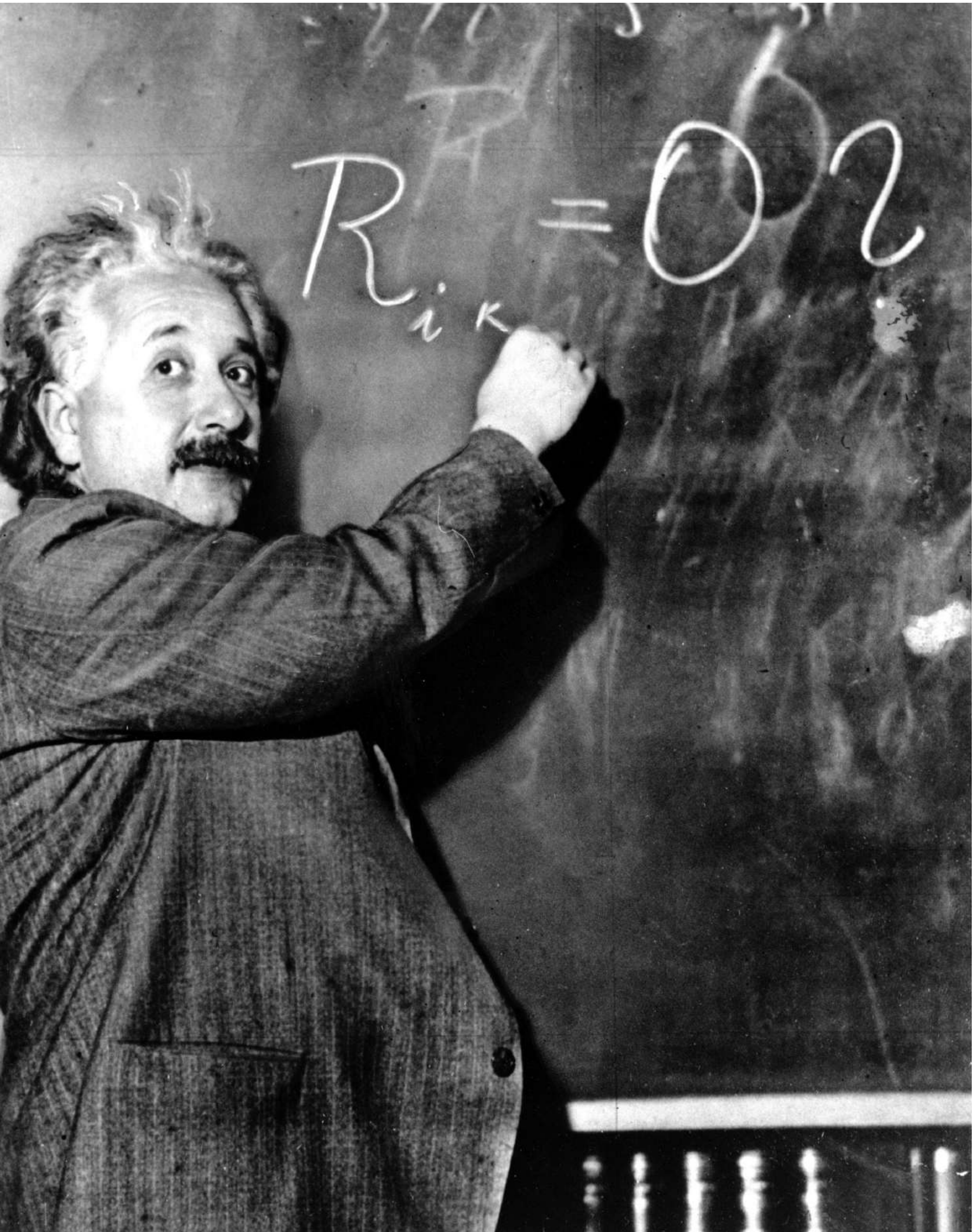
Lesbundel Speciale Relativiteit

Max Janssens


$R_{ik} = 0$

1. Galileïsche Relativiteit

1.1 Intro

In 1905 publiceerde Albert Einstein de papers *On the Electrodyanmics of Moving Bodies* en *Does the Inertia of a Body Depend Upon Its Energy Content?*. Hier legt hij uit hoe tijd vertraagt wanneer ze gemeten wordt door een klok die met een zeer grote snelheid beweegt. Hij beschrijft ook de equivalentie tussen massa en energie in de bekende formule $E = mc^2$. Einsteins bevindingen zijn vandaag gekend als de speciale relativiteitstheorie.

