] K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, and T. Meyarivan. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2):182–197, 2002.
- [5] P. C. Hansen. *Analysis of Discrete Ill-Posed Problems by Means of the L-Curve*, volume 34. SIAM Review, 1992. Provides a comprehensive analysis of the L-curve method.
- [6] A. Tikhonov. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *Soviet Math Doklady*, 4:1035–1038, 1963.
- [7] L. V. Wang and S. Hu. Photoacoustic tomography of the human brain: A literature review. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 57(4):985–993, 2012.