

Spacetime Globes



Inhoudsopgave

1	Mechanisme	2
	Invariantie van de lichtsnelheid	5
	Tijddilatatie en lengtecontractie	6
	Gelijktijdigheid	7
2	Constructie	8
3	Toepassing	13
	Les 1: Galileïsche relativiteit	14
	Les 2: Invariante lichtsnelheid	15
	Les 3: De lichtklok	16
	Les 4: Tijddilatatie en lengtecontractie	17
	Les 5: Gelijktijdigheid	18

1 Mechanisme

Een Spacetime Globe is een didactisch hulpmiddel dat in staat is om relativistische fenomenen te visualiseren. De Globe is een ruimtetijd-rooster waarop wereldlijnen en coördinaten worden afgebeeld. Het mechanisme laat toe om op een dynamische manier te schakelen tussen verschillende inertiaalstelsels (en dus verschillende waarnemers). Door dezelfde wereldlijnen en coördinaten in verschillende inertiaalstelsels te vergelijken worden fenomenen zoals tijddilatatie en lengtecontractie afgebeeld. Deze opstelling werd oorspronkelijk ontwikkeld voor een uitstekende videoreeks op het Youtube kanaal minutephysics (<https://www.youtube.com/watch?v=Rh0pYtQG5wI>). In dit deel van de handleiding wordt het werkingsmechanisme van het rooster toegelicht en wordt er uitgelegd welke relativistische fenomenen op de Spacetime Globe afgebeeld kunnen worden.

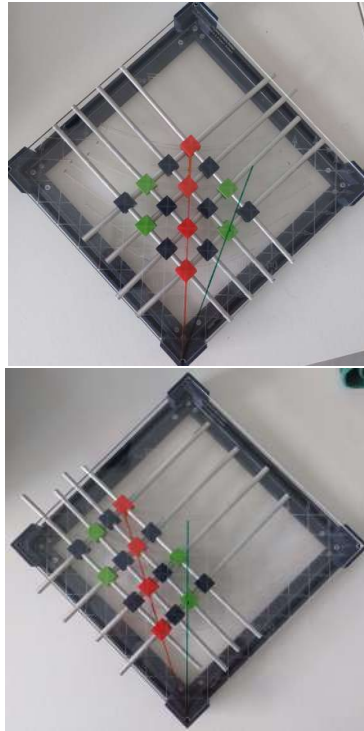


Op dit rooster staat tijd op de verticale as en ruimte op de horizontale as. De assen komen niet overeen met de zijden van het kader. De oorsprong bevindt zich op het onderste punt van het rooster. De x-as staat evenwijdig met de horizontale roosterlijnen en de t-as staat evenwijdig met de verticale roosterlijnen. De gekozen eenheden zijn 1s en 299792458m.

Op de Spacetime Globe bevinden zich blokken die doorheen een aantal buizen zitten en over gleuven in de onderste plaat kunnen schuiven. Deze blokken stellen ruimtetijd coördinaten voor. Men kan de blokken ook zien als gebeurtenissen in de ruimtetijd. Zo kan een blok het moment dat een ruimteschip op een planeet landt representeren. De positie van het blokje op het rooster bepaalt dan de ruimte en tijdscoördinaten van deze gebeurtenis. Er kunnen lijnen tussen twee blokken of tussen de oorsprong en een blokje getekend worden. Dit zijn wereldlijnen die de trajecten van waarnemers in de ruimtetijd voorstellen. De snelheid van zo een waarnemer wordt bepaald door de inverse rico van de wereldlijn. De snelheid is dan ook gerelateerd aan de hoek die de wereldlijn maakt ten opzichte van de assen. Wegens de gekozen eenheden stelt een wereldlijn die op een hoek van 45° staat iets voor dat met de lichtsnelheid beweegt. Dit zijn dus de wereldlijnen van lichtstralen.

Wereldlijnen en de coördinaten van gebeurtenissen in de ruimtetijd veranderen tussen verschillende inertiaalstelsels. De Spacetime Globe laat toe om alles in verschillende inertiaalstelsels af te beelden. Een (niet versnellende) waarnemer staat altijd stil in haar eigen inertiaalstelsel. In dit inertiaalstelsel beweegt deze waarnemer dus niet in de ruimte maar wel in de tijd. Dit wilt zeggen dat de wereldlijn van deze waarnemer in dit inertiaalstelsel een verticale lijn is die doorheen de oorsprong gaat. Met andere woorden: een ruimtetijdrooster beeldt altijd het inertiaalstelsel af van een waarnemer wiens wereldlijn met de t-as overlapt.