Einsteins theorie was baanbrekend, maar veel van zijn ideeën hebben hun oorsprong in de fysica die honderden jaren eerder werd ontwikkeld door Galileo Galilei. In dit hoofdstuk zullen we enkele concepten en technieken zien die een belangrijke rol spelen in de speciale relativiteitstheorie. Voorlopig passen we deze concepten echter enkel toe op de niet-relativistische fysica. We zullen in latere hoofdstukken zien waar de verschillen met de relativistische fysica liggen.

1.2 Inertiaalstelsels

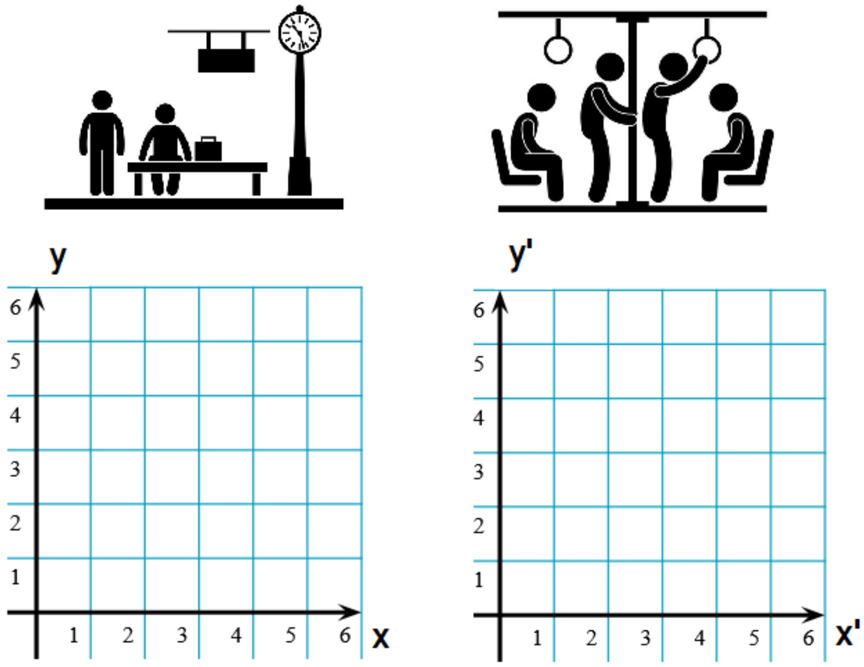
In de fysica gebruiken we coördinatenstelsels om natuurkundige wetten uit te drukken. Denk aan de tweede wet van Newton, die zegt dat de versnelling $\vec{a}$ van een voorwerp evenredig is met de kracht $\vec{F}$ die het voorwerp ervaart:

- $\vec{F} = m\vec{a}$
- $\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$
- $\vec{r} = (x, y, z)$

De tweede wet van Newton (en andere natuurkundige wetten) worden dus impliciet uitgedrukt in een coördinatenstelsel (x, y, z). Zo een coördinatenstelsel noemen we ook een referentiestelsel.

Referentiestelsels worden ook gebruikt wanneer men metingen uitvoert. Je kan bijvoorbeeld bepalen hoe een vallende appel versnelt door op verschillende tijdstippen de positie van de appel te meten. De positie van de appel wordt dan ook beschreven in een referentiestelsel met coördinaten (x, y, z).

