



School voor educatieve studies

Educatieve master in de wetenschappen en technologie

Masterproef

**Toegankelijke en ontdekkingsgerichte lessen
speciale relativiteit in het secundair onderwijs**

Max Janssens

PROMOTOR:

Sabine Bertho

Inhoudsopgave

Inhoudsopgave	1
1 Abstract	2
2 Theoretisch kader	3
2.1 Inleiding	3
2.2 Speciale relativiteit in het secundair onderwijs	3
2.3 Didactische hulpmiddelen	5
2.4 Ontdekkend leren	7
2.5 Doelstellingen	8
3 Methodologie	9
3.1 Spacetime Globe	9
3.2 Didactisch materiaal	11
3.3 Meetinstrumenten	15
4 Resultaten	16
4.1 Enquête studenten	16
4.2 Werkbundels	17
4.3 Toetsen	19
4.4 Enquête leerlingen	20
4.5 Gesprekken met leerkrachten	21
5 Conclusies en discussie	22
A Theoriebundel	26
B Werkbundel	51
C Toets	62
D Berekeningen	67
E Enquête studenten	68
F Enquête leerlingen	71

1 Abstract

Speciale relativiteit wordt beschouwd als een verwarrende theorie door mensen die er voor het eerst mee in aanraking komen. De hoge abstractiegraad en tegenintuïtieve resultaten leiden tot veelvoorkomende misverstanden. Zonder een grondig begrip van concepten in de Galileïsche fysica beschikken leerlingen niet over de context om speciale relativiteit te begrijpen. Veel docenten in het secundair onderwijs kiezen ervoor om dit onderwerp niet in hun curriculum te behandelen.

Er zijn een aantal didactische hulpmiddelen ter beschikking om speciale relativiteit meer toegankelijk te maken en misverstanden te bestrijden. Event diagrams worden gebruikt om de situatie van een gedachtenexperiment stapsgewijs te schetsen. Een vernieuwend middel is de zogenaamde spacetime globe. Dit is een opstelling waar ruimtetijdroosters op afgebeeld worden. De gebruiker kan dynamisch tussen verschillende referentiestelsels schakelen om relativistische fenomenen zoals tijddilatatie en lengtecontractie te visualiseren.

In dit onderzoek werd er een lessenreeks opgesteld waarbij enerzijds gebruik werd gemaakt van event diagrams en anderzijds een spacetime globe die werd ontwikkeld. Om het leerproces te bevorderen werd deze lessenreeks gestructureerd rond de principes van ontdekkend leren. Hier werken de leerlingen zelf actief aan opdrachten met open vraagstellingen met minimale achtergrondinformatie. Spacetime globes zijn bijzonder geschikt om het ontdekkend leerproces te bevorderen.

Het doel van dit onderzoek was om te bevestigen of spacetime globes speciale relativiteit toegankelijker voor leerlingen en leerkrachten kunnen maken. Dit werd gedaan door te onderzoeken welke impact spacetime globes, het ontdekkend leerproces en een focus op Galileïsche relativiteit hebben op de leerresultaten van de leerlingen. Gegevens werden verzameld in de vorm van de notities van leerlingen, de evaluatie van een toets, en een enquête die de leerlingen hebben ingevuld.

De resultaten van dit onderzoek tonen dat spacetime globes helpen om enkele misverstanden te voorkomen. Deze werkwijze helpt leerlingen in het bijzonder om de invariantie van de lichtsnelheid correct te interpreteren, wat cruciaal is om speciale relativiteit te begrijpen. Hoewel er nog een aantal misverstanden aanwezig zijn wijst het onderzoek uit dat het integreren van spacetime globes en event diagrams naar betere leerresultaten leidt in vergelijking met enkel met event diagrams te werken.

Ook leerkrachten tonen enthousiasme over deze aanpak. Momenteel zijn spacetime globes niet commercieel verkrijgbaar en bestaat er geen documentatie over het zelf ontwikkelen van deze opstellingen. Na dit onderzoek werden er instructies beschikbaar gesteld om zelf spacetime globes te bouwen in de vorm van een handleiding en gepubliceerde STL-bestanden. Leerkrachten merkten op dat de meeste docenten in staat zijn om zelf een lessenreeks met spacetime globes te ontwikkelen aan de hand van deze instructies. Het blijft echter uitdagend om leerkrachten die speciale relativiteit niet behandelen te overtuigen om dit onderwerp wel te zien.

2 Theoretisch kader

2.1 Inleiding

De speciale relativiteitstheorie is een onderwerp met een hoog abstractiegehalte. Tijdens lessenreeksen van de klassieke fysica maken onderwijzers vaak gebruik van labo's en schetsen ze reële situaties om de leerlingen een mentale houvast aan te bieden. Sommige van deze lesinhouden zijn formalisaties van ideeën die leerlingen al intuïtief begrijpen wegens hun alledaagse ervaringen. Lessen speciale relativiteit (SR) worden in tegenstelling vaak gekarakteriseerd door een grote focus op ontastbare concepten en gedachtenexperimenten. Relativistische fenomenen zijn daarbovenop enorm tegenintuïtief en lijken onze alledaagse ervaringen tegen te spreken. Wegens deze abstractiegraad ervaren leerlingen een aantal unieke struikelblokken tijdens een lessenreeks SR.

Ook docenten ondervinden deze moeilijkheden. Veel leerkrachten vinden het moeilijk om geschikte voorbeelden en contexten in lessen SR te verwerken (Velić en Hermens, 2021). In het Vlaams onderwijs is speciale relativiteit één van de keuzemodules moderne fysica. Fysica leerkrachten die een andere academische achtergrond hebben zijn vaak zelf niet heel vertrouwd met de speciale relativiteitstheorie. Dit leidt ertoe dat veel docenten de keuze maken om SR niet in het secundair onderwijs te behandelen.

Een lessenreeks SR kan echter een aantal voordelen aanbieden in vergelijking met andere keuzeonderwerpen. In tegenstelling tot andere takken van de moderne fysica is het mogelijk om concepten van SR op een grondige manier te behandelen zonder uitgebreide wiskunde toe te passen. De verregaande gevolgen van SR kunnen verwondering en een diepere interesse in de fysica opwekken. Het doel van dit onderzoek is het ontwikkelen van pedagogisch materiaal bedoeld voor het secundair onderwijs dat lessen SR meer toegankelijk maakt voor zowel leerlingen en docenten.

2.2 Speciale relativiteit in het secundair onderwijs

Als deel van dit onderzoek werd er een literatuurstudie uitgevoerd. Hier werd gebruik gemaakt van het platform Web of Science. Er werden zoektermen als *special relativity*, *misconceptions*, *secondary education* en *discovery learning* gebruikt. Vaak werden er ook bronnen die in de gevonden artikels worden geciteerd verwerkt in de literatuurstudie.

Bij het ontwikkelen van innovatief lesmateriaal is het cruciaal om veelvoorkomende struikelblokken tijdens lessen SR te identificeren. Alstein e.a., 2021 beschrijven typische misverstanden. Referentiestelsels, de postulaten van de speciale relativiteitstheorie en relativistische fenomenen zoals tijddilatatie en lengtecontractie zijn uitdagend voor leerlingen. Referentiestelsels worden vaak beschouwd als verbonden te zijn met fysieke voorwerpen. Zo kunnen leerlingen niet conceptualiseren hoe gebeurtenissen ver verwijderd van deze voorwerpen door zo een referentiestelsel beschreven kunnen worden. Zo kan men bijvoorbeeld een laboratorium op de aarde een referentiestelsel noemen. Voor veel leerlingen is het dan niet duidelijk hoe de reis van een ruimteschip in dit referentiestelsel voorgesteld kan worden. De theoriebundel die tijdens dit onderzoek werd gebruikt werd als bijlage toegevoegd. Hier worden relativistische fenomenen en andere relevante leerstof voor dit onderzoek uitgebreid behandeld.

De invariantie van de lichtsnelheid is één van de unieke postulaten van de speciale relativiteitstheorie. Veel leerlingen denken echter dat de "ware" snelheid van een lichtstraal enkel wordt gemeten in het referentiestelsel waarin de lichtbron in rust is. Sommigen denken dat de lichtsnelheid invariant is maar toch varieert afhankelijk van door welke waarnemer het gemeten wordt (Kamphorst e.a., 2019). De interne logica is dat de lichtsnelheid invariant is ten opzichte van een absolute ruimte, en dat waarnemers die in deze ruimte bewegen andere metingen van de lichtsnelheid zullen uitvoeren. Het concept van absolute ruimte is echter niet compatibel met de speciale relativiteitstheorie.

Leerlingen begrijpen tijddilatatie en lengtecontractie als fenomenen die van toepassing zijn op bewegende voorwerpen. Zo ontstaat echter het misverstand dat tijddilatatie en lengtecontractie worden waargenomen *in het referentiestelsel* dat gekoppeld is aan een voorwerp dat beweegt ten opzichte van een initiële waarnemer. Een waarnemer in dit referentiestelsel zal echter geen tijddilatatie en lengtecontractie ervaren, aangezien het voorwerp in dit referentiestelsel in rust is. Dit wijst erop dat leerlingen impliciet redeneren dat snelheid absoluut is, ook al zijn ze er van bewust dat absolute snelheid in tegenspraak is met het relativiteitsprincipe.

Alstein e.a., 2021 suggereren dat docenten een grotere nadruk moeten leggen op de Galilei-transformaties. Zo kan men werkmethoden die in SR worden toegepast introduceren aan de hand van meer bekende en intuïtieve fysica. Wanneer men overschakelt naar SR is het echter belangrijk om te benadrukken dat concepten zoals de invariantie van de lichtsnelheid niet compatibel zijn met de Galileitransformaties. Arlego en Otero, 2018 schetsen een stappenplan om klassieke kinematica en Galileïsche relativiteit in een lessenreeks SR te verwerken.

Fase 1a: het concept van relatieve snelheid wordt geïntroduceerd aan de hand van alledaagse voorbeelden. De Galileïsche optelwet van snelheid wordt gedemonstreerd aan de hand van simpele voorbeelden zoals het snelheidsverschil van wagens op een snelweg.

Fase 1b: het Galileïsche relativiteitsprincipe wordt ingevoerd. Er wordt duidelijk gemaakt dat er geen onderscheid is tussen een voorwerp in rust en een voorwerp dat met een uniforme snelheid beweegt. Dit wordt benadrukt aan de hand van simpele gedachtenexperimenten zoals de beweging van een slinger in een trein die met een constante snelheid beweegt.

Fase 2: er wordt een transitie van Galileïsche naar speciale relativiteit gemaakt. Dit wordt gedaan door het relativiteitsprincipe te veralgemenen en het lichtsnelheidspostulaat te introduceren. Er worden gedachtenexperimenten uitgevoerd waarbij men initieel gebruik maakt van massieve voorwerpen waarvoor de klassieke kinematica van toepassing is. Vervolgens worden identieke gedachtenexperimenten uitgevoerd waarbij deze voorwerpen worden vervangen door lichtstralen. Zo benadrukt men de verschillen tussen de Galileïsche fysica en SR.

Fase 3: relativistische fenomenen zoals tijddilatatie en lengtecontractie worden afgeleid aan de hand van het lichtsnelheidspostulaat.

2.3 Didactische hulpmiddelen

Gedachtenexperimenten (GEs) spelen een cruciale rol bij het aanleren van verschillende aspecten van SR. Wanneer leerlingen worden aangemoedigd om actief over een GE na te denken worden er echter vaak redeneerfouten gemaakt. In de meeste GEs moet men met een invariante lichtsnelheid in twee verschillende inertiaalstelsels werken. Er bestaan echter veel misverstanden over het lichtsnelheidspostulaat en referentiestelsels. Kamphorst, 2021 stelt voor dat visuele hulpmiddelen leerlingen kunnen helpen te redeneren met een invariante lichtsnelheid. Er wordt gesuggereerd dat de veelgebruikte ruimtetijd diagrammen een te hoge abstractiegraad bevatten voor middelbare scholieren. Daarom introduceert Kamphorst de zogenaamde Event Diagrams (EDs).

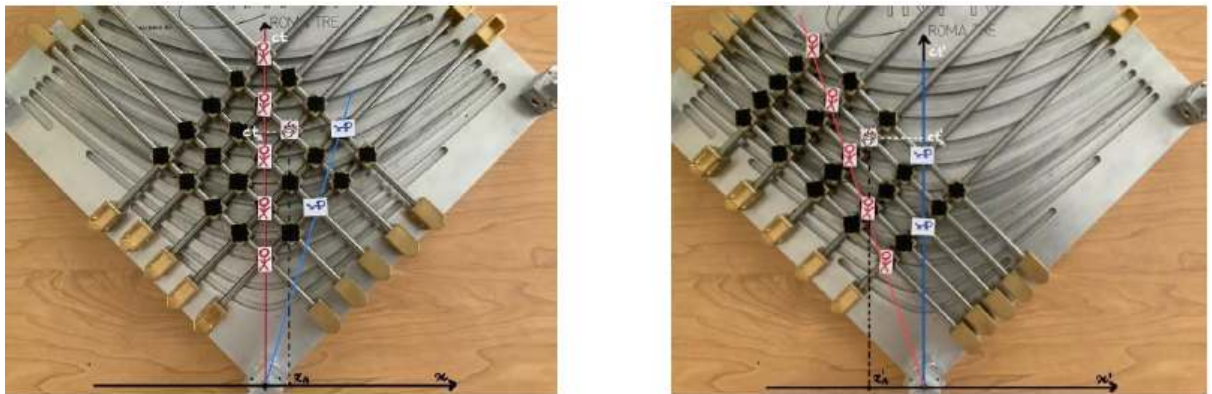
EDs zijn visuele voorstellingen van ruimtetijd waarin de posities van voorwerpen en tijdstippen van gebeurtenissen op reguliere tijdsintervallen worden aangeduid. Leerlingen voeren het GE uit door de voorplanting van lichtstralen op het ED te tekenen.



Figuur 1: Het klassieke lichtklok GE voorgesteld op een ED (Kamphorst, 2021). Het linkerdiagram stelt het perspectief van een waarnemer in de lichtklok voor. Het rechterdiagram representeert een waarnemer die de lichtklok naar rechts ziet bewegen. Leerlingen moeten zelf op verschillende tijdstippen de positie van een lichtstraal in beide diagrammen aanduiden. Wanneer leerlingen correct redeneren met een invariante lichtsnelheid helpt het ED om aan te tonen dat de tweede waarnemer de lichtstraal op een later tijdstip detecteerd dan de eerste waarnemer.

EDs worden ingezet om veelvoorkomende misverstanden van relativistische concepten aan te pakken. Leerlingen kunnen het lichtsnelheidspostulaat verwoorden, maar weten vaak niet *ten opzichte van wat* de lichtsnelheid constant is. Wanneer ze de EDs uitvoeren gebruiken sommigen een voorplantingsmodel waarbij de lichtsnelheid constant is ten opzichte van de lichtbron. Er worden dan vergelijkingen gemaakt met EDs waar het lichtsnelheidspostulaat correct werd toegepast om zo te verduidelijken dat de lichtsnelheid constant is ten opzichte van alle waarnemers.

De spacetime globe (STG) is een innovatief visueel hulpmiddel dat ruimtetijdroosters op een dynamische manier voorstelt (Leonardi e.a., 2024). Deze opstelling laat toe om dezelfde ruimtetijdroosters in andere inertiaalstels af te beelden door een mechanische handeling uit te voeren.



Figuur 2: Een STG beeldt wereldlijnen en gebeurtenissen af vanuit het perspectief van twee verschillende waarnemers (Leonardi e.a., 2024). Men kan transformaties naar verschillende inertiaalstelsels uitvoeren door de blokken in het rooster te verschuiven. Wereldlijnen lopen door de blokken en schuiven met hun mee. De STG schetst steeds de situatie voor de waarnemer waarvan de wereldlijn met de tijd as overlapt. Deze opstelling kan gebruikt worden om het lichtsnelheidspostulaat, tijddilatatie, lengtecontractie en de relativiteit van gelijktijdige gebeurtenissen te visualiseren.

Veel GEs kunnen zowel gevisualiseerd worden met EDs en een STG. STGs bieden een meer abstracte representatie van GEs aan dan EDs. Het lichtsnelheidspostulaat is ingebouwd in het werkingsmechanisme van STGs. In tegenstelling tot het gebruik van EDs laten STGs niet toe om incorrecte conclusies te trekken wegens een foutief begrip van de invariantie van de lichtsnelheid. STGs maken het mogelijk om het lichtsnelheidspostulaat en de bijkomende gevolgen op een actieve manier te verkennen.

SR lessenreeksen maken regelmatig gebruik van GEs omdat het onmogelijk is om relativistische effecten rechtstreeks te ervaren, of in een klasomgeving relativistische experimenten uit te voeren. Sommige docenten en onderzoekers maken echter gebruik van virtuele simulaties die relativistische fenomenen demonstreren. Zo worden abstracte concepten als referentiestelsels volledig vervangen door een persoonlijke waarnemer (Savage e.a., 2007). Interactieve simulaties laten leerlingen toe om op een actieve manier verschillende aspecten van SR te ontdekken. Virtuele leeromgevingen motiveren leerlingen maar kunnen tot negatieve leerresultaten leiden. Afleidingen in deze leeromgevingen resulteren in overbelasting van het werkgeheugen waardoor leerlingen minder kennis vergaren (Makransky e.a., 2019). Savage e.a., erkennen deze nadelen maar benadrukken wel het belang van ontdekkend leren in lessenreeksen SR.

2.4 Ontdekkend leren

Ontdekkend leren is een pedagogische werkwijze waarbij leerlingen op een actieve manier nieuwe ideeën verkennen. Kennis wordt verworven door op een zelfstandige wijze de concepten te ontdekken. Ontdekkend leren kan leerlingen helpen om abstracte concepten te begrijpen. Wanneer leerlingen onafhankelijk nieuwe concepten ontdekken blijven de ideeën langer in hun geheugen. Deze aanpak zorgt ervoor dat leerlingen een dieper begrip over de onderliggende concepten vergaren en minder leerstof memoriseren (Marsitin e.a., 2021). Een excessieve afhankelijkheid van memorisatie bij het studeren kan bijdragen aan de benoemde misverstanden van SR. Zo kunnen veel leerlingen het lichtsnelheidspostulaat verwoorden zonder het conceptueel te begrijpen. Er kan onderscheid gemaakt worden tussen twee vormen van ontdekkend leren (Fahmi e.a., 2019):

Zuiver ontdekkend leren: leerlingen verkennen de leerstof met weinig tot geen begeleiding. De leerkracht speelt een minimale rol in dit proces. Lesmateriaal neemt de vorm aan van open vraagstellingen met minimale instructies.

Begeleide ontdekking: leerlingen ontdekken de concepten aan de hand van gestructureerde ondersteuning. De leerkracht geeft aanwijzingen en feedback. Er wordt vaak gebruik gemaakt van scaffolding.

Onderzoek wijst uit dat begeleide ontdekking een positieve impact heeft op leerresultaten. Zuiver ontdekkend leren biedt weinig voordelen aan ten opzichte van traditionele lesstructuren. Ongeleide ontdekking vereist veel cognitieve inspanning en kan er tot leiden dat leerlingen niet in staat zijn om constructief te leren (Alfieri e.a., 2010). Door scaffolding te integreren in begeleide ontdekking wordt de cognitieve belasting van de leerlingen in de vroege fases van de lessenreeks gereduceerd. In latere fases worden de leerlingen minder ondersteund en passen ze de vaardigheden en kennis die ze al hebben opgebouwd toe om nieuwe concepten te ontdekken. Veermans, 2003 beschrijft een proces om ontdekkend leren in een lessenreeks toe te passen:

Oriëntatie: leerlingen ontwikkelen initiële ideeën over de inhoud. Dit wordt vaak gedaan door leerlingen inleidende informatie aan te bieden en hun voorkennis in verband met de probleemstelling te brengen. De leerkracht evalueert initiële vaardigheden van de leerlingen.

Ontwikkelen van een hypothese: de leerlingen formuleren een hypothese over de probleemstelling of onderzoeksvraag. In dit proces wordt er gebruik gemaakt van de informatie die tijdens de oriëntatie stap werd verworven.

Testen van de hypothese: het bovenstaand proces garandeert niet dat de bekomen hypothese correct is. Tijdens deze stap voeren de leerlingen handelingen uit waarbij nieuwe informatie wordt gegenereerd die hen toelaat om de hypothese te verifiëren of verwwerpen.

Conclusie: de nieuwe informatie wordt gebruikt om de hypothese te herzien. Leerlingen gaan na of de nieuwe informatie overeenkomt met de voorspellingen van hun hypothese. Indien er discrepanties aanwezig zijn wordt de hypothese aangepast, of er wordt een volledig nieuwe hypothese voorgesteld.