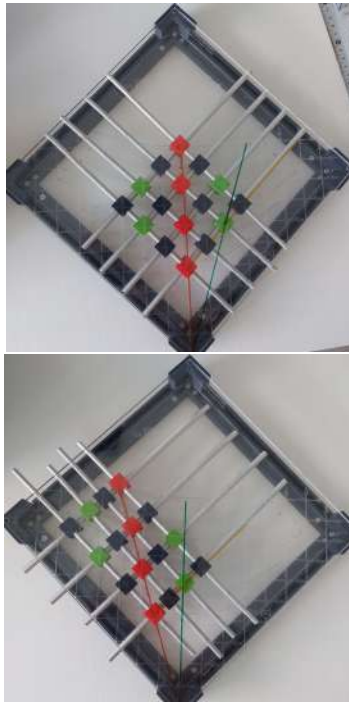
Op de Spacetime Globe kan men de blokken over het rooster verschuiven door de buizen te bewegen. Om tussen twee inertiaalstelsels over te schakelen tekent men eerst de wereldlijn van de stilstaande waarnemer (op de t-as) en de wereldlijn van een tweede waarnemer die in dit inertiaalstelsel met een constante snelheid beweegt. Vervolgens moet men de buizen bewegen tot het blokje op de wereldlijn van de tweede waarnemer op de t-as staat. In deze nieuwe configuratie bevindt de wereldlijn van de tweede waarnemer zich op de t-as. Zo worden de ruimtetijd coördinaten en wereldlijnen nu voorgesteld in het inertiaalstelsel van de tweede waarnemer.



Op de bovenste figuur zijn we wereldlijnen en coördinaten in het inertiaalstelsel van de waarnemer die met de rode wereldlijn overeenkomt. Op de onderste figuur zien we dezelfde wereldlijnen en coördinaten in het inertiaalstelsel van de waarnemer die met de groene wereldlijn overeenkomt.

Invariantie van de lichtsnelheid

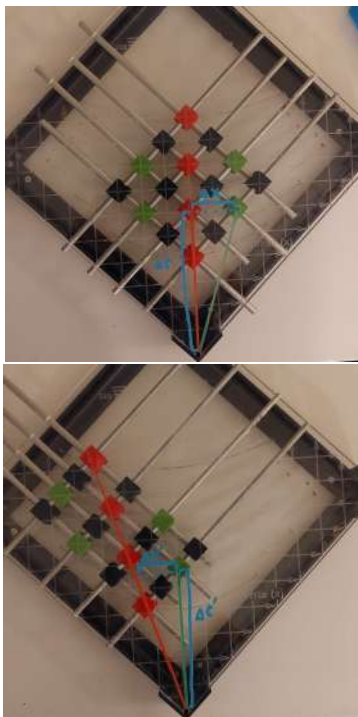
Een belangrijk uitgangspunt van de speciale relativiteitstheorie is dat de lichtsnelheid invariant is. Dit wilt zeggen dat alle waarnemers dezelfde snelheid van een lichtstraal meten, onafhankelijk van hun snelheid ten opzichte van elkaar. Dit fenomeen kan makkelijk op de Spacetime Globe voorgesteld worden. Men tekent eerst de wereldlijnen van een stilstaande waarnemer en een waarnemer die met een constante snelheid beweegt. Vervolgens tekent men de wereldlijn van een lichtstraal. Dit wordt gedaan door een rechte lijn te tekenen tussen de blokken die op één van de buizen liggen. Aangezien de buizen ieder op een hoek van 45° ten opzichte van de assen staan en niet roteren wanneer men tussen inertiaalstelsels wisselt stellen de buizen de wereldlijnen van lichtstralen voor.



Door de wereldlijn van dezelfde lichtstraal in het tweede inertiaalstelsel te tekenen zien we dat de snelheid van de lichtstraal behouden blijft.

