Kapitel 2

Kinematik (Bewegungslehre)

erstmal ganz einfach →

2.0.1 Eindimensionale Bewegung

z.B. Eisenbahn auf gerader Schiene, Radfahrer auf schmalem, geradem Radweg

Kinematik ↔ Wissen von wann, wo, wie schnell?
→ Verknüpfung von (Anfangs)Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung

Art der Translation	Geschwindigkeit v	Beschleunigung a
0) keine	0	0
a) gleichförmig	konstant	0
b) gleichmäßig beschleunigt	ändert sich gleichförmig	konstant
c) ungleichmäßig beschleunigt	ändert sich ungleichförmig	ändert sich

a) gleichförmige Bewegung

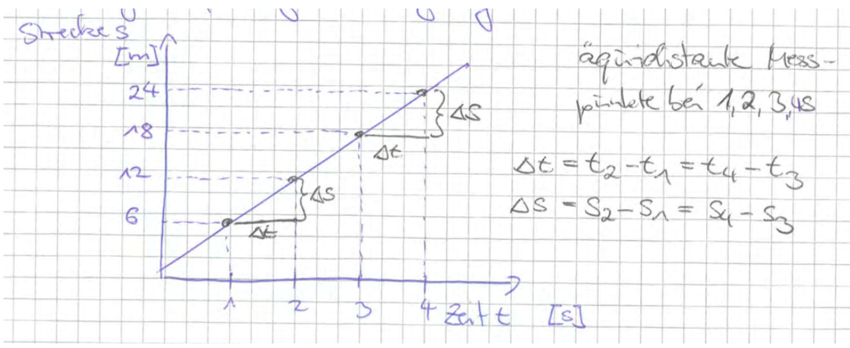


Abbildung 2.1: gleichförmige Bewegung

Bewegung ist gleichförmig → Verbindungslinie! Jedem Ort ist eine bestimmte Zeit zugeordnet (und umgekehrt)

→ Weg-Zeit-Diagramm

Kann die Geschwindigkeit aus dem Weg-Zeit-Diagramm abgelesen werden?
Ja!

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \left[\frac{m}{s}\right] \equiv \text{Steigung der Geraden! (Jetzt erst } \Delta s \text{ und } \Delta t \text{ einzeichnen!)} \tag{2.1}$$

mit der mittleren Geschwindigkeit zwischen zwei Punkten $\bar{v}$

Messung z.B. mit Tacho → Umdrehung des Rades pro Zeit
Geht das auch für nicht-gleichförmige Bewegung?

Ja!

$$v(t) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} =: \dot{s} \tag{2.2}$$

Vergleiche Mathe aus Schule:

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x_2} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{2.3}$$

Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Ortes nach der Zeit!

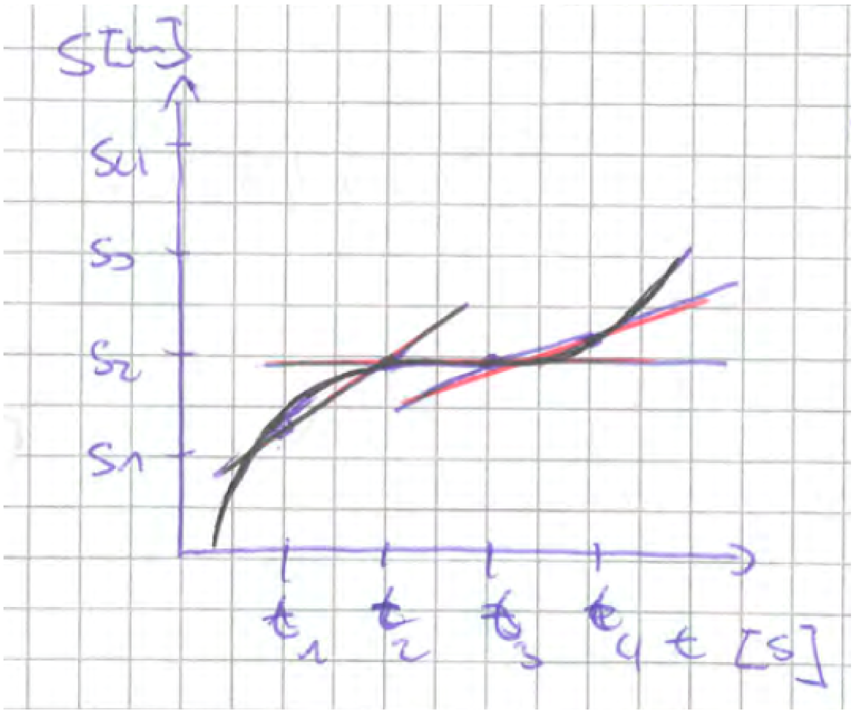


Abbildung 2.2: Ableitung

Weg-Zeit und Geschwindigkeit-Zeit-Diagramme:

Wichtig: Geschwindigkeiten sind immer relativ zu einem Bezugssystem (Koordinatensystem) zu messen, z.B. Radfahrer relativ zu Markierung am Boden

Gedankenexperiment: Zug fährt mit $\bar{v}_1 = 80\ \frac{km}{h}$ nach Osten, Passagier läuft mit $\bar{v}_2 = 5\ \frac{km}{h}$

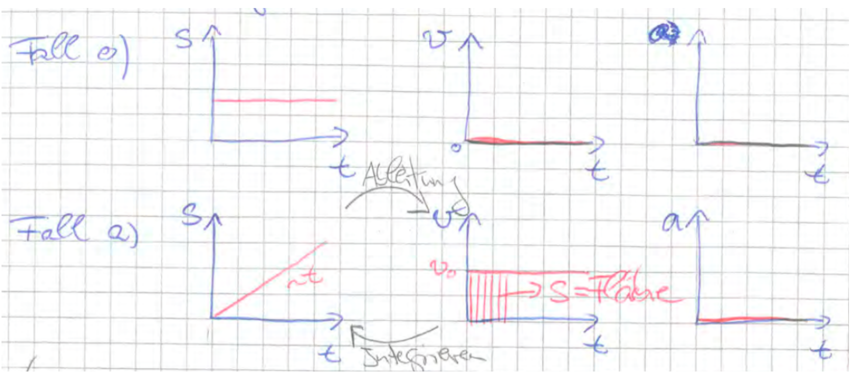


Abbildung 2.3: Diagramme

den Gang entlang. Wie schnell ist Passagier relativ zum Boden?

$$\bar{v}_g = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = 85\ \frac{km}{h} \tag{2.4}$$

$$\bar{v}_g = \bar{v}_1 - \bar{v}_2 = 75\ \frac{km}{h} \text{(Beachte die Richtung)} \tag{2.5}$$

$$\bar{v}_g = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 \Rightarrow \text{Galilei-Transformation} \tag{2.6}$$

Galilei-Transformation bedeutet:
Geschwindigkeiten aus verschiedenen Bezugssystemen adddieren sich simpel.

