

Estudio de la difusividad térmica del cobre y la propagación del calor mediante conducción de ondas térmicas.

Alejandro Meschini Luppi, Maximiliano Gandini, Manuel Aguerre

meschiniluppialejandro@gmail.com, maximiliano.gandini.27@gmail.com, aguerremanuel@gmail.com

Laboratorio 4 – 1er Cuatrimestre 2023 - Cátedra Larotonda, Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA

Resumen

Mediante el estudio del régimen transitorio durante el calentamiento de una barra de cobre, se estimó el coeficiente de difusividad de este material, con un valor de $\kappa = (1.52 \pm 0.37) \text{cm}^2/\text{s}$, solapándose éste con el tabulado a $1.17 \text{cm}^2/\text{s}$. Luego, analizando el comportamiento de las oscilaciones alrededor del estado estacionario mediante la alimentación de ondas cuadradas de distintas frecuencias, y generando señales senoidales puras enviando pulsos cuadrados modulados en frecuencia, se dio con un valor de $\kappa = (1.03 \pm 0.10) \text{cm}^2/\text{s}$, el cual se asemeja al valor tabulado para la difusividad del cobre medida mediante un método más preciso.

1. Introducción

En el siguiente estudio se buscara la caracterización de las ondas térmicas que se propagan a través de una barra de cobre y caracterizar a su vez el cobre con uno de sus parámetros térmicos, como lo es el coeficiente de difusividad térmica. Con este fin se hará un breve estudio teórico de los temas a tratar.

La diferencia de temperatura entre dos puntos induce un flujo de calor del extremo más caliente al extremo más frío; en el contexto de una barra de cobre siendo calentada por un extremo, el mecanismo implicado es el de la conducción[1], que consiste en la propagación del calor a través del sólido por vibraciones de los iones, con una amplitud que decrece a medida que lo hace la temperatura. Asumiendo que el calor se propaga en forma unidimensional y que nuestro sólido es homogéneo e isotrópico, la ecuación que rige el comportamiento térmico es:

$$\frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t}, \quad (1)$$

Conocida como la ecuación de Fourier unidimensional, donde $\theta(x, t)$ representa la onda de temperatura y κ es la constante de difusividad del material, en este caso, el cobre, esta es independiente de la temperatura. Será de interés el estudio de las oscilaciones una vez llegado al estacionario, estas se pueden representar con una serie de Fourier,

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{infty} A_n(x) \sin(\omega_n t - k_n x). \quad (2)$$

Considerando las condiciones de contorno,

$$\begin{cases} \theta(x = 0, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4\theta_0}{n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi}{\tau}t\right) \\ \theta(x = \infty, t) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Donde la condición para $x = 0$ implica que la onda en este punto se comporta igual a la onda forzante, y en el extremo opuesto se considera la aproximación de barra semi-infinita, lo que implica que no hay onda reflejada al final de la misma. Introduciendo esta solución en la ecuación de conducción térmica y tomando condiciones de contorno, se da con la siguiente solución:

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \theta_n e^{-\epsilon_n x} \sin(\omega_n t - k_n x) \quad (4)$$

con

$$\begin{cases} \theta_n = \frac{4\theta_0}{n\pi} \\ \omega_n = \frac{2n\pi}{\tau} \\ \epsilon_n = \sqrt{\frac{\omega_n}{2\kappa}} \end{cases} \quad (5)$$

Donde ϵ_n es el factor de decaimiento del enésimo armónico. Podemos ver que, al crecer este coeficiente con la frecuencia, para frecuencias altas o para distancias lejanas al comienzo de la barra, se pueden tirar términos de n superior y quedarnos con la solución a primer orden, siendo esta la enunciada a continuación:

$$\theta(x, t) \cong A_0 e^{\epsilon x} \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad (6)$$

Donde se tomó un desfasaje de modo que $\theta(0, t)$ sea máximo. Considerando esta aproximación, se pueden extraer relaciones entre propiedades de la onda térmica y propiedades del material, como en este caso, κ . Luego,

$$\begin{cases} \kappa_\epsilon = \frac{\pi}{\tau \epsilon^2} \\ \kappa_v = \frac{v^2 \tau}{2\pi} \end{cases} \quad (7)$$

Se puede relacionar ambos coeficientes y de esta forma obtener una ecuación con la cual calcular la difusividad en función de parámetros de la onda térmica,

$$\kappa = \frac{v}{2\epsilon}. \quad (8)$$

Y, por último, habiendo obtenido estos coeficientes podemos estudiar la evolución de la temperatura en el periodo transitorio, mientras se utiliza una fuente con potencia constante. Siguiendo esto, la temperatura se comporta como:

$$\theta(x, t) = \frac{2F_0}{K} \left\{ \left(\frac{\kappa t}{\pi} \right)^2 e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} - \frac{x}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right\}. \quad (9)$$

Teniendo en cuenta todo esto, se puede proceder con el desarrollo experimental que permitirá el estudio de las ondas térmicas en el cobre y la estimación de la difusividad térmica del mismo.