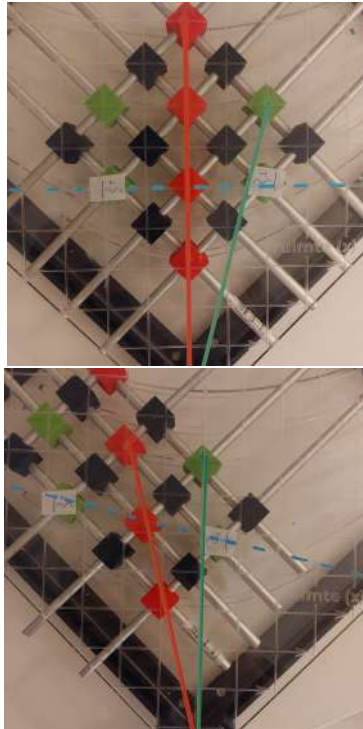
Tijddilatatie en lengtecontractie

Volgens de speciale relativiteitstheorie tikken bewegende klokken langzamer dan stilstaande klokken en krimpen voorwerpen wanneer ze met een grote snelheid bewegen. Dit kan op de Spacetime Globe gevisualiseerd worden door ruimte-en-tijdsintervallen in verschillende inertiaalstelsels aan te duiden. Stel bijvoorbeeld dat de groene wereldlijn de reis van een ruimteschip voorstelt en het blokje op deze wereldlijn het moment en de positie is waar dit ruimteschip op een planeet landt. De rode wereldlijn stelt een waarnemer op de aarde voor. Het tijdstip waarop het ruimteschip landt wordt gegeven door het tijdscoördinaat van dit blokje. De afstand tussen de aarde en de andere planeet wordt gegeven door het horizontale interval tussen de rode wereldlijn en het groen blokje. Door deze intervallen in beide inertiaalstelsels te tekenen zien we dat de reis minder lang duurt voor de astronaut en dat de afstand tussen de aarde en de andere planeet kleiner is in dit inertiaalstelsel.



Gelijktijdigheid

In de speciale relativiteitstheorie is het mogelijk dat twee gelijktijdige gebeurtenissen niet meer gelijktijdig zijn in een ander inertiaalstelsel. In het bijzonder zullen twee gebeurtenissen die plaatsvinden op hetzelfde tijdscoördinaat maar niet op dezelfde x-coördinaten niet meer gelijktijdig zijn in het inertiaalstelsel van een waarnemer die met een constante snelheid in de x-richting beweegt. Dit kan op de Spacetime Globe getoond worden door zo twee gebeurtenissen aan te duiden op het rooster. Om duidelijk te maken dat deze gebeurtenissen gelijktijdig zijn kan men een horizontale stippelijn tussen de blokjes tekenen. Vervolgens worden deze gebeurtenissen aangeduid in het inertiaalstelsel van de tweede waarnemer. Door een schuine stippelijn tussen de blokjes te tekenen zien we dat deze gebeurtenissen niet meer hetzelfde tijdscoördinaat delen en dus niet meer gelijktijdig zijn.



2 Constructie

In dit onderdeel van de handleiding wordt er beschreven hoe leerkrachten zelf Spacetime Globes kunnen bouwen. De opstelling bestaat uit een aantal verschillende onderdelen die ge-3D-print en gelasercut moeten worden. De QR code op de voorpagina van deze handleiding leidt naar een website waar onder andere een link naar een GitHub te vinden is. Op deze pagina kunnen alle nodige bestanden teruggevonden worden. De benodigde componenten zijn:

- Vier identieke hoekstukken. Bevindt zich in `Border_Corner/SpaceTimeGlobe_Border_Corner.step`
- Vier identieke middenstukken. Bevindt zich in `Border_Edge/Spacetime_Globe_Border_Edge.step`
- De onderste plaat met gleuven. Bevindt zich in `Plates/Hyperbola_Plate-Shape2DView.pdf`
- De bovenste plaat met roosterlijnen. Bevindt zich in `Plates/Top_Plate-Shape2DView.pdf`
- Zestien blokjes. Bevindt zich in `Lattice_BlockSpaceTimeGlobe_Lattice_Block.step`
- Acht aluminium buizen. Zelf aan te kopen.