Stimmt, aber nur für $v \ll c =$ Lichtgeschwindigkeit
Erinnere: „Schubladen“ und Gültigkeitsbereich einer Hypothese. Stimmt für Biologie + im Alltag

ABER: Da c Maximalgeschwindigkeit ist, muss das Additionsgesetz für große $\bar{v}$ falsch sein!

Nebenbemerkung: Für große $\bar{v}$ muss Lorentztansformation angewendet werden (spezielle Relativitätstheorie)

$$\bar{v}_g = \frac{\bar{v}_1 + \bar{v}_2}{1 + \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2}{c^2}} \tag{2.7}$$

Bsp.: $\bar{v}_1 = 90\%\ c = 0,9\ c, \bar{v}_2 = 0,9\ c$
Galilei: $\bar{v}_g = 1,8\ c$ falsch!
Lorenz: $\bar{v}_g = \frac{0,9\ c + 0,9\ c}{1 + 0,9 \cdot 0,9} = \frac{1,8\ c}{1,81} \approx 0,99\ c < c$

Nächstes Mal: $\dot{s} = v; \dot{v} = a \rightarrow \ddot{s} = \dot{v} = a$

b) gleichmäßig beschleunigte Bewegung in einer Dimension

$\rightarrow$ Geschwindigkeit ändert sich gleichförmig
$\rightarrow$ Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm

$\rightarrow$ irgendwas ist hier wieder konstant
Ja, Beschleunigung!

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{Steigung im v-t-Diagramm} \tag{2.8}$$

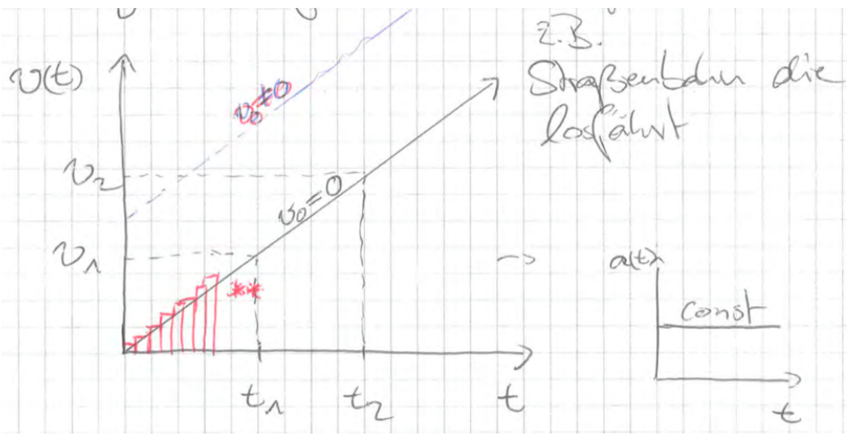


Abbildung 2.4: Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

mit der mittleren Beschleunigung zwischen zwei Zeitpunkten $\bar{a}$

allgemeiner, Beschleunigung in einem Punkt:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} =: \dot{v} = \frac{d}{dt}\frac{ds}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} \tag{2.9}$$

Weg-Zeit-Diagramm für $a = \text{const}$.

Anfangsbedingungen:

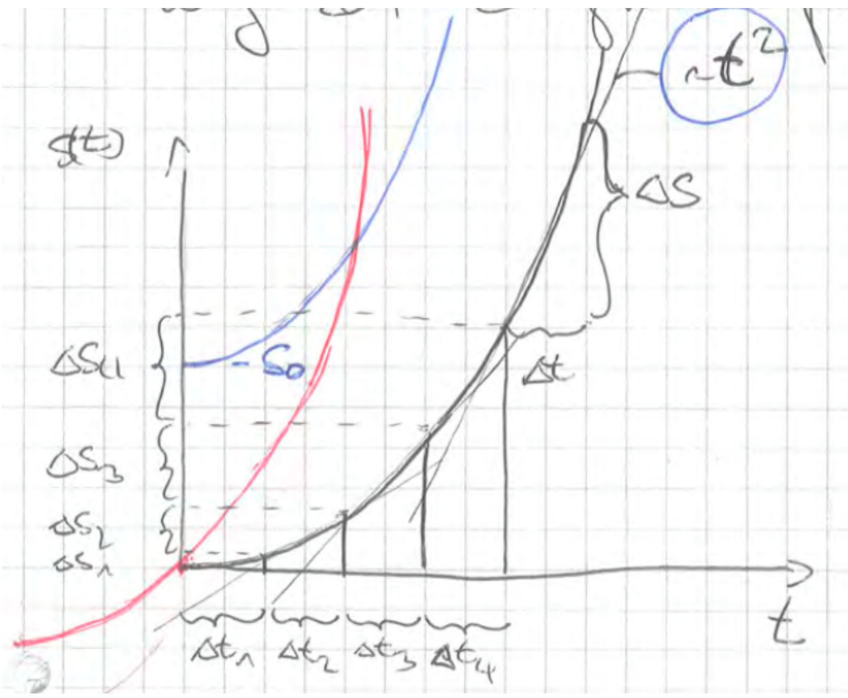


Abbildung 2.5: Weg-Zeit-Diagramm

$$v(t=0) = 0,\ s(t=0) = 0 \tag{2.10}$$

$$\Delta t_i = \Delta t_{i+1},\ \Delta s_i < \Delta s_{i+1} \tag{2.11}$$

$$\rightarrow \bar{v} = \frac{\Delta s_i}{\Delta t_i} \neq \text{const. (siehe oben)} \tag{2.12}$$

Die Balken werden immer größer, d.h. man muss zunehmend mehr dazuaddieren.

andere Anfangsbedingungen:
$\rightarrow$ Blau: $v(t=0)=0,\ s(t=0)=s_0 \neq 0$ $\rightarrow$ Rot: $s(t=0)=0,\ v(t=0)=v_0 \neq 0$

Wie sieht jetzt die Funktion $s(t)$ für $\bar{a} = \text{const.} = a(t)$ genau aus?

$$\frac{dv}{dt} = a \curvearrowright \text{(Stammfkt.)} \curvearrowleft \text{(Ableiten)}\ v(t) = \int_{t'_1=0}^{t'_2=t} a(t')dt' + c_1 \tag{2.13}$$

mit $c_1 = v(t=0) = v_0$ und $a(t) = \bar{a}$.

$$v(t) = \bar{a} \int_{t'_1=0}^{t'_2=t} dt' + v_0 = \bar{a} \cdot t + v_0 \tag{2.14}$$

$$\rightarrow \boxed{v(t) = \bar{a} \cdot t + v_0} \text{ Wir haben integriert, äh aufgeleitet ;-)} \tag{2.15}$$

Und $s(t)$?

