Глава 2

№ 9.1 (г)

$$A = \begin{bmatrix} 101 & -90 \\ -90 & 82 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 112 \\ -98 \end{bmatrix}$$

τ_{opt} - ?

1) Заметим, что $A = A^T$

$$\exists\ \tau_{opt} = \frac{2}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \qquad \begin{cases} \lambda_{max} = 182 \\ \lambda_{min} = 1 \end{cases}$$

$$\tau_{opt} = \frac{2}{183}$$

2) Воспользуемся теоремой с семинара:

Если $\|R\| = q < 1 \Rightarrow$ метод сходится

$$q = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} = \frac{181}{183}$$

$$\|E - \tau_{opt} A\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{19}{183} & \frac{180}{183} \\ \frac{180}{183} & \frac{19}{183} \end{pmatrix} \right\|_1 = \frac{199}{183}$$

$\Downarrow$

$$q \in \left[1;\ \frac{199}{183}\right] > q_{opt}$$

$\Downarrow$

q_{opt} обеспечивает max сходимость $\forall x_0$

№ 9.2 (в)

$$A = \begin{bmatrix} 101 & -90 \\ -90 & 82 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 112 \\ -98 \end{bmatrix} \quad \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} \le 0{,}01$$

$$\|x\|_2 = \sum |x|$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} - ? \quad \Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1) Пользуясь размышлениями с семинара $\|A\| \cdot \|x\| \ge \|b\|$

$$\|x\| \ge \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

$$\|\Delta x\|_2 \le \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| \qquad \cancel{\|A\|_2 \cdot \|b\|_2 \ge \|x\|_1}$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \|A^{-1}\|_1 \frac{\|\Delta b\|}{\|x\|_1} = \left| \begin{array}{l} \|\Delta b\|_1 = 0{,}01 \cdot \|b\|_1 \\ \|A^{-1}\|_1 = \frac{191}{182} \\ \|b\|_1 = 210 \end{array} \right| = \frac{191 \cdot 191}{182} \cdot 0{,}01 =$$

$$\boxed{= 0{,}73} = 2{,}004 \Rightarrow \Delta b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} \qquad \|\Delta b\| \le \|b\| \cdot 0{,}01 = 2{,}1$$

Ответ: $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le 2{,}004$; $\Delta b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$

$\Delta b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

min

№ 9.5

$$\begin{cases} 10x + y - z = 1 \\ x - 20y + 3z = 2 \\ 2x + 3y - 10z = 1 \end{cases}$$

Уменьшить ошибку в 1000 раз

$$Lx^s + Dx^{s+1} + Ux^s + \cancel{D} = b$$

$$D = \begin{bmatrix} 10 & & 0 \\ & -20 & \\ 0 & & -10 \end{bmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ & 0 & 3 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 0,1 & & \\ & -0,05 & \\ & & -0,1 \end{bmatrix}$$

$$x^{s+1} = \underbrace{-D^{-1}[L+U]}_{B} x^s + D^{-1} b$$

$$x^{s+1} = \begin{bmatrix} 0 & -0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0 & 0,15 \\ 0,2 & 0,3 & 0 \end{bmatrix} x^s + \begin{bmatrix} 0,1 \\ -0,1 \\ -0,1 \end{bmatrix}$$

$$q = \|B\|_2 = 0,4$$

$$\cancel{x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$k = \frac{\ln \nu}{\ln \|q\|} \overset{7,5}{\approx} 8$$

Ответ: 8

$$\cancel{s+1 > \left| \frac{\ln \frac{\varepsilon}{\|z_0\|}}{\ln \|B\|} \right|}$$

$$\cancel{s+1 > \ln \frac{1}{1000}}$$

№ 9.16

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2\lambda \end{vmatrix} =$$

Я: $4\lambda^3 - 3\lambda = 0 \quad \lambda_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \lambda_2 = 0 \quad |\lambda| < 1 \Rightarrow$ вып

З: $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0 \quad \lambda = 0 \quad \lambda = \frac{3}{4} \Rightarrow$ вып

№ 9.28

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5\lambda & -1 & 2 \\ \lambda & 4\lambda & -1 \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{bmatrix} = 20\lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \quad |\lambda| < 1 \Rightarrow \text{вып}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(L + D)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{20} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^{s+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{1}{20} & \frac{7}{20} \\ 0 & -\frac{7}{20} & \frac{1}{20} \end{bmatrix} X^{s} + \begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ \frac{19}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} X^{(1)} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 19 \end{pmatrix} \\ X^{2} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 19 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 21 \end{pmatrix} \end{cases}$$