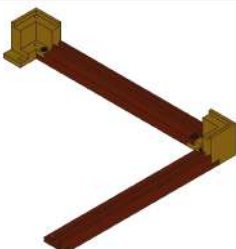
De hoekstukken, middenstukken en blokken worden ge-3D-print (typisch met een FDM printer). Er zijn ook een aantal M3x10 en M3x20 bouten en M3 moeren nodig. De aluminiumbuizen moeten een diameter van 6mm hebben. De platen zijn gemaakt van aluminium en hebben een dikte van 4mm. Men moet de schroefgaten van de onderste plaat verzinken. De Makerspace van de PXL in Diepenbeek is een ideale plek om de Globe te construeren.

Eens alle onderdelen gemaakt zijn wordt de Spacetime Globe in elkaar gestoken. Op de volgende pagina's wordt er een stappenplan gegeven om de Spacetime Globe te construeren.

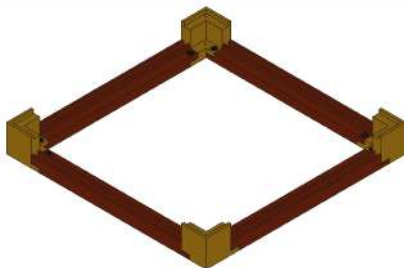
Plaats één van de middenstukken op een hoekstuk zoals aangegeven op de onderstaande figuur. Gebruik een M3x10 bout en een M3 moer om deze onderdelen vast te zetten.



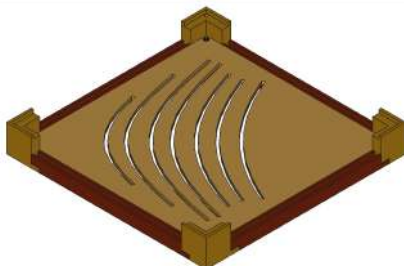
Verbindt nu een nieuw hoekstuk met het overige uiteinde van dit middenstuk. Plaats vervolgens het tweede middenstuk aan dit hoekstuk.



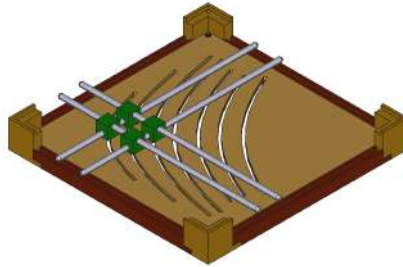
Herhaal dit proces tot het volledige kader is geconstrueerd.



Schroef nu het onderste kader (met de gleuven) in het rooster met de zelfde moeren en bouten.

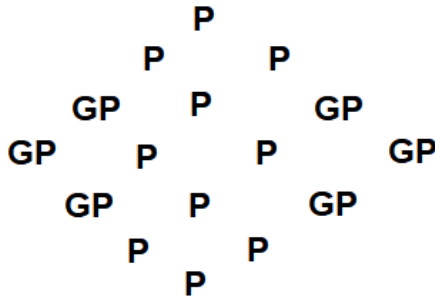


Plaats de blokken op het rooster en zet ze vast door de buizen doorheen de openingen van de blokken te schuiven.

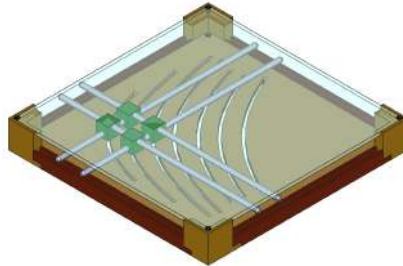


Op de bovenste figuur worden de eerste vier blokken en buizen in de initiële configuratie van het rooster getoond. Het is het makkelijkst om de volgende blokken op dezelfde buizen te plaatsen en de volgende buizen doorheen de geplaatste blokken te schuiven. Zo wordt er uiteindelijk een 4x4 rooster gecreëerd.

Belangrijk is dat sommige blokken vastzitten in de gleuven, maar andere niet. De blokken bevatten pinnen die in de gleuven passen. Voor de blokken die niet in de gleuven worden vastgezet moeten de pinnen handmatig verwijderd worden. Op het onderstaande schema wordt getoond welke blokken pinnen (P) hebben en welke geen pinnen (GP) hebben.



Schroef vervolgens het bovenste rooster op de bovenkant van de hoekpunten.