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = v \curvearrowright \text{(Stammfkt.)} \curvearrowleft \text{(Ableiten)}\ s(t) = \int_{t'_1=0}^{t'_2=t} v(t')dt' + c_2 \tag{2.16}$$

Einsetzen von $v(t)$:

$$s(t) = \int_{t'_1=0}^{t'_2=t} (\bar{a} \cdot dt' + v_0)dt' + c_2 \tag{2.17}$$

$$s(t) = \int_0^t \bar{a} \cdot dt' + \int_0^t v_0 dt' + c_2 \tag{2.18}$$

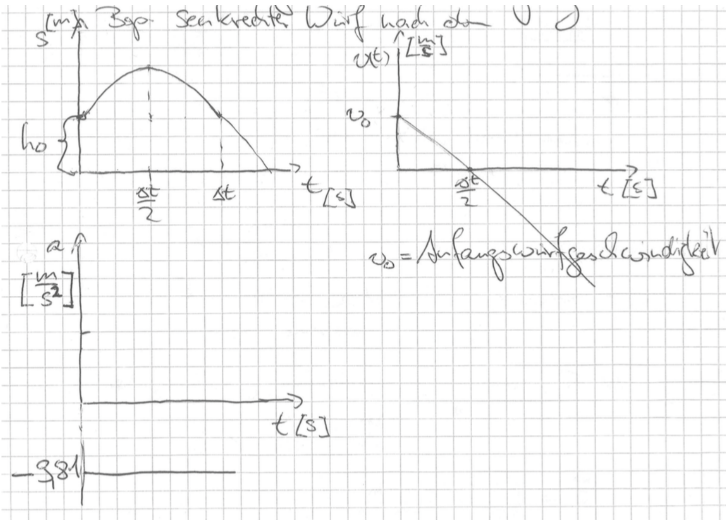
$$s(t) = \left[\frac{1}{2}\bar{a} \cdot dt'^2 + v_0 \cdot dt'\right]_0^t + c_2 \tag{2.19}$$

mit $c_2 = s(t=0) = s_0$

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2}\bar{a}t^2 + v_0 t + s_0} \tag{2.20}$$

mit der Parabel t^2, weil $\bar{a}$ konstant ist; der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und dem Anfangsort s_0 (meist wird versucht das Koordinatensystem so zu legen, dass $s_0 = 0$).

Wichtig: Ist $s(t)$ bekannt, lassen sich $v(t)$ und $a(t)$ exakt ausrechnen. Ist $v(t)$ bekannt, lässt sich $a(t)$ exakt ausrechnen, $s(t)$ nur bis auf Anfangsort (Integrationskonstante) bestimmen. Ist $a(t)$ bekannt, könne wir $v(t)$ und $s(t)$ berechnen, aber es sind zwei Integrationskonstanten zu beachten, v_0 und s_0.



c) ein Beispiel mit linear veränderlicher Beschleunigung

sei $a(t) = mt \rightarrow v(t) = \frac{1}{2}mt^2 + v_0 \rightarrow s(t) = \frac{1}{6}mt^3 + v_0 t + s_0$

zurück zum häufigsten Fall mit konstanter Beschleungigung (enthält auch $a = 0$),

Bsp. senkrechter Wurf nach oben, Beschleunigung nach unten:
Nebenbemerkung: Bremsen = negative Beschleunigung

kurze Zusammenfassung:

$$s = \text{const} \rightarrow v = 0 \qquad a = 0 \tag{2.21}$$

$$s(t) = \text{linear} \rightarrow v = \text{const} \qquad a = 0 \tag{2.22}$$

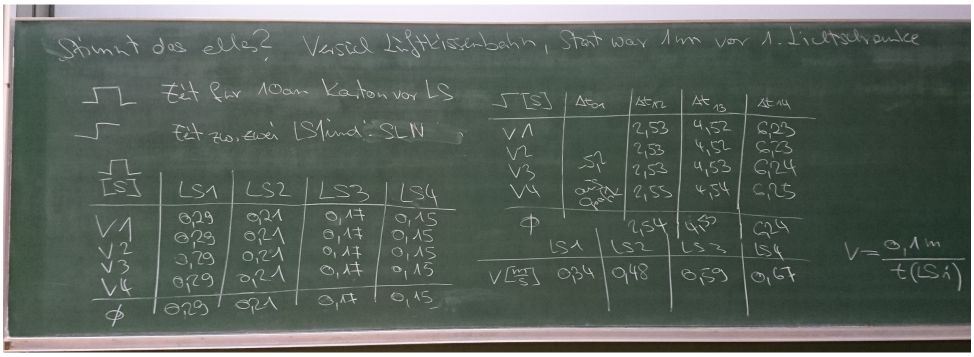
$$s(t) = \text{quadratisch} \rightarrow v(t) = \text{linear} \qquad a = \text{const} \tag{2.23}$$

$$s(t) \sim t^3 \rightarrow v(t) \sim t^2 \qquad a(t) = \text{linear} \tag{2.24}$$

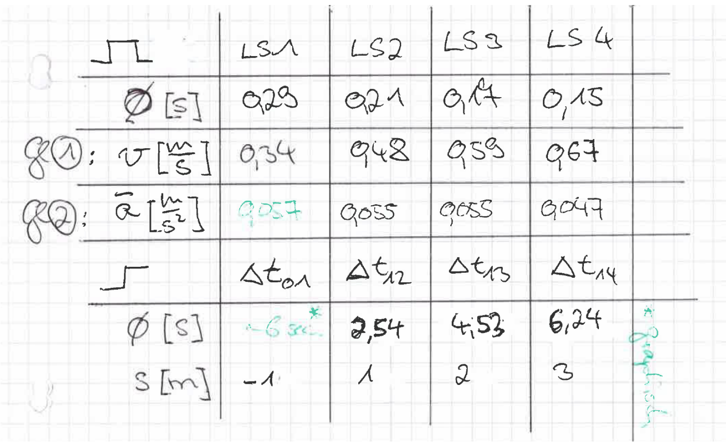
$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2}\bar{a}t^2 + v_0 t + s_0} \tag{2.25}$$

Große Frage: Stimmt das alles? -> experimentelle Überprüfung.
→ Versuch: schiefe Luftkissenbahn
4 Lichtschranken, Start 1 m vor 1. LS, 2 Modi:
a) Zeit zwischen der 1. und n-ten Lichtschranke
b) Zeit die der 10 cm breite Schlitten vor der n-ten Lichtschranke ist.