2. Desarrollo experimental

Se analizó la propagación de ondas térmicas a lo largo de una barra de cobre cilíndrica. Esto se hizo tanto para cuando la barra estaba en el transitorio y para cuando estaba en el modo estacionario. A partir de ambos análisis, se calculó el coeficiente de difusividad térmica.

2.1. Descripción de los elementos utilizados

Para este experimento, se utilizó el *set-up* presentado en la Figura 1, compuesto por un generador de funciones Tektronix AFG3021B para enviar pulsos cuadrados de 5V a un amplificador. Este amplificador consistía en un transistor que se activaba cuando recibía más de 4.5V de tensión, lo que hacía que el amplificador enviase un voltaje de 24V a un soldador que calentaba uno de los extremos de la barra de cobre de $(51.1 \pm 0.1)cm$. La barra se encontraba envuelta de tres materiales aislantes distintos: Acrílico, PVC y una cinta de aluminio “Ipsobar” para minimizar la dispersión del calor al ambiente. Esto es necesario ya que se operó bajo la hipótesis de que el calor se propaga linealmente sin pérdidas radiales. Se colocaron seis termocuplas a lo largo de la barra; Dos de tipo K, una a $8.14cm$ y otra a $12.31cm$; Cuatro de tipo J, una a $16.40cm$, a $21.19cm$, a $24.96cm$ y por último una a $41.05cm$. El objetivo de estas seis termocuplas fue medir el cambio de temperatura a lo largo de la barra. Todas ellas estaban conectadas al modulo NI USB-6210 que pasó los datos capturados a la PC. A este dispositivo se le conectó una séptima termocupla de tipo K que estaba sumergida dentro de un baño de agua con hielo. Con el objetivo de que funcionase como temperatura de referencia para el resto de las termocuplas.

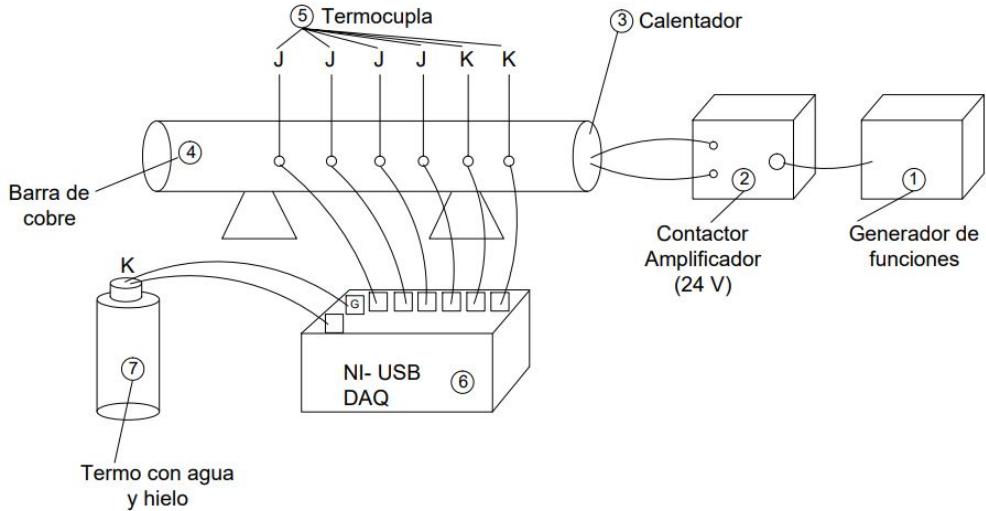


Figura 1: Montaje del experimento: 1) Generador de funciones, 2) Amplificador de 24V, 3) Calentador, 4) Barra de cobre de 51.1cm, 5) Seis termocuplas de tipo K y J, 6) NI USB-6210, 7) Termo con agua y hielo conectado a una termocupla de tipo K que fue tomado como temperatura de referencia

Dependiendo del experimento, se varió la frecuencia y el duty cycle de nuestra onda cuadrada. El duty cycle es la fracción del período de la onda en donde esta activo el amplificador 24V. Se tomó una medición de control con la barra a temperatura ambiente para ver el comportamiento de todas las termocuplas cuando están en iguales condiciones.