Andere waarnemers zullen andere coördinatenstelsels gebruiken om hun waarnemingen te beschrijven. Beschouw een meisje aan een treinstation en een jongen die stil zit in een trein die met een constante snelheid beweegt. Het meisje ziet de jongen samen met de trein van zich weg bewegen. De jongen zit vanuit zijn eigen perspectief echter gewoon stil. De jongen en het meisje bevinden zich dus in andere referentiestelsels, en de positie van de jongen verschilt in beide referentiestelsels. Als we de coördinaten van het eerste referentiestelsel (x,y,z) noemen, noemen we de coördinaten van het tweede referentiestelsel (x',y',z')



Figuur 1.1: Referentiestelsels van mensen aan een treinstation en passagiers op een trein.

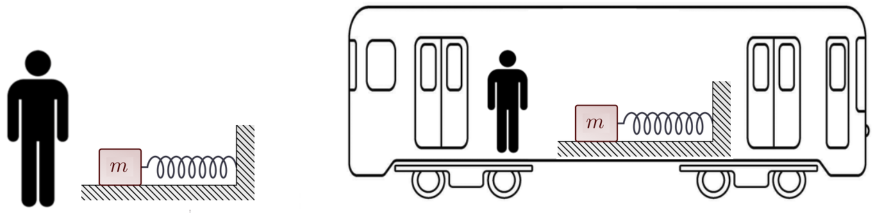
We zeggen dat een waarnemer altijd stilstaat in haar eigen referentiestelsel. De oorsprong van zo een referentiestelsel valt samen met de positie van de waarnemer. Een inertiaalstelsel is een referentiestelsel dat geen versnelling ondergaat. In deze lessen zullen we de rotatie van de aarde negeren. We zeggen dus dat een persoon op het aardoppervlak zich in een inertiaalstelsel bevind. Een persoon in een trein die met een constante snelheid beweegt bevindt zich ook in een inertiaalstelsel. Een persoon in een versnellende trein bevindt zich niet in een inertiaalstelsel.

Referentiestelsels zijn coördinatenstelsels die waarnemers gebruiken om meetresultaten en de wetten van de fysica mee uit te drukken. Een inertiaalstelsel is een referentiestelsel dat geen versnelling ondergaat. ■

1.3 Het relativiteitsprincipe

De wetten van de fysica nemen dezelfde vorm aan in alle inertiaalstelsels.
Twee identieke experimenten zullen dezelfde resultaten opleveren in andere inertiaalstelsels. ■

Dit is het relativiteitsprincipe. Laten we als voorbeeld twee waarnemers beschouwen die beide een horizontale veer hebben die ze kunnen uitrekken. Waarnemer A staat stil op het aardoppervlak, waarnemer B zit in een trein die met een constante snelheid beweegt.



Figuur 1.2: Twee waarnemers voeren hetzelfde experiment uit in andere inertiaalstelsels.

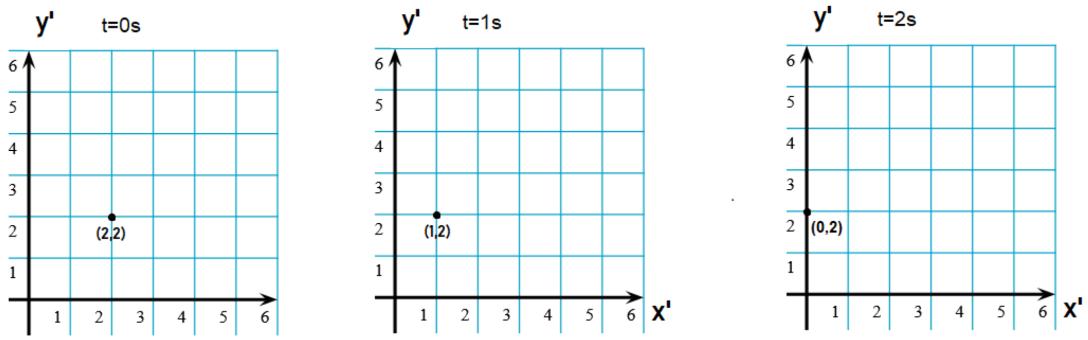
Beide veren zijn identiek aan elkaar (ze hebben dezelfde massa m en dezelfde veerconstante k). Als beide waarnemers hun veren tot dezelfde positie uitrekken zullen de veren identiek oscilleren.