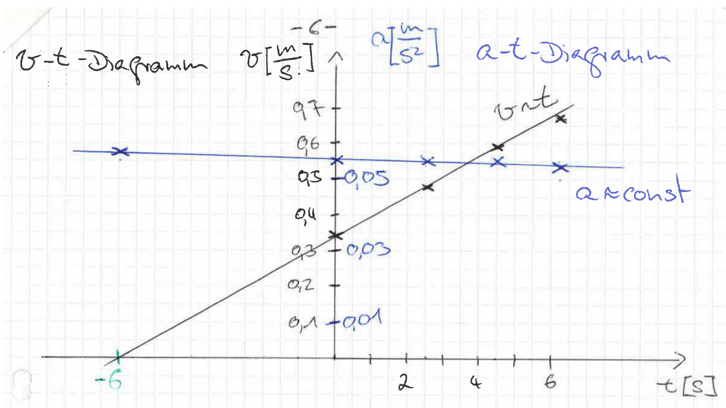
Versuch wurde 4 mal wiederholt und die Mittelwerte der Zeiten gebildet. Die Geschwindigkeit werden aus b) bestimmt, wie lange der Schlitten vor der jeweiligen Lichtschranke ist $v_i = \frac{0.1\ m}{t(LSi)}$. Die Hypothese lautet, dass die Geschwindigkeit linear ansteigt. Die Beschleunigung kann man bestimmen, indem man die Differenzen der Geschwindigkeiten (aus b))zwischen den Lichtschranken durch die Differenzen der Zeiten (aus a))teilt, wann



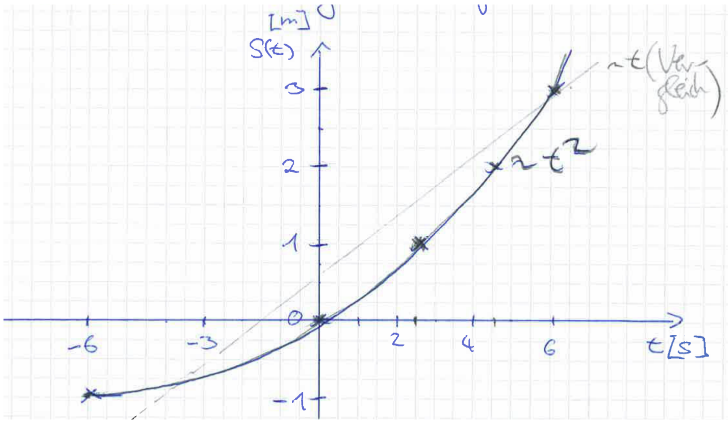
der Schlitten an der Lichtschranke vorbei kommt $a_i = \frac{\Delta v}{\Delta} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t_{i+1,i}}$. Den Wert, wann der Schlitten startete (grün) haben wir aus dem Plot grafisch extrapoliert. Die Strecke ist durch die Positionen der Lichtschranken gegeben, mit den zugehörigen Zeiten aus a), der Koordinatenursprung liegt bei der 1. Lichtschranke.



Der Plot zeigt, dass sich die Geschwindigkeit (schwarz) in der Tat gut durch einen linearen Anstieg beschreiben lässt. Die Beschleunigung (blau) ist auch annähernd konstant. Dass sie etwas kleiner zu werden scheint, könnte daran liegen, dass die Geschwindigkeit wegen der Reibung etwas weniger schnell wächst, als wenn sie keine Reibung hätte. Die Hypothesen sind nicht falsifiziert. Die nächste Hypothese ist das quadratische Anwachsen



der Strecke mit der Zeit. Der 2. Plot zeigt, wann der Schlitten an den jeweiligen Lichtschranken vorbeikam im Weg-Zeit Diagramm. Eine Parabel passt gut zu den Daten.Wenn wir den extrapolierten Startwert mitnehmen, sehen wir das eine Gerade zum Vergleich nicht reinpasst. Hypothese 2. ist auch nicht falsifiziert -> Wir vertrauen der Kinematik in einer Dimension



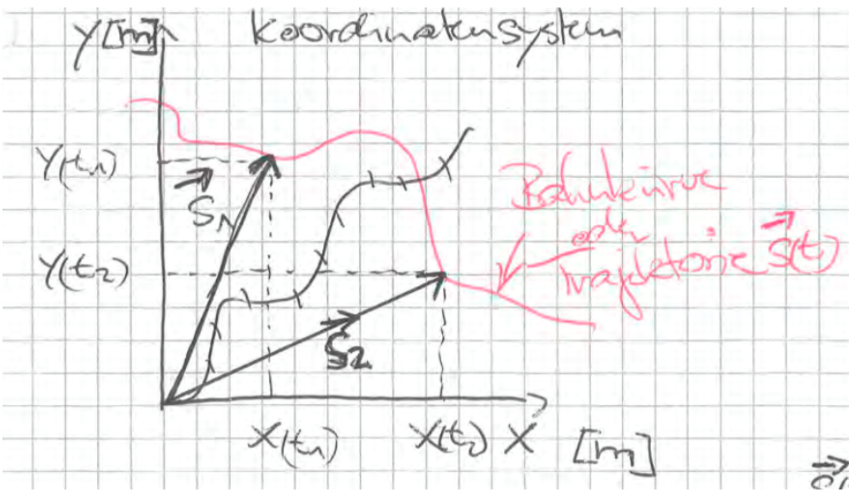
2.0.2 Bewegungen in 2D und 3D

Für Bewegungen in mehr als einer Dimension, z.B. um eine Kurve zu fahren, brauchen wir Vektoren!

- Vektoren sind Größen, die einen Betrag UND eine Richtung haben, im Gegensatz zu Skalaren.
- Skalare sind Größen, die nur einen Betrag haben

Beispiele der Physik:

Skalar: Temperatur T, Energie E, Ladung Q, Masse M
Vektoren: Kräfte $\vec{F}$, Geschwindigkeit $\vec{v}$, Beschleunigung $\vec{a}$, Orte $\vec{s}$, Impulse $\vec{p}$, elektrische und magnetische Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$.
z.B. Ortsvektor in 2 Dimensionen
Um den Ort zu bestimmen brauchen wir ein Zahlenpaar x und y. $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit Koor-



dinate 1 x und der Koordinate 2 y.

