Глава 8

№ 7.7

$$\dot{y} = a\cancel{y} \qquad y(0)=1$$

$$y = e^{at}$$

1) Явный метод

$$y_{n+1} = y_n + hay_n = y_n(1+ah) = (1+ah)^{n+1}$$

т.к. $y(0)=1$

Проекция $y(t)$ на сетку $\{nh\} \to \{e^{ahn}\}$

$$y_n = (1+ah)^n \Rightarrow \|\cdot\|_\infty = \max_n |(1+ah)^n - e^{ahn}| \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \Rightarrow \text{сходится}$$

Определим порядок:

$$\frac{e^{a(n+1)h} - e^{ahn}}{h} = ae^{ahn} + r_n \Rightarrow hr_n = e^{ahn}(e^{ah} - ah - 1) \Rightarrow 1$$

2) Неявный метод Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + h a y_{n+1} \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1}{(1+ha)^{n+1}}$$

$$\left\| \frac{1}{(1-ha)^n} - e^{hn} \right\|_\infty = \max_n |-\|-| \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \Rightarrow \text{сходится}$$

Порядок:

$$\frac{e^{a(n+1)h} - e^{anh}}{h} = ae^{anh} + r_n \Rightarrow h r_n = e^{ahn}\left(e^{ah} - 1 - hae^{ah}\right) \Rightarrow 1$$

3) Метод трапеции

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = a y_{n+\frac{1}{2}} \Rightarrow y_{n+1} = \left(1 + ah + \frac{a^2h^2}{2}\right)^{n+1}$$

$$\left\| \left(1 + ah + \frac{(ah)^2}{2}\right)^n - e^{ahn} \right\|_\infty = \max_n |-\|-| \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \Rightarrow \text{сходится}$$

Порядок:

$$\frac{e^{a(n+1)h} - e^{ahn}}{h} = ae^{a(n+\frac{1}{2})h} + r_n = e^{ahn}\left(e^{ah} - 1 - ahe^{\frac{1}{2}h}\right) \Rightarrow 2$$

№ 10.2 а

$$\begin{cases} \dot{V} = V + W \\ \dot{W} = V^2 - W^2 \end{cases} \quad \begin{cases} V(0) = 1 \\ W(0) = 2 \end{cases} \quad 0 \le x \le 1$$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} V+W \\ V^2 - W^2 \end{pmatrix} \quad \bar{U}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Метод Эйлера: $\vec{U}_{n+1} = \vec{U}_n - h \vec{f}(t_n, \vec{U}_n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} V_{n+1} \\ W_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_n \\ W_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} V_n - W_n \\ V_n^2 - W_n^2 \end{pmatrix}$$

№ 10.3

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = y \sin x \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

$$0 \le x \le 1$$

а) $\begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = y \sin t \end{cases} \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ z(0) = 1 \end{cases}, \quad 0 \le t \le 1$

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} z_n \\ y_n \sin t_n \end{pmatrix}$$

б) $\dot{y}_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau}$; $\ddot{y}_n = \frac{\dot{y}_{n+1} - \dot{y}_n}{\tau} = \frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n}{h^2}$

$$\ddot{y}_n = y_n \sin t_n$$

$$\Downarrow$$

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} + y_n(\tau^2 \sin z_n - 1)$$

№ 9.11

$U^{\delta}_{n+1} = U_n + h f(t_n, U_n)$ - эйлер

$U_{n+\frac{1}{2}} = U_n + \frac{h}{2} f(t_n, U_n)$

$U^{h/2}_{n+1} = U_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f(t_{n+\frac{1}{2}}, U_{n+\frac{1}{2}}) = U_n + \frac{h}{2} f(t_n, U_n) + \frac{h}{2} f(t_n + \frac{h}{2}, U_n + \frac{h}{2} f(t_n, U_n))$

Ричардсон: $U_{n+1} = U^{\frac{h}{2}}_{n+1} + \frac{U^{\frac{h}{2}}_{n+1} - U^{h}_{n+1}}{1} = U_n + h f(t_n + \frac{h}{2}, U_n + \frac{h}{2} (t_n, U_n))$

$\Downarrow$

Таблица Бутчера:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & - & - \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & - \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$