Kapitel 1

Grundgrößen und Messabweichung

Wir benötigen Definitionen und Messvorschriften
physikalische Größe = Zahlenwert x Einheit

Bsp.: 1 inch (1150 König David von Schottland)
Mittlere Daumendicke eines Großen, mittleren und kleinen Mannes = 2,54 cm
gute Längendefinition?
Wunsch: Wenige aber möglichst überall nachprüfbare Basisgrößen

1.0.1 Basiseinheiten

Internationales Einheitensystem SI (système international d' unités)

Länge: 1 Meter (m) ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von $\frac{1}{299792458}$ Sekunden zurücklegt (erst Erdumfang $\frac{1}{40000000}$ durch Paris 1488, dann $Pt_{90}Ir_{10}$-Stab)

Masse: 1 Kilogramm (kg) ist die Masse des aus Platin-Iridium bestehenden Urkilogramms des Bureau International des Perids et Mesures in Sèvres, nach Anwendung der standartisierten Reinigungsprozedur.

Zeit: 1 Sekunde (s) ist die Zeitdauer von 9.192.631.770 Schwingungen eines Hyperfeinstruktur-Übergangs zwischen zwei bestimmten Energiezuständen des Isotopes ^{133}Cäsiums.

Stromstärke: 1 Ampere (A) ist die Stärke eines zeitlich konstanten Stromes, der durch zwei im Vakuum im Abstand von 1 m parallel verlaufende (∞ lang, $\oslash$ = 0 m) Leiter fließend eine gegenseitige Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ Newton pro Meter Drahtlänge erzeugt.

Temperatur: 1 Kelvin (K) ist der Bruchteil $\frac{1}{273,16}$ der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes von H_2O.

Stoffmenge: 1 Mol (mol) ist die Menge eines Stoffes, die aus genauso vielen Molekülen bestehen, wie Atome in 12 g des Kohlenstoffisotopes ^{12}C enthalten sind.

Lichtstärke: 1 Candela (cd) ist die Lichtstärke (Helligkeit) in einer gegebenen Richtung, die von monochromatischer Strahlung von $540 \cdot 10^{12}$ Hz (≈ 550 nm) einer Leistung

von $\frac{1}{683}$ Watt pro Steradiant abgestrahlt wird.
Verweis auf Internet: http://www1.bipm.org/en/si

1.0.2 Dimension einer Größe

Abgeleitete Größen haben eine Dimension (Einheit), z.B. Geschwindigkeit = $\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}}$
$v = \frac{l}{t} = [\frac{m}{s}]$; Fläche $A = [m^2]$

Wichtig für Überprüfung von Rechnungen!
Dimensionen auf beiden Seiten einer Gleichung müssen übereinsteimmen!
Beispiel:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{oder} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}(\text{falsch}) \tag{1.1}$$

$$g \to \left[\frac{m}{s^2}\right] (\text{Erdbeschleunigung}) \qquad l \to [m] \qquad T \to [s] \tag{1.2}$$

$$[s] = \left[\sqrt{\frac{m}{\frac{m}{s^2}}}\right] = [\sqrt{s^2}] = [s] \tag{1.3}$$

1.0.3 Messfehler

z.B. Längenmessung, Größenmessung einer Person (Achtung stehend/liegend)

- systematische Messfehler:
  z.B. falsch geeichtes Meßinstrument, Nichtberücksichtigen von konstanten äußeren Einflüssen (Luftreibung, Magnetfelder, elektrische Felder)
  vgl. Abstraktion Kapitel 1
  - Systematische Fehler verfälschen stets um den gleichen Betrag in die gleiche Richtung
  - Sie sind prinzipiell vermeidbar (müssen aber erst erkannt, dann entweder durch Verbesserung der Anordnung eliminert werden ODER qualifiziert und in Auswertung/Rechnung korrigiert werden)
- statistische (zufällige) Fehler:
  - können die Messergebnisse um verschiedene Beträge in beide Richtungen verändern (größer und kleiner)
    - durch Beobachter selbst (ungenaue Ablesung)
    - durch statistische Schwankungen äußerer veränderlicher Einflüsse (Rauschen, Wackeln)
  - sind prinzipiell unvermeindbar, aber durch wiederholte Messungen (und Fehlerrechnung) verringerbar

Messvorschrift: oft messen & arithmetisches Mittel bilden

Arithmetisches Mittel:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n}{n} \tag{1.4}$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} \tag{1.5}$$

z.B. Größenmessung $\bar{x} = 175$ cm

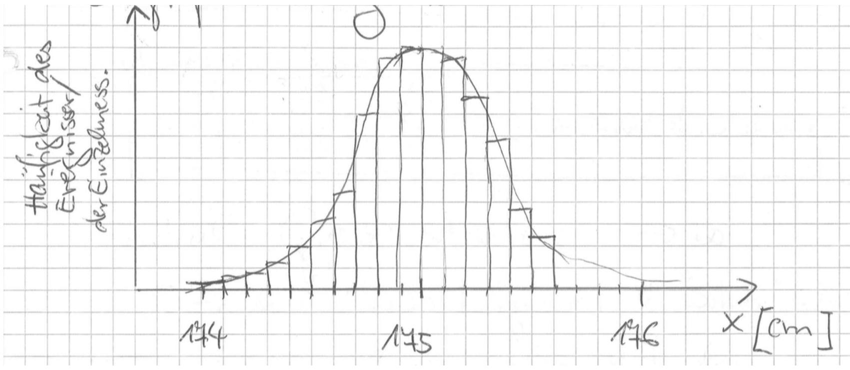

Abbildung 1.1: Mittelwert von $175cm$

- Fehler mit verschiedenen Vorzeichen sind gleich wahrscheinlich → symmetrische Verteilung um $\bar{x}$
- Fehler mit großem Betrag sind weniger wahrscheinlich
- Je mehr Messungen ($n \to \infty$) und je feiner die Diskretisierung (sprich Messskala), desto mehr nähert sich die Verteilung einer „Normalverteilung“ an → beschrieben mit der Gaußkurve
- Die Genauigkeit der Messung ist durch die Breite der Verteilung gegeben. Die Breite der Verteilung ist die Summe der Abstandsquadrate.
- Veranschaulichung mit Versuch Galton-Brett