Plannen, monitoren en evaluatie: de vooruitgang van de leerlingen wordt in alle bovenvermelde processen gereguleerd. De leerkracht voorziet een doel om te behalen. De handelingen en conclusies van de leerlingen worden gemonitord. Er wordt geëvalueerd of deze handelingen en conclusies op een correcte manier bijdragen aan het bereiken van het vooropgestelde doel.

Wanneer men begeleid ontdekkend leren wilt toepassen in een lessenreeks moet het lesmateriaal de leerlingen aansturen om de bovenstaande processen uit te voeren. Het is uitermate belangrijk om een geschikte leeromgeving te voorzien waar leerlingen gebruik kunnen maken van hands-on hulpmiddelen. Dit kan de vorm aannemen van een experiment, een virtuele leeromgeving, of ander didactisch materiaal. Zowel EDs en STGs kunnen ingezet worden als middelen die ontdekkend leren bevorderen. STGs lijken echter meer geschikt om de bovenstaande processen correct uit te voeren. Bij het gebruik van EDs zijn leerlingen meer afhankelijk van het toepassen van kennis die passief werd ontwikkeld. Zo moet het lichtsnelheidspostulaat gekend zijn *vooral* het ontdekkend leren proces opstart. De leerlingen kunnen vervolgens wel nieuwe concepten ontdekken.

Het lichtsnelheidspostulaat leren kan beschouwd worden als deel te zijn van het oriëntatieproces. Dit is echter zeer transformatieve informatie. Transformatief leren wordt, toepasselijk, beschreven als het veranderen van referentiestelsel. Dit model stelt dat kritische reflectie een cruciale rol speelt wanneer leerlingen in contact komen met ideeën die hun ervaringen en aannames in vraag stellen (Calleja, 2014). In tegenstelling tot EDs kunnen STGs gebruikt worden bij opdrachten die de leerlingen toelaten om het lichtsnelheidspostulaat actief te ontdekken. Bovendien zijn EDs problematisch voor het testen van de hypothese. Als leerlingen het lichtsnelheidspostulaat verkeerd interpreteren (en dus het traject van een lichtstraal foutief afbeelden op een ED) kunnen hun handelingen een foute hypothese verifiëren. Dit kan enkel gecorrigeerd worden door de tussenkomst van de leerkracht. Aangezien het lichtsnelheidspostulaat (en alle aspecten van de Lorentztransformaties) in een STG zijn ingebouwd zullen de handelingen van leerlingen altijd informatie genereren die een foute hypothese verworpt.

2.5 Doelstellingen

Aan de hand van de bovenstaande analyse kunnen er enkele onderzoeksvragen opgesteld worden. Het doel van het onderzoek is om toegankelijk lesmateriaal rond SR te ontwikkelen voor zowel leerlingen en leerkrachten. Wegens veelvoorkomende misverstanden rond het lichtsnelheidspostulaat en andere relativistische fenomenen hebben leerlingen vaak moeite om correcte conclusies te bereiken. Zowel STGs en EDs worden ingezet om deze misverstanden te bestrijden. Ontdekkend leren helpt leerlingen om abstracte concepten te begrijpen door kritisch nieuwe informatie te verwerken. STGs lijken een uitstekend didactisch middel te zijn om ontdekkend leren toe te passen. De literatuur suggereert dat een grondig begrip van de Galilei-transformaties cruciaal is om relativistische concepten te behandelen. Ruimtetijd diagrammen kunnen initieel behandeld worden in de context van de Galileïsche fysica.

Zo ontwikkelen de leerlingen cruciale vaardigheden die van belang zijn wanneer ze later met STGs werken. Daarbovenop kunnen STGs gebruikt worden om de transformatieve informatie van SR te vergelijken met de voorspellingen volgens de Galileïsche relativiteit. Er wordt daarom gekozen om een lessenreeks te ontwikkelen waarbij het gebruik van STGs centraal staat. Aan gezien EDs ook unieke voordelen aanbieden worden deze in mindere capaciteit ingezet. De onderzoeksvragen worden onderstaand samengevat:

Onderzoeksvraag 1: Maken STGs speciale relativiteit meer toegankelijk voor leerlingen?

- Heeft een grondige kennis van de Galileïsche fysica een positieve impact op leerresultaten en het leren werken met STGs?
- Hoe vergelijken STGs met EDs in het bestrijden van veelvoorkomende misverstanden rond SR?
- Helpen STGs leerlingen met het uitvoeren van ontdekkende leerprocessen?

Onderzoeksvraag 2: Maken STGs speciale relativiteit meer toegankelijk voor leerkrachten?

- Vinden leerkrachten STGs een nuttig didactisch middel?
- Zijn leerkrachten in staat om zelf lesmateriaal rond STGs te ontwerpen?

3 Methodologie

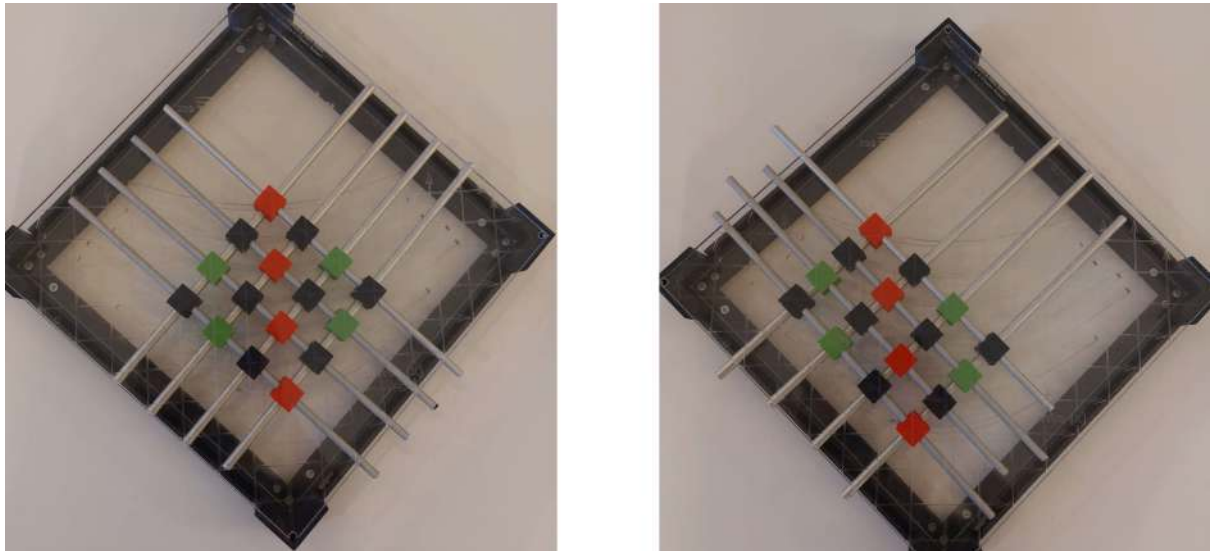
Er werd een lessenreeks SR uitgevoerd voor een klas 6 wetenschappen-wiskunde in de secundaire school Stedelijke Humaniora Dilsen. Om de onderzoeksvragen te toetsen werd er een STG geconstrueerd. Deze opstelling nam een centrale rol aan tijdens de meeste lesopdrachten. Lesmateriaal werd ontwikkeld in functie van de STG en nam de vorm aan van een theoriebundel, een werkbundel, BookWidget opdrachten, virtuele applicaties en video's. De voortgang en leerresultaten van de leerlingen werden gemonitord aan de hand van de notities in de werkbundels, een enquête en een toets.

3.1 Spacetime Globe

Op het moment van schrijven worden STGs niet commercieel geproduceerd. Er is ook geen documentatie beschikbaar die gebruikt kan worden om zelf een STG te bouwen. De STG die voor dit onderzoek werd geconstrueerd is gebaseerd op afbeeldingen in de paper van Leonardi e.a. en het origineel ontwerp dat gebruikt werd in een videoreeks van het youtube kanaal minutephysics (Reich, 2018). Een van de doelen van dit onderzoek is om leerkrachten de mogelijkheid te geven om zelf STGs en bijbehorend lesmateriaal te ontwikkelen. Daarom werden de relevante bestanden online beschikbaar gesteld. De STG bestaat uit vijf onderdelen:

- Een kader waarin het rooster wordt vastgeschroefd. Deze kader bestaat zelf uit vier hoekstukken en vier middenstukken die in elkaar gemonteerd kunnen worden. De middenstukken zijn zodanig ontworpen dat er meerdere aan elkaar gemonteerd kunnen worden om de mogelijkheid aan te bieden om een grotere STG te construeren.
- Een aantal blokken die gebeurtenissen in ruimtetijd representeren. De gebruiker kan deze blokken collectief bewegen om dezelfde gebeurtenissen in verschillende referentiestelsels met andere coördinaten voor te stellen.
- Een onderste plaat met gleuven waarin de blokken via pinnen in vastzitten. Wanneer de blokken verschuiven volgen ze de bijzondere vorm van deze gleuven die de wiskundige structuur van de Lorentztransformaties bevat. Zo nemen de blokken de juiste posities aan om relativistische effecten af te beelden.

- Een aantal metalen buizen die doorheen holtes in de blokken zitten. Deze buizen worden gebruikt om de collectieve beweging uit te voeren.
- Een doorzichtige bovenste plaat. Hierop worden de assenstelsels en de gebruikte eenheden afgebeeld. Leerlingen kunnen met uitwisbare stiften wereldlijnen, ruimteintervallen en tijdsintervallen op dit rooster tekenen.



Figuur 3: Eén van de gebruikte STGs in twee verschillende configuraties

Het kader en de blokken zijn gemaakt van filament en werden met een Prusa MK4 model ge-3D-print. De twee platen zijn van plexiglas gemaakt en werden met een Trotec 100R lasercutter bijgesneden. Alle 3d bestanden werden in FreeCAD ontworpen.

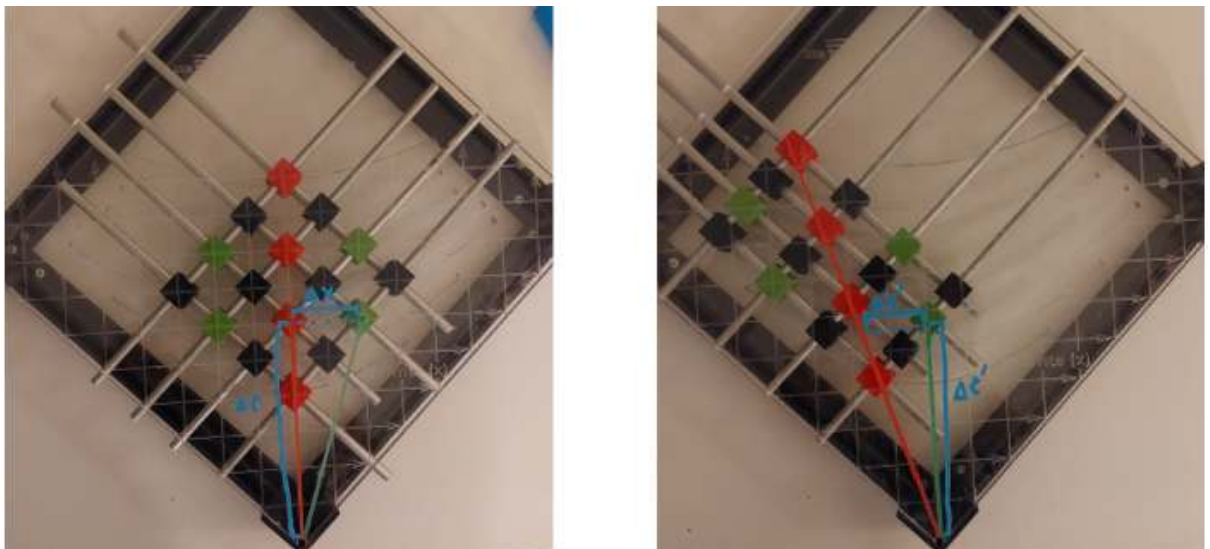
Deze STG laat toe om alle mogelijke inertiaalstelsels van verschillende waarnemers af te beelden, onder voorwaarde dat deze waarnemers met een constante snelheid in één richting ten opzichte van elkaar bewegen en elkaar kruisen op het tijdstip $t = 0$. Het werkingsmechanisme van de STG werd zodanig ontwikkeld dat een collectieve beweging van de blokken een echte Lorentztransformatie voorstelt. In een gegeven inertiaalstelsel wordt de positie van een blok voorgesteld door een ruimtetijd coördinaat (x, t) . De wiskundige beschrijving van de speciale relativiteitstheorie is omvat in de zogenaamde Minkowski-ruimte. In tweedimensionale ruimtetijd houdt dit in dat het interval $\tau = \sqrt{t^2 - x^2}$ invariant is onder een Lorentztransformatie. De methode om de correcte vorm van de gleuven te bepalen is als volgt:

- Er wordt een initiële configuratie van het rooster bepaald door aan iedere blok een coördinaat (x_B, t_B) toe te wijzen.
- Voor ieder coördinaat wordt het interval $\tau = \sqrt{t_B^2 - x_B^2}$ berekend.
- Na een Lorentztransformatie zal iedere blok door een nieuw coördinaat (x'_B, t'_B) voorgesteld worden. Dit nieuw coördinaat moet voldoen aan de voorwaarde $\sqrt{t'^2_B - x'^2_B} = \tau = \sqrt{t^2_B - x^2_B}$
- Voor iedere blok wordt het functievoorschrift $t(x) = \sqrt{x^2 + \tau^2}$ gedefinieerd. Dit is het functievoorschrift van een hyperbool. Dit stelt de verzameling van alle toegelaten coördinaten van het blok na een Lorentztransformatie voor.

- Voor iedere blok wordt een bijbehorende gleuf bepaald. Deze gleuven nemen de vormen aan van hyperbolen, volgens het bovenstaand functievoorschrift. Wanneer de blok over deze gleuf beweegt neemt het dus een geldige positie aan na een Lorentztransformatie.

In de bovenstaande berekeningen wordt er impliciet gebruikgemaakt van natuurlijke eenheden waarbij de lichtsnelheid $c = 1$. Dit is een typische conventie die voor relativistische fysica wordt toegepast. Om de leerlingen niet te belasten met te veel nieuwe concepten worden er tijdens de lessen echter SI-eenheden gebruikt. Op het rooster werd aangeduid dat één lengte-eenheid gelijk is aan 299 792 458 meter en één tijdseenheid gelijk is aan 1 seconde. Aangezien de verhouding van deze eenheden exact gelijk is aan c komen de posities van de blokken overeen met de berekeningen. Verdere berekeningen kunnen in appendix D teruggevonden worden.

Op de bovenste plaat kunnen wereldlijnen en intervallen getekend worden. Zo kunnen de leerlingen relativistische concepten op het rooster visualiseren. Er worden ook stickers beschikbaar gesteld. Leerlingen kunnen op deze stickers figuren tekenen en deze op de blokken plakken door de bovenste plaat te verwijderen. Zo kan er bijvoorbeeld een figuur van een planeet geplaatst worden op één van de blokken om het moment wanneer een ruimteschip landt voor te stellen. Dit helpt leerlingen met de blokken te interpreteren als gebeurtenissen in de ruimtetijd.



Figuur 4: De wereldlijnen van twee waarnemers worden in hun respectievelijke inertiaalstelsels voorgesteld. De groene wereldlijn stelt het traject van een ruimteschip dat naar een verliggende planeet reist voor. De blauwe lijnen representeren de reisduur en de afstand tussen de aarde en de planeet. In het inertiaalstelsel van een astronaut in het ruimteschip zijn deze intervallen kleiner dan in het inertiaalstelsel van een waarnemer op aarde. Zo worden tijddilatatie en lengtecontractie op de STG afgebeeld.

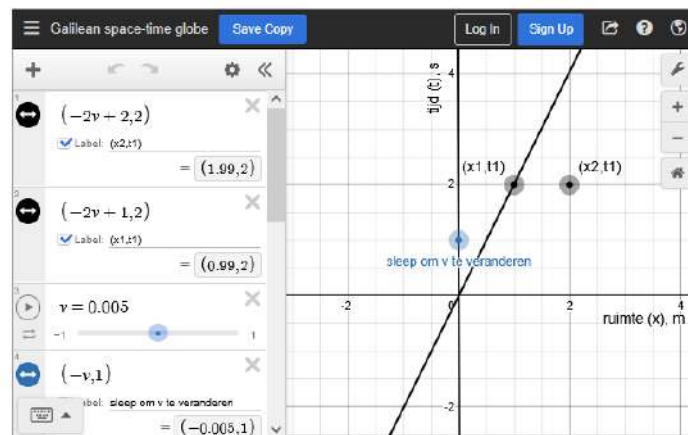
3.2 Didactisch materiaal

Er werd een lessenreeks van zes lesuren opgesteld voor een klas met zeventien leerlingen. Tijdens deze lessen werden er 5 STGs ter beschikking gesteld zodat leerlingen opdrachten in groepen van 3-4 hebben kunnen uitvoeren. Het lesmateriaal werd ontwikkeld met als doelen de transitie van Galileïsche relativiteit naar SR te maken, principes van ontdekkend leren en scaffolding toe te passen, en STGs en EDs in de lessenreeks te integreren.

Tijdens de eerste les wordt de Galileïsche relativiteit behandeld. Er werd de leerlingen gevraagd om voor de les een video te bekijken. Hier werden inertiaalstelsels, het relativiteitsprincipe en ruimtetijd diagrammen toegelicht. Hier werd benadrukt dat een waarnemer altijd stilstaat in haar eigen inertiaalstelsel. Zo werd het stappenproces om in een ruimtetijd diagram van inertiaalstelsels te wisselen toegelicht. Tijdens de les werkten de leerlingen aan een opdracht waarbij ze aan de hand van een digitale STG de Galileïsche optelwet van snelheid moesten afleiden.

De Galileitransformatie

Voor deze opdracht zal je gebruik maken van de onderstaande app. Er wordt een ruimtetijd diagram afgebeeld waar we de wereldlijnen van twee waarnemers zien. Je kan de wereldlijnen rond het blauwe punt roteren om zo een Galileitransformatie uit te voeren. Je kan ook nieuwe wereldlijnen afbeelden door twee nieuwe coördinaten in de tabellen in te voeren. De app zal dan automatisch een rechte lijn tussen deze nieuwe punten tekenen. Als waarnemer 2 met een snelheid v in de x -richting beweegt ten opzichte van waarnemer 1 wordt de Galileitransformatie gegeven door $x' = x - vt$. Hier is x het gebruikte coördinaat in het inertiaalstelsel van waarnemer 1 en x' het gebruikte coördinaat in het inertiaalstelsel van waarnemer 2.



QUESTION 1

Op de app worden de wereldlijnen van twee waarnemers afgebeeld. De oorspronkelijke positie toont het inertiaalstelsel van waarnemer 1. Hier beweegt waarnemer 2 met een constante snelheid. Voer een Galileitransformatie uit naar het inertiaalstelsel van waarnemer 2. Hoe moet je de wereldlijn van waarnemer 2 plaatsen om dit te doen?

Figuur 5: Een BookWidget opdracht waarbij de leerlingen een digitale STG gebruiken die de Galileitransformaties afbeeld. Leerlingen kunnen de wereldlijnen roteren en zo van inertiaalstelsel veranderen.

In de video en de lesopdracht werd er gebruik gemaakt van alledaagse voorbeelden. Zo werd het concept van relatieve snelheid geschetst aan de hand van twee wagens op een snelweg. Later wordt het relativiteitsprincipe toegelicht door de beweging van een slinger in een trein die met een constante snelheid beweegt te beschouwen. De meeste leerlingen beheersen al een intuïtief begrip van deze concepten. Zo wordt fase 1 in het stappenplan van Arlego en Otero uitgevoerd.

In de tweede les wordt het lichtsnelheidspostulaat geïntroduceerd. Leerlingen werken aan een opdracht waarbij ze de invariantie van de lichtsnelheid zelf ontdekken door gebruik te maken van een STG. Dit proces is analoog aan de opdracht die ze tijdens de eerste les hebben uitgevoerd. Er wordt benadrukt dat het lichtsnelheidspostulaat niet compatibel is met de Galileïsche optelwet van snelheid die de leerlingen tijdens de vorige les hebben afgeleid. Vanaf de derde les voeren leerlingen opdrachten uit waarin ze met het lichtsnelheidspostulaat als uitgangspunt relativistische fenomenen ontdekken. Zo wordt het stappenplan van Arlego en Otero voltooid.