2.2. Medición de potencia continua

Se midió la subida de la temperatura en la barra cuando el generador de funciones le daba una potencia constante, alimentando a la barra con una onda cuadrada que oscilaba entre 4.5V y 5V; el Duty cycle era del 100 % por lo que el amplificador siempre se encontraba activo. Esta medición se tomó por 7200s hasta que se llegó al estado estacionario. Para cada medición, se obtuvieron los valores de temperatura para cada una de las distintas termocuplas. A partir de estos datos, se realizó un análisis del modo transitorio de la barra.

2.3. Medición de las oscilaciones en el estado estacionario

En esta medición, el duty cycle de la onda era del 50 % por lo que la potencia media era la mitad de la medición anterior. Una vez llegado al estacionario en esta nueva potencia, se varió la frecuencia del pulso cuadrado. Se midió en un rango de frecuencias de $3mHz$ a $10mHz$ variando a saltos de $0.5mHz$. También se tomaron dos mediciones fuera de este rango, una en $1mHz$ y otra en $15mHz$. Para cada una de estas mediciones el tiempo de medición fue por lo menos de $t_{med} \geq 2T_{periodo}$. Esto se hizo para poder caracterizar mejor a estas señales. Se utilizaron las señales de cada termocupla para sacar de su desfasaje la velocidad de propagación de las ondas térmicas.

2.4. Medición de las oscilaciones moduladas en el estado estacionario

Para esta medición, se varió el duty cycle de manera que la respuesta del sistema sea senoidal. Esto se realizó con una frecuencia portadora de $100Hz$. Se midió la temperatura para distintas frecuencias de modulación de $\omega_m = \{2mHz, 4mHz, 8mHz, 16mHz\}$.

3. Resultados y análisis

3.1. Medición de control

Primero se realizó un análisis de la medición de control (Figura 1). Para sacar el error de cada termocupla, se calculó la desviación estándar de cada una de ellas. Como se puede observar la termocupla posicionada a $41.05cm$ tiene un corrimiento con respecto a las demás. Promediando el valor de los otros cinco canales, se tomó la distancia entre estos valores como el corrimiento. Para todas las mediciones que fueron analizadas, se consideró este corrimiento y fue restado. También se restó la temperatura de referencia, en cada medición para obtener la temperatura real a la que se encontraba la barra.

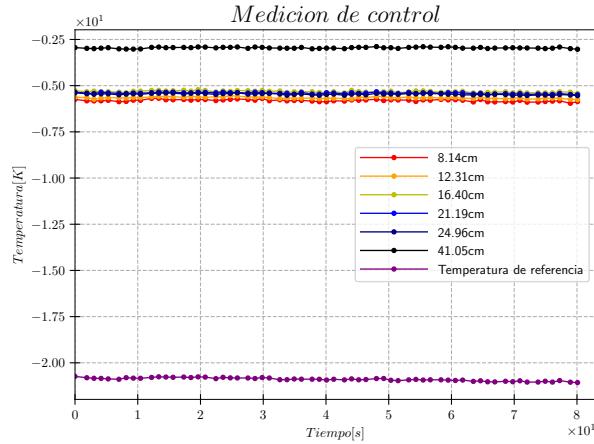


Figura 2: Gráfico de la medición de control a temperatura ambiente

3.2. Potencia continua

Dejando calentar la barra a potencia continua se obtuvo el gráfico de la Figura 3a. Se ve que cada uno de los puntos de la barra termaliza a distintas temperaturas. Para confirmar que hayan llegado al estacionario, se derivaron estos datos diferenciando numéricamente, ya que si la derivada es cero esto significa que la temperatura ha dejado de crecer por lo que están en el estacionario. Al gráfico 3b se le

aplico un filtro de Savitzky-Golay para remover el ruido amplificado al derivar los datos. Pasados los 6000s, el crecimiento se vuelve $\frac{\partial \theta}{\partial t} \approx 0$ por lo que se consideró que se llegó al estado estacionario.