Um ein Date zu verabreden brauchen Sie 4 Koordinaten!

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

$\rightarrow$ 4-dimensional; mit der Höhe z, z.B. Stockwerk und dem Zeitpunkt t.

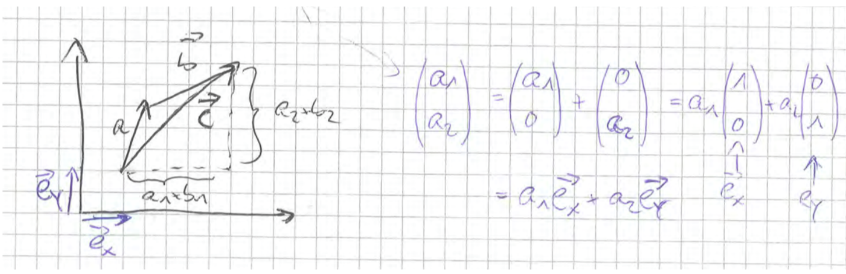
Rechenregeln für Vektoren:

Motivation: $74\ kg + 2\ kg = 76\ kg$ ist eindeutig (Skalare)

Vektoren: $3\ m$ (nach vorne) $+4\ m$ (nach links) $\neq 7\ m! = 5\ m$

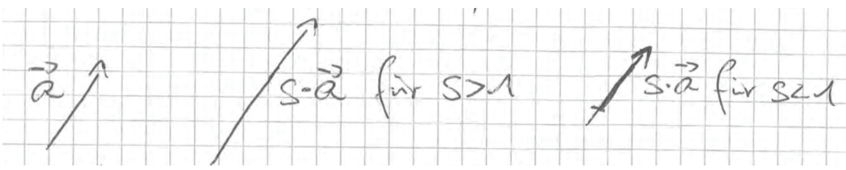
i **Vektoraddition:**

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{c} \tag{2.27}$$



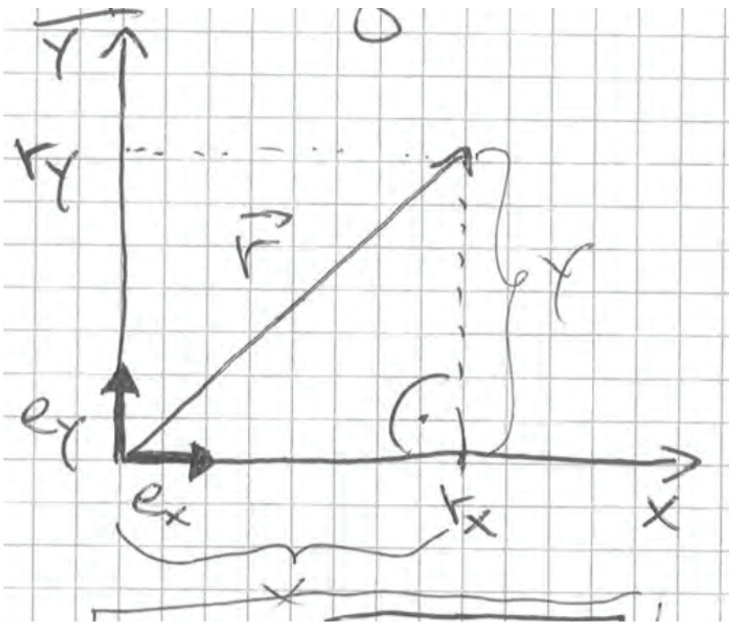
ii **Multiplikation mit einem Skalar:**

$$s \cdot \vec{a} = s \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$



iii **Länge eines Vektors (Betrag):**

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y \tag{2.29}$$

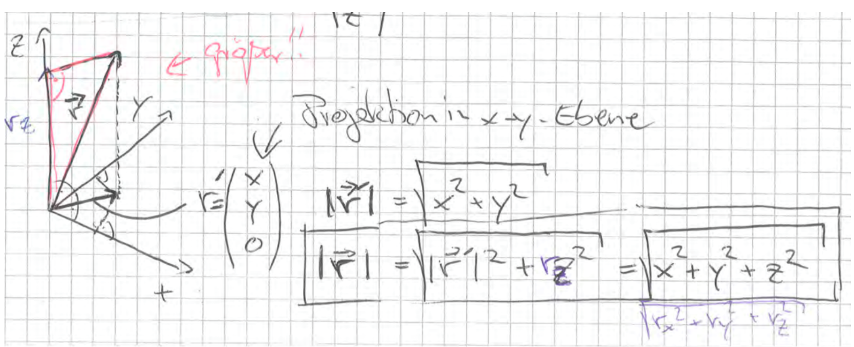


mit $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2}} \geq 0! \tag{2.30}$$

in 3D?

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

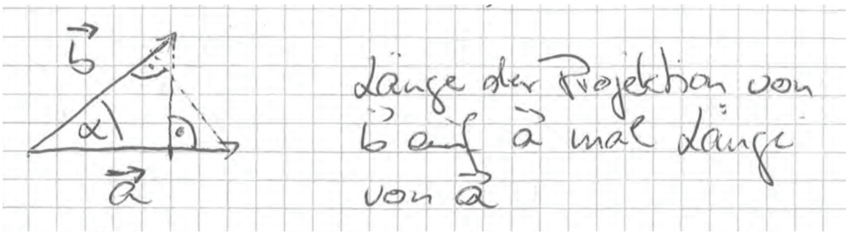


iv **Skalarprodukt (3D):**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 := c = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \cdot \cos\alpha \tag{2.32}$$

mit $\alpha \measuredangle (\vec{a}, \vec{b})$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = c$ ist ein Skalar
$\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist maximal für $\vec{a} \parallel \vec{b}; \alpha = 0$



$\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist Null für $\vec{a} \perp \vec{b}; \alpha = 90, \alpha = 270$
$\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist minimal (negativ) für $-\vec{a} \parallel \vec{b}; \alpha = 180$

v **Das Kreuzprodukt/Vektorprodukt:**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \tag{2.33}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ -a_1 b_3 + b_1 a_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix} = \det \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{2.34}$$