In de lessenreeks wordt er gebruik gemaakt van een werkbundel. Tijdens iedere les voeren de leerlingen een opdracht uit waarvoor een probleemstelling in de bundel werd geformuleerd. De leerlingen werden gevraagd om in deze bundel al hun bevindingen te noteren. Bij iedere opdracht werd er ook een bijbehorende BookWidget applicatie voorzien. Deze bieden een meer gestructureerde, stapsgewijze begeleiding aan. In enkele van deze applicaties werden ook digitale hulpmiddelen geïntegreerd. Scaffolding werd toegepast door leerlingen meer begeleiding aan te bieden in de initiële fases van de lessenreeks. Zo werd er tijdens de eerste les gebruik gemaakt van de digitale STG. De mogelijke handelingen zijn hier gelimiteerd wegens de aard van de applicatie. Dit maakt het duidelijk hoe leerlingen van inertiaalstelsels moeten transformeren. Dit is een belangrijke vaardigheid die de leerlingen zelfstandig moeten toepassen in latere lessen wanneer de fysieke STG wordt ingevoerd. Ook bieden de BookWidget instructies de leerlingen minder begeleiding in latere opdrachten.

Het ontdekkend leerproces wordt in deze lessenreeks als volgt geïmplementeerd:

Oriëntatie: initiële informatie wordt voor de eerste les aangeboden in de vorm van de voorgenoemde video. Ook de eerste les kan beschouwd worden als deel te zijn van het oriëntatieproces. Hoewel de leerlingen hier wel actief nieuwe kennis ontwikkelen dient deze les voornamelijk om vaardigheden op te bouwen die cruciaal zijn in latere fases. Een grondig begrip van het concept van relatieve snelheid en het leren werken met ruimte-tijdroosters staat hier centraal.

Ontwikkelen van een hypothese: er wordt tijdens iedere les een probleemstelling voorzien waarrond de leerlingen een hypothese moeten ontwikkelen. Voor de opdracht over het lichtsnelheidspostulaat tijdens de tweede les zou een logische hypothese zijn dat de snelheid van een lichtstraal varieert van waarnemer tot waarnemer.

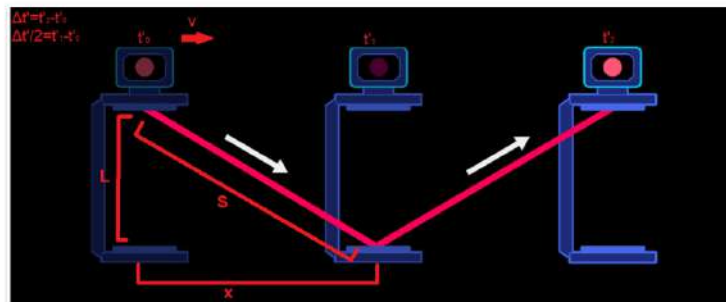
Testen van de hypothese: leerlingen testen hun hypothese aan de hand van de STG. Zo moeten de leerlingen tijdens de bovenvermelde opdracht de lichtsnelheid meten in twee verschillende inertiaalstelsels.

Conclusie: de leerlingen noteren al hun conclusies in de voorziene werkbundel. Bij deze opdracht wordt er verwacht dat leerlingen hun initiële hypothese verwerpen en concluderen dat de lichtsnelheid invariant is.

Plannen, monitoren en evaluatie: leerlingen worden begeleid wanneer iets onduidelijk is. Om de vooruitgang van leerlingen te monitoren wordt er aandacht aan iedere groep besteed. Op het einde van iedere les worden leerlingen gevraagd om hun vaststellingen klassikaal te delen.

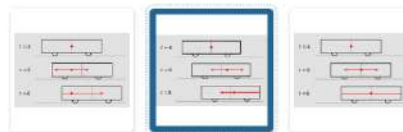
In enkele opdrachten worden EDs gebruikt. Tijdens de derde les werd er rond de lichtklok gewerkt. Voor deze opdracht werd er met EDs gewerkt zonder de STG te gebruiken. Deze keuze werd enerzijds gemaakt omdat dit GE niet op een STG afgebeeld kan worden. Anderzijds laat dit toe om de vooruitgang van de leerlingen met en zonder STGs te monitoren. Hier werd het traject van een lichtstraal in een lichtklok afgebeeld op een ED. In de laatste opdracht werd er rond zowel de STG en EDs gewerkt. Hier werd leerlingen gevraagd om zelfstandig het juiste traject van een lichtstraal aan te duiden.

De onderstaande afbeelding toont een schematisch overzicht van de lichtklok voor een waarnemer die de lichtklok van zich weg ziet bewegen met een snelheid v .



QUESTION 4 ☆

Welke van de onderstaande afbeeldingen toont de situatie vanuit het perspectief van de waarnemer die de trein in de positieve x-richting ziet bewegen? Leg uit waarom.



Figuur 6: Boven: een opdracht waar het pad van een lichtstraal schematisch op een ED wordt afgebeeld. Dit wordt in dezelfde applicatie gevisualiseerd aan de hand van een animatie. Onder: een opdracht over de relativiteit van gelijktijdige gebeurtenissen. Leerlingen moeten tijdens deze laatste taak hun kennis en vaardigheden toepassen om de correcte situatie aan te duiden.

Er werd ook een theoriebundel voorzien. Hier worden dezelfde GEs die tijdens de lessen zijn behandeld uitgewerkt. Cruciaal is dat ieder hoofdstuk van de bundel enkel werd gedeeld na het einde van de overeenkomstige les. Zo wordt het ontdekkend leerproces niet verhinderd.

3.3 Meetinstrumenten

Er werden vier meetinstrumenten ontwikkeld om de onderzoeksvragen te testen: de eerder vermelde werkbundel, een enquête voor de leerlingen, een toets die werd uitgevoerd, en een vragenlijst voor leerkrachten. Om de beginsituatie te schetsen werd er ook een enquête voor oud-leerlingen opgesteld.

Op het einde van de lessenreeks werden de werkbundels verzameld en ingescand. Leerlingen noteerden in deze bundels al hun bevindingen en hun gedachtenproces aan de hand van de open vraagstellingen. Deze notities werden geanalyseerd om na te gaan welke inzichten de leerlingen hebben verworven. Er werd onderzocht in welke mate de veelvoorkomende misverstanden aanwezig zijn wanneer leerlingen gebruik maken van STGs en EDs. Om de invloed van de les over Galileïsche relativiteit op hun begrip te testen worden de antwoorden op de eerste opdracht vergeleken met die op de tweede opdracht. Aan de hand van het gedachtenproces van de leerlingen werd er beschouwd in welke mate het ontdekkend leerproces werd uitgevoerd. Uiteindelijk werden deze parameters vergeleken met de leerresultaten van iedere leerling aan de hand van hun evaluatie op de toets. Bij deze toets werden er zowel opdrachten met STGs en EDs voorzien. Na de lessenreeks werd er ook een enquête door de leerlingen ingevuld. Hier werd de leerlingen hun subjectieve ervaring van het werken met STGs en het ontdekkend leerproces geschetst.

Zes fysica leerkrachten hebben een vragenlijst over STGs beantwoord. Het doel van deze vragenlijst is om te bepalen of leerkrachten zelf STGs in een lessenreeks SR zouden integreren. De STG en de uitgevoerde opdrachten werden aan de leerkrachten gedemonstreerd vooraleer de enquête werd uitgevoerd.

In de opstartfase van dit onderzoek werd er een vragenlijst opgesteld voor oud-leerlingen die een module SR in het secundair onderwijs hebben behandeld. Bachelorstudenten in wetenschapsrichtingen van de UHasselt werden gecontacteerd met de vraag deze enquête in te vullen. Dit proces had als doel het scheppen van context om het lesmateriaal te ontwikkelen. Aangezien er slechts twee respondenten hebben geantwoord is de invloed van deze enquête op het onderzoek gelimiteerd.

Om de validiteit van de meetinstrumenten te garanderen werden ze rond een aantal criteria ontwikkeld (Taherdoost, 2016):

Indruksvaliditeit: lijkt het instrument op het eerste zicht iets relevant te meten? Om aan dit criterium te voldoen is het belangrijk dat vragen in zowel de enquêtes en de toets ondubbelzinnig zijn. Foutieve interpretaties van vragen kunnen leiden tot irrelevante antwoorden. Tijdens de toets werden er duidelijke instructies voor de leerlingen voorzien. De vragenlijsten werden face to face uitgevoerd. Zo was het mogelijk om het gesprek bij te sturen indien er iets niet duidelijk was voor de respondent.

Inhoudsvaliditeit: meet het instrument de gekozen onderwerpen? In de bovenstaande beschrijving wordt vermeld hoe ieder meetinstrument de onderzoeksvragen toetst.

Begripsvaliditeit: wat is de causale relatie tussen de onderwerpen die worden behandeld? Convergente validiteit is een belangrijke vorm van begripsvaliditeit. Dit bepaalt of twee parameters die theoretisch correleren ook in de werkelijkheid correleren. Er wordt verwacht dat ontdekkend leren, diepe inzichten die de leerlingen verwerven door STGs te gebruiken bij het uitvoeren van opdrachten, en hun leerresultaten positief gecorreleerd zijn.

Dit wordt getest door de notities, toets en de antwoorden op de enquête van iedere leerling te vergelijken.

Criteriumvaliditeit: hoe nauwkeurig meet het instrument de relevante criteria? Een mogelijke manier om dit te testen is het vergelijken van de meetresultaten met toekomstig onderzoek. Men spreekt dan over predictieve validiteit. Om de validiteit van de meetinstrumenten in het heden te testen wordt er gebruikgemaakt van zogenaamde criteriumvariabelen. Zo worden de conclusies van dit onderzoek vergeleken met die van de literatuur.

4 Resultaten

4.1 Enquête studenten

De enquêtes die als deel van het vooronderzoek werden uitgevoerd bevestigen een aantal gegevens uit de literatuur. Wanneer er werd gevraagd om tijddilatatie uit te leggen antwoordde een student als volgt:

Hoger snelheid betekent een kleinere afstand gezien vanuit het object met de snelheid. Tijd verloopt relatief gezien langzamer op een hogere snelheid.

- -

De oud-leerling heeft onthouden dat bewegende klokken trager lopen dan stilstaande klokken, maar lijkt niet te beseffen dat dit enkel waar is in een gekozen referentiestelsel. Deze uitspraak doet vermoeden dat de leerling impliciet redeneert met snelheid als een absoluut gegeven. Dit is één van de typische misverstanden die in de literatuur worden beschreven. De andere oud-leerling herinnerde het concept van tijddilatatie niet meer. Beide leerlingen beoordeelden dat ze een grondig conceptueel begrip van tijddilatatie beheersten na de lessenreeks. De tweede student was goed in staat om wiskundige berekeningen in verband met tijddilatatie uit te voeren. Dit impliceert dat wiskundige oefeningen in een lessenreeks SR niet noodzakelijk geschikt zijn om belangrijke misverstanden te identificeren.

Beide lessenreeksen werden voornamelijk uitgevoerd door te doceren en de leerlingen in groepjes traditionele (wiskundige) opdrachten uit te laten voeren. Beide studenten merkten op dat het werken met GEs hielp met de leerstof te verwerken en hun meer motiveerde in vergelijking met wiskundige opdrachten. In één van de lessenreeksen kwamen ruimtetijd diagrammen aan bod door ze te schetsen wanneer enkele GEs werden toegelicht. Deze leerlingen hebben ruimtetijd diagrammen niet behandeld aan de hand van actieve werkvormen. Deze student vond ruimtetijd diagrammen ingewikkeld, abstract, en niet motiverend. In de andere lessenreeks zijn ruimtetijd diagrammen niet aan bod gekomen. Beide studenten vonden SR een interessant onderwerp in vergelijking met de klassieke fysica wegens het "hoge sci-fi gehalte".

4.2 Werkbundels

De opdracht over Galileïsche relativiteit leek de leerlingen te helpen met cruciale inzichten en vaardigheden te ontwikkelen. In de werkbundel noteerde één groepje:

In een Galileitransformatie moet de waarnemer altijd stilstaan dus op de t-as omdat deze in zijn eigen inertiaalstelsel niet verplaatst.

Een punt op de wereldlijn beweegt niet over de de verticale as (t) en dus enkel horizontaal

Je ziet jezelf niet bewegen in je eigen inertiaalstelsel

- -

De leerlingen tonen dat ze conceptuele inzichten over relatieve snelheid en het relativiteitsprincipe beheersen. Ze begrijpen ook hoe deze concepten toegepast worden bij het schetsen van ruimtetijdroosters in verschillende inertiaalstelsels. Het tweede punt verwijst naar een vraag in de BookWidgetopdracht. Hier werden leerlingen gevraagd om uit te leggen hoe ze in de app kunnen aflezen dat alle waarnemers dezelfde tijdservering hebben volgens de Galileïsche fysica. Het correct antwoord van de leerlingen bevestigt dat ze actief nadenken over de mogelijke implicaties van een verticale verschuiving van een coördinaat na een transformatie, wat enorm belangrijk is wanneer de STG in latere lessen wordt ingevoerd. Andere groepen leverden zeer gelijkaardige antwoorden.

Tijdens de tweede les pastten de leerlingen hun kennis toe om het lichtsnelheidspostulaat aan de hand van de STG te ontdekken. In de werkbundels noteerden leerlingen antwoorden als:

De lichtsnelheid is onafhankelijk van het inertiaalstelsel en wordt altijd voorgesteld met c (constante = lichtsnelheid).

De v_{licht} verandert niet.

$$c_1 = c_2 = c$$

IEDEREEN meet zelfde snelheid voor lichtsnelheid.

Hoek met t-as van lichtstraal is 45°

$$v_i \neq v_1 + v_2.$$

- -

De leerlingen lijken aan de hand van het ontdekkend leerproces dezelfde conclusies op andere manieren te formuleren. Sommigen denken over de snelheid van een lichtstraal als iets dat wordt gemeten door individuen, anderen conceptualiseren snelheid als relatief ten opzichte van een referentiestelsel te zijn. Nog anderen maken gebruik van semi-wiskundige uitdrukkingen om het lichtsnelheidspostulaat te formuleren. Deze uitdrukkingen zijn ieder in essentie equivalent en correct. De antwoorden geven ook aan dat leerlingen snelheid op ruimtetijd diagrammen kunnen aflezen aan de hand van de hoek die een wereldlijn met de assen maakt. Het laatste punt toont dat één groep al een gevolg van het lichtsnelheidspostulaat heeft ontdekt: de Galileïsche optelwet van snelheid is niet correct volgens de speciale relativiteitstheorie. In de BookWidgetopdracht werd dit gevraagd, en in de werkbundel wordt er enkel kort naar de Galileïsche optelwet van snelheid verwezen als achtergrondkennis.

Het lijkt onwaarschijnlijk dat leerlingen tot dit inzicht zouden komen zonder een grondig begrip van de Galileïsche relativiteit op te bouwen en zonder het lichtsnelheidspostulaat op een actieve manier te verkennen.

Tijdens de derde les leidden leerlingen zelf de formule van tijddilatatie af aan de hand van EDs waar ze het lichtsnelheidspostulaat op moesten toepassen. Om het principe van scaffolding toe te passen werd het pad van de lichtstraal afgebeeld. Hoewel het correcte traject van de lichtstraal al werd gegeven is er toch nog een mogelijkheid om een fout voortplantingsmodel toe te passen. De leerlingen kregen de opdracht om de lengte en tijdsintervallen van het traject van de lichtstraal te berekenen. Indien er misconcepties over de invariantie van de lichtsnelheid aanwezig zijn zullen leerlingen een foute formule voor tijddilatatie afleiden. Een groepje dat bijvoorbeeld denkt dat de lichtsnelheid constant is ten opzichte van de lichtbron zal beredeneren dat er geen tijddilatatie plaatsvindt. Iedere groep heeft deze opdracht succesvol kunnen uitvoeren en heeft de correcte uitdrukking voor de tijddilatatie formule gevonden. Er werd ook gevraagd waarom het lijkt te zijn dat klokken op een rijdende trein even snel tikken als stilstaande klokken. De meeste groepen hebben correct geantwoord dat tijddilatatie een verwaarloosbare rol speelt voor waarnemers die ten opzichte van elkaar bewegen met een kleine snelheid (in verhouding met de lichtsnelheid). Eén groep antwoordde echter "*Omdat uit beide inertiaalstelsels de klok stil lijkt te staan*". Hoewel dit geen correct antwoord is in deze context wijst dit erop dat deze leerlingen actief het relativiteitsprincipe probeerden toe te passen in hun redenering. Een van de veelvoorkomende misverstanden van SR is dat tijddilatatie wordt ervaren *in het referentiestelsel van een bewegende waarnemer*. Deze leerlingen leken al het inzicht te hebben ontwikkeld dat de waarnemer in dit referentiestelsel in rust is en dus zelf geen tijddilatatie zal ervaren.

De doelstelling van de vierde opdracht is om te bepalen of een astronaut mogelijk een sterrenstelsel dat miljoenen lichtjaren is verwijderd kan bereiken ondanks het feit dat de lichtsnelheid niet overschreden kan worden. Leerlingen beredeneerden correct dat dit mogelijk is wegens tijddilatatie en lengtecontractie. Zo noteerden ze onder andere:

Ja, als je met de snelheid van het licht reist, worden de tijd en afstand korter

Het zou theoretisch gezien kunnen omdat de tijd in het ruimteschip trager gaat en de afstand korter is uit perspectief van de astronaut, als het ruimteschip snel genoeg gaat

- -

Hoewel de leerlingen de juiste conclusies bereiken zijn er nog steeds een aantal misverstanden aanwezig. Er wordt foutief beredeneerd dat de tijd in het ruimteschip vertraagt vanuit het perspectief van de waarnemer in het ruimteschip. Leerlingen lijken niet in te zien dat tijddilatatie enkel de verklaring is vanuit het perspectief van een waarnemer op aarde en dat lengtecontractie de enige verklaring is vanuit het perspectief van de astronaut. Deze opdracht werd uitgevoerd tijdens de eerste les waar de leerlingen vertrouwd zijn met de formules van tijddilatatie en lengtecontractie. Hoewel STGs tijdens deze opdracht werden gebruikt valt het op dat leerlingen in hun notities veel meer gebruik maken van wiskundige redeneringen in plaats van visuele redeneringen met de STG als hulpmiddel. De nuances van relativistische fenomenen zijn niet altijd makkelijk op te merken aan de hand van hun wiskundige beschrijvingen.

Tijdens de laatste opdracht onderzochten de leerlingen of gelijktijdige gebeurtenissen noodzakelijk gelijktijdig zijn in andere inertiaalstelsels. Dit werd gedaan aan de hand van een GE waarin een lichtbron in het midden van een trein lichtstralen naar beide uiteinden uitstraalt. Deze GE werd afgebeeld met EDs en de STG. Aangezien dit fenomeen niet rechtstreeks beschreven wordt door een wiskundige formule zijn de leerlingen volledig afhankelijk van deze didactische hulpmiddelen om hun conclusies te bereiken. Bij het deel van de opdracht waar de STG werd gebruikt noteerden leerlingen:

De rechterlichtstraal zal eerst aankomen ten opzichte van waarnemer buiten de trein (Bij deze notities werden de correcte ruimtetijd diagrammen getekend).

Ze komen niet op hetzelfde tijdstip aan, lichtstraal die in negatieve x-richting beweegt komt eerder aan.

Lichtstraal 2 bereikt eerder het uiteinde van de trein.

- -

De leerlingen zijn duidelijk in staat om de relativiteit van gelijktijdige gebeurtenissen in te zien aan de hand van een STG. Hoewel dit fenomeen duidelijk wordt afgebeeld op een STG is het niet noodzakelijk voor de hand liggend wat dit veroorzaakt. In het tweede deel van de opdracht werden leerlingen gevraagd om het juiste traject van de lichtstralen op een ED aan te duiden. Hierna beredeneerden ze waarom de lichtstralen niet gelijktijdig aankomen vanuit het perspectief van een waarnemer die de trein ziet bewegen. De leerlingen waren steeds in staat om het correcte voortplantingsmodel toe te passen. Er werd ook een grondig begrip van het licht-snelheidspostulaat getoond. Zo beredeneerden de leerlingen dat de rechterlichtstraal vanuit het perspectief van een externe waarnemer een langere afstand moet afleggen met dezelfde snelheid als de linkerlichtstraal (aangezien de trein naar rechts beweegt). Enkele leerlingen schetsten concreet hoe dit verschilt met de Galileïsche fysica, waar men zou verwachten dat de rechterlichtstraal in dit inertiaalstelsel een grotere snelheid zou hebben dan de linkerlichtstraal.

4.3 Toetsen

De toets bevat twee vragen met ieder vier deelvragen. Leerlingen kregen bij beide vragen de opdracht om ruimtetijd roosters van verschillende waarnemers te schetsen. Er werd toegelaten om gebruik te maken van een digitale versie van de STG. Bij de tweede vraag moesten leerlingen ook het correcte traject van een lichtstraal op een ED aanduiden. De leerlingen behaalden een gemiddelde score van 12,5/15 met een standaardafwijking van 2,45. Slechts één leerling behaalde een onvoldoende cijfer. Deze resultaten zijn positief in vergelijking met het klasgemiddelde van toetsen over andere onderwerpen. Aangezien deze toetsen door een ander individu werden geëvalueerd kan men hier echter geen definitieve conclusies uit trekken.