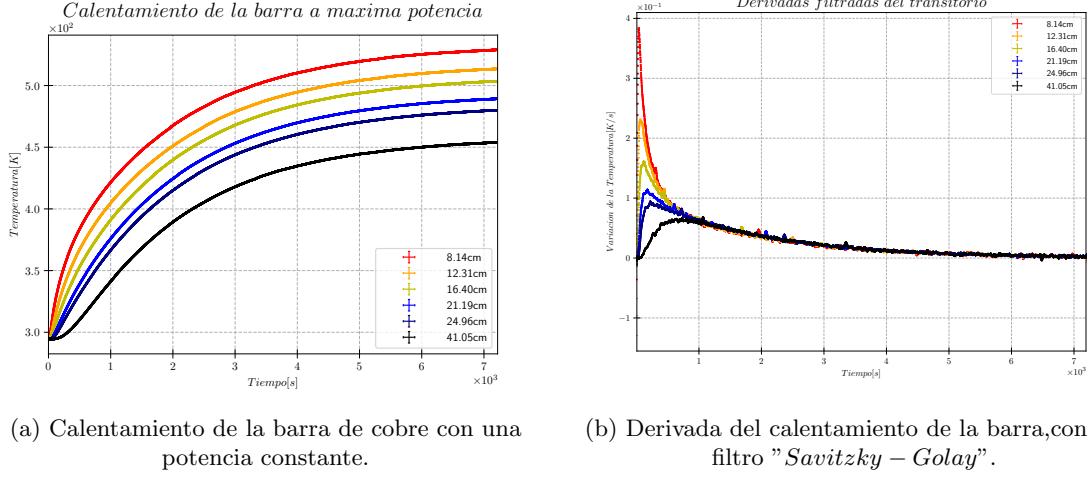


Figura 3

Tomando los datos del principio del calentamiento para asegurarnos de que están en el régimen transitorio, se realizó un ajuste con la ecuación (9) fijando x para cada termocupla. Se consideró como coeficientes $\frac{2F_0}{K}$ y κ . Al obtenerse seis coeficientes de difusividad térmica, se realizó un promedio de ellos dando $\kappa_{promedio} = (1.52 \pm 0.37) \frac{cm^2}{s}$. Esto se condice con el valor tabulado $\kappa \approx (1.23) \frac{cm^2}{s}$ [5] [2].

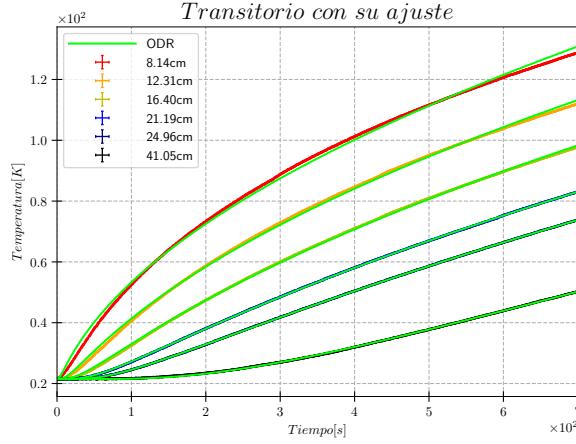
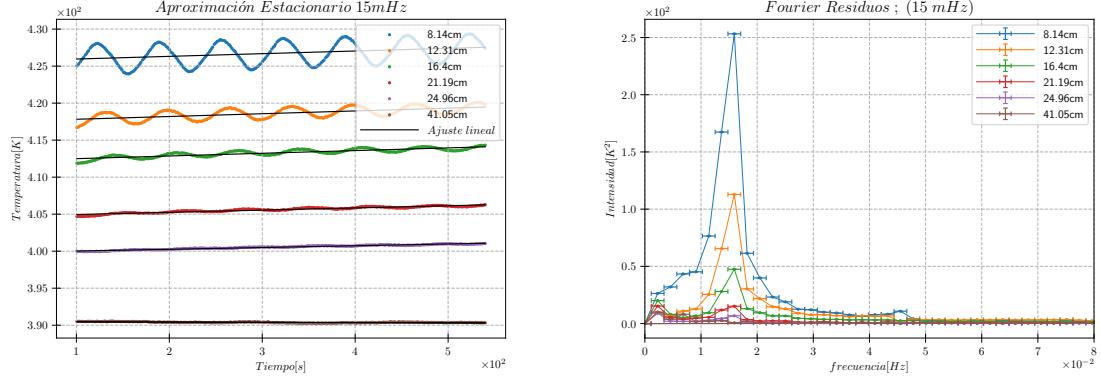


