

Табла 6

	0	1	2	3
x	0,2050	0,2052	0,2069	0,2075
y	0,20792	0,20813	0,20990	0,21051

Решение:

Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа

$$P_N^L = \sum_{k=0}^N f_k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^N \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

а) Линейная на $[x_1; x_2]$

$$P_1 = f_1 \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f_2 \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 0,20813 \left(\frac{x - 0,2069}{-0,017} \right) + 0,20990 \left(\frac{x - 0,2052}{0,017} \right)$$

$$P_1(0,2062) = 0,20874$$

б) Квадратичная на $[x_0; x_2]$

$$P_2 = f_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$P_2 = 0,20792 \cdot \frac{(x - 0,2052)(x - 0,2069)}{(-0,0002)(-0,0019)} + \dots$$

$$P_2(0,2062) = 0,20883$$

в) Кубическая на $[x_0; x_3]$

$$P(x) = f_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \dots$$

$$f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_2)} + f_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_0)}$$

$$P(0,2062) = 0,20857$$

Исследуем погрешность

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

$$\max_x |f^{(k)}(x)| \approx k! \max_x |f(x \dots)|$$

$$\Delta_1 \leq \max_x |(x-x_0)(x-x_1)| \cdot \left| \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} \right| \leq 1,05 \cdot 10^{-8}$$

$$\Delta_2 \leq \max_x |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| \cdot \left| \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \right| \leq 0,8 \cdot 10^{-8}$$

$$\Delta_3 \leq \max_x |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)| \cdot \left| \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} - \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3} \right|$$

$$\leq 0,6 \cdot 10^{-8}$$

У 9.22

t	7	12	17	22	27	32	37
A	83,7	72,9	63,2	54,2	47,5	41,4	36,1

Составим таблицу разгел. разностей

t	A	I	II	III	IV	V
7	83,7	-2,16				
12	72,9	-1,94	0,022	0,000133		
17	63,2	-1,70	0,024	0,000133	0	0,0000006
22	54,2	-1,44	0,026	-0,00027	-0,000004	0,00000085
27	47,5	-1,22	0,022	-0,00013	0,000007	
32	41,4	-1,02	0,020			
37	36,1					

VI

$$8,2 \cdot 10^{-9}$$

$$A(t) = 83,7 - 2,16(t-7) + 0,22(t-7)(t-12)$$

$$\boxed{A(25) = 49,968}$$

9.24

x	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
y	1,457	5,466	6,695	8,198	10,019
shx-5	-0,543	0,466	1,695	3,198	5,019

$$y = shx$$

$$x: shx = 5$$

$\tilde{x} = shx - 5$	\tilde{y}	I	II	III	IV
\Rightarrow					
$\tilde{y} = x$	-0,543 2,2	0,198			
	0,466 2,4	0,169	-0,016		
	1,695 2,6	0,133	-0,011	0,001	
	3,128 2,8	0,110	-0,007	0,001	0
	5,019 3,0				

$$N(\tilde{x}) = 2,2 + 0,198(\tilde{x} + 0,543) - 0,016(\tilde{x} + 0,543)(\tilde{x} - 0,466) + 0,01(\tilde{x} + 0,543) \cdot \checkmark$$

\Leftarrow

$$\tilde{x} = y - 5 = 0 \Rightarrow N(\tilde{x})|_0 = N(0) = 2,312$$

У 8.1

$h = ?$

$$\varepsilon \leq 10^{-3}$$

Воспользуемся ср-ой для погрешности

$$\|f(x) - L_n(x)\| = \frac{1}{n+1} \omega(x) f^{(n+1)}(\xi)$$

П.к экстраполяция линейная $\Rightarrow n=1$

это будет $\max_{x \in [x_0, x_0+h]} \frac{1}{2} (x-x_0)(x-x_0-h) \|f''(\xi)\| = \frac{1}{2} \|f''(x)\| \left(x_0(x_0+h) - \frac{(x_0+h)^2}{4} \right)$
 при $x = x_0 + \frac{h}{2}$

$$= \frac{\|f''(x)\|}{2} \cdot \frac{h^2}{4} \Rightarrow h \leq 2 \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\|f''(x)\|}}$$

a) $f(x) = \sin x, \varepsilon = 10^{-3}$

$$h \leq 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3}}{1}} = 0,089$$

б) $f(x) = \ln x, x \geq 1$

$$h \leq 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3}}{1}} = 0,089$$

в) $f(x) = e^x, 0 \leq x \leq 1$

$$h \leq 2 \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3}}{e}} = 0,054$$

У 8.10

$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ - неравномерная сетка

$$\max_j (x_{j+1} - x_j) = h = \text{const}$$

a) h : вост. $\sin x$ с $\varepsilon = 10^{-4}$ - ?

$$h \leq 2 \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\|f''(x)\|}} = 0,028$$

б) Квадратная интерполяция

$$\frac{|f'''(x)|}{6} |(x-x_0)(x-x_0-h_1)(x-x_0-h_1-h_2)| \leq$$

$$\leq \frac{|f'''(x)|}{6} (h_1+h_2) \max(h_1, h_2) (h_1+h_2) \leq \frac{\rho}{3} \cdot |f'''(x)| h^2 \leq \varepsilon$$

$$h \leq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 1}} = 0,053$$

$$б) \quad n=1 \Rightarrow \sum_0^2 |\psi(x)| \leq 2 \Rightarrow \delta l \leq \frac{1}{2} \varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-4}$$

$$n=2 \Rightarrow \sum_0^3 |\psi(x)| \leq 3 \Rightarrow \delta l \leq \frac{1}{3} \cdot 10^{-4}$$

р 0.13

0	0	$\frac{3}{\pi}$		
$\frac{\pi}{6}$	0,5	$\frac{2}{\pi}$	$-\frac{1,92}{\pi^2}$	
$\frac{\pi}{4}$	0,71	$\frac{2,52}{\pi}$	$-\frac{3,6}{\pi^2}$	$-\frac{5,04}{\pi^3}$
$\frac{\pi}{3}$	0,87	$\frac{1,92}{\pi}$		

$$\left| \frac{f'''(x)}{24} \prod (x-x_i) \right| \leq 0,006$$

$$F(x) = \frac{3}{\pi} x - \frac{1,92}{\pi^2} x \left(x - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{5,04}{\pi^3} \left(x \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\delta F(x) = \frac{3}{\pi} \delta x - \frac{3,84}{\pi^2} x \delta x + \frac{1,92}{6\pi^2} \delta x^2 + \dots$$

$$\delta F\left(\frac{\pi}{24}\right) = 6,3 \cdot 10^{-3}$$

$$|R(x)| + |\delta F| = \Delta = 6,9 \cdot 10^{-3}$$