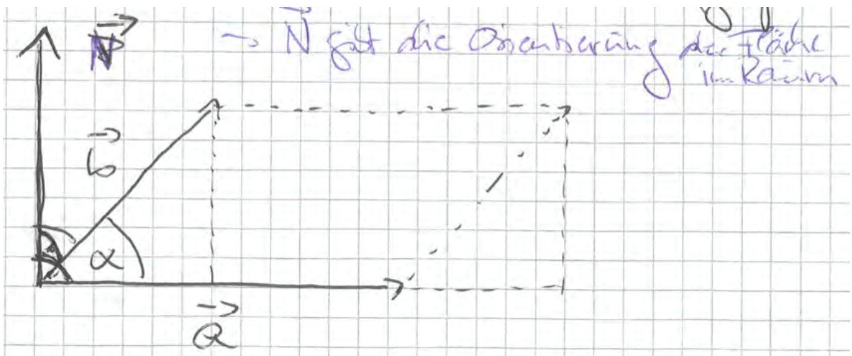
$$= \vec{e}_x(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \vec{e}_y(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \vec{e}_z(a_1 b_2 - a_2 b_1) \tag{2.35}$$

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cdot \sin(\alpha) = \vec{c} \cdot \vec{N} \tag{2.36}$$

mit $\alpha = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$ und $\vec{N}$ ist Normalenvektor $\left|\vec{N}\right| = 1$ $(\vec{N} \perp \vec{a}, \vec{N} \perp \vec{b})$

Das Kreuzprodukt „misst“ die Fläche F eines Parallelogramms ($F = |\vec{c}|$) und $\vec{N}$ steht senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Fläche. $\vec{N}$ ist maximal für $\vec{a} \perp \vec{b}; \alpha = 90$



$\vec{N} =$ Null für $\vec{a} \parallel \vec{b}; \alpha = 0$
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{N}$ bilden ein „Rechtssystem“ (rechte Hand Regel)
$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Zurück zur Kinematik:
Die Bewegungszustände in den verschiedenen Raumdimensionen addieren sich unabhängig! (in kartesischen Koordinaten)
Rene Descartes, cogito ergo sum

$$\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{e}_1 + y(t)\cdot\vec{e}_2 + z(t)\cdot\vec{e}_3 \tag{2.37}$$

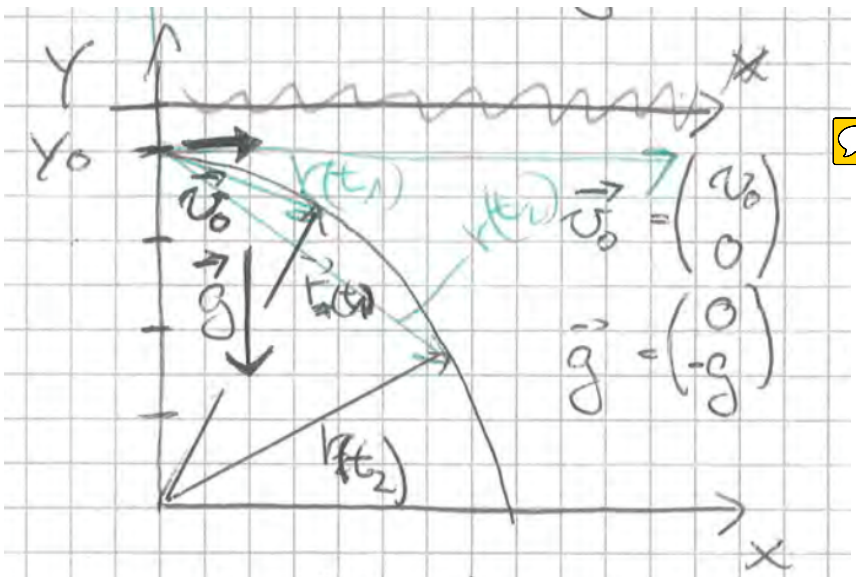
$$\vec{v}(t)(\text{velocity}) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\cdot\vec{e}_1 + \frac{dy(t)}{dt}\cdot\vec{e}_2 + \frac{dz(t)}{dt}\cdot\vec{e}_3 = \dot{\vec{r}} \tag{2.38}$$

$$\vec{a}(t)(\text{acceleration}) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\cdot\vec{e}_1 + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\cdot\vec{e}_2 + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\cdot\vec{e}_3 = \ddot{\vec{r}} \tag{2.39}$$

Beispiel: waagerechter Wurf
$\vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} = 9,81\ \frac{m}{s^2}$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0\cdot t + x_0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

(aus $s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$)



Wähle Koordinatensystem so, dass $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ (weil schlau)

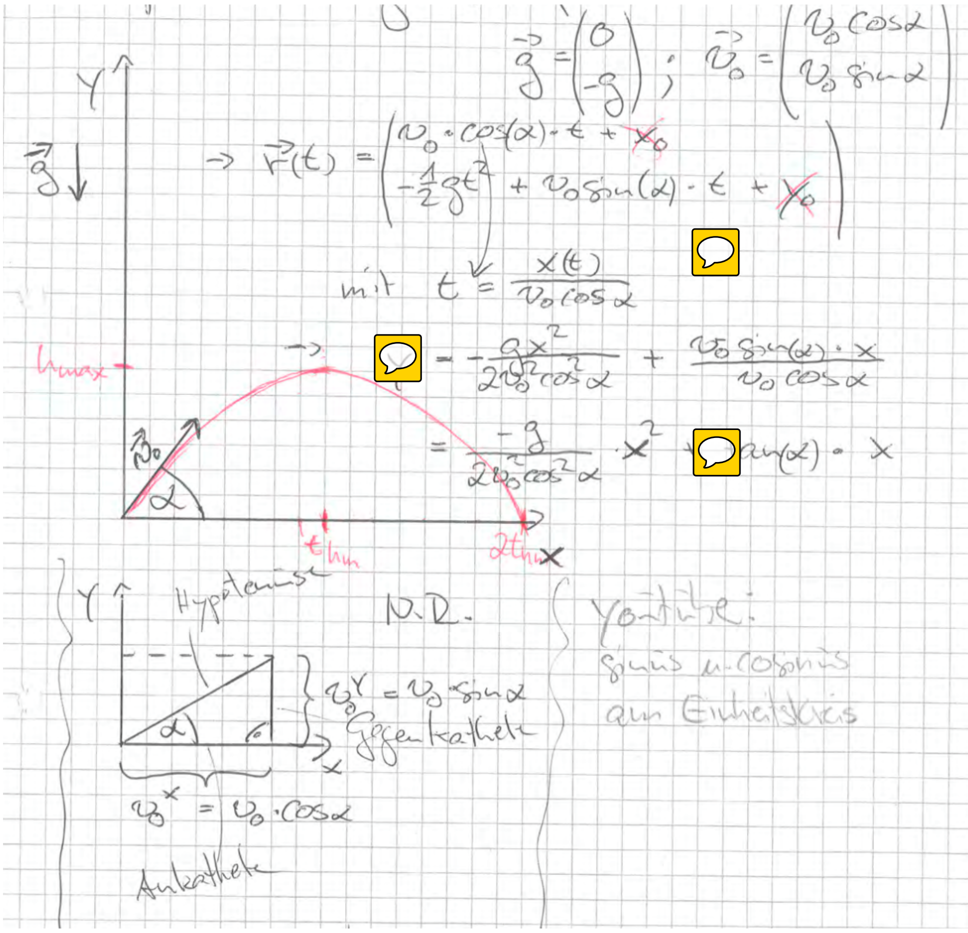
$$\rightarrow x(t) = v_0\cdot t + x_0; \qquad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \tag{2.41}$$

