№ I.6.5

При округ. с отбрасыв. $\varepsilon = 2^{1-p}$

с добавлением $\varepsilon = \frac{1}{2} 2^{1-p}$

OV1

Док-во для $\varepsilon = 2^{-p}$

Пусть x - число в двоичной системе $x = \cancel{\sum_{k=1}^{\infty} x_k 2^{q-k}} = 2^q \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}$

$$x^* = 2^q \sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{2^k} \Rightarrow \varepsilon = \left|\frac{x - x^*}{x^*}\right| = \frac{\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}} < \frac{2}{2^p} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^p}$$

№ 8.15

$|y^* - y| < \Delta y$, $y^* = f(x^*)$; $y = f(x)$

$y^* = f(x^*)$

$y_1 = f(x^* + \Delta x) = f(x^*) + f'(x^*)\Delta x$

$y_2 = f(x^* - \Delta x) = f(x^*) - f'(x^*)\Delta x$

$\Delta y = |y^* - y| \leq f'(x^*)\Delta x$

а) $f(x) = \sin x$

$\Delta y = \cos(x^*)\Delta x$, $x^* \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\Delta y = \frac{\sin(x^*)}{2} \Delta x^2$, $x^* = \frac{\pi}{2} + \pi k$ - т.к. производная зануляется с $\cos(x^*)$

$\Delta x << 2\sigma$ $\operatorname{tg} x^* \Delta x < 1$

б) $f(x) = \ln(x)$

$\Delta y = \frac{\Delta x}{x^*}$ $\qquad \ln x = \ln x^* + \frac{\Delta x}{x^*} - \frac{1}{x^{*2}} \cdot \frac{\Delta x^2}{2} + \dots$

$x^* \neq 0$ $\qquad \frac{\Delta x}{x^*} < 1$ - чтобы одно было o-малым от последующих

в) $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$

$\Delta y = \frac{5-2x}{(x-2)^2(x-3)^2}\Delta x \quad , x \neq 2, \ x \neq 3$

№ 8.16

$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ $\qquad$ Разумно $\Rightarrow \left|\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x\right| = \left|\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\right|$

а) $z = x + 10y$ $\qquad$ б) $(y + y^2)\Delta x = (x + 2xy)\Delta y$

$\Delta y = \frac{\Delta x}{10}$ $\qquad \Delta y = \frac{\Delta x}{x} \cdot \frac{y(y+1)}{2y+1}$

в) $z = \frac{x}{y}$

$\Delta y = \frac{\Delta x}{x} y$

№ 8.20

$\Delta x = 10^{-3}$

$y \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

$f(x)=\sin(x)$

$f^n(x)=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$ - зануляет $x=0$ при $n\vdots 2$

Δa - погрешн. аппрок.

$\Delta a=\left|\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}\right|=\left|\frac{\sin\frac{\pi n}{2}x^n}{n!}\right|=\frac{x^n}{n!}\leq\Delta x$

1) $0<x<1$ $\quad x_{max}=1$

$n_{min}=7=k+1\Rightarrow k=6$

2) $x\in[10;11]$ $\quad n_{min}=35=k+1\Rightarrow k=35$

б) $\Delta y=\cos x\,\Delta x$

$q_k(x)=\frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}=\frac{x^k}{k!}$

$\Delta q_k(x)=|q_k'(x)\Delta x|=\left|\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\Delta x\right|$ - абс погр. для $q_k(x)$

$\Delta q_k(x)\leq\Delta y$

$\left|\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right|\leq|\cos x|$

$\varepsilon_q=\frac{\Delta q_k}{q_k}=\frac{\Delta_x k}{x}=\varepsilon_x k$

1) $x\in[0;1]\Rightarrow\left|\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right|\leq|\cos x|\Rightarrow k=3$

$\varepsilon_q=3\varepsilon_x$

2) $x\in[10;11]\Rightarrow\left|\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\right|\leq|\cos x|\Rightarrow k=33$

$\varepsilon_q=33\varepsilon_x$

И sin может быть разложен в ветвящуюся дробь

$$\sin x = \cfrac{2}{\cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - x^2}} + \cfrac{\frac{1}{x}}{1 - \cfrac{x^2}{3 - x^2}}}$$

Глава 1

№ 8.23

$ay^3 + by^2 + d = 0$ $\qquad a = 1,\ b = 2,\ d = -3$ $\qquad \Delta a = \Delta b = \Delta d = 10^{-2}$

1) $\frac{\partial}{\partial a} \Rightarrow y^3 + 3ay^2\frac{\partial y}{\partial a} + 2by\frac{\partial y}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial a} = -\frac{y^2}{3ay + 2b}$

2) $\frac{\partial}{\partial b} \Rightarrow 3ay^2\frac{\partial y}{\partial b} + y^2 + 2by\frac{\partial y}{\partial b} = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial b} = -\frac{y}{3ay + 2b}$

3) $\frac{\partial}{\partial d} \Rightarrow 3ay^2\frac{\partial y}{\partial d} + 2by\frac{\partial y}{\partial d} + 1 = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial d} = -\frac{1}{3ay^2 + 2by}$

$$\Delta U \le \left|\frac{\partial y}{\partial a} da\right| + \left|\frac{\partial y}{\partial b} db\right| + \left|\frac{\partial y}{\partial d} dd\right| \underset{y=1}{=} \frac{\Delta a + \Delta b + \Delta c}{7} = \frac{3}{7}\cdot 10^{-2}$$

$$dU = \frac{y^3 da + y db + dc}{|3ay^2 + 2by|}$$

№ 8.33

а) $f' = \alpha(f(x+h)) + \beta(f(x+2h)) + \gamma f(x+3h)$

$$\begin{cases} f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} \\ f(x+2h) = f(x) + 2f'(x)h + f''(x)2h^2 \\ f(x+3h) = f(x) + 3f'(x)h + f''(x)\frac{9h^2}{2} \end{cases}$$

Хотим, чтобы коэффициенты при $f(x)$ и $f''(x)$ занулились, тогда имеем лин. систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = -\frac{5}{2h} \\ \beta = \frac{4}{h} \\ \gamma = -\frac{3}{2h} \end{matrix} \qquad f'(x) = \frac{-5f(x+h) + 8f(x+2h) \ldots}{2h}$$

б) Если $\varepsilon_{f(x)} = \varepsilon \Rightarrow$

$$\Delta f' \leq \frac{5\varepsilon + 8\varepsilon + 3\varepsilon}{2h} = \frac{8\varepsilon}{h}$$