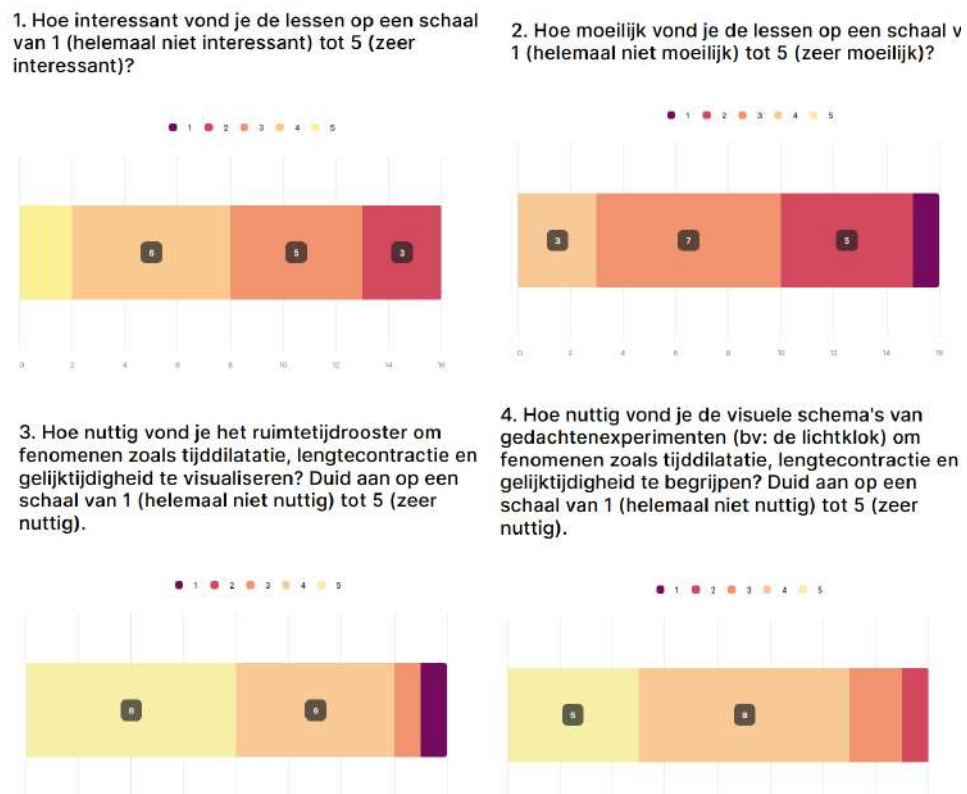
Consistent met hun notities in de werkbundels maakten leerlingen vaak de fout dat een waarnemer in een ruimteschip lokaal tijddilatatie ervaart. Leerlingen lijken het moeilijk te vinden om in te zien dat tijddilatatie en lengtecontractie twee verschillende verklaringen voor hetzelfde fenomeen zijn, afhankelijk van het referentiestelsel waarin de relevante gebeurtenissen worden beschreven. Slechts één leerling heeft dit volledig correct beantwoord. Negen van de zeventien leerlingen waren in staat om de ruimtetijd diagrammen met weinig tot geen fouten te schetsen. Andere leerlingen maakten een aantal verschillende fouten. Eén leerling duidde het landingsmoment van een ruimteschip niet aan op de wereldlijn van dit ruimteschip. Een andere leerling plaatste deze wereldlijn niet op de t-as wanneer het inertiaalstelsel van een waarnemer in het ruimteschip wordt afgebeeld.

Nog een andere leerling zette dit landingsmoment op het zelfde tijdscoördinaat in zowel het inertiaalstelsel van de astronaut en dat van een waarnemer op de aarde. Tijdens de tweede vraag tekenden leerlingen consistent de weredlijnen van lichtstralen op dezelfde hoek in beide inertiaalstelsels. Ook waren vijftien van de leerlingen in staat om het juiste traject van twee lichtstralen op een ED aan te duiden. De leerlingen presteerden in het algemeen goed op conceptuele vragen over de lichtsnelheid als universele snelheidslimiet, de theoretische mogelijkheid om verre sterrenstelsels te bereiken, en de relativiteit van gelijktijdige gebeurtenissen.

4.4 Enquête leerlingen

In de enquête na de lessenreeks werden leerlingen gevraagd om op een schaal van 1 tot 5 te beoordelen hoe interessant ze de lessen vonden. De gemiddelde score is gelijk 3.4 en de modus is 4. Wanneer leerlingen gevraagd werd om de moeilijkheidsgraad van de lessenreeks te beoordelen op een schaal van 1 (helemaal niet moeilijk) tot 5 (zeer moeilijk) ligt het gemiddelde op 2.75 en de modus op 3. Slechts drie leerlingen antwoordden met "4", en 5 werd geen enkele keer aangeduid. Dit impliceert dat de lessenreeks voor de meeste leerlingen toegankelijk was.

Er werd gevraagd hoe nuttig leerlingen de STG op een schaal van 1 tot 5 vonden. Bij deze vraag bevindt het gemiddelde zich op 4.25 en de modus op vijf. Wanneer dezelfde vraag werd gesteld over EDs bevindt het gemiddelde zich op 4.06 en de modus op 4. Leerlingen lijken een lichte voorkeur te hebben van het werken met STGs in vergelijking met EDs. Leerlingen merkten ook bijna unaniem op dat een lessenreeks zonder STGs minder interessant zou zijn. De meesten denken dat ze in zo een lessenreeks minder geleerd zouden hebben.



Figuur 7: Overzicht van de antwoorden op numerieke vragen.

Wanneer er gevraagd werd hoe de leerlingen het zelfstandige werken hebben ervaren werden er gevarieerde antwoorden gegeven:

Ik vond deze methode erg interassant. Op deze manier moest je zelf nadenken waardoor je het beter begrijpt.

Zelfstandig werk is altijd goed als de leerkracht beschikbaar blijft voor vragen. Dit was perfect uitgevoerd.

Misschien een paar dingen meer klassikaal maar over het algemeen was het prima.

Liever meer dingen die uitgelegd worden klassikaal

Ik heb persoonlijk liever klassikaal les.

- -

Het ontdekkend leerproces lijkt een positieve impact op veel leerlingen gehad te hebben. Een aantal van hun merken echter duidelijk op dat ze een aanpak met meer houvast verkiezen. Bij vraag naar verdere opmerkingen beoordeelden de meeste leerlingen de lessenreeks als interessant, leerrijk, en algemeen goed.

4.5 Gesprekken met leerkrachten

Na een demonstratie van de STG werden leerkrachten gevraagd of ze denken dat deze opstelling meerwaarde aan lessen SR kan bieden, of hun leerlingen in staat zouden zijn met de STG te werken, en of leerkrachten bereid zouden zijn om het rooster te bouwen indien de nodige bestanden en instructies worden voorzien.

De leerkrachten schatten unaniem in dat de STG een positieve impact op lessen SR kan hebben. Meerdere leerkrachten benadrukten dat de mogelijkheid om de abstracte leerstof op een minder wiskundige manier te brengen een groot voordeel biedt. De leerkrachten vermoeden ook dat de actieve werkvormen die worden toegepast hun leerlingen zouden motiveren om de leerstof te verwerken. E én leerkracht vermeldde dat de STG toelaat dat "leerlingen zelf iets kunnen ervaren zonder dat ik het op voorhand voorkauw", wat het ontdekkend leerproces samenvat.

De meeste leerkrachten denken dat hun leerlingen de capabiliteit hebben om met de STG te kunnen werken. Er werd wel beklemtoont dat het zeer belangrijk is dat de leerlingen een uitgebreid en duidelijk stappenplan voorzien krijgen. Tijdens de uitgevoerde lessenreeks was dit het geval, en de benodigde vaardigheden om vlot met de STG om te kunnen gaan werden opgebouwd tijdens de eerste les in een niet-relativistische context. Enkele leerkrachten maakten zich wel zorgen dat niet iedere docent voldoende tijd heeft om de lessenreeks op een uitgebreide manier uit te voeren. Wanneer leerkrachten slechts drie of vier lessen aan het onderwerp kunnen besteden is het moeilijk om een volledige les over Galileïsche relativiteit te verantwoorden. Zonder deze opbouw zou het werken met de STG moeizaam kunnen zijn. E én leerkracht was van mening dat de STG te abstract is voor sommige leerlingen.

Volgens de leerkrachten zouden fysica docenten algemeen bereid en capabel moeten zijn om de STG zelf te construeren aan de hand van duidelijke instructies. De meeste docenten kiezen er echter voor om andere keuzeonderwerpen te behandelen. Er werd ingeschat dat de meeste leerkrachten die al van plan zijn om een module SR uit te voeren interesse zouden tonen om STGs te gebruiken, maar dat het een grotere drempel is om andere leerkrachten te overtuigen om SR te behandelen. Eén leerkracht suggereerde dat het voordelig zou zijn om voorgemaakte STGs met handleidingen aan leerkrachten aan te bieden.

5 Conclusies en discussie

De centrale vraag van dit onderzoek is: "maken STGs speciale relativiteit meer toegankelijk voor leerlingen en leerkrachten?". In dit onderdeel wordt er besproken welke impact STGs hebben op het ontdekkend leerproces en veelvoorkomende misverstanden in SR, welke rol een les over Galileïsche relativiteit kan spelen, en of leerkrachten in staat zijn om zelf een lessenreeks rond het gebruik van een STG te ontwikkelen.

Eén van de typische misverstanden is dat leerlingen denken dat referentiestelsels verbonden zijn met fysieke voorwerpen zoals laboratoria en menselijke waarnemers. Tijdens deze lessenreeks werd er benadrukt dat we referentiestelsels als coördinatenstelsels kunnen beschouwen: een wiskundige abstractie. Dit is iets dat de leerlingen ook zelf ontdekten door regelmatig met STGs te werken. De leerlingen waren in staat om probleemloos met verschillende referentiestelsels te werken. Zo was er nooit verwarring over hoe het traject van een ruimteschip in het referentiestelsel van een waarnemer op aarde kan beschreven worden, ondanks het feit dat deze waarnemer en het ruimteschip enorm ver van elkaar verwijderd zijn. Dit valt ook duidelijk te zien op een STG, waar de wereldlijnen van verliggende waarnemers op een dynamische manier worden afgebeeld.

Een andere veelgemaakte fout is dat leerlingen een verkeerd voortplantingsmodel van een lichtstraal hanteren. Zowel tijdens de opdrachten als op de toets waren de leerlingen consistent in staat om de invariantie van de lichtsnelheid correct toe te passen. Leerlingen schetsten dezelfde wereldlijnen van lichtstralen in verschillende referentiestelsels op STGs en duiden de juiste trajecten van de stralen aan op EDs. Hoewel leerlingen in staat waren om het juiste voortplantingsmodel toe te passen op zowel STGs en EDs is het opvallend dat de literatuur vermeldt dat leerlingen regelmatig fouten maken op EDs. Tijdens deze lessenreeks werd er een volledige les besteed aan het ontdekken van het lichtsnelheidspostulaat door gebruik te maken van STGs. Leerlingen toonden tijdens deze opdracht een grondig begrip van het concept van de invariantie van de lichtsnelheid, waardoor er een minimale hoeveelheid redeneerfouten tijdens latere opdrachten aanwezig waren.

Nog een veelvoorkomend misverstand is dat leerlingen denken dat tijddilatatie en lengtecontractie worden waargenomen door een waarnemer die stationair is in het referentiestelsel waarin de resultaten worden uitgedrukt. Dit is een fout die leerlingen tijdens dit onderzoek ook regelmatig maakten. Op de toets antwoordden de leerlingen consistent dat een astronaut binnen het ruimteschip tijddilatatie ervaart omdat het ruimteschip met een grote snelheid beweegt. STGs kunnen mogelijk *bijdragen* aan dit misverstand. Wanneer een ruimtetijd diagram wordt voorgesteld in de initiële configuratie van het rooster komen lengte en tijdsintervallen overeen met wat een leerling zou verwachten volgens de Galileïsche fysica. Wanneer men een transformatie naar het inertiaalstelsel van een tweede waarnemer uitvoert zullen de gemeten ruimte en tijdsintervallen kleiner zijn. Dit kan leerlingen de indruk geven dat het initiële inertiaalstelsel de "normale" lengtes en tijd toont, en dat lengtecontractie en tijddilatatie enkel aanwezig zijn in het referentiestelsel van de "bewegende" waarnemer.

De correcte interpretatie is echter dat de bewegende klok van de tweede waarnemer enkel vertraagt in het referentiestelsel van de eerste waarnemer. Ook bij het werken met EDs maken leerlingen deze fout. Hoewel leerlingen het juiste ED van een stilstaande lichtklok kunnen identificeren, beredeneren ze toch dat tijd *binnen de klok* trager loopt dan in de buitenwereld.

Een mogelijke manier om dit misverstand met STGs te bestrijden is het invoeren van een bijkomende opdracht. Tijdens deze opdracht zouden leerlingen twee gebeurtenissen op twee verschillende wereldlijnen van waarnemers die ten opzichte van elkaar bewegen aanduiden. De leerlingen zouden dan de tijdscoördinaten van deze gebeurtenissen meten in de inertiaalstelsels van beide waarnemers. Zo zouden ze concluderen dat in beide gevallen het tijdscoördinaat een kleinere waarde heeft in het inertiaalstelsel van de waarnemer die de gebeurtenis ervaart. Dit leidt naar het inzicht dat tijddilatatie een symmetrisch fenomeen is: beide waarnemers ervaren dat elkaars klok trager loopt dan hun eigen klok. Dit is echter een verwarrend aspect van SR dat alleen begrepen kan worden aan de hand van een grondig inzicht over de relativiteit van gelijktijdige gebeurtenissen.

Hoewel niet alle misverstanden werden geëlimineerd kan er geconcludeerd worden dat het werken met STGs en EDs voordelen biedt in vergelijking met enkel EDs in een lessenreeks te integreren. Een aantal leerlingen maakten echter verschillende fouten bij het gebruik van STGs. Een mogelijkheid om het werkingsmechanisme van STGs intuïtiever te maken is het ontwikkelen van een groter rooster waarbij meerdere blokken zich op dezelfde wereldlijn bevinden. Zo kunnen leerlingen stickers op deze blokken plaatsen om deze wereldlijn aan te duiden. In de plaats dat leerlingen zelf voor en na een transformatie wereldlijnen op het rooster tekenen zien ze deze wereldlijn dynamisch met de blokken mee bewegen. Dit helpt om de concepten nog duidelijker te visualiseren en maakt het werkingsmechanisme mogelijk intuïtiever.

De leerlingen hebben oorspronkelijk geleerd te werken met STGs in de context van de Galileïsche fysica die voor hun al vertrouwd was. Zoals eerder vermeld waren de leerlingen bijzonder goed in staat om het lichtsnelheidspostulaat toe te passen in vergelijking met andere groepen. In andere lessenreeksen zullen leerlingen wel begrijpen dat de invariantie van de lichtsnelheid “speciaal” is, maar begrijpen ze de relevante context niet noodzakelijk. Dit leidt naar misinterpretaties van het lichtsnelheidspostulaat. Door een volledige les te besteden aan Galileïsche relativiteit wordt deze context geschetst: snelheid is relatief en is dus afhankelijk van het gekozen referentiestelsel. De snelheid van een lichtstraal is uniek: deze is absoluut en dus onafhankelijk van het gekozen inertiaalstelsel. Door dit inzicht waren leerlingen in staat om zelfstandig verbanden tussen SR en Galileïsche relativiteit te leggen en contrasten tussen deze theorieën te schetsen.

STGs zijn een ideaal didactisch middel om ontdekkend leren in een lessenreeks te integreren. Leerlingen participeerden enthousiast aan de verschillende opdrachten en hun notities vertoonden actieve denkprocessen en diepe inzichten. In het bijzonder had het actief ontdekken van het lichtsnelheidspostulaat een positieve impact op de leerlingen hun begrip van de leerstof. Halverwege de lessenreeks kwamen enkele wiskundige formules aan bod, inclusief de formule voor lengtecontractie die klassikaal werd afgeleid. Opvallend was dat inzichtrijke denkvormen werden vervangen door wiskundig redeneren tijdens één van de latere opdrachten. Dit leidt soms naar foute conclusies, aangezien wiskundige formules niet alle conceptuele subtiliteiten van relativistische fenomenen bevatten. Dit bevestigt dat het beperken van informatie cruciaal is om het ontdekkend leerproces te bevorderen.

Leerkrachten toonden enthousiasme over het werken met STGs en denken dat ze een meerwaarde aan een lessenreeks SR bieden. Ook werd er bevestigd dat de meeste leerkrachten in staat zouden moeten zijn om zelf STGs te ontwikkelen aan de hand van duidelijke instructies. In een toekomstige nascholing voor leerkrachten zullen STGs tijdens één sessie geïntegreerd worden. Er wordt hun op voorhand een handleiding gegeven waarmee ze zelf een STG zullen construeren. Er zal hier verder geëvalueerd in welke mate leerkrachten in staat zijn om zelf STGs te ontwikkelen.

Leerkrachten maken zich wel zorgen over de nodige tijdsinvestering om een lessenreeks rond STGs te ontwikkelen. Leerkrachten die zelf geen SR in hun klassen behandelen zullen niet makkelijk overtuigd worden om dit wel te doen aan de hand van een demonstratie van een STG. Hoewel STGs lessen SR meer intuïtief kunnen maken, is het niet noodzakelijk makkelijk voor een leerkracht die zelf minder vertrouwd is met SR er mee aan de slag te gaan. Daarom kan men best focussen om leerkrachten die wel SR behandelen te overtuigen om STGs in hun lessenreeksen te implementeren.

De onderzoeksvragen en conclusies worden als volgt samengevat:

OV1: Heeft een grondige kennis van de Galileïsche fysica een positieve impact op leerresultaten en het leren werken met STGs?

OV2: Hoe vergelijken STGs met EDs in het bestrijden van veelvoorkomende misverstanden over:

- **OV2A:** referentiestelsels
- **OV2B:** het lichtsnelheidspostulaat
- **OV2C:** tijddilatatie en lengtecontractie

OV3: Helpen STGs leerlingen met het uitvoeren van ontdekkende leerprocessen?

OV4: Vinden leerkrachten STGs een nuttig didactisch middel?

OV5: Zijn leerkrachten in staat om zelf lesmateriaal rond STGs te ontwerpen?