Summe der Abstandsquadrate = Varianz

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \text{Varianz}} \tag{1.6}$$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \text{Standardabweichung}} \tag{1.7}$$

Zentraler Grenzwertsatz: $n \to \infty$
$\bar{x} \to \mu$ = Erwartungswert ≡ „wahrer“ Wert
Fehler der Einzelmessung ↔ Breite der Verteilung ↔ Standardabweichung
$n \to \infty$ → Häufigkeit normieren → Wahrscheinlichkeit $p(x) =$ Gaußkurve

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}} \tag{1.8}$$

Fehler der Einzelmessunge ist relativ nutzlos → Fehler von Messreihen
Anschaulich: Mehrere Messreihen betrachten und Mittelwerte der Mittelwerte bilden (≈

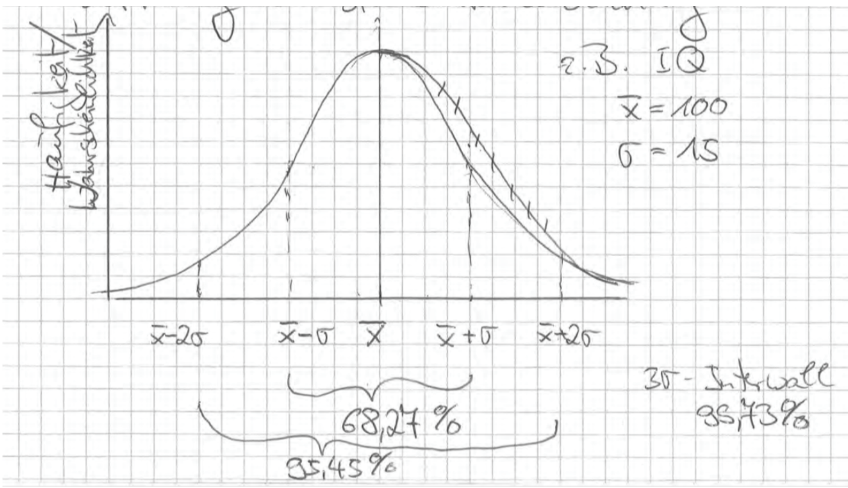

Abbildung 1.2: Gaußkurve

Mittelwert ← nutzlos)

ABER: Mittelwerte der Abweichungsquadrate bilden → Fehler einer Messreihe σ_m
σ_m = Abweichung der Mittelwertes der Messreihe $\bar{x}_m$ vom „wahren" Wert (ohne Beweis oder später bzw. Anfängerpraktikum)

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{1.9}$$

σ_m ist um so kleiner, je präziser die Einzelmessung ist (schmale Verteilung, σ sei klein) UND je länger die Messreihe ist.
Messergebnis: $x = \bar{x} \pm \sigma_m$, mit $\bar{x}$ Mittelwert der Messreihe und σ_m Fehler der Messreihe

NB: 10 ($\approx$ 9) mal öfter messen → $\sigma_m^{10^1} \approx \frac{1}{\sqrt{9}}\sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_m$
100 mal öfter messen → $\sigma_m^{10^2} \frac{1}{10}\sigma_m$
1000 mal öfter messen → $\sigma_m^{10^3} \frac{1}{31}\sigma_m$
10000 mal öfter messen → $\sigma_m^{10^4} \frac{1}{100}\sigma_m$

Angabe: $x = 1,573496052 \pm 0,004 =$ falsch!
$x = 1,573 \pm 0,004 \equiv 1,573(4)$ → Genauigkeit der letzten Stelle
$x = 1,573 \pm 0,1$ falsch!
$x = 1,6 \pm 0,1 \widehat{=} 1,6(1)$

Es macht keinen Sinn, den Messwert genauer anzugeben, als seine Unsicherheit!!

Erwartungswert $E(x_i) = \mu$

$$E(g(x)) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) g(x_i) \tag{1.10}$$

mit $\sum\limits_{i=1}^{n} p(x_i) \stackrel{!}{=} 1$
Dann ist $E(x_i) = \mu$ und $E((x_i - \mu)^2) = \sigma^2$, für den Mittelwert $\bar{x}$ gilt $E(\bar{x}) = \mu$

Fehler der Messreihe bzw. mittlerer Fehler des Mittelwertes

$$\sigma_m^2 = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)\right]^2 \tag{1.11}$$

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E\left[(x_i - \mu)^2\right] + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1,j=1,i\neq j}^{n} E\left[(x_i - \mu)(x_j - \mu)\right] \tag{1.12}$$

zweiter Teil fällt weg, da ≈ 0 weil inkohärent wenn Fehler stat. unabhängig.

$$\boxed{\sigma_m^2 = \frac{1}{n^2}\cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{1}{n}\cdot\sigma^2} \tag{1.13}$$

$$\boxed{\sigma_m = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma} \tag{1.14}$$

q.e.d.