№4.1 Глава 3

Алгоритм проведения на плоскости окружности через 4ре и более точек с помощью МНК

1) Заметим, что ∀ 3 точки можно провести окруж-ность:

$$R = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

$$R - (x-a)^2 - (y-b)^2 = 0$$

Проводя через ∀ $n = 4$ это выражение не обязано выполняться, но для наилучшего приближения $R - (x-a)^2 - (y-b)^2 \to min$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(R - (x_i - a)^2 - (y_i - b)^2\right)^2 \to min$$

Возьмём: $\frac{\partial Q(R, a, b)}{\partial R} = 0$

$$\Updownarrow$$

$$R^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left((a - x_i)^2 + (b - y_i)^2\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left((a - x_j)^2 + (b - y_j)^2\right) - (a - x_i)^2 - (b - y_i)^2\right)^2$$

a^2 и b^2 уйдут => решаем систему лин уравнений и всё (т. е задача МНК)

№ 4.2

$B = \frac{H}{a + bH}$

$a; b - ?$

$x = H =$	8	10	15	20	30	40	60	80
$B =$	13.0	14.0	15.4	16.3	17.2	17.8	18.5	18.8
$y = \frac{H}{B} =$	0,6	0,7	1	1,2	1,7	2,2	3,2	4,6

$B = \frac{H}{a + bH} \Leftrightarrow a + bH = \frac{H}{B}$

$a + bx = y$

Решение:

$Q = \sum_{i=1}^{8} (a + bx_i - y_i)^2 \to min$

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial b} = \sum_{i=1}^{8} 2(a + bx_i - y_i)x_i = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial a} = \sum_{i=1}^{8} 2(a + bx_i - y_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 263 + 13289b = 717,8 \\ 8a + 263b = 14,8 \end{cases}$$

Ответ: $a = 0,2$ $b = 0,05$

№ 4.3

$A_1 = 54°5'$

$A_2 = 50°1'$

$A_3 = 76°6'$

$A_1 + A_2 + A_3 = 180°12'$

Т.е суть задачи в том, чтобы составить оптимальную ф-цию чтобы $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 180$, но при этом сумма квадратов отклонений была минимальна, т.е имеем систему:

$$\begin{cases} \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 180 \\ \sum_{i=1}^{3} (A_i - \alpha_i A_i)^2 \to \min \end{cases}$$

$$Q(\alpha_1, \alpha_2) = (A_1 - \alpha_1 A_1)^2 + (A_2 - \alpha_2 A_2)^2 + (A_3 - 180 + \alpha_2 A_2 + \alpha_1 A_1)^2 \to \min$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_1} = 0 \Leftrightarrow 180 + A_1 - A_3 = 2A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_2} = 0 \Leftrightarrow 180 + A_2 - A_3 = A_1\alpha_1 + 2A_2\alpha_2$$

Ответ: $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,999 \\ 0,998 \\ 0,997 \end{pmatrix}$