$$\rightarrow (\text{Auflösen}) \quad t = \frac{x - x_0}{v_0} \tag{2.42}$$

$$\rightarrow (\text{Einsetzen}) \quad y(x) = -\frac{1}{2}g\frac{(x-x_0)^2}{v_0^2} + y_0 \tag{2.43}$$

→ Parabel !! als Trajektorie

Versuch: horizontaler/schräger Wasserstrahl
Beispiel: schräger Wurf:



Geschwindigkeit:

$$\vec{v}_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cdot \cos\alpha \tag{2.44}$$

$$\vec{v}_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t \tag{2.45}$$

Bahngeschwindigkeit/Betrag der Geschwindigkeit?

$$v_B = |\vec{v}| \tag{2.46}$$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt)^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + v_0^2 \sin^2\alpha - 2v_0 gt \sin\alpha + g^2t^2} \tag{2.47}$$

$$= \sqrt{v_0^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 2g(v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2})} \tag{2.48}$$

mit $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha) \cdot t$ und $(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 1$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_0^2 - 2g \cdot y(t)} \tag{2.49}$$

mit $y(t) =$ aktuelle Höhe $=: h(t)$

Maximale Steighöhe $h_m = y_{max}$?
Entweder als Extremum (Maximum) der Wurfparabel

$$\frac{dy}{dx} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \text{(Kurvendiskussion)} \tag{2.50}$$

oder (physikalischer) aus

$$v_y \stackrel{!}{=} 0 \qquad (= \frac{dy}{dt} = 0) \qquad \text{(Vertikalgeschwindigkeit verschwindet)} \tag{2.51}$$

$v_y = v_0 \cdot \sin\alpha - gt \stackrel{!}{=} 0$

$$\boxed{t_{hm} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}} \qquad \text{einsetzen in} \quad y(t) \tag{2.52}$$

$$h(t_{hm}) = h_{max} = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} \right) + v_0 \sin\alpha \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \tag{2.53}$$

$$\boxed{h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}} \tag{2.54}$$

Wurfweite (bis auf Ausgangsniveau $y(t) = y_0$)
Gleichung der Wurfparabel $y(x) \stackrel{!}{=} 0$ lösen (p-q-Formel für quadratische Gleichung)
oder
aus Symmetrieüberlegung der Parabel
Steigzeit=Fallzeit $\rightarrow$ doppelte Steigzeit

$$s_m := x_{max} = x(2t_{hm}) = v_0 \cos(\alpha) \cdot 2t_{hm} = v_0 \cos(\alpha) \cdot \frac{2v_0}{g} \sin\alpha \tag{2.55}$$

mit $2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$ (Mathe Formelsammlung)

$$\boxed{x_{max} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha} \qquad \text{ohne Luftreibung!!} \tag{2.56}$$

Für welche Winkel α erreicht man bei $v_0 = const$ die maximale Weite?

$$\frac{d}{d\alpha} x_{max} := 0 \qquad \rightarrow 2 \frac{v_0^2}{g} \cos 2\alpha = 0 \tag{2.57}$$

$\sin 2\alpha$ ist maximal $= +1$ für $2\alpha = 90$

$$1 = \sin 2\alpha_m = \sin 90 \tag{2.58}$$

$$\rightarrow 2\alpha_m = 90 \tag{2.59}$$

$$\boxed{\alpha_m = 45} \tag{2.60}$$

Sonderfälle für
$\alpha = 90$ Senkrechter Wurf/Fallbewegung
$\alpha = 0$ Waagrechter Wurf

Nebenbemerkung: Kleinkinder schmeißen (kurz nachdem sie stehen können) alles auf den

Boden!
→ Experimentelles (Exploratives) Erkunden der Wurfparabel! Raumerkundung
Ihr seid nun sozusagen auf dem theoretischen Physiklevel eines Kleinkindes

(Gedankenexperiment „Gorilla “)
Experiment: zwei Kugeln fallen, Springfeder

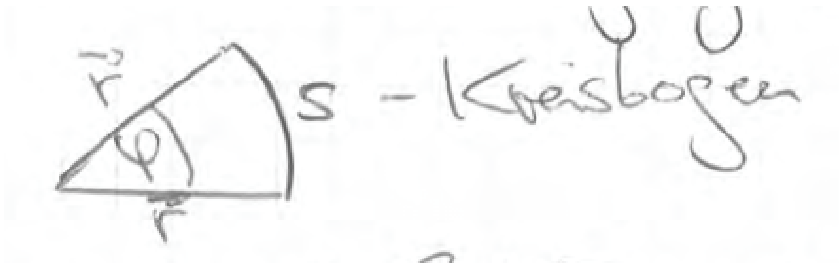
2.0.3 Kreisförmige Bewegung (Rotation)

von der math. Struktur völlig analog
Weg s → Drehwinkel φ
Geschwindigkeit v → Winkelgeschwindigkeit ω
Beschleunigung a → Winkelbeschleunigung α
Def.

$$\boxed{\varphi = \frac{s}{r}} \tag{2.61}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{T}} \tag{2.62}$$