Onderzoeksvraag	Conclusie	Eventuele vooruitzichten
OV1	Positieve impact	
OV2A	STGs optimaal	Uitbreiden STG
OV2B	STGs + EDs optimaal	Uitbreiden STG
OV2C	STGs mogelijk niet optimaal	Uitbreiden STG, ontwikkelen extra opdracht
OV3	Positieve impact	
OV4	Ja	
OV5	Ja	Toekomstige nascholing

Referenties

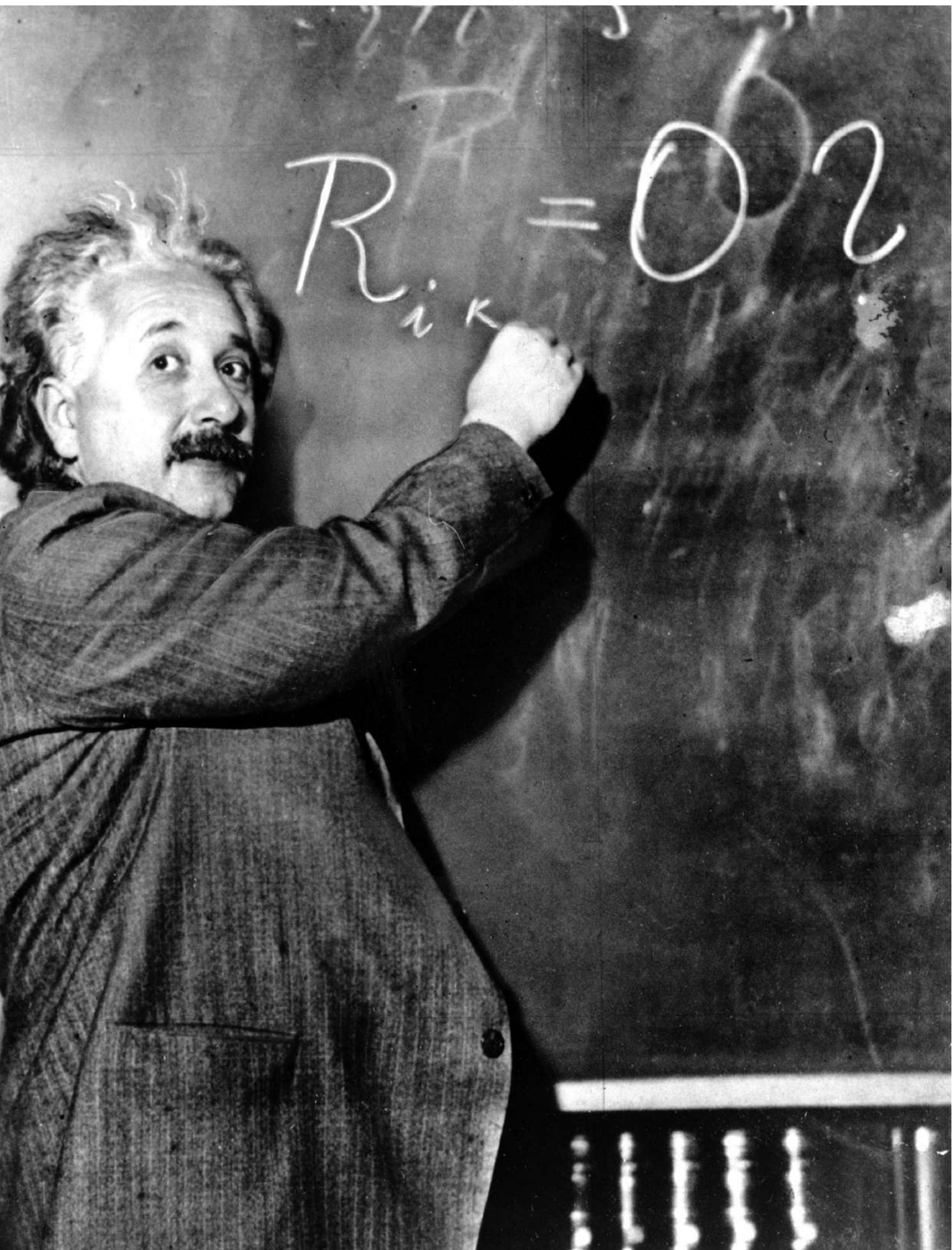
- Alfieri, L., Brooks, P., Aldrich, N., & Tenenbaum, H. (2010). Does Discovery-Based Instruction Enhance Learning? *Journal of Educational Psychology*, 103, 1–18. <https://doi.org/10.1037/a0021017>
- Alstein, P., Krijtenburg-Lewerissa, K., & van Joolingen, W. R. (2021). Teaching and learning special relativity theory in secondary and lower undergraduate education: A literature review. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.*, 17, 023101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.17.023101>
- Arlego, M., & Otero, M. (2018). TEACHING BASIC SPECIAL RELATIVITY IN HIGH SCHOOL: THE ROLE OF THE CLASSICAL KINEMATICS. 9, 9–11. <https://doi.org/10.12973/ijpce/79539>
- Calleja, C. (2014). Jack Mezirow's Conceptualisation of Adult Transformative Learning: A Review. *Journal of Adult and Continuing Education*, 20(1), 117–136. <https://doi.org/10.7227/JACE.20.1.8>
- Fahmi, F., Setiadi, I., Elmawati, D., & Sunardi, S. (2019). DISCOVERY LEARNING METHOD FOR TRAINING CRITICAL THINKING SKILLS OF STUDENTS. *European Journal of Education Studies*, 0(o). <https://doi.org/10.46827/ejes.voio.2540>
- Kamphorst, F. (2021, december). *Introducing Special Relativity in Secondary Education* [Doctoral thesis 1 (Research UU / Graduation UU)]. Universiteit Utrecht. Utrecht University. <https://doi.org/10.33540/1071>
- Kamphorst, F., Vollebregt, M. J., Savelsbergh, E. R., & van Joolingen, W. R. (2019). Students' preinstructional reasoning with the speed of light in relativistic situations. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.*, 15, 020123. <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.020123>
- Leonardi, A. M., Mobilio, S., & Fazio, C. (2024). An analysis of students' misconceptions on Special Relativity. *Journal of Physics: Conference Series*, 2750(1), 012018. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2750/1/012018>
- Makransky, G., Terkildsen, T. S., & Mayer, R. E. (2019). Adding immersive virtual reality to a science lab simulation causes more presence but less learning. *Learning and Instruction*, 60, 225–236. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2017.12.007>
- Marsitin, R., Rahayu Sesanti, N., & Farida, N. (2021). Discovery Learning with Link Map and Motivation on Calculus. *Journal of Physics: Conference Series*, 1908(1), 012010. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1908/1/012010>
- Reich, H. (2018). *Lorentz Transformations | Special Relativity Ch. 3*. Verkregen juni 3, 2025, van <https://www.youtube.com/watch?v=RhopYtQG5wI>
- Savage, C., Searle, A., & McCalman, L. (2007). Real Time Relativity: Exploratory learning of special relativity. *American Journal of Physics - AMER J PHYS*, 75. <https://doi.org/10.1119/1.2744048>
- Taherdoost, H. (2016). Validity and Reliability of the Research Instrument; How to Test the Validation of a Questionnaire/Survey in a Research. *International Journal of Academic Research in Management*, 5, 28–36. <https://doi.org/10.2139/ssrn.3205040>
- Veermans, K. (2003, januari). *Intelligent support for discovery learning* [PhD Thesis - Research UT, graduation UT]. Twente University Press (TUP).
- Velić A., & Hermens, S. (2021). *Onderwijs van de speciale relativiteitstheorie: Lesmethoden en ervaringen van docenten* [masterscriptie, Eindhoven University of Technology].

A Theoriebundel



Lesbundel Speciale Relativiteit

Max Janssens





1. Galileïsche Relativiteit

1.1 Intro

In 1905 publiceerde Albert Einstein de papers *On the Electrodynamics of Moving Bodies* en *Does the Inertia of a Body Depend Upon Its Energy Content?*. Hier legt hij uit hoe tijd vertraagt wanneer ze gemeten wordt door een klok die met een zeer grote snelheid beweegt. Hij beschrijft ook de equivalentie tussen massa en energie in de bekende formule $E = mc^2$. Einsteins bevindingen zijn vandaag gekend als de speciale relativiteitstheorie.

Einsteins theorie was baanbrekend, maar veel van zijn ideeën hebben hun oorsprong in de fysica die honderden jaren eerder werd ontwikkeld door Galileo Galilei. In dit hoofdstuk zullen we enkele concepten en technieken zien die een belangrijke rol spelen in de speciale relativiteitstheorie. Voorlopig passen we deze concepten echter enkel toe op de niet-relativistische fysica. We zullen in latere hoofdstukken zien waar de verschillen met de relativistische fysica liggen.

1.2 Inertiaalstelsels

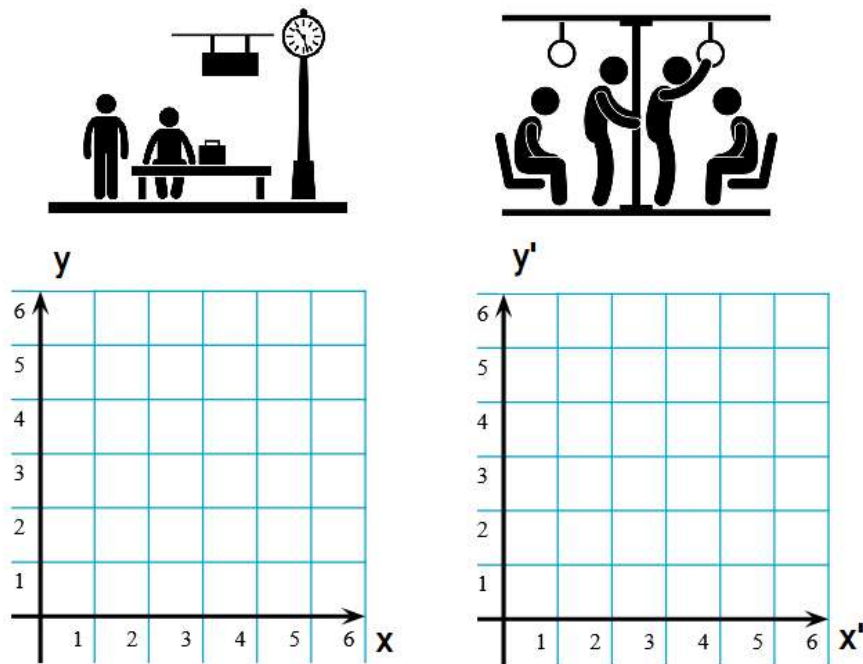
In de fysica gebruiken we coördinatenstelsels om natuurkundige wetten uit te drukken. Denk aan de tweede wet van Newton, die zegt dat de versnelling \vec{a} van een voorwerp evenredig is met de kracht \vec{F} die het voorwerp ervaart:

- $\vec{F} = m\vec{a}$
- $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$
- $\vec{r} = (x, y, z)$

De tweede wet van Newton (en andere natuurkundige wetten) worden dus impliciet uitgedrukt in een coördinatenstelsel (x, y, z) . Zo een coördinatenstelsel noemen we ook een referentiestelsel.

Referentiestelsels worden ook gebruikt wanneer men metingen uitvoert. Je kan bijvoorbeeld bepalen hoe een vallende appel versnelt door op verschillende tijdstippen de positie van de appel te meten. De positie van de appel wordt dan ook beschreven in een referentiestelsel met coördinaten (x, y, z) .

Andere waarnemers zullen andere coördinatenstelsels gebruiken om hun waarnemingen te beschrijven. Beschouw een meisje aan een treinstation en een jongen die stil zit in een trein die met een constante snelheid beweegt. Het meisje ziet de jongen samen met de trein van zich weg bewegen. De jongen zit vanuit zijn eigen perspectief echter gewoon stil. De jongen en het meisje bevinden zich dus in andere referentiestelsels, en de positie van de jongen verschilt in beide referentiestelsels. Als we de coördinaten van het eerste referentiestelsel (x, y, z) noemen, noemen we de coördinaten van het tweede referentiestelsel (x', y', z')



Figuur 1.1: Referentiestelsels van mensen aan een treinstation en passagiers op een trein.

We zeggen dat een waarnemer altijd stilstaat in haar eigen referentiestelsel. De oorsprong van zo een referentiestelsel valt samen met de positie van de waarnemer. Een inertiaalstelsel is een referentiestelsel dat geen versnelling ondergaat. In deze lessen zullen we de rotatie van de aarde negeren. We zeggen dus dat een persoon op het aardoppervlak zich in een inertiaalstelsel bevindt. Een persoon in een trein die met een constante snelheid beweegt bevindt zich ook in een inertiaalstelsel. Een persoon in een versnellende trein bevindt zich niet in een inertiaalstelsel.

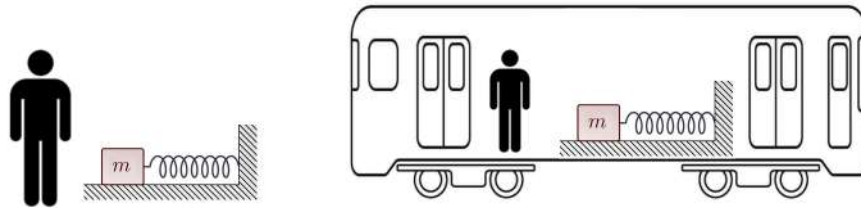
Referentiestelsels zijn coördinatenstelsels die waarnemers gebruiken om meetresultaten en de wetten van de fysica mee uit te drukken. Een inertiaalstelsel is een referentiestelsel dat geen versnelling ondergaat. ■

1.3 Het relativiteitsprincipe

De wetten van de fysica nemen dezelfde vorm aan in alle inertiaalstelsels.

Twee identieke experimenten zullen dezelfde resultaten opleveren in andere inertiaalstelsels. ■

Dit is het relativiteitsprincipe. Laten we als voorbeeld twee waarnemers beschouwen die beide een horizontale veer hebben die ze kunnen uitrekken. Waarnemer A staat stil op het aardoppervlak, waarnemer B zit in een trein die met een constante snelheid beweegt.



Figuur 1.2: Twee waarnemers voeren hetzelfde experiment uit in andere inertiaalstelsels.

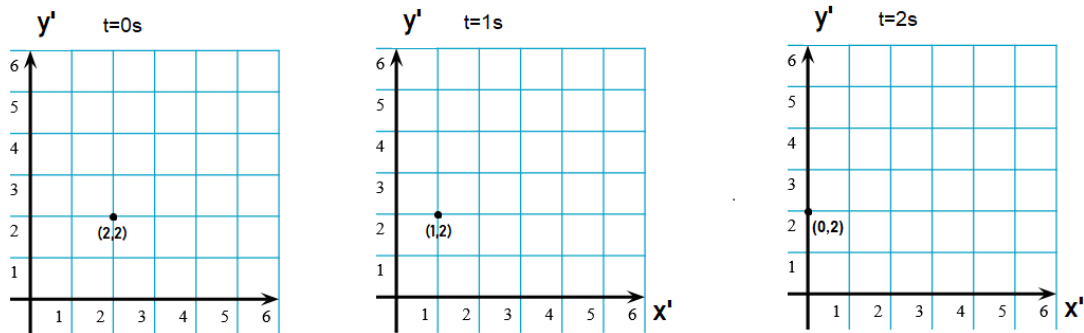
Beide veren zijn identiek aan elkaar (ze hebben dezelfde massa m en dezelfde veerconstante k). Als beide waarnemers hun veren tot dezelfde positie uitrekken zullen de veren identiek oscilleren.

Het relativiteitsprincipe zegt ons dat we in een inertiaalstelsel nooit een experiment kunnen uitvoeren dat ons toelaat om objectief te bepalen of het inertiaalstelsel een snelheid heeft. Een passagier in een trein zonder ramen zou nooit kunnen achterhalen of de trein stilstaat of met een constante snelheid beweegt. Snelheid is dus relatief. Een voorwerp kan dus een andere snelheid hebben in verschillende inertiaalstelsels.

1.4 De Galileitransformatie

Twee waarnemers die met een constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen bevinden zich in andere inertiaalstelsels. Deze inertiaalstelsels worden respectievelijk beschreven met coördinaten (x, y, z) en (x', y', z') . We noemen het verband tussen twee coördinatenstelsels een coördinatentransformatie.

Een waarnemer in een inertiaalstelsel met (x, y, z) coördinaten ziet een tweede waarnemer voorbij zich wandelen met een constante snelheid $v = 1$ m/s in de x -richting. Deze waarnemer ziet een appel op de grond liggen. De positie van deze appel wordt gegeven door het coördinaat $(2, 2, 0)$. Wat is de positie van de appel in het inertiaalstelsel van de tweede waarnemer met (x', y', z') coördinaten?



Figuur 1.3: De positie van de appel in het inertiaalstelsel van de wandelaar op drie verschillende tijdstippen.

Op het tijdstip $t = 0$ s passeert de wandelaar de eerste waarnemer. De coördinatenstelsels overlappen elkaar op dit moment. De positie van de appel wordt nu ook in het inertiaalstelsel van de wandelaar gegeven door het coördinaat $(2, 2)$. De positie van de appel in het inertiaalstelsel van de wandelaar zal echter veranderen in de tijd. Vanuit het perspectief van de wandelaar staat de appel op het tijdstip $t = 0$ s op het oorspronkelijke x coördinaat, waarna de appel met een snelheid $v = 1$ m/s van zich weg beweegt in de negatieve x -richting. De positie van de appel wordt dan gegeven door $x' = x - vt$.

Een belangrijke aanname die we maken is dat het tijdscoördinaat t niet verandert onder deze coördinatentransformatie. Dit lijkt een logische aanname te zijn: in onze ervaring tikt een klok op een bewegende trein even snel als een stilstaande klok. Deze aanname is echter niet waar in de speciale relativiteitstheorie.

Een inertiaalstelsel (x', y', z') beweegt met een constante snelheid v in de x -richting ten opzichte van inertiaalstelsel (x, y, z) . Op het tijdstip $t = 0$ vallen beide inertiaalstelsels samen. De verhouding tussen de coördinaten wordt gegeven door:

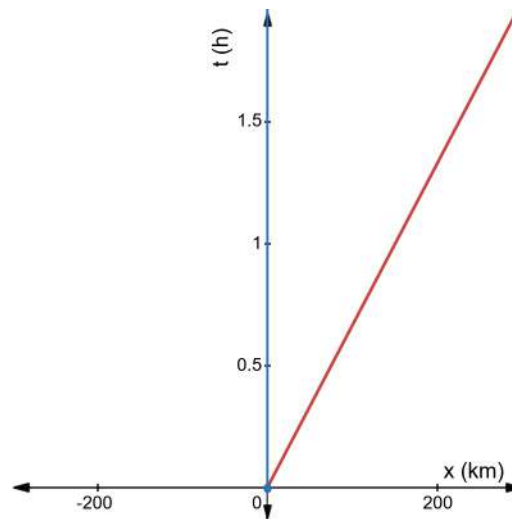
- $x' = x - vt$
- $y' = y$
- $z' = z$
- $t' = t$

Dit is de Galileitransformatie. ■

1.5 Ruimtetijsdiagrammen

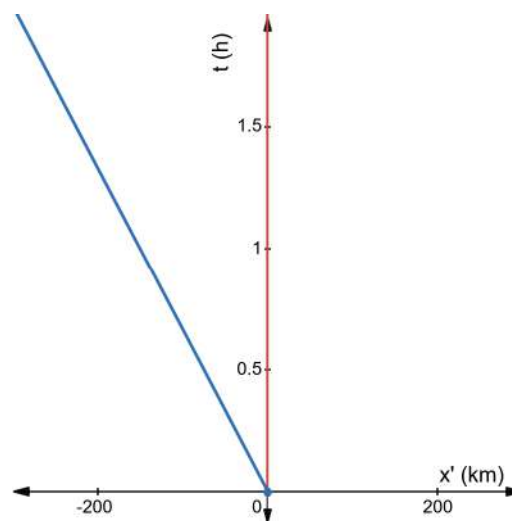
Ruimtetijsdiagrammen zijn diagrammen die ons toelaten om de trajecten van verschillende waarnemers af te beelden. In een ruimtetijsdiagram zetten we het tijdscoördinaat t op de verticale as en het ruimtecoördinaat x op de horizontale as. Het traject van een waarnemer op een ruimtetijsdiagram wordt een wereldlijn genoemd.

Een meisje zit stil in een treinstation en ziet op het tijdstip $t = 0$ s een trein van zich weg bewegen met een constante snelheid $v = 150$ km/h in de x -richting.



Figuur 1.4: Wereldlijnen van het meisje en de trein in het inertiaalstelsel van het meisje.

De rode wereldlijn stelt het pad van de trein voor. Dit is een rechte lijn aangezien de trein met een constante snelheid beweegt. Het meisje ziet zichzelf stilstaan in haar eigen inertiaalstelsel. Het meisje beweegt niet in de ruimte maar "beweegt wel in de tijd". De blauwe wereldlijn van het meisje staat dus op de t -as. Hoe zien deze wereldlijnen er uit in het (x', y', z') coördinatensysteem van een passagier in de trein?



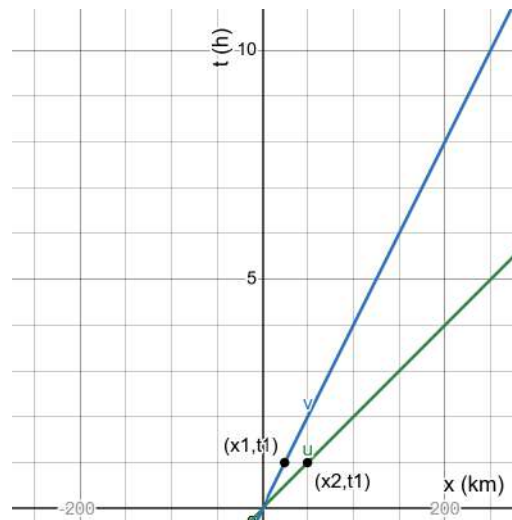
Figuur 1.5: Wereldlijnen van het meisje en de trein in het inertiaalstelsel van een passagier in de trein.

In het inertiaalstelsel van de passagier staat hij zelf stil. De rode wereldlijn van de trein staat in dit inertiaalstelsel op de t -as. De passagier ziet het meisje in het treinstation van zich weg bewegen met een snelheid van 150 km/h in de negatieve x -richting. Dit wordt voorgesteld door de blauwe wereldlijn van het meisje.

Beide inertiaalstelsels zijn verbonden door een Galileitransformatie. Ruimtetijd diagrammen laten ons dus toe om coördinatentransformaties te visualiseren.

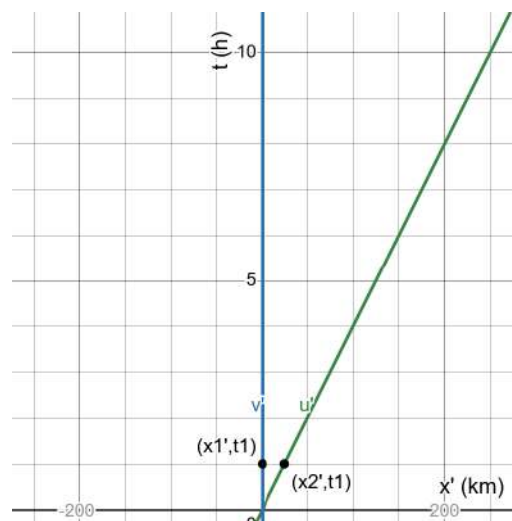
1.6 De optelwet van snelheid

Wat is het verband tussen de snelheid van twee waarnemers voor en na een Galileitransformatie? Stel dat we in een inertiaalstelsel waarnemers A en B met snelheden v en u in de x -richting zien bewegen.