Figura 4: Gráfico del transitorio del calentamiento de la barra de cobre con su ajuste

3.3. Medición con ondas de calor

En un rango de frecuencias entre aproximadamente $6mHz$ y $15mHz$ se obtuvieron mediciones tal y como predecían las aproximaciones en el marco teórico. Se tomaron mediciones también por debajo de los $6 mHz$, las cuales no resultaron en señales aproximables por el primer orden de la serie de Fourier, pero que fueron filtradas utilizando el filtro *Savitzky – Golay*(S-G) para obtener este primer orden

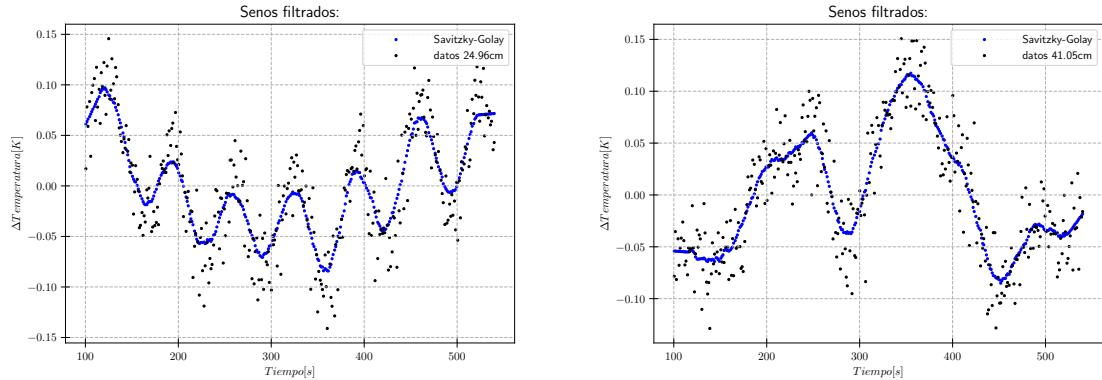
y ser tenidas en cuenta. Además, se approximó la tendencia exponencial al estacionario con funciones lineales.



(a) Señales de alta frecuencia en cada canal y su respectivo ajuste lineal.
 (b) Transformada de Fourier de las señales de 15mHz.

Figura 5

A altas frecuencias se encontró que las señales eran modelables con un seno puro y el segundo término de la serie de Fourier es prácticamente despreciable como se aprecia en la Figura 5b. La desventaja de estas mediciones es que el decaimiento de la onda entre cada termocouple es demasiado rápido, y a partir de la cuarta termocouple, los picos de la señal se mezclan con el ruido.

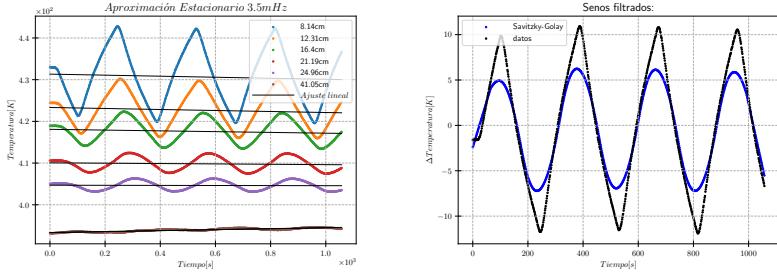


(a) Señal de 15mHz en la quinta termocouple con su respectivo filtrado.
 (b) Señal de 15mHz en la sexta termocouple con su respectivo filtrado

Figura 6

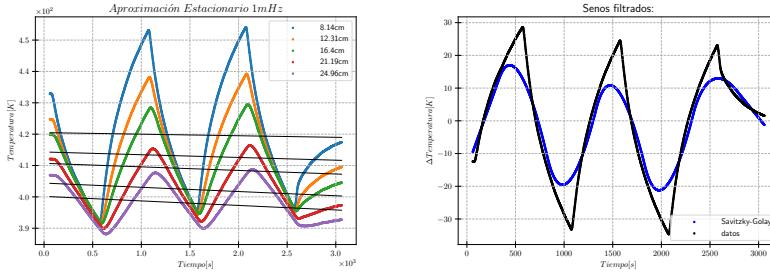
Como se aprecia en la Figura 6a el ruido presenta un error que puede ser disminuido utilizando el filtro $S - G$, el cual conserva distancias relativas entre picos en ambos ejes. La última termocouple que se visualiza en la Figura 6b no tiene los máximos y los mínimos bien definidos, por lo cual, esos datos no fueron usados.