De Spacetime Globe is nu compleet. De leerkracht kan ervoor kiezen om het bovenste rooster los op de hoekpunten te zetten. Zo kan dit rooster verwijderd worden om bijvoorbeeld stickers op de blokjes te plakken om gebeurtenissen aan te duiden. Pas wel op dat de blokken niet uit de gleuven komen. Eens dit gebeurt moeten de blokken terug één per één in het rooster geplaatst worden.

3 Toepassing

In dit onderdeel van de handleiding wordt er uitgelegd hoe Spacetime Globes in de klas gebruikt kunnen worden. Er wordt hier een voorgemaakte lessenreeks voorzien. Tijdens deze lessen werd er gebruik gemaakt van een theoriebundel, een werkbundel, en een aantal BookWidget opdrachten. Deze kunnen samen met de 3d-bestanden gevonden worden via de QR code op de voorkant van deze handleiding. gevonden worden.

Deze lessenreeks bestaat uit vijf opdrachten die de leerlingen moeten uitvoeren. Iedere opdracht kan in principe in één lesuur worden afgerond, maar het is aangeraden om minstens zes lesuren te voorzien. De leerlingen voeren de opdrachten in groep uit. Iedere groep moet een Spacetime Globe ter beschikking hebben voor de meeste opdrachten.

De algemene werkwijze is als volgt: leerlingen lezen de vraagstelling die in de werkbundel wordt geformuleerd. Vervolgens openen ze een overeenkomende BookWidget opdracht. Hier worden de leerlingen stapsgewijs begeleid om de vraagstelling op te lossen. In enkele BookWidget opdrachten zijn er ook digitale hulpmiddelen geïntegreerd die de leerlingen gebruiken. De leerlingen noteren al hun conclusies en inzichten in de werkbundel. Eens de opdracht is afgerond ontvangen de leerlingen het hoofdstuk van de theoriebundel dat overeenkomt met de les.

Op de volgende pagina's wordt er een overzicht van iedere les gegeven. Hier worden de lesdoelen en het gebruikte lesmateriaal opgenoemd, en er wordt een korte beschrijving van de les gegeven.

Les 1: Galileïsche relativiteit

Lesdoelen

- Leerlingen kunnen het relativiteitsprincipe verwoorden
- Leerlingen kunnen tussen verschillende referentiestelsels transformeren op een ruimtetijd rooster
- Leerlingen kunnen tijdsintervallen, lengteintervallen en snelheden aflezen op een Galileïsch ruimtetijdrooster

Lesmateriaal

- Youtube video's: Inertiaalstelsels & het Relativiteitsprincipe + Galileitransformaties & Ruimtetijd diagrammen
- Werkbundel: opdracht 1 (De Galileitransformatie)
- BookWidget opdracht: Galileitransformaties
- Theoriebundel: hoofdstuk 1 (Galileïsche relativiteit)

Het doel van deze les is om leerlingen vertrouwd te maken met relativistische ideeën en technieken in de context van de Newtoniaanse/Galileïsche fysica. Aangezien de leerlingen al vertrouwd moeten zijn met deze leerstof kunnen ze de nieuwe concepten makkelijker verwerken. Leerlingen werken met een digitale versie van de Spacetime Globe die in de BookWidget opdracht is geïntegreerd. Dit is een Galileïsche Spacetime Globe die waar lengtecontractie en tijddilatatie dus niet op worden afgebeeld. Tijdens deze opdracht zullen de leerlingen de Galileïsche optelwet van snelheid op de Spacetime Globe verkennen. Dit is belangrijk voor de volgende les, waar leerlingen een gelijkaardig stappenplan op de relativistische Spacetime Globe uitvoeren.

Uitzonderlijk worden er voor deze les twee youtube video's voorzien die de leerlingen op voorhand moeten bekijken. Deze video's introduceren het relativiteitsprincipe en ruimtetijd roosters. Leerkrachten kunnen ervoor kiezen om deze leerstof zelf tijdens de les te overlopen.