Figuur 1.6: Wereldlijnen van twee waarnemers.

We willen weten wat de snelheid van waarnemer B is wanneer die gemeten wordt door waarnemer A. Om dit te kunnen doen voeren we een Galileitransformatie uit naar het inertiaalstelsel van waarnemer A.



Figuur 1.7: Dezelfde wereldlijnen in het inertiaalstelsel van waarnemer A.

In dit inertiaalstelsel noemen we de snelheid van waarnemer A v' en de snelheid van waarnemer B noemen we u' . (x_1, t_1) is een coördinaat op de wereldlijn van waarnemer A en (x_2, t_1) is een coördinaat op de wereldlijn van waarnemer B. Er geldt dan $v = \frac{x_1}{t_1}$ en $u = \frac{x_2}{t_1}$. Deze twee punten worden in het inertiaalstelsel van waarnemer A gegeven door de coördinaten (x'_1, t'_1) en (x'_2, t'_1) . Er geldt dan $v' = \frac{x'_1}{t'_1}$ en $u' = \frac{x'_2}{t'_1}$. We voeren een Galileitransformatie uit van het oorspronkelijke inertiaalstelsel met x coördinaten naar het inertiaalstelsel van waarnemer A met x' coördinaten: $x' = x - vt$. Zo vinden we:

- $u' = \frac{x'_2}{t'_1}$
- $u' = \frac{x_2 - vt_1}{t_1}$
- $u' = \frac{x_2}{t_1} - \frac{vt_1}{t_1}$
- $u' = u - v$

Stel bijvoorbeeld dat waarnemer A in een auto zit die met een snelheid $v = 25$ km/h beweegt en waarnemer B in een auto zit die met een snelheid $u = 50$ km/h in dezelfde richting beweegt. Volgens de bovenstaande formule ziet waarnemer A waarnemer B van zich weg bewegen met een snelheid $u' = 25$ km/h. Dit is de Galileïsche optelwet van snelheid.

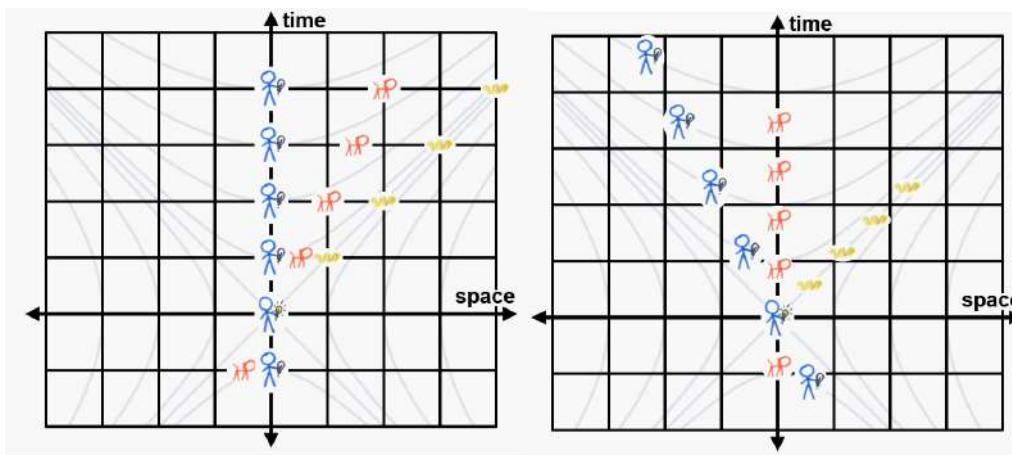
2. De Lichtsnelheid

2.1 Invariantie

De snelheid van een lichtstraal is hetzelfde in alle inertiaalstelsels. We zeggen daarom dat de snelheid van het licht *invariant* is. Deze snelheid is een vaste waarde die we c noemen. ■

De bovenstaande uitspraak is de fundamentele eigenschap van de speciale relativiteitstheorie. Alle relativistische effecten kunnen afgeleid worden uit het relativiteitsprincipe en de invariantie van de lichtsnelheid. De lichtsnelheid c is exact gelijk aan 299 792 458 m/s. In de praktijk zullen lichtstralen iets trager zijn als ze door een medium (bijvoorbeeld gassen en vloeistoffen) bewegen. In een vacuüm is de lichtsnelheid echter exact gelijk aan c . Voor deze lessen zullen we aannemen dat onze lichtstralen altijd in een vacuüm bewegen.

Er wordt soms gezegd dat de lichtsnelheid constant is. Dit is correct, maar niet bijzonder interessant. Volgens de eerste wet van Newton zal alle materie met een constante snelheid bewegen als er geen kracht op inwerkt. De lichtsnelheid is invariant: dit wilt zeggen dat iedere waarnemer exact dezelfde snelheid van een lichtstraal zal meten. Dit is in tegenspraak met de Galileïsche relativiteit. Op een ruimtetijdrooster kunnen we dit zien: de wereldlijn van een lichtstraal zal altijd op een hoek van 45° staan met de x-as.

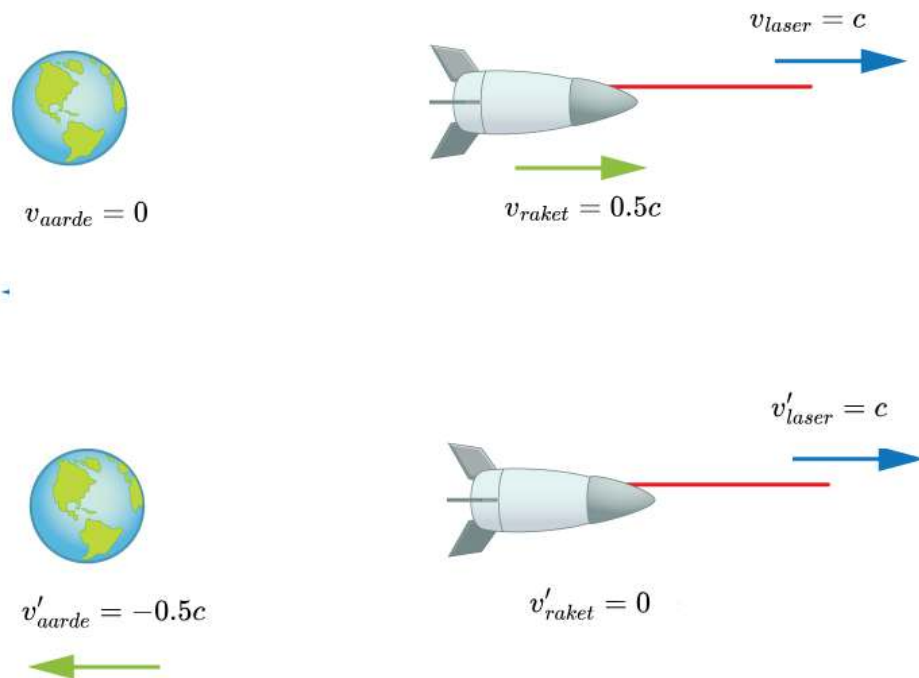


Figuur 2.1: Wereldlijn van een lichtstraal in twee verschillende inertiaalstelsels.

Op de bovenstaande figuur zien we een waarnemer A die op het tijdstip $t = 0$ s een gloeilamp aanzet. Waarnemer A ziet een lichtstraal met een snelheid c van zich weg bewegen. Waarnemer A ziet ook een tweede waarnemer B in de richting van de lichtstraal met een snelheid v mee bewegen. Volgens Galileo zou waarnemer B dan meten dat de lichtstraal met een snelheid $c - v$ van zich weg beweegt. Volgens Einstein meet waarnemer B dat de lichtstraal met een snelheid c van zich weg beweegt. We kunnen dit op het ruimtetijd diagram aflezen aangezien de lichtstraal in beide inertiaalstelsels op dezelfde hoek met de t -as staat.

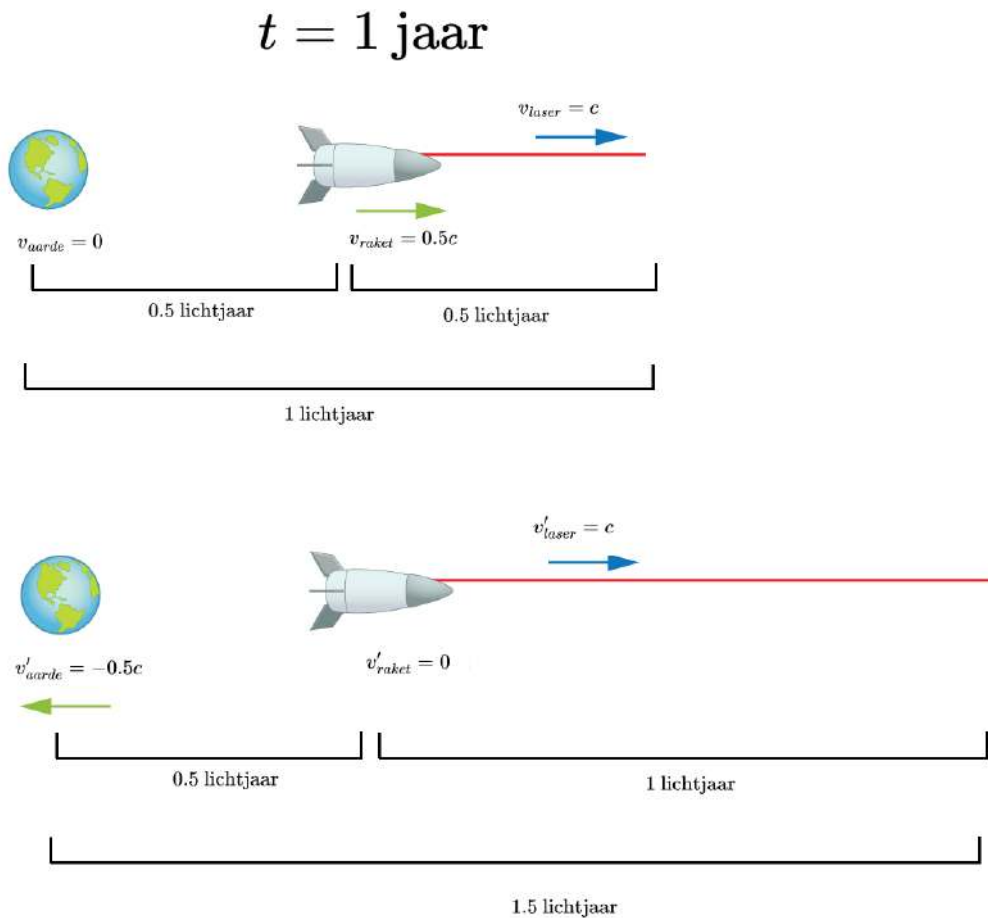
2.1.1 Metingen met een invariante lichtsnelheid

We zullen nu kort demonstreren waarom de invariantie van de lichtsnelheid verregaande gevolgen heeft. Stel dat een ruimteschip met een snelheid $0.5c$ ten opzichte van de aarde beweegt. Het ruimteschip zendt op het moment dat het lanceert een laserstraal voor zich uit. Vanuit het perspectief van een astronaut in het ruimteschip beweegt de aarde van zich weg met een snelheid $-0.5c$. Zowel waarnemers op de aarde en astronauten in het ruimteschip zien de laserstraal met dezelfde snelheid c bewegen.



Figuur 2.2: Snelheden van een ruimteschip, de aarde en een laserstraal in twee inertiaalstelsels.

Wat is nu de afstand tussen het ruimteschip en de laserstraal na een jaar tijd? De volgende afbeelding toont alle lengte intervallen in het inertiaalstelsel van de aarde en in het inertiaalstelsel van het ruimteschip.



Figuur 2.3: Lengte intervallen in twee inertiaalstelsels.

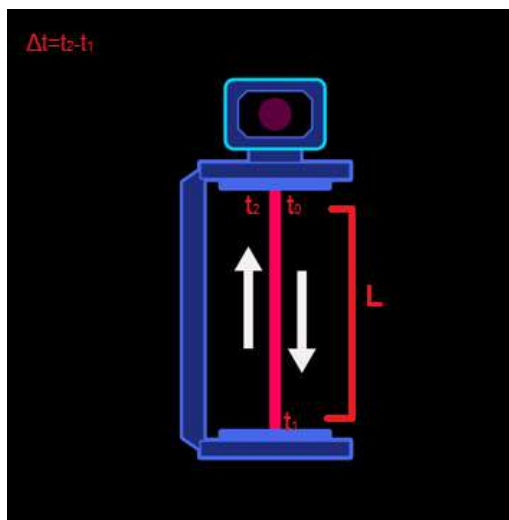
Vanuit het perspectief van een waarnemer op de aarde zal de raket na een jaar tijd een half lichtjaar hebben afgelegd. De lichtstraal zal dan een afstand van één lichtjaar hebben afgelegd. Een waarnemer op de aarde zou dan beredeneren dat de afstand tussen het ruimteschip en de laser een half lichtjaar is. Het ruimteschip ziet de laser echter ook met een snelheid van c van zich weg bewegen. Een astronaut in het ruimteschip zou dus beredeneren dat de laser na een jaar tijd zich één lichtjaar verder van het ruimteschip bevindt.

Het lijkt dus te zijn dat beide waarnemers een andere afstand tussen de positie van het ruimteschip en de positie van de laser meten. Een andere mogelijkheid is dat een klok op de aarde niet gelijk staat met de klok van het ruimteschip. In het volgende hoofdstuk zullen we zien dat twee waarnemers die met een constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen zowel tijd en lengte anders dan elkaar zullen meten.

3. Ruimte en Tijd

3.1 Tijddilatatie

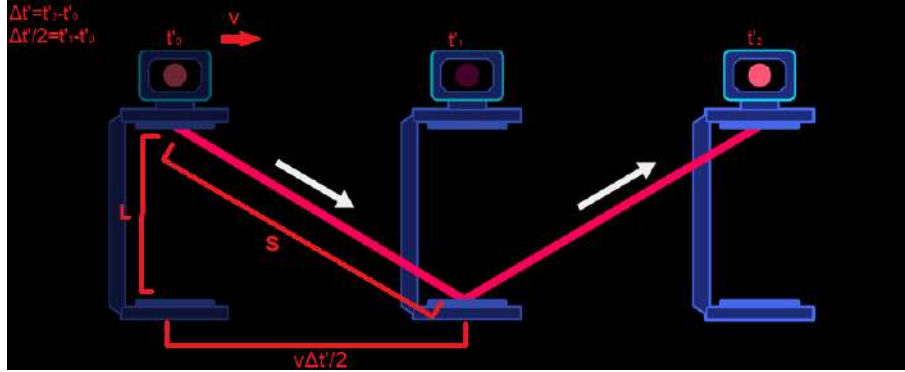
In dit hoofdstuk zullen we de correcte uitdrukkingen voor tijddilatatie en lengtecontractie afleiden door twee gedachtenexperimenten uit te voeren. Beschouw een gesloten kamer waarin er een lichtbron aan de bovenkant wordt geplaatst. Deze lichtbron zal een lichtstraal uitzenden die recht naar onder beweegt. Aan de onderkant van de kamer is er een spiegel aanwezig. De lichtstraal wordt door de spiegel gereflecteerd en zal nu recht naar boven bewegen. Wanneer de lichtstraal de bovenkant van de kamer terug bereikt wordt ze gedetecteerd door een lichtsensor. Op dit moment wordt er een nieuwe lichtstraal uitgezonden.



Figuur 3.1: Een stilstaande lichtklok.

De hoogte van de kamer L en de lichtsnelheid c zijn gekend. Er geldt dan: $c = \frac{2L}{\Delta t}$. Hier is Δt het tijdsinterval tussen wanneer de lichtstraal wordt uitgezonden en wanneer ze wordt gedetecteerd. We kunnen deze opstelling gebruiken om de tijd te meten door de hoeveelheid gedetecteerde lichtstralen te tellen. Daarom noemen we deze opstelling een lichtklok.

Hoe ziet dit proces er uit vanuit het perspectief van iemand die de lichtklok van zich weg ziet bewegen? Als de lichtklok met een snelheid v horizontaal weg beweegt ten op zichte van een waarnemer zal de lichtstraal met de lichtklok mee bewegen. Vanuit het perspectief van deze waarnemer zal de lichtstraal een diagonale beweging uitvoeren.



Figuur 3.2: Een lichtklok die met een constante snelheid v beweegt.

Deze waarnemer meet een tijdsinterval $\Delta t'$ tussen wanneer de lichtstraal wordt uitgezonden en wanneer ze wordt gedetecteerd. In het tijdsinterval $\frac{\Delta t'}{2}$ zal de lichtklok dan een afstand van $\frac{v\Delta t'}{2}$ afleggen. In dit tijdsinterval legt de lichtstraal de diagonale afstand S af. Volgens de stelling van Pythagoras geldt: $S^2 = \frac{(v\Delta t')^2}{4} + L^2$.

Aangezien deze waarnemer ook meet dat de lichtstraal met de snelheid c beweegt geldt er dat $S = \frac{c\Delta t'}{2}$. In het inertiaalstelsel van een waarnemer die met de lichtklok mee beweegt geldt $L = \frac{c\Delta t}{2}$. De hoogte van de lichtklok L verandert niet. Door deze uitdrukkingen in de bovenstaande vergelijking in te vullen vinden we: $\frac{(c\Delta t')^2}{4} = \frac{(v\Delta t')^2}{4} + \frac{(c\Delta t)^2}{4}$. We vormen dit om en vinden de uitdrukking voor tijddilatatie:

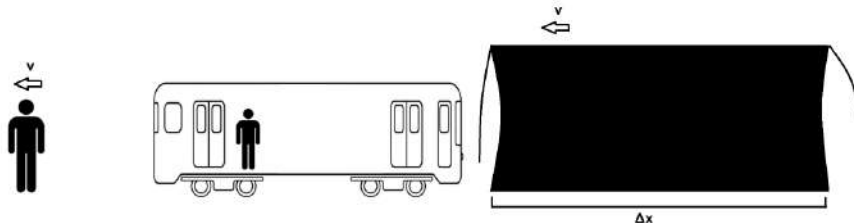
$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

De waarnemer die de lichtklok van zich weg ziet bewegen zal een groter tijdsinterval meten dan de waarnemer die met de lichtklok mee beweegt. De lichtklok is een echte klok die nauwkeurig tijd kan meten. Dit wilt zeggen dat tijd trager loopt op een klok die met een zekere snelheid beweegt ten opzichte van een klok die stilstaat.

Waarom zouden we dit resultaat niet vinden in de Galileïsche fysica? Volgens Galileo zou de waarnemer die de lichtklok ziet bewegen meten dat de lichtstraal een grotere snelheid heeft. De uitdrukking $S = \frac{c\Delta t'}{2}$ zou dan niet kloppen.

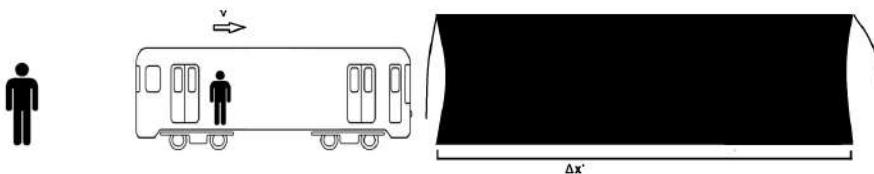
3.2 Lengtecontractie

We kunnen lengtecontractie rechtstreeks afleiden uit tijddilatatie. Beschouw een trein die met een snelheid v door een tunnel rijdt. Net zoals bij de lichtklok beelden we de situatie eerst af vanuit het perspectief van een waarnemer die met de trein mee beweegt. Die ziet de tunnel naar zich toe bewegen met een snelheid v . Er is ook een tweede waarnemer die stil staat ten opzichte van de tunnel.



Figuur 3.3: Tunnel in het inertiaalstelsel van een waarnemer in de trein.

De waarnemer in de trein meet dat de tunnel een lengte van Δx heeft. Deze waarnemer meet ook dat de trein in het tijdsinterval Δt doorheen de tunnel rijdt. Er geldt dan $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Hoe ziet deze situatie er nu uit vanuit het perspectief van de waarnemer die stilstaat ten opzichte van de tunnel?



Figuur 3.4: Perspectief van de waarnemer die stilstaat ten opzichte van de tunnel.

Deze persoon ziet dat de klok van de waarnemer in de trein trager loopt dan zijn eigen klok wegens tijddilatatie. Vanuit het perspectief van de waarnemer die stilstaat ten opzichte van de tunnel zal de trein dus meer tijd nodig hebben om door de tunnel te rijden. Deze waarnemer ziet de trein echter met een snelheid v bewegen. Hoe kunnen we dit dan verklaren? De enige mogelijkheid is dat de tunnel langer is vanuit het perspectief van deze waarnemer.