Como fue mencionado anteriormente, las mediciones por debajo de los 6 mHz fueron periódicas pero la respuesta fue quasi-triangular ya que son apreciables otros órdenes de la serie de Fourier.



(a) Señal de 3.5 mHz en cada canal y su ajuste lineal

(b) Señal del primer canal de 3.5mHz y su respectivo filtrado.

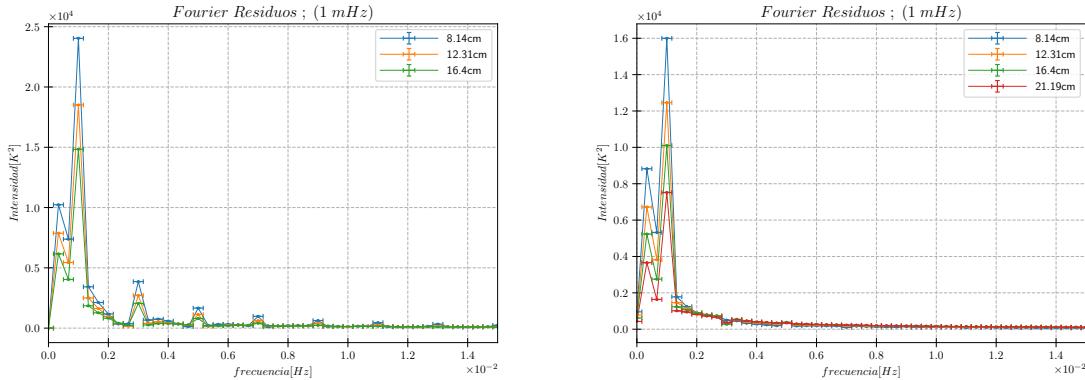


(c) Señal de 1 mHz en cada canal y su respectivo ajuste lineal al decaimiento.

(d) Señal del primer canal de 1Hz y su respectivo filtrado.

Figura 7

En bajas frecuencias se tienen mediciones para las cuales sí son apreciables los picos en las últimas termocuplas, pero que no son senoidales puras, sino que el sistema responde con varios ordenes de la serie de Fourier dando lugar a señales cuasi-triangulares. Estas señales fueron filtradas en ventanas que coinciden con la frecuencia del primer orden de la serie de Fourier, así se recuperaron los datos que se deseaban medir. Ese filtrado se puede ver en las Figuras 7b y 7d.



(a) Transformada de Fourier de las señales de 1mHz con varios órdenes.

(b) Transformada de Fourier de las señales de 1mHz filtradas con Savitsky-Golay

Figura 8

Realizar una transformada de Fourier permite apreciar de que manera está filtrando $S - G$ nuestras señales. A primera vista, comparando entre las Figuras 8a y 8b, se puede ver que el filtro está funcio-

nando de la manera deseada. Los picos de mayor frecuencia pertenecientes a los ordenes mayores de la serie de Fourier se ven disminuidos y se obtiene una señal senoidal más pura, aunque el pico perteneciente a la frecuencia fundamental también se ve disminuido. Este filtro entonces, permite mejorar la precisión en la medición de la fase temporal entre la oscilación que mide cada una de las termocuplas.

En la Figura 8 también se puede ver otro "pico" de menor frecuencia que el máximo, pero es ruido creado por la baja definición en el espacio de frecuencias. Nuestra señal original tiene un decaimiento lineal que no ha podido ser filtrado en su completitud, la transformada de Fourier de este decaimiento va como $\sim \omega^{-4}$ y el código de manera predeterminada asigna el "0" de magnitud para frecuencias nulas, así evita singularidades.

El caso de la medición de $1mHz$ está tan fuera de las aproximaciones que aún realizando este filtrado, los resultados conseguidos no serán los esperados por el modelo ya que los otros órdenes tienen contribuciones apreciables a la difusividad.