Les 2: Invariante lichtsnelheid

Lesdoelen

- Leerlingen kunnen zelfstandig op de Spacetime Globe tussen inertiaalstelsels transformeren
- Leerlingen kunnen aan de hand van de Spacetime Globe zien dat de lichtsnelheid invariant is
- Leerlingen kunnen enkele gevolgen van de invariantie van de lichtsnelheid beredeneren

Lesmateriaal

- Werkbundel: opdracht 2 (Het Ruimtetijd Rooster)
- BookWidget opdracht: Ruimtetijd Rooster
- Theoriebundel: hoofdstuk 2 (De lichtsnelheid)

Tijdens deze les zullen de leerlingen ontdekken dat de lichtsnelheid invariant is. Ze zullen dit doen door voor het eerst zelfstandig met de Spacetime Globe te werken. Er wordt hier in een zekere zin een omgekeerde aanpak gehanteerd. Normaal gezien begint een lessenreeks met de invariantie van de lichtsnelheid en worden het bestaan van tijddilatatie en lengtecontractie bewezen als noodzakelijke gevolgen. Uiteindelijk kan men de Lorentztransformaties hier uit afleiden. In deze les werken de leerlingen met de Spacetime Globe, die impliciet de Lorentztransformaties bevat, zonder dat ze enige kennis hebben van de speciale relativiteitstheorie. Deze aanpak laat echter toe dat de leerlingen actief de invariantie van de lichtsnelheid ontdekken, waardoor ze dit concept beter kunnen verwerken. In latere lessen worden relativistische fenomenen formeel afgeleid met de invariantie van de lichtsnelheid als uitgangspunt.

Tijdens de opdracht tekenen leerlingen de wereldlijn van een lichtstraal in twee verschillende inertiaalstelsels. Ze zullen zien dat deze wereldlijn uitzonderlijk niet verandert. Deze aanpak is gelijkaardig aan wat de leerlingen tijdens de eerste les hebben gedaan met het de Galileïsche Spacetime Globe. Op het einde van de les worden klassikaal enkele gevolgen van de invariantie van de lichtsnelheid overlopen. Dit wordt gedaan door de schema's op pagina's 12 en 13 van de theoriebundel te schetsen. In de volgende les worden tijddilatatie en lengtecontractie meer formeel behandeld.

Les 3: De lichtklok

Lesdoelen

- Leerlingen kunnen het bestaan van tijddilatatie afleiden aan de hand van de lichtklok
- Leerlingen zien in dat lengtecontractie een noodzakelijk gevolg is van tijddilatatie
- Leerlingen kunnen de formules van tijddilatatie en lengtecontractie afleiden

Lesmateriaal

- BookWidget opdracht: De Lichtklok
- Theoriebundel: hoofdstuk 3 (Ruimte en Tijd)

Tijdens deze les zullen leerlingen het bestaan van tijddilatatie afleiden aan de hand van het klassieke gedachtenexperiment van de lichtklok. Het is belangrijk dat leerlingen de invariantie van de lichtsnelheid goed begrijpen vooraleer ze aan de opdracht beginnen, dus het is een goed idee om dit kort te herhalen. Tijdens deze les wordt er geen gebruik gemaakt van de Spacetime Globe. Dit is wegens het feit dat er twee ruimtedimensies nodig zijn om dit gedachtenexperiment af te beelden, wat niet mogelijk is op de Spacetime Globe. Voor deze les is er ook geen onderdeel in de werkbundel. Leerlingen werken exclusief met de BookWidget opdracht, waar het gedachtenexperiment wordt afgebeeld met enkele duidelijke animaties en schema's. Leerlingen zouden aan de hand van de instructies de formule voor tijddilatatie moeten kunnen afleiden door gebruik te maken van de invariantie van de lichtsnelheid en de stelling van Pythagoras toe te passen.

Op het einde van de les wordt er klassikaal gezien hoe lengtecontractie een noodzakelijk gevolg is van tijddilatatie. Dit wordt gedaan door het schema van pagina 17 in de theoriebundel te overlopen. Het is belangrijk om hier te benadrukken dat een "bewegende" waarnemer geen tijddilatatie ervaart *in haar eigen inertiaalstelsel*. De reden dat de reis door de tunnel minder lang duurt voor deze waarnemer is omdat de tunnel zelf korter is.