Voor deze waarnemer geldt $v = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$. We gebruiken de tijddilatatie formule $\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Dan

geldt er: $v = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\Delta x'}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Oftewel:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Bij de lichtklok is Δt de tijd die gemeten wordt door iemand die stilstaat ten opzichte van de lichtklok. Bij het gedachtenexperiment met de trein is $\Delta x'$ de lengte van de tunnel die gemeten wordt door iemand die stilstaat ten opzichte van de tunnel. Om verwarring te vermijden drukken we tijddilatatie en lengtecontractie als volgt uit:

In een inertiaalstelsel meet een stilstaande klok de tijd T_0 en is de lengte van een voorwerp L_0 . Als een waarnemer met een snelheid v ten opzichte van de klok en het voorwerp beweegt worden de tijd T en de lengte van het voorwerp L die deze waarnemer meet gegeven door:

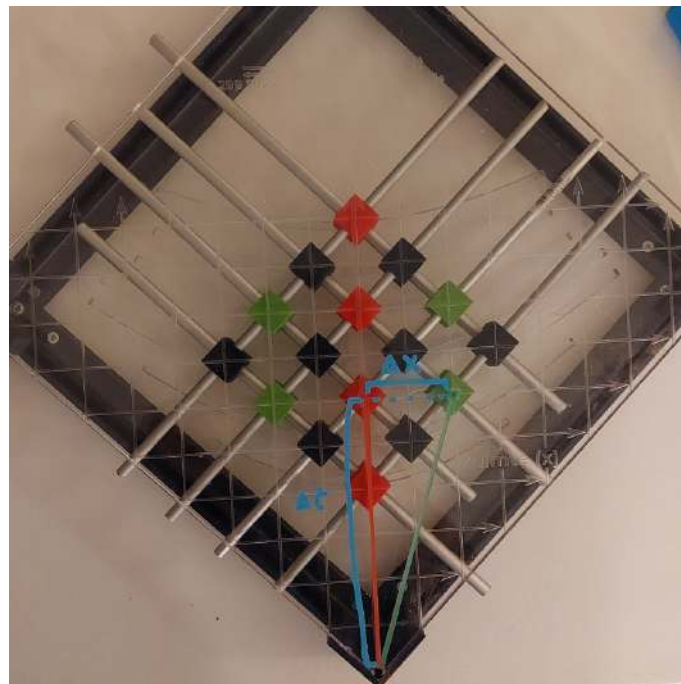
- $T = \gamma T_0$

- $L = \frac{L_0}{\gamma}$

Hier is $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. We noemen γ de Lorentzfactor. ■

3.3 Relativistische ruimtetijd diagrammen

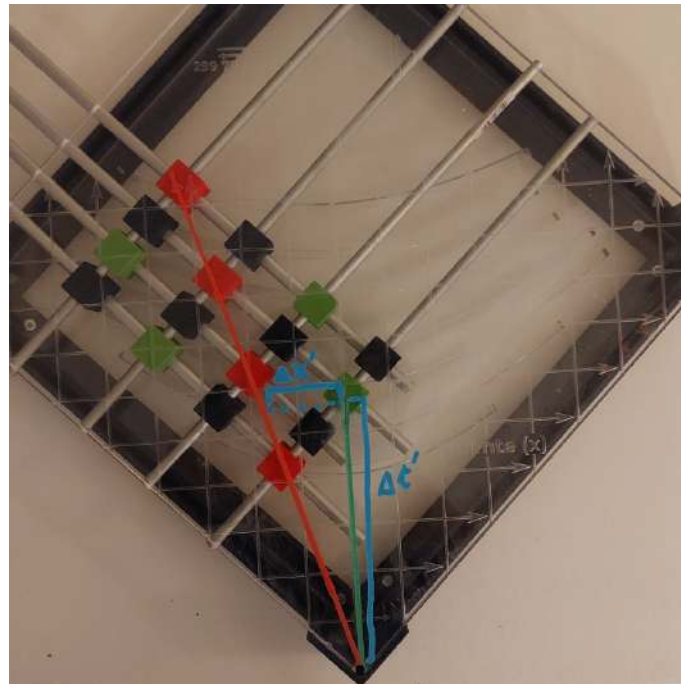
Hoe kunnen we fenomenen als lengtecontractie en tijddilatatie op een ruimtetijd diagram aflezen? Je kan een punt op een ruimtetijd diagram zien als een "gebeurtenis in de ruimtetijd". Beschouw het onderstaande diagram. Hier wordt de wereldlijn van een persoon op de aarde en de wereldlijn van een ruimteschip dat met een constante snelheid beweegt voorgesteld. Het groen blokje staat op de wereldlijn van het ruimteschip en kan bijvoorbeeld de gebeurtenis "het ruimteschip landt op de maan" voorstellen.



Figuur 3.5: Ruimtetijd diagram van twee waarnemers.

De horizontale lengte Δx tussen de wereldlijnen op dit punt stelt de afstand tussen de maan en de aarde voor. De verticale lengte Δt tussen dit punt en de oorsprong is het tijdstip wanneer de raket de maan bereikt. Afstand en tijd worden hier gemeten in het inertiaalstelsel van een waarnemer op de aarde.

Op de volgende figuur zien we hetzelfde ruimtetijd diagram in het inertiaalstelsel van een astronaut in het ruimteschip.



Figuur 3.6: Het zelfde ruimtetijd diagram vanuit het perspectief van de astronaut.

$\Delta x'$ en $\Delta t'$ zijn nu dezelfde afstand en tijd gemeten door de astronaut. We zien dat het groene blokje nu iets lager staat en dat de afstand tussen de wereldlijnen op dit punt iets kleiner is. Dit wilt zeggen dat de astronaut een kortere afstand tussen de aarde en de maan meet, en dat de reis minder lang voor hem duurt. We kunnen op deze manier lengtecontractie en tijddilatatie visualiseren.

A black and white portrait of Albert Einstein, showing his characteristic wild hair and deep wrinkles. He is looking slightly to the right with a thoughtful expression. His hands are clasped together in front of him. A semi-transparent orange banner with a thin orange border is positioned across the lower part of the image, containing the text '4. Relativistische Fenomenen'.

4. Relativistische Fenomenen

4.1 Sneller dan licht?

Stel dat je twee waarnemers ziet die in de tegengestelde richting van elkaar bewegen. Waarnemer 1 beweegt met een snelheid van $-0.9c$ en waarnemer 2 beweegt met een snelheid van $0.9c$. Volgens de Galileïsche optelwet van snelheid zou waarnemer A dan meten dat waarnemer B met een snelheid van $1.8c$ beweegt. Dit is echter niet geldig in de speciale relativiteitstheorie. Als een waarnemer met een snelheid c zou bewegen wordt de Lorentzfactor oneindig groot. Als een waarnemer met een snelheid $v > c$ beweegt zouden we een de vierkantswortel van een negatief getal moeten nemen om de Lorentzfactor te berekenen. In de speciale relativiteitstheorie wordt de energie van een voorwerp met massa m gegeven door $E = \gamma mc^2$. We zouden dus een oneindige hoeveelheid energie nodig hebben om een voorwerp tot de snelheid c te versnellen. Het is dus onmogelijk om de snelheid van het licht te bereiken.

Alle waarnemers bewegen met een snelheid kleiner dan de lichtsnelheid in alle mogelijke inertiaalstelsels. De lichtsnelheid is de universele snelheidslimiet. ■

Wilt dit zeggen dat het theoretisch onmogelijk is om in één jaar tijd een afstand van meer dan een lichtjaar te overbruggen? Stel dat een ruimteschip met een snelheid $v = 0.9999999999999999c$ ten opzichte van de aarde beweegt. Dit ruimteschip is opweg naar Proxima Centauri, een ster die 4.25 lichtjaar van de aarde verwijderd is. Vanuit het perspectief van een waarnemer op de aarde zou deze reis ongeveer 4.25 jaar duren. Het is echter zo dat de tijd in het ruimteschip vertraagt wegens tijddilatatie. De Lorentzfactor voor dit ruimteschip is $\gamma \approx 2.2 \times 10^9$. Als we de tijddilatatie formule omvormen vinden we dat de reis maar 0.06 seconden duurt voor een waarnemer in het ruimteschip!

Hoe kunnen we dit nu verklaren in het inertiaalstelsel van een astronaut in dit ruimteschip? Vanuit het perspectief van de astronaut zal zijn eigen klok niet trager lopen dan normaal. De astronaut ziet Proxima Centauri naar zich toe bewegen met een snelheid $v = 0.9999999999999999c$. De aarde beweegt van zich weg met dezelfde snelheid. Er is nu een extreme hoeveelheid lengtecontractie tussen de aarde en Proxima Centauri. Vanuit het perspectief van de astronaut zullen de aarde en Proxima Centauri maar 19000 kilometer van elkaar verwijderd zijn! Daarom zal de reis vanuit het perspectief van de astronaut helemaal niet zo lang duren.

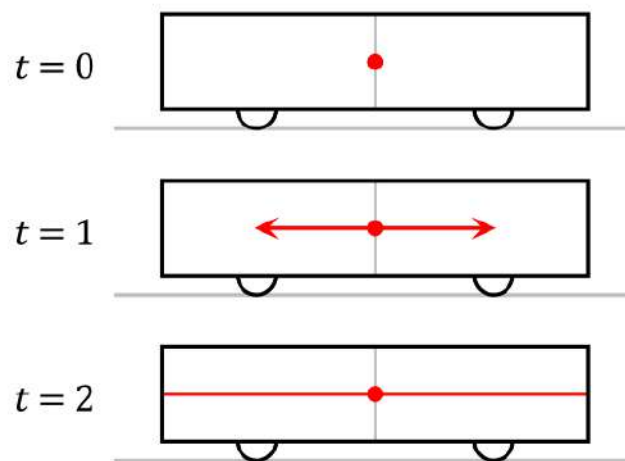
Een ruimteschip kan in theorie grotere afstanden overbruggen dan mogelijk lijken te zijn wegens de snelheidslimiet c . De reis van het ruimteschip duurt minder lang dan verwacht.

- Vanuit het perspectief van iemand op aarde zal de klok in het ruimteschip trager lopen.
- Vanuit het perspectief van een astronaut in het ruimteschip zal de afstand van de reis kleiner zijn.

Dit is natuurlijk puur theoretisch. In de werkelijkheid kunnen we met onze technologie onmogelijk een ruimteschip tot relativistische snelheden versnellen. Het is ook zo dat de reis naar Proxima Centauri nog altijd minstens 4.25 jaar zou duren vanuit het perspectief van iemand op de aarde. Het zou dus minstens 9.5 jaar duren voordat we de astronaut terug zouden zien. Zelfs als we een ruimteschip zodanig zouden kunnen versnellen zouden reizen naar verre planeten helemaal niet praktisch zijn.

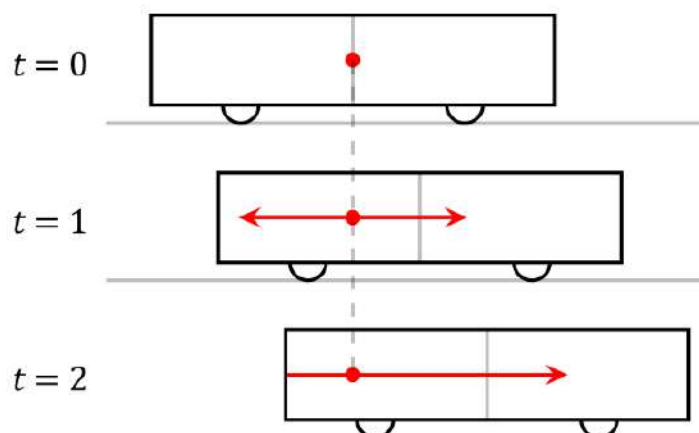
4.2 Gelijktijdigheid

We weten dat verschillende waarnemers een andere hoeveelheid tijd tussen twee gebeurtenissen meten. We kunnen nu de vraag stellen: zijn gelijktijdige gebeurtenissen voor één waarnemer nog steeds gelijktijdig voor een andere waarnemer? Stel dat we een lichtbron in het midden van een trein zetten. We beschouwen eerst het perspectief van iemand die op de trein zit. Op het tijdstip $t = 0$ zal de lichtbron twee lichtstralen uitzenden. De eerste lichtstraal beweegt naar de achterkant van de trein. De andere lichtstraal beweegt naar de voorkant van de trein. Aangezien de lichtstralen even snel bewegen en de lichtbron in het midden van de trein staat zullen beide lichtstralen op hetzelfde moment de twee uiteinden van de trein raken.



Figuur 4.1: Lichtstralen in het inertiaalstelsel van de trein.

Hoe ziet deze situatie er dan uit voor een waarnemer die de trein met een constante snelheid in de positieve x-richting ziet bewegen?

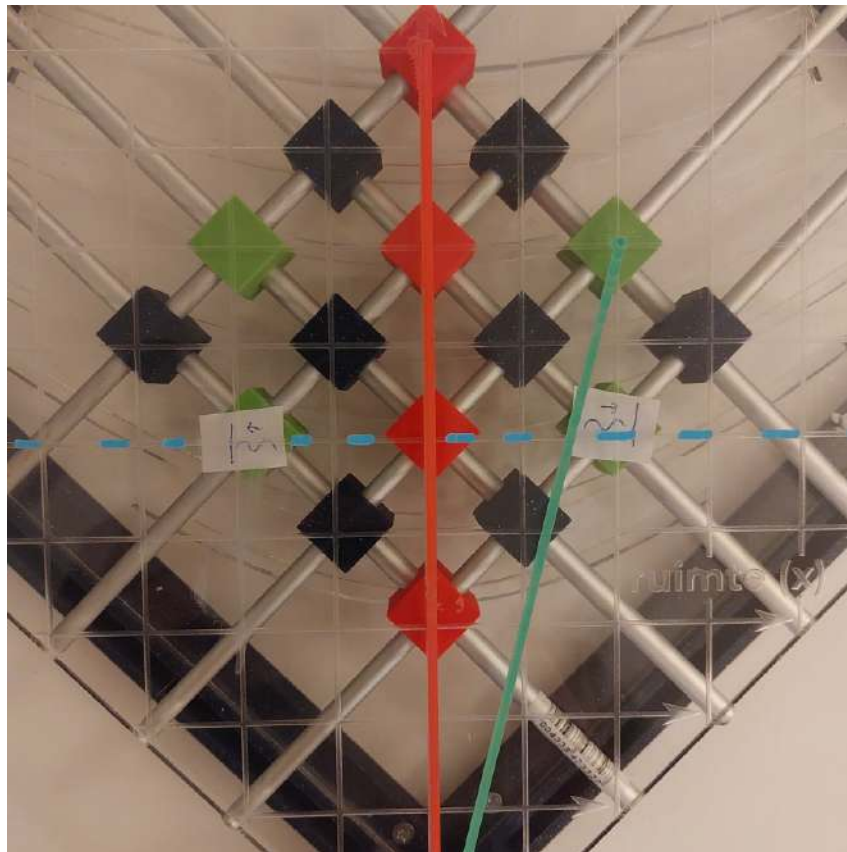


Figuur 4.2: Dezelfde lichtstralen in het inertiaalstelsel waar de trein beweegt.

Vanuit het perspectief van deze waarnemer beweegt de voorkant van de trein weg van de rechtse lichtstraal. De achterkant van de trein beweegt naar de linkse lichtstraal toe. De rechtse lichtstraal zal dus een langere afstand moeten afleggen om het uiteinde van de trein te bereiken dan de linkse lichtstraal. Aangezien de snelheid van het licht invariant is zullen beide lichtstralen dezelfde snelheid hebben. Daarom raakt de linkse lichtstraal het uiteinde van de trein eerder dan de rechtse lichtstraal. Deze gebeurtenissen zijn dus gelijktijdig in het inertiaalstelsel van de trein, maar ze zijn niet gelijktijdig in het inertiaalstelsel waar de trein met een constante snelheid beweegt. Voor een waarnemer die de trein in de negatieve x -richting ziet bewegen zal de rechtse lichtstraal het uiteinde van de trein eerder bereiken dan de linkse lichtstraal.

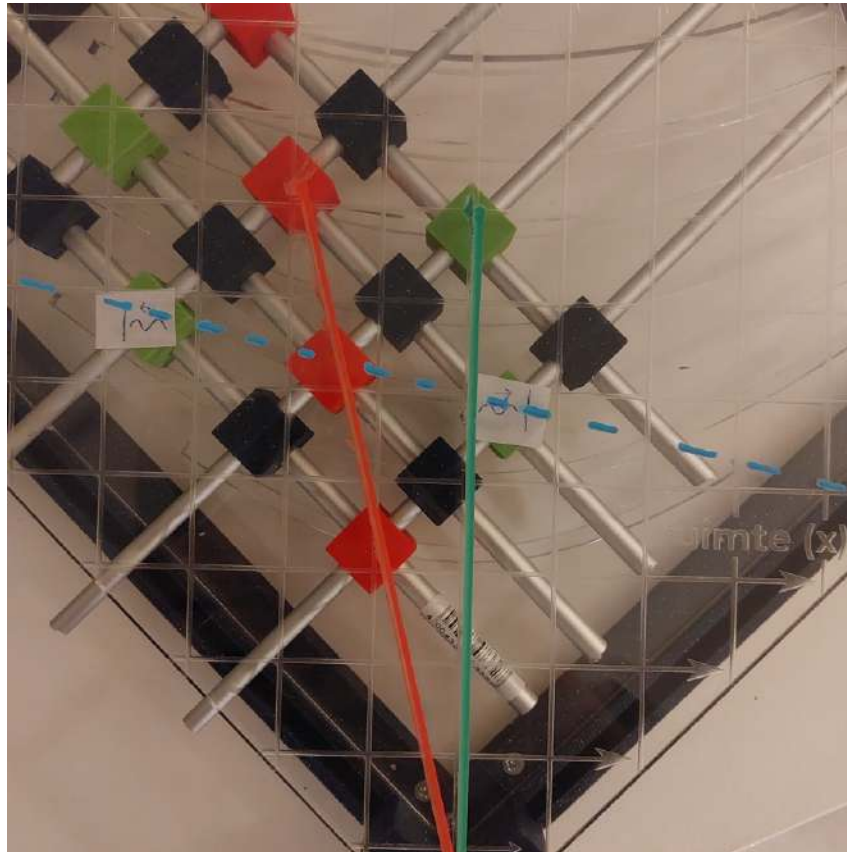
Als twee waarnemers met een constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen zullen twee gebeurtenissen die gelijktijdig zijn voor de eerste waarnemer niet noodzakelijk gelijktijdig zijn voor de tweede waarnemer. ■

Hoe kan je dit zien op ruimtetijd diagrammen? Op de volgende figuur wordt het perspectief van een eerste waarnemer afgebeeld.



Figuur 4.3: Gebeurtenissen en wereldlijnen in een inertiaalstelsel.

De rode lijn is de wereldlijn van deze waarnemer. De groene lijn is de wereldlijn van een tweede waarnemer die met een constante snelheid in de x -richting beweegt. De stickers stellen twee gebeurtenissen voor. Deze gebeurtenissen bevinden zich op dezelfde hoogte in het ruimtetijdrooster en hebben dus hetzelfde tijdscoördinaat. Deze gebeurtenissen zijn gelijktijdig. De blauwe stippellijn stelt "het huidige moment" voor. Op de volgende afbeelding zien we het ruimtetijddiagram in het inertiaalstelsel van de tweede waarnemer.



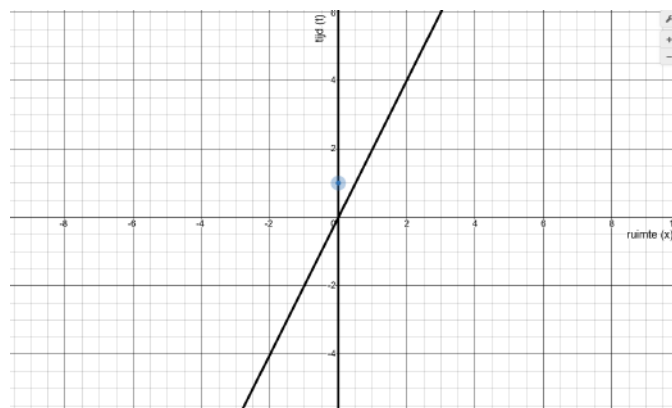
Figuur 4.4: Gebeurtenissen en wereldlijnen in het inertiaalstelsel van een tweede waarnemer.

In dit inertiaalstelsel bevinden de gebeurtenissen zich niet op dezelfde hoogte in het ruimtetijd-diagram. Ze zijn dus niet gelijktijdig vanuit het perspectief van de tweede waarnemer. De blauwe stippellijn staat niet meer evenwijdig met de x -as en stelt dus geen "moment" meer voor. Volgens de speciale relativiteitstheorie bestaat "het heden" niet! Wat we "het heden" noemen verschilt van waarnemer tot waarnemer.