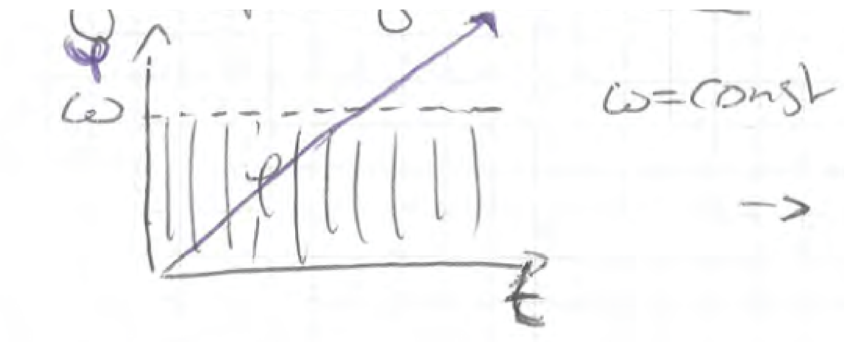
mit T = Umlaufzeit, Periodendauer und f = Umlauffrequenz



$$\omega = 2\pi f \tag{2.63}$$

$\omega :=$ Kreisfrequenz, Kreisgeschwindigkeit

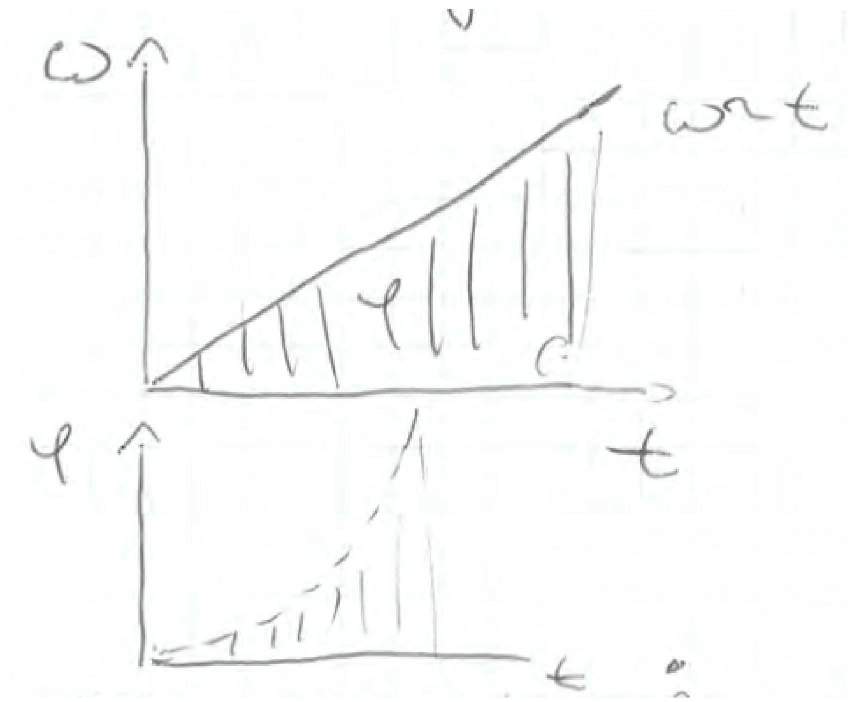
<u>Gleichförmige Rotation:</u>



$\varphi = \text{Fläche} = \omega \cdot t$

$$\rightarrow \omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \tag{2.64}$$

Gleichmäßig beschleunigte Rotation:

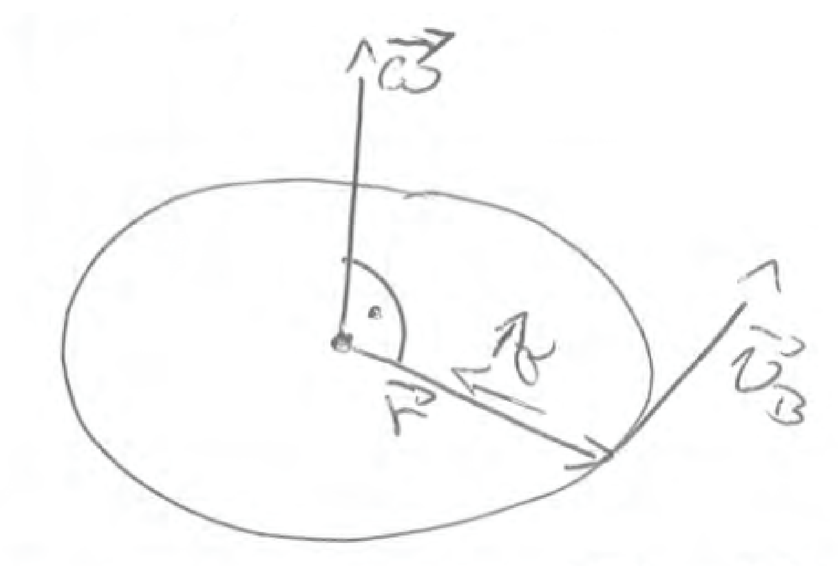


$\varphi = \text{Fläche} = \frac{\omega t}{2}$
Steigung = Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \tag{2.65}$$

$$\to \omega = \alpha t + \omega_0 \dot{\varphi} \to \varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \varphi_0 \tag{2.66}$$

Zurück zu kartesischen Koordinaten (konstantes ω)



$$|\vec{v}| = v = const \tag{2.67}$$

aber auch

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = r^2 = const \quad \rightarrow \quad \frac{dr^2}{dt} = 0 \text{ (Produktregel!)} \tag{2.68}$$

$$\frac{dr^2}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = 2\cdot\vec{v}\cdot\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{v}\perp\vec{r} \tag{2.69}$$

Gleicher Trick:

$$\vec{v}\cdot\vec{v} = v^2 = const \tag{2.70}$$

$$\rightarrow \frac{dv^2}{dt} = 0 = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{v} \tag{2.71}$$

$\rightarrow \vec{a}$ und $\vec{r}$ sind parallel oder antiparallel!
Zentripetalbeschleunigung

$$0 = \frac{d(\vec{v}\cdot\vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{r} + \vec{v}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}\cdot\vec{r} + v^2 \tag{2.72}$$

$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -\frac{v^2}{r} \rightarrow \text{antiparallel} \tag{2.73}$$

Kreisbahn in kartesischen Koordinaten:

$$r(t) = \begin{pmatrix} r_0\cos(\omega t) \\ r_0\sin(\omega t) \end{pmatrix} \tag{2.74}$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} -r_0\omega\sin(\omega t) \\ r_0\omega\cos(\omega t) \end{pmatrix} \tag{2.75}$$

$$a(t) = \begin{pmatrix} -r_0\omega^2\cos(\omega t) \\ -r_0\omega^2\sin(\omega t) \end{pmatrix} \tag{2.76}$$

$\vec{v_B}$: ändert ständig Richtung, aber nicht den Betrag!
$s_B = \varphi\cdot|\vec{r}|$

$$\boxed{v_B = \frac{ds_B}{dt} = \dot{\varphi}\cdot|\vec{r}| = \omega\cdot r = 2\pi r\cdot f} \tag{2.77}$$

Vektoriell:

$$\boxed{\vec{v_B} = \vec{\omega}\times\vec{r}} \tag{2.78}$$

$$\boxed{\vec{a_B} = \vec{\alpha}\times\vec{v}} \tag{2.79}$$