Les 4: Tijddilatatie en lengtecontractie

Lesdoelen

- Leerlingen kunnen beredeneren dat de lichtsnelheid de universele maximale snelheid is
- Leerlingen kunnen tijddilatatie en lengtecontractie op de Space-time Globe aflezen

Lesmateriaal

- Werkbundel: opdracht 3 (Sneller dan licht?)
- BookWidget opdracht: Sneller dan licht?
- Theoriebundel: hoofdstuk 4.1 (Sneller dan licht?)

Tijdens deze les worden de concepten van tijddilatatie en lengtecontractie verder behandeld aan de hand van een opdracht waarbij de leerlingen de Spacetime Globe gebruiken. Deze opdracht draait rond de reis van een ruimteschip dat met een grote fractie van de lichtsnelheid beweegt ten opzichte van waarnemers op de aarde. De vraag die gesteld wordt is of een astronaut in dit ruimteschip een planeet die miljoenen lichtjaren is verwijderd kan bereiken in zijn levensduur. Hoewel het ruimteschip in ieder inertiaalstelsel met een snelheid kleiner dan de lichtsnelheid kan bewegen is dit toch mogelijk wegens tijddilatatie (vanuit het perspectief van een waarnemer op de aarde) en de lengtecontractie tussen de aarde en de verre planeet (vanuit het perspectief van de astronaut). Vooraleer de leerlingen deze vraag kunnen beantwoorden is het belangrijk dat ze inzien dat geen enkel voorwerp de lichtsnelheid kan overschrijden. De leerlingen kunnen dit visueel zien op de Spacetime Globe. In de theoriebundel wordt er een meer fysische reden voorzien: het ruimteschip zou een oneindige hoeveelheid energie nodig hebben om te versnellen tot de lichtsnelheid. Om dit te bewijzen wordt de relativistische energieformule $E = \gamma mc^2$ (met

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}) \text{ zonder bewijs voorzien. Dit wordt niet in de Bookwidget}$$

opdracht aangehaald, dus het is aangeraden dat de leerkracht dit kort klassikaal behandelt.

Les 5: Gelijktijdigheid

Lesdoelen

- Leerlingen kunnen op de Spacetime Globe aflezen in welke inertiaalstelsels gebeurtenissen gelijktijdig zijn
- Leerlingen kunnen aan de hand van het lichtsnelheidspostulaat beredeneren waarom gelijktijdige gebeurtenissen in andere inertiaalstelsels niet altijd gelijktijdig zijn

Lesmateriaal

- Werkbundel: opdracht 4 (Gelijktijdigheid)
- BookWidget opdracht: Gelijktijdigheid
- Theoriebundel: hoofdstuk 4.1 (Gelijktijdigheid)

In de laatste les wordt de relativiteit van gelijktijdige gebeurtenissen behandeld. Dit wordt gedaan aan de hand van een gedachtenexperiment waar een lichtbron in het midden van de trein twee lichtstralen naar beide uiteinden van de trein uitstraalt. In het inertiaalstelsel van een waarnemer op de trein zullen de lichtstralen gelijktijdig het uiteinde van de trein bereiken. Vanuit het perspectief van een waarnemer die de trein met een constante snelheid naar rechts ziet bewegen zal de linkerlichtstraal het linker uiteinde van de trein eerder bereiken en zijn de gebeurtenissen dus niet meer gelijktijdig. Leerlingen visualiseren dit door de wereldlijnen van de lichtstralen op de Spacetime Globe af te beelden. Om de fysische reden van dit fenomeen te begrijpen wordt het gedachtenexperiment ook op een visueel schema afgebeeld. Leerlingen moeten hier het correcte schema aanduiden. Vanuit het perspectief van de waarnemer die de trein naar rechts ziet bewegen zal de rechter lichtstraal een langer traject dan de linker lichtstraal moeten uitvoeren omdat het rechter uiteinde van de trein van deze lichtstraal weg beweegt.

Het wordt aangeraden om op het einde van de les klassikaal te overlopen waarom dit fenomeen niet aanwezig is in de Galileïsche fysica. Dit is wegens het feit dat volgens Galileo de rechterlichtstraal een grotere snelheid zou hebben dan de linkerlichtstraal in het inertiaalstelsel van de waarnemer die de trein naar rechts ziet bewegen. Wegens de invariantie van de lichtsnelheid is dit echter niet waar in de speciale relativiteitstheorie.