Het relativiteitsprincipe zegt ons dat we in een inertiaalstelsel nooit een experiment kunnen uitvoeren dat ons toelaat om objectief te bepalen of het inertiaalstelsel een snelheid heeft. Een passagier in een trein zonder ramen zou nooit kunnen achterhalen of de trein stilstaat of met een constante snelheid beweegt. Snelheid is dus relatief. Een voorwerp kan dus een andere snelheid hebben in verschillende inertiaalstelsels.

1.4 De Galileitransformatie

Twee waarnemers die met een constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen bevinden zich in andere inertiaalstelsels. Deze inertiaalstelsels worden respectievelijk beschreven met coördinaten (x,y,z) en (x',y',z'). We noemen het verband tussen twee coördinatenstelsels een coördinatentransformatie.

Een waarnemer in een inertiaalstelsel met (x,y,z) coördinaten ziet een tweede waarnemer voorbij zich wandelen met een constante snelheid $v = 1$ m/s in de x-richting. Deze waarnemer ziet een appel op de grond liggen. De positie van deze appel wordt gegeven door het coördinaat $(2,2,0)$. Wat is de positie van de appel in het inertiaalstelsel van de tweede waarnemer met (x',y',z') coördinaten?



Figuur 1.3: De positie van de appel in het inertiaalstelsel van de wandelaar op drie verschillende tijdstippen.

Op het tijdstip $t = 0$ s passeert de wandelaar de eerste waarnemer. De coördinatenstelsels overlappen elkaar op dit moment. De positie van de appel wordt nu ook in het inertiaalstelsel van de wandelaar gegeven door het coördinaat $(2,2)$. De positie van de appel in het inertiaalstelsel van de wandelaar zal echter veranderen in de tijd. Vanuit het perspectief van de wandelaar staat de appel op het tijdstip $t = 0$ s op het oorspronkelijke x coördinaat, waarna de appel met een snelheid $v = 1$ m/s van zich weg beweegt in de negatieve x-richting. De positie van de appel wordt dan gegeven door $x' = x - vt$.

Een belangrijke aanname die we maken is dat het tijdscoördinaat t niet verandert onder deze coördinatentransformatie. Dit lijkt een logische aanname te zijn: in onze ervaring tikt een klok op een bewegende trein even snel als een stilstaande klok. Deze aanname is echter niet waar in de speciale relativiteitstheorie.

Een inertiaalstelsel (x',y',z') beweegt met een constante snelheid v in de x-richting ten opzichte van inertiaalstelsel (x,y,z). Op het tijdstip $t = 0$ vallen beide inertiaalstelsels samen. De verhouding tussen de coördinaten wordt gegeven door:

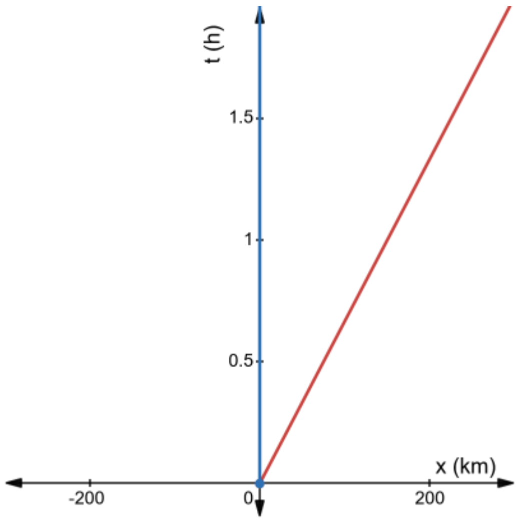
- $x' = x - vt$
- $y' = y$
- $z' = z$
- $t' = t$

Dit is de Galileitransformatie.