También se utilizó el generador de funciones con frecuencia modulada para generar respuestas senoidalmente puras durante el experimento, lo cual nos permitiría, en teoría, evitar las dificultades asociadas a usar señales cuadradas de frecuencia constante y obtener exactamente la solución que consideramos en nuestras aproximaciones:

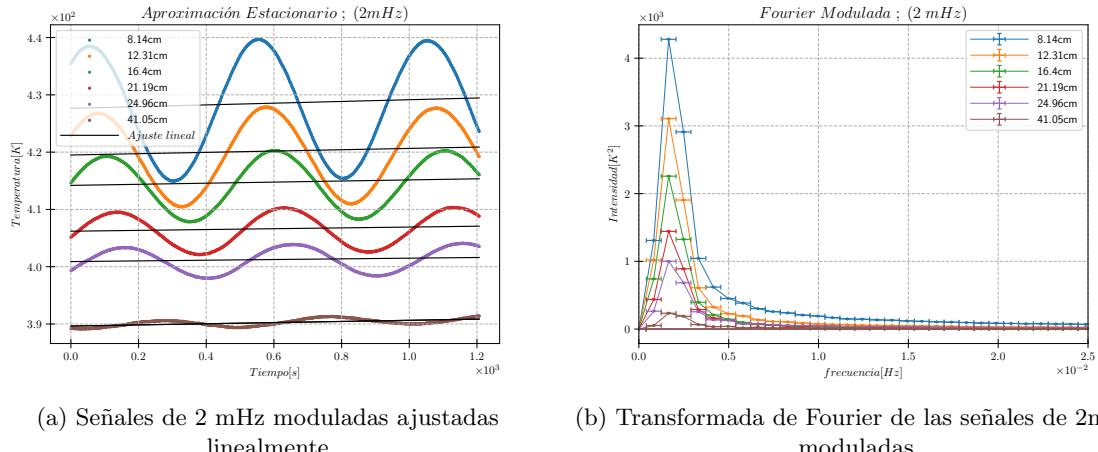
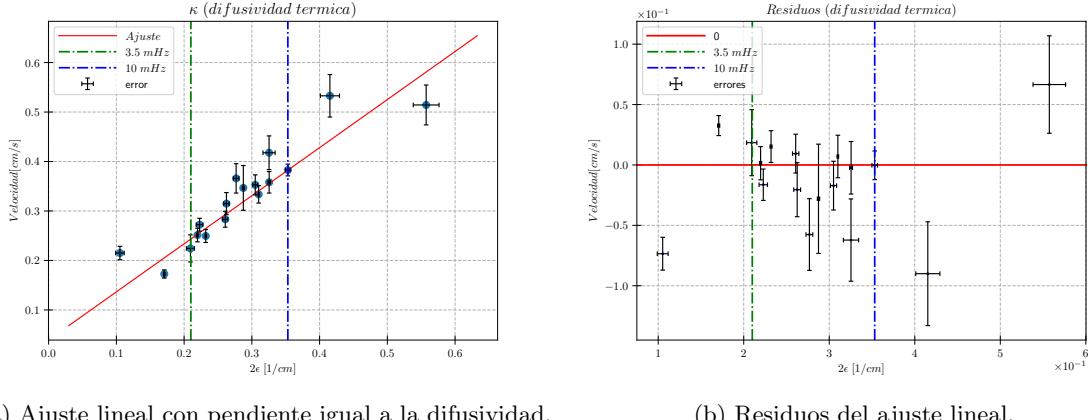


Figura 9

En la Figura 9a se puede observar la respuesta del sistema a esta señal modulada con frecuencia dependiente del tiempo y en la Figura 9b su transformada de Fourier, efectivamente mostrando que está conformada por un solo seno con una frecuencia bien definida. Esto permite obtener datos a frecuencias más bajas que la ventana de $6mHz$ a $10mHz$ anteriormente mencionada.



(a) Ajuste lineal con pendiente igual a la difusividad.

(b) Residuos del ajuste lineal.

Figura 10

En la Figura 10a cualitativamente puede observarse que las mediciones de baja velocidad y coeficiente de decaimiento ' ϵ' (Con baja frecuencia), se encuentran por fuera del régimen lineal. De igual manera, las mediciones de alta frecuencia tienen un error mayor y tampoco se encuentran dentro de este régimen. Este ajuste brinda un valor de $\kappa = (0.97 \pm 0.11) \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ para la difusividad, el cual solapa con el valor tabulado [4] medido a través de el calentamiento periódico de una placa de cobre con un *LASER* de 823nm. El valor del chi reducido que otorga el ajuste es de ($\chi_{\nu}^2 = 4.31$), lo que indica que el ajuste no capturó los datos o que el error fué subestimado.