SPECIALE RELATIVITEIT: EEN ONTDEKKINGSBUNDEL

1 De Galileitransformatie



In dit onderdeel zal je enkele eigenschappen van de Galileitransformatie verkennen. Het doel is om te beschrijven wat er gebeurt met de onderlinge snelheid tussen twee waarnemers wanneer er een Galileitransformatie wordt uitgevoerd. Bijvoorbeeld: ik zie in mijn inertiaalstelsel een wagen met een snelheid van 100 km/h rijden en een tweede wagen die met een snelheid van 150 km/h in dezelfde richting rijdt. Wat is dan de snelheid van de tweede wagen in het inertiaalstelsel van de eerste wagen? In het algemeen:

- We vertrekken vanuit een inertiaalstelsel met coördinaten x en t . Waarnemer 1 beweegt met een constante snelheid v_1 en waarnemer 2 beweegt met een constante snelheid v_2
- We voeren een Galileitransformatie uit naar het inertiaalstelsel van waarnemer 2. Hier gebruiken we de coördinaten x' en t . De snelheden van beide waarnemers in dit inertiaalstelsel worden genoteerd als v'_1 en v'_2 .
- We willen nu een uitdrukking vinden voor v'_2 in functie van v_1 en v_2 .

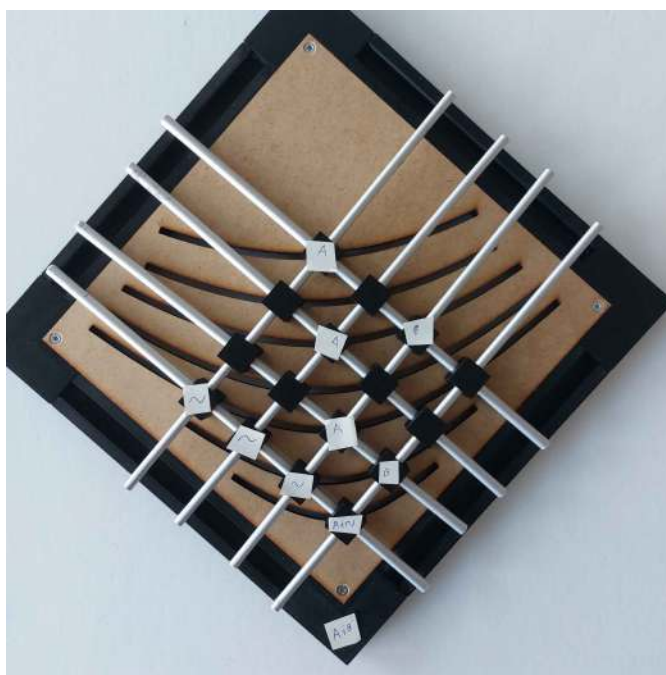
Je zal voor deze opdracht een app gebruiken die de Galileitransformatie visueel voorstelt. Volg de instructies en noteer al je conclusies op de volgende pagina.

[illegible]

2 Het Ruimtetijd Rooster

In het vorig onderdeel heb je verkend hoe verschillende waarnemers zich in andere referentiestelsels bevinden. Een referentiestelsel waarin voorwerpen die geen netto kracht ervaren stilstaan noemen we een inertiaalstelsel. We hebben enkele eigenschappen van de Galileanse coördinatentransformatie tussen twee inertiaalstelsels behandeld. Zo hebben we de optelwet voor snelheid gezien, en we weten dat alle waarnemers dezelfde hoeveelheid tijd tussen twee gebeurtenissen en dezelfde afstand tussen twee punten meten.

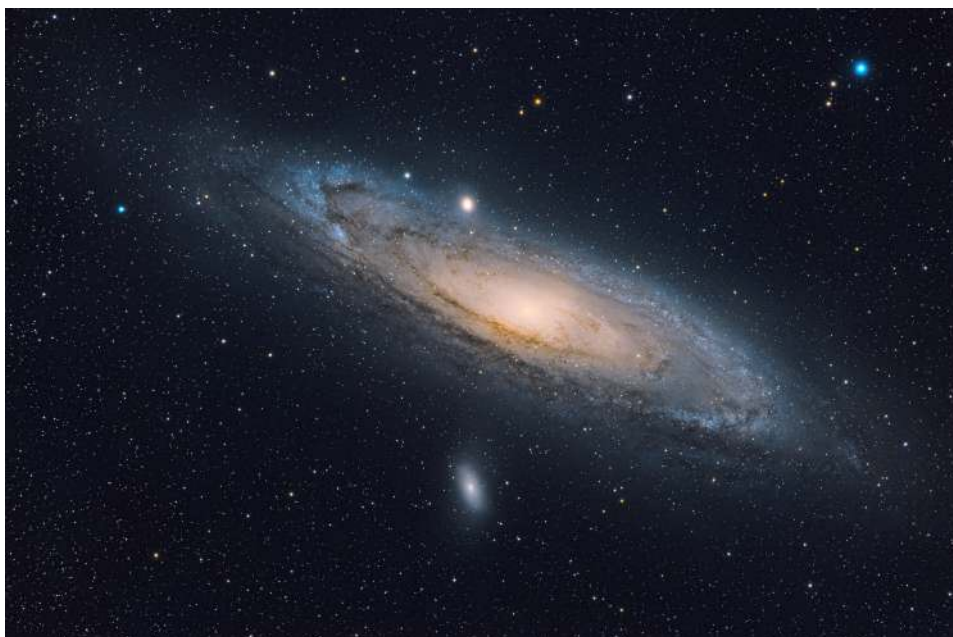
In dit onderdeel zal je de eigenschappen van een andere coördinatentransformatie (de zogenaamde Lorentztransformaties) verkennen door gebruik te maken van het ruimtetijd rooster.



Je kan op het rooster een rechte lijn door de blokjes tekenen. Deze stellen waarnemers met zekere snelheden voor, net zoals de diagrammen die we eerder hebben gezien. Je voert een Lorentztransformatie uit door de blokjes samen met de buizen over het kader te schuiven. Beschrijf op de volgende pagina de eigenschappen van de Lorentztransformaties die je hebt ontdekt.

[illegible]

3 Sneller dan licht?



Het Andromedastelsel is het dichtstbijzijnde sterrenstelsel van de aarde. Andromeda is ongeveer 2.5 miljoen lichtjaar van ons verwijderd. In deze opdracht zal je onderzoeken of het **theoretisch** mogelijk is om Andromeda in een mensenleven te bereiken. In de Newtoniaanse fysica is dit geen probleem: in theorie kan een ruimteschip eender welke snelheid bereiken zolang we een groot genoeg energiebron hebben om het ruimteschip zodanig te versnellen. Je zal de volgende vragen beantwoorden door gebruik te maken van het ruimtetijdrooster:

- Is de Galileïsche optelwet voor snelheid geldig in de speciale relativiteitstheorie?
- Is er een maximale snelheid in de speciale relativiteitstheorie?
- Hoe beïnvloeden tijddilatatie en lengtecontractie de reis van een ruimteschip naar een ver sterrenstelsel?
- Kan een astronaut theoretisch in haar levensduur Andromeda bereiken?

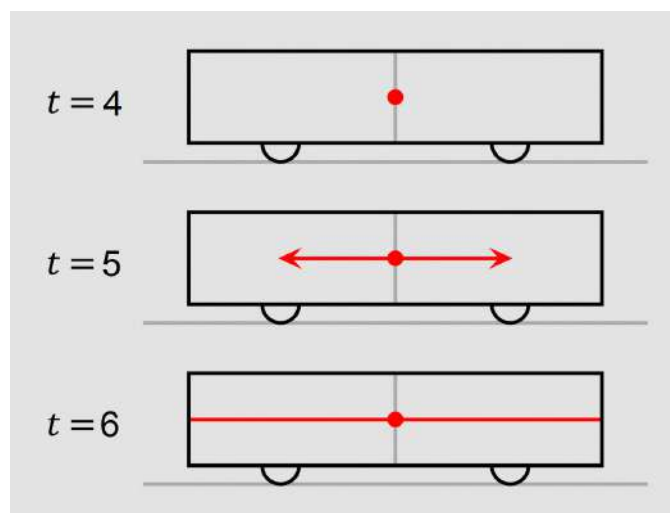
Noteer al je conclusies op de volgende pagina's.

[illegible]

[illegible]

4 Gelijktijdigheid

Tijdens deze opdracht zal je onderzoeken of twee gelijktijdige gebeurtenissen in andere inertiaalstelsels nog steeds gelijktijdig zijn. Stel dat een lichtbron in het midden van een trein staat en twee lichtstralen naar beide uiteinden van de trein uitstraalt. Vanuit het perspectief van een waarnemer in de trein zullen de lichtstralen op hetzelfde moment de twee uiteinden van de trein raken. Zal een waarnemer die de trein van zich weg ziet bewegen ook zien dat de lichtstralen op hetzelfde moment de uiteinden van de trein raken?



Schrijf op de volgende pagina's al je conclusies. Vermeld hoe je op het ruimtetijdrooster kan aflezen of gebeurtenissen gelijktijdig zijn of niet. Leg ook uit waarom de lichtstralen in beide inertiaalstelsels wel of niet op hetzelfde moment de uiteinden van de trein raken.

Notities

[illegible]

[illegible]

C Toets

Toets Speciale Relativiteit



Score

Naam: _____

Datum: _____

Klas: _____

Instructies:

Je mag gebruik maken van de app "Ruimtetijdrooster in Desmos". Deze vind je op Smartschool in Weblinks/speciale relativiteit. Er zijn ook vijf fysieke ruimtetijdroosters beschikbaar. Indien nodig mag je vragen om hier één van te gebruiken.

De relevante formules zijn:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$T = \gamma T_0$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

$$E = \gamma mc^2$$

Vraag 1: (Ruimtevaart)

Melon Usk wilt de planeet Kepler-22b koloniseren. Deze planeet is ongeveer 640 lichtjaar van de aarde verwijderd. Om deze reis uit te voeren heeft Melon zijn bedrijf SpaceY een ruimteschip gemaakt dat kan versneld worden tot 99.9% van de snelheid van het licht.

- (a) (2 punten) Waarom bouwt SpaceY geen ruimteschip dat exact met de lichtsnelheid kan bewegen? Leg uit waarom dit wel/niet gaat.

[illegible]

- (b) (4 punten) Is het mogelijk voor een enkele astronaut om Kepler-22b te bereiken in haar levensduur? Verklaar waarom dit wel/niet gaat van zowel het perspectief van de astronaut en het perspectief van een waarnemer op de aarde.

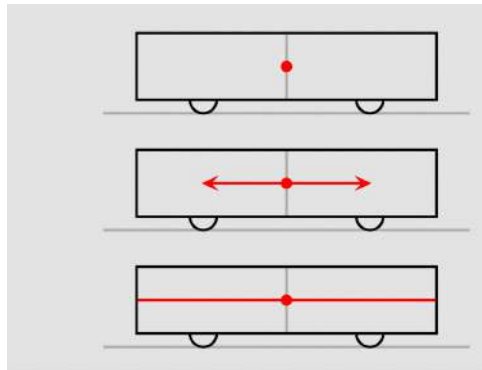
This image shows a blank sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines, typical of notebook paper. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

- (c) (2 punten) Teken een ruimtetijd-diagram voor de reis tot Kepler-22b vanuit het perspectief van een waarnemer op aarde. Teken hetzelfde ruimtetijd-diagram vanuit het perspectief van de astronaut. Teken op deze diagrammen de wereldlijnen van beide waarnemers. Duid op beide diagrammen het aankomstmoment van het ruimteschip aan.

- (d) (2 punten) Melon Usk wilt dat een aantal van de kolonisten na een paar jaar op Kepler-22b terug naar de aarde reizen zodat ze persoonlijk aan Melon verslag kunnen uitbrengen. Is dit een goed idee? Leg uit waarom wel/niet.

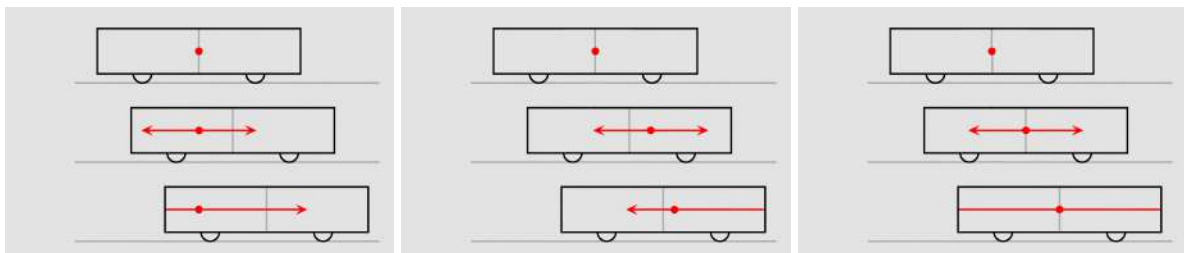
Vraag 2: (Gelijktijdigheid)

In het midden van een trein staat een lichtbron. Deze lichtbron zendt op hetzelfde moment twee lichtstralen naar beide uiteinden van de trein uit. Dit wordt op de volgende afbeelding op drie verschillende tijdstippen weergegeven.



Een waarnemer in het station ziet de trein met een constante snelheid naar rechts rijden.

- (a) (1 punt) Duid aan welke afbeelding de situatie correct toont vanuit het perspectief van deze waarnemer:



- (b) (2 punten) Welke afbeelding zou correct zijn volgens de Galileïsche fysica? Waarom verschilt dit met het resultaat volgens de speciale relativiteitstheorie?

- (c) (2 punten) Bestaat "het heden" volgens de speciale relativiteitstheorie? Leg uit waarom wel/niet.

- (d) (**BONUSVRAAG: 3 punten**) Teken een ruimtetijd diagram met de wereldlijnen van de lichtstralen vanuit het perspectief van een waarnemer in de trein. Teken hetzelfde ruimtetijd diagram vanuit het perspectief van de waarnemer in het station. Duid op beide diagrammen de momenten wanneer de lichtstralen de uiteinden van de trein bereiken aan.

D Berekeningen

Om de initiële configuratie van het rooster te bepalen werd er aan ieder blokje een coördinaat toegewezen. Deze coördinaten werden bepaald aan de hand van twee parameters a en b zodat de berekeningen zo algemeen mogelijk uitgevoerd konden worden. De coördinaten van de eerste blokjes die zich op de t -as bevinden zijn $(0, a)$ en $(0, b)$. Er werden dan twee blokjes geplaatst op de posities $(\frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2})$ en $(\frac{b-a}{2}, \frac{a+b}{2})$ om zo een eerste cel te creëren. De posities van de andere blokjes werden analoog bepaald.

Vervolgens werd het invariant ruimtetijd interval $\tau = t^2 - x^2$ berekend voor ieder coördinaat (x, t) . Voor het coördinaat $(\frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2})$ geldt bijvoorbeeld $\tau = \sqrt{ab}$. In principe worden de hyperbolen voor ieder coördinaat dan bepaald door het functievoorschrift $t(x) = \sqrt{\tau^2 + x^2}$. Deze voorschriften moeten vervolgens in FreeCAD ingegeven worden. Er werd echter gekozen om in FreeCAD te werken met een coördinatenstelsel waarbij de assen overlappen met twee van de zijden van de STG. Dit coördinatenstelsel is 45 geroteerd ten opzichte van het (x, t) stelsel waarin de oorspronkelijke berekeningen werden uitgevoerd. Daarom moeten de hyperbolen ook 45 geroteerd worden.

De geroteerde hyperbolen kunnen echter niet uitgedrukt worden in termen van standaardfuncties. Daarom werd er gekozen om met een parametrisatie te werken. In het oorspronkelijk (x, t) stelsel worden de hyperbolen als volgt geparametriseerd:

$$\begin{aligned} t(\lambda) &= \tau \cdot \cosh(\lambda) \\ x(\lambda) &= \tau \cdot \sinh(\lambda) \end{aligned}$$

Deze parametrisatie werd vervolgens uitgedrukt in het geroteerd coördinatenstelsel (x_θ, t_θ) door de 2-dimensionale rotatiematrix op de oorspronkelijke parametrisatie in te werken. Voor een hoek van 45 geldt er:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(\lambda) \\ t(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\theta(\lambda) \\ t_\theta(\lambda) \end{bmatrix}$$

Zo worden de volgende uitdrukkingen bekomen:

$$\begin{aligned} t_\theta(\lambda) &= \frac{\tau}{\sqrt{2}} \cdot (\sinh(\lambda) + \cosh(\lambda)) \\ x_\theta(\lambda) &= \frac{\tau}{\sqrt{2}} \cdot (\sinh(\lambda) - \cosh(\lambda)) \end{aligned}$$

E Enquête studenten

Vragenlijst studenten

1 Vat kort samen wat je je herinnert over de speciale relativiteit lessen die je hebt gevolgd.

2 Waren er onderwerpen die je moeilijk begreep? Zo ja, noem ze op.

3 Leg het fenomeen van tijddilatatie zo grondig mogelijk uit in je eigen woorden. Als je niet meer weet wat tijddilatatie is moet je deze vraag niet invullen.

4 Hoe goed begreep je het concept van tijddilatatie na de lessen op een schaal van 1 (helemaal niet) tot 5 (zeer goed).

Vraag instructies: *Kies één antwoord in elke rij*

1	2	3	4	5
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

5 Hoe goed lukten wiskundige oefeningen waarbij je de formule van tijddilatatie moest gebruiken op een schaal van 1 (helemaal niet) tot 5 (zeer goed).

Vraag instructies: *Kies één antwoord in elke rij*

1	2	3	4	5
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>



6 Welke werkvormen werden er gebruikt tijdens de lessen? Voorbeelden van werkvormen zijn doceren, klassikale gesprekken met de leerkracht en zelfstandig de leerstof onderzoeken

7 Rangschik hoe interessant je de gebruikte werkvormen vond van meest interessant naar minst interessant.

8 In de speciale relativiteitstheorie wordt er vaak gebruik gemaakt van gedachte-experimenten, ruimtetijd diagrammen en wiskundige formules. Duid in de volgende tabellen aan hoe goed deze methoden je hebben geholpen om de leerstof op een intuïtieve manier te begrijpen op een schaal van 1 (helemaal niet) tot 5 (zeer goed). Als je één of meerdere van deze methoden niet hebt gezien duid je "n.v.t." aan.

Vraag instructies: Kies één antwoord in elke rij

	1	2	3	4	5	n.v.t.
Wiskundige formules	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Ruimtetijd diagrammen	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Gedachte-experimenten	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

9 Duid in de volgende tabellen aan hoe zeer de bovenstaande methoden je hebben gemotiveerd om speciale relativiteit te leren op een schaal van 1 (helemaal niet) tot 5 (zeer goed). Als je één of meerdere van deze methoden niet hebt gezien duid je "n.v.t." aan.

Vraag instructies: *Kies één antwoord in elke rij*

	1	2	3	4	5	n.v.t.
Wiskundige formules	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Ruimtetijd diagrammen	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Gedachte-experimenten	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

10 Is er iets over je leerervaring dat je wilt delen en niet aan bod is gekomen in deze vragenlijst?

F Enquête leerlingen

Vragenlijst leerlingen

1 Hoe interessant vond je de lessen op een schaal van 1 (helemaal niet interessant) tot 5 (zeer interessant)?

Vraag instructies: *Kies één antwoord in elke rij*

1	2	3	4	5
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

2 Hoe moeilijk vond je de lessen op een schaal van 1 (helemaal niet moeilijk) tot 5 (zeer moeilijk)?

Vraag instructies: *Kies één antwoord in elke rij*

1	2	3	4	5
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

3 Hoe nuttig vond je het ruimtetijdrooster om fenomenen zoals tijddilatatie, lengtecontractie en gelijktijdigheid te visualiseren? Duid aan op een schaal van 1 (helemaal niet nuttig) tot 5 (zeer nuttig).

Vraag instructies: *Kies één antwoord in elke rij*

1	2	3	4	5
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

4 Hoe nuttig vond je de visuele schema's van gedachtenexperimenten (bv: de lichtklok) om fenomenen zoals tijddilatatie, lengtecontractie en gelijktijdigheid te begrijpen? Duid aan op een schaal van 1 (helemaal niet nuttig) tot 5 (zeer nuttig).

Vraag instructies: *Kies één antwoord in elke rij*

1	2	3	4	5
<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

5 Je hebt tijdens de lessen voornamelijk zelfstandig gewerkt aan een aantal opdrachten. Vond je dit nuttig, of zou je liever hebben dat we meer dingen klassikaal zouden uitwerken?

6 Denk je dat je de lessen interessanter of minder interessant had gevonden zonder met het ruimtetijdrooster te werken? Denk je dat je dan meer of minder geleerd zou hebben?

7 Heb je nog opmerkingen over de lesstijl, het lesmateriaal of de inhoud van de lessen?