1.5 Ruimtetijddiagrammen

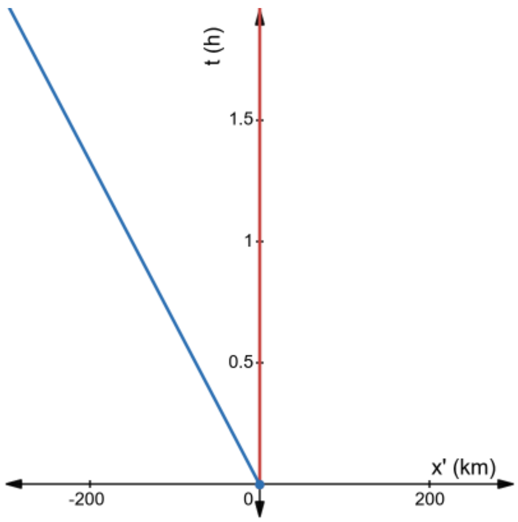
Ruimtetijddiagrammen zijn diagrammen die ons toelaten om de trajecten van verschillende waarnemers af te beelden. In een ruimtetijddiagram zetten we het tijdscoördinaat t op de verticale as en het ruimtecoördinaat x op de horizontale as. Het traject van een waarnemer op een ruimtetijddiagram wordt een wereldlijn genoemd.

Een meisje zit stil in een treinstation en ziet op het tijdstip t =0 s een trein van zich weg bewegen met een constante snelheid $v = 150$ km/h in de x-richting.



Figuur 1.4: Wereldlijnen van het meisje en de trein in het inertiaalstelsel van het meisje.

De rode wereldlijn stelt het pad van de trein voor. Dit is een rechte lijn aangezien de trein met een constante snelheid beweegt. Het meisje ziet zichzelf stilstaan in haar eigen inertiaalstelsel. Het meisje beweegt niet in de ruimte maar "beweegt wel in de tijd". De blauwe wereldlijn van het meisje staat dus op de t-as. Hoe zien deze wereldlijnen er uit in het (x', y', z') coördinatensysteem van een passagier in de trein?



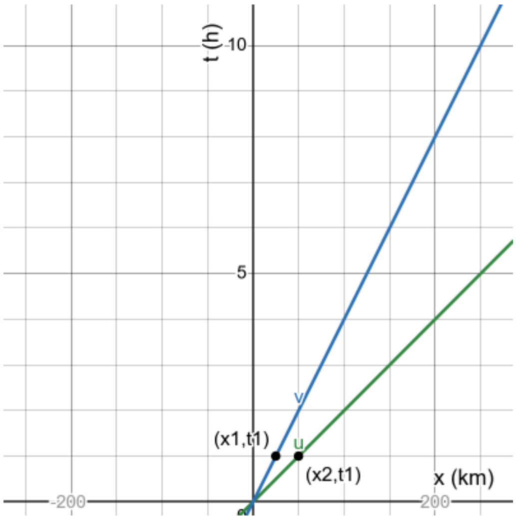
Figuur 1.5: Wereldlijnen van het meisje en de trein in het inertiaalstelsel van een passagier in de trein.

In het inertiaalstelsel van de passagier staat hij zelf stil. De rode wereldlijn van de trein staat in dit inertiaalstelsel op de t-as. De passagier ziet het meisje in het treinstation van zich weg bewegen met een snelheid van 150 km/h in de negatieve x-richting. Dit wordt voorgesteld door de blauwe wereldlijn van het meisje.

Beide inertiaalstelsels zijn verbonden door een Galileitransformatie. Ruimtetijddiagrammen laten ons dus toe om coördinatentransformaties te visualiseren.

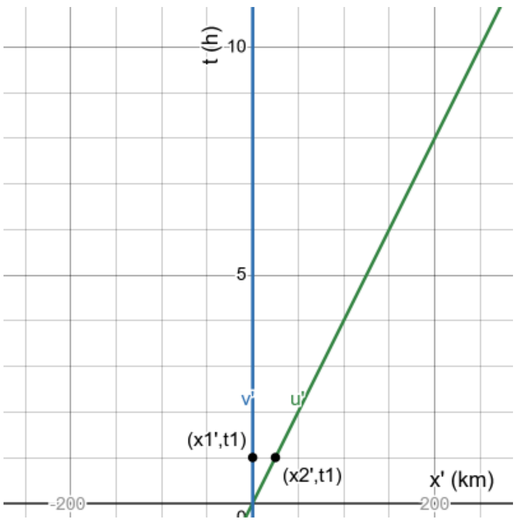
1.6 De optelwet van snelheid

Wat is het verband tussen de snelheid van twee waarnemers voor en na een Galileitransformatie? Stel dat we in een inertiaalstelsel waarnemers A en B met snelheden v en u in de x-richting zien bewegen.



Figuur 1.6: Wereldlijnen van twee waarnemers.

We willen weten wat de snelheid van waarnemer B is wanneer die gemeten wordt door waarnemer A. Om dit te kunnen doen voeren we een Galileitransformatie uit naar het inertiaalstelsel van waarnemer A.



Figuur 1.7: Dezelfde wereldlijnen in het inertiaalstelsel van waarnemer A.

In dit inertiaalstelsel noemen we de snelheid van waarnemer A v' en de snelheid van waarnemer B noemen we u'. (x_1, t_1) is een coördinaat op de wereldlijn van waarnemer A en (x_2, t_1) is een coördinaat op de wereldlijn van waarnemer B. Er geldt dan $v = \frac{x_1}{t_1}$ en $u = \frac{x_2}{t_1}$. Deze twee punten worden in het inertiaalstelsel van waarnemer A gegeven door de coördinaten (x'_1, t'_1) en (x'_2, t'_1). Er geldt dan $v' = \frac{x'_1}{t_1}$ en $u' = \frac{x'_2}{t_1}$. We voeren een Galileitransformatie uit van het oorspronkelijke inertiaalstelsel met x coördinaten naar het inertiaalstelsel van waarnemer A met x' coördinaten: $x' = x - vt$. Zo vinden we:

- $u' = \frac{x'_2}{t_1}$
- $u' = \frac{x_2 - vt_1}{t_1}$
- $u' = \frac{x_2}{t_1} - \frac{vt_1}{t_1}$
- $u' = u - v$

Stel bijvoorbeeld dat waarnemer A in een auto zit die met een snelheid v =25 km/h beweegt en waarnemer B in een auto zit die met een snelheid u =50 km/h in dezelfde richting beweegt. Volgens de bovenstaande formule ziet waarnemer A waarnemer B van zich weg bewegen met een snelheid u' =25 km/h. Dit is de Galileïsche optelwet van snelheid.

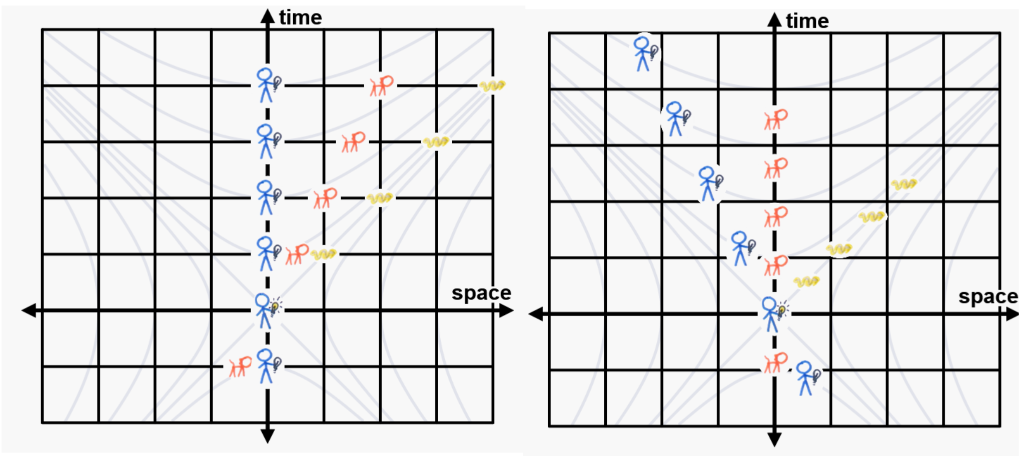
2. De Lichtsnelheid

2.1 Invariantie

> De snelheid van een lichtstraal is hetzelfde in alle inertiaalstelsels. We zeggen daarom dat de snelheid van het licht *invariant* is. Deze snelheid is een vaste waarde die we c noemen. ■

De bovenstaande uitspraak is de fundamentele eigenschap van de speciale relativiteitstheorie. Alle relativistische effecten kunnen afgeleid worden uit het relativiteitsprincipe en de invariantie van de lichtsnelheid. De lichtsnelheid c is exact gelijk aan 299 792 458 m/s. In de praktijk zullen lichtstralen iets trager zijn als ze door een medium (bijvoorbeeld gassen en vloeistoffen) bewegen. In een vacuüm is de lichtsnelheid echter exact gelijk aan c. Voor deze lessen zullen we aannemen dat onze lichtstralen altijd in een vacuüm bewegen.

Er wordt soms gezegd dat de lichtsnelheid constant is. Dit is correct, maar niet bijzonder interessant. Volgens de eerste wet van Newton zal alle materie met een constante snelheid bewegen als er geen kracht op inwerkt. De lichtsnelheid is invariant: dit wilt zeggen dat iedere waarnemer exact dezelfde snelheid van een lichtstraal zal meten. Dit is in tegenspraak met de Galileïsche relativiteit. Op een ruimtetijdrooster kunnen we dit zien: de wereldlijn van een lichtstraal zal altijd op een hoek van 45° staan met de x-as.

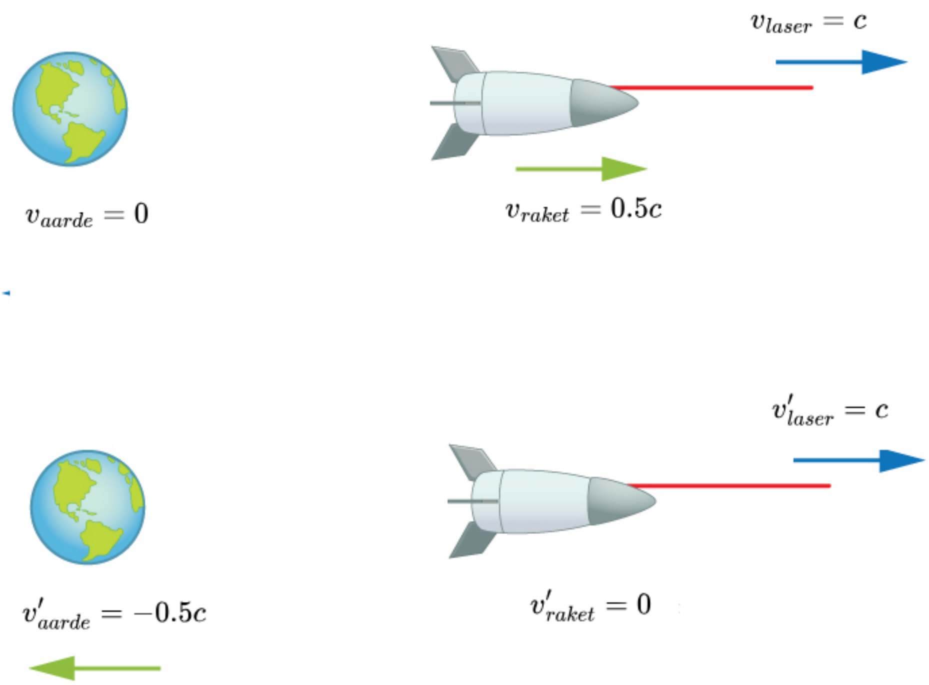


Figuur 2.1: Wereldlijn van een lichtstraal in twee verschillende inertiaalstelsels.

Op de bovenstaande figuur zien we een waarnemer A die op het tijdstip $t = 0$ s een gloeilamp aanzet. Waarnemer A ziet een lichtstraal met een snelheid c van zich weg bewegen. Waarnemer A ziet ook een tweede waarnemer B in de richting van de lichtstraal met een snelheid v mee bewegen. Volgens Galileo zou waarnemer B dan meten dat de lichtstraal met een snelheid $c - v$ van zich weg beweegt. Volgens Einstein meet waarnemer B dat de lichtstraal met een snelheid c van zich weg beweegt. We kunnen dit op het ruimtetijd diagram aflezen aangezien de lichtstraal in beide inertiaalstelsels op dezelfde hoek met de t-as staat.