Por otro lado, si se ignoran los datos que se encuentran afuera de la ventana de frecuencias [3; 5; 10]mHz, obtenemos un valor de $\kappa = (1.03 \pm 0.10) \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ con un valor de $\chi_{\nu}^2 = 1.11$. Esto muestra una coincidencia notable (a un dígito de error) con valores tabulados [3] [4] y un mejor parámetro de bondad.

También se realizaron mediciones sin el uso del filtro $S - G$ dentro de la ventana anteriormente mencionada (y menores), las cuales solapaban con los valores tabulados pero otorgaban en los mejores casos, valores de $\chi_{\nu}^2 = 3.79$ y el error para κ era aproximadamente 3 veces mayor al obtenido filtrando con $S - G$.

Observando el χ_{ν}^2 en cada caso, se puede observar como tomar los datos filtrados y dentro del rango de frecuencias en que vale la aproximación a primer orden de la serie de Fourier, mejora sustancialmente la credibilidad de la estimación realizada para el parámetro. Ya que se obtuvo un χ_{ν}^2 cercano a 1, lo cual indica que la estimación del κ es acertada. Mientras que saliendo de este rango de frecuencias o tomándolo los datos sin filtrar cuadruplica el valor de este estadístico.

Se considera que el filtrado de las señales sirvió para ensanchar la ventana de frecuencias en la cual se tomaron datos y que se encontraron los límites donde las aproximaciones dejan de valer. Técnicamente, con mayor precisión para medir la temperatura. Se podrían realizar mediciones a mayores frecuencias, pero el ruido generado por fluctuaciones térmicas imposibilitó el uso de frecuencias por encima del rango de $\approx 12\text{mHz}$.

Por otro lado, se cree que los parámetros de ajuste revelan que el error podría haber sido subestimado. De todas maneras, los resultados coinciden con los valores tabulados [3] [4].

4. Conclusiones

Se lograron caracterizar las ondas de calor propagadas a lo largo de una barra de cobre, obteniendo de estas la velocidad a la que se propagaban por la barra y el decaimiento de su amplitud a medida que se alejaba de la fuente en el extremo inicial. Estudiando la transformada de Fourier de las señales captadas se analizó la validez de las aproximaciones a primer orden de la serie de Fourier de las ondas

termicas, de esta forma se logró obtener un rango de frecuencias más acotado para el cual tiene sentido tomar esta aproximación. También se utilizó un pulso cuadrado de frecuencia modulada para conseguir una respuesta senoidal pura, lo cual permitió una disminución significativa del error al momento de estimar parámetros.

Luego, tomando una relación entre velocidad y coeficiente de decaimiento, se obtuvo una estimación del coeficiente de difusividad térmica del cobre, siendo este de $\kappa = (1.03 \pm 0.10) \text{cm}^2/\text{s}$, el cual se condice con valores tabulados, y considerando el valor del χ^2_ν podemos concluir que esta estimación es acertada.

También, se obtuvo un valor para este coeficiente realizando el estudio del estado transitorio, estimándose así un valor de $\kappa = (1.52 \pm 0.37) \text{cm}^2/\text{s}$, el cual solapa con otros valores tabulados para la difusividad.

Referencias

- [1] <https://nube.df.uba.ar/index.php/s/TFFbRb62iNo72sp#pdfviewer>
- [2] A. Bodas, V. Ganda, and E. López-Baeza. An undergraduate experiment on the propagation of thermal waves. American Journal of Physics 66, 528 (1998) ;
<https://nube.df.uba.ar/index.php/s/MyDkNCP2NsNDGD5#pdfviewer>
- [3] L. Verdini and A. Santucci, “Propagation properties of thermal waves and thermal diffusivity in metals,” Nuovo Cimento B 62, 399–421 1981
- [4] W. Czarnetzki, M. Wandelt, and W. Roetzel, “Thermal wave analysis for measurements of thermal diffusivity,” Proceedings of the Joint Conference 1996: IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference and IMEKO Technical Committee 7, Brussels, Belgium, 4–6 June 1996 IEEE, New York, 1996, pp. 1195
- [5] J.M. Laskar, S. Bagavathiappan, M. Sardar, T. Jayakumar, John Philip *, Baldev Raj Measurement of thermal diffusivity of solids using infrared thermography Metallurgy and Materials Group, Indira Gandhi Centre for Atomic Research, Kalpakkam 603102, T.N., India Received 5 December 2007;