№ 11.4

$x - \ln(x+2) = 0$ Найти корни

Из общих соображений $x_1 \in [-2; -1]$

$x_2 \in [1; 2]$

а) Рассмотрим следующую итерацию

$$x^{(n+1)} = \ln(x^n + 2),$$

покажем, что она сходится

$$F(x) = \ln(x+2)$$

Если $|F(x) - F(y)| \leq q(|x-y|)$, $q \in (0;1)$ то

будем сходиться

$$F'(x) = \frac{1}{x+2} \quad x_1 \in [-2; -1]$$ - Неясно

может не сойт

$$F'(x) = \frac{1}{x+2} \quad x_2 \in [1; 2]$$

$\Rightarrow F'(x) \in [\frac{1}{3}; \frac{1}{4}] \Rightarrow$ будет сход

ч.т.д.

б) При выборе $x \in U(x^*)$ $F'(x) > 1 \Rightarrow$ сходимости

не будет.

Ответ: нет

№ 11.13 (а)

Показать, что для Ньютона можно взять $\forall x_0 > 0$

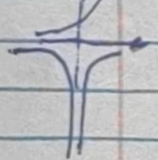
а) $e^x = \frac{1}{x}$

Воспользуемся следующим утверждением.

$$\left[\begin{array}{l} 1)\ f(x) \in C^2 \\ 2)\ f'(x) > 0,\ f''(x) > 0\ \forall x \in (0; +\infty) \\ 3)\ f(\xi) = 0,\ \xi > 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{Будет сходиться} \\ \forall x^0 \text{ к } \xi \end{array}\right]$$

1) Очевидно, что решение можно в $x > 0$ т.к.

e^x опред в I и II, а $\frac{1}{x}$ в I и III



$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2} = e^x - x^{-2} > 0 \text{ ч.т.д.}$$

$$f''(x) = e^x + \frac{2}{x^3} > 0\ \forall x \in (0; +\infty)$$

2)

№ 11.17

а) $16x^5 + 24x^3 - 2x^2 - 11 = 0$

$$\cancel{x = \sqrt{-\frac{11 - 16x^5 - 24x^3}{2}}}$$

$$\cancel{x_{n+1} = \sqrt{-\frac{11 - 16x_n^5 - 24x_n^3}{2}}}$$

Из общих соображений корень действительный будет $\exists!$ при этом

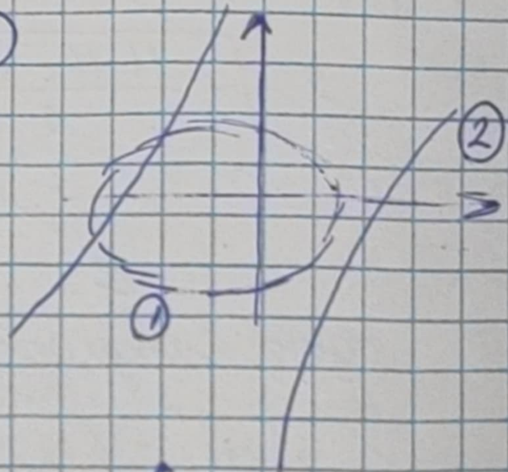
$f(0) = -11$

$f(1) = 27$ $\Rightarrow x^* \in [0; 1]$

$[1; 1]$

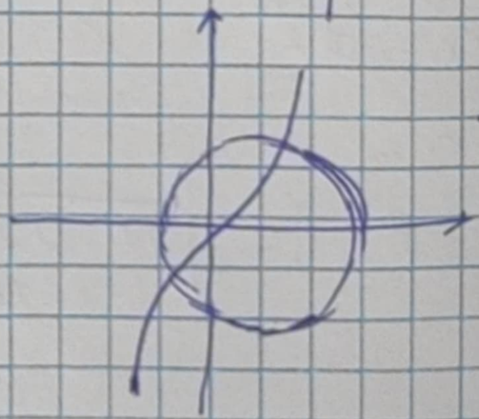
№11.23 (по 2021 году)

а) $\begin{cases} x^2+x-2y^2-3=0 & ① \\ 2x^2+y-xy-7=0 & ② \end{cases}$



Нет решений в I

б) $\begin{cases} x^2-x+y^2-1=0 \\ y-tg\,x=0 \end{cases}$



$x^* \in (0{,}8;1)$

$y^* \in (1;2)$

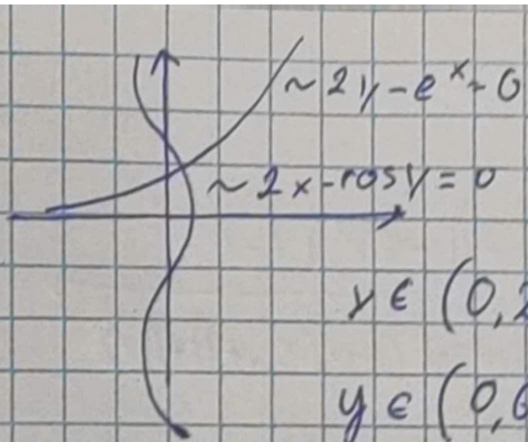
$\begin{cases} y^{k+1}=tg\,x^k \\ x^{k+1}=\sqrt{x^k-y^2+1} \end{cases}$

$$Y=\begin{pmatrix} 1+tg^2x & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-y^2+1}} & \frac{-2y}{2\sqrt{x-y^2+1}} \end{pmatrix}$$ - плохо (нет сходимости)

$\begin{cases} x=arctg\,y \\ y=\sqrt{\cancel{x}x-x^2+1} \end{cases}$ $Y=\begin{pmatrix} \frac{1}{1+y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2+1}} \end{pmatrix}$

$\|Y\|_{1,2}<1$ => будет сходимость

в) $\begin{cases} 2x - \cos y = 0 \\ 2y - e^x = 0 \end{cases}$



$y \in (0{,}2;\ 0{,}4)$

$y \in (0{,}6;\ 0{,}8)$

$\begin{cases} x = \dfrac{\cos y}{2} \\ y = \dfrac{e^x}{2} \end{cases}$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\sin y}{2} \\ \dfrac{e^x}{2} & 0 \end{bmatrix} = \max\left(\left|\dfrac{\sin y}{2}\right|, \dfrac{e^x}{2}\right)$$

$x \in (0{,}2;\ 0{,}4)$

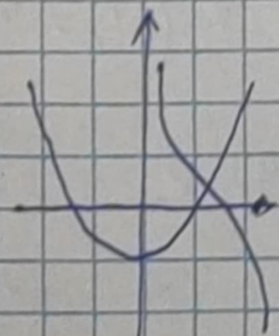
$y \in (0{,}6;\ 0{,}8)$

$\|J\|_{1,2} < 1 \Rightarrow$ будет сходимость

г) $\begin{cases} e^{xy} + x - 4 = 0 \\ x^2 - 4y - 1 = 0 \end{cases}$

$x \in \left(\dfrac{3}{2};\ 2\right)$

$y \in \left(\dfrac{2}{20};\ \dfrac{5}{10}\right)$



$\cancel{\ln}\ xy = \ln(4-x)$

$\cancel{\begin{cases} y = \dfrac{\ln(4-x)}{x} \\ x = \sqrt[2]{4y+1} \end{cases}}$

$$\cancel{J = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{2}{\sqrt{4y+1}} \\ & 0 \end{pmatrix}}$$

$\begin{cases} y = \dfrac{x^2-1}{4} \\ x = \dfrac{\ln(4-x)}{y} \end{cases}$

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{y(4-x)} & -\dfrac{\ln(4-x)}{y^2} \end{bmatrix}$$ - нет сходим

$\begin{cases} y = \dfrac{x^2-1}{4} \\ x = 4 - e^{xy} \end{cases}$

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{2} & 0 \\ -ye^{xy} & -xe^{yx} \end{bmatrix}$$

№ 11.17.

$\ln(x+1) - 2x^2 + 1 = 0$ $x^* \approx 0,9$ $I = [0,8; 1]$

1) $x_{n+1} = \sqrt{(\ln(x_n+1)+1)/2}$

$F'(x) = \dfrac{1}{4(x+1)\sqrt{\frac{1}{2}\ln(x+1)+1}}$ $\downarrow$ - убывает

$F'(0,8) < 1$ - сходится

2) $x_{n+1} = e^{2x_n^2-1} - 1$

$F'(1) = 4e > 1$ - нет сходимости

3) $x_{n+1} = \dfrac{1}{2x_n}\left(\ln(x_n+1)+1\right)$

$F'(x) = \dfrac{\frac{2x}{x+1} - 2(\ln(x+1)+1)}{4x^2} < 0,9 \Rightarrow$ сходится

4) $x_{n+1} = x_n + \ln(x_n+1) - 2x_n^2 + 1$

$F'(1) = 2,5 \Rightarrow$ нет. сходимости

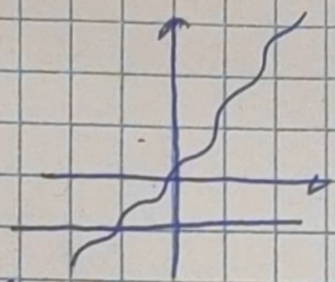
№ 9.6

б.д $\exists!$ корень $\forall a$

$x + 0,5\sin x + a = 0$

$\varepsilon = 10^{-3}$

1) $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos x \geq \frac{1}{2}$



a - const

$f'(x) > 0 \ \forall x \Rightarrow$ ф-ция монотонно возрастающая, и

она пересекает константу в ! месте по следствию Т Б.К

2) $x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)} = x^n - \frac{x^n + 0{,}5\sin x^n + a}{1 + 0{,}5\cos x^n}$

2.1) $a = \pm 1$ $\qquad x_0 = 1$ $\qquad x^* = \cancel{\pm 0{,}884}\ \pm 0{,}684$

$x_1 = 1 -$

2.2) $a = \pm 3$ $\qquad x_0 = 1$ $\qquad x^* = \mp 2{,}862$

2.3) $a = \pm 2$ $\qquad x_0 = 1$ $\qquad x^* = \mp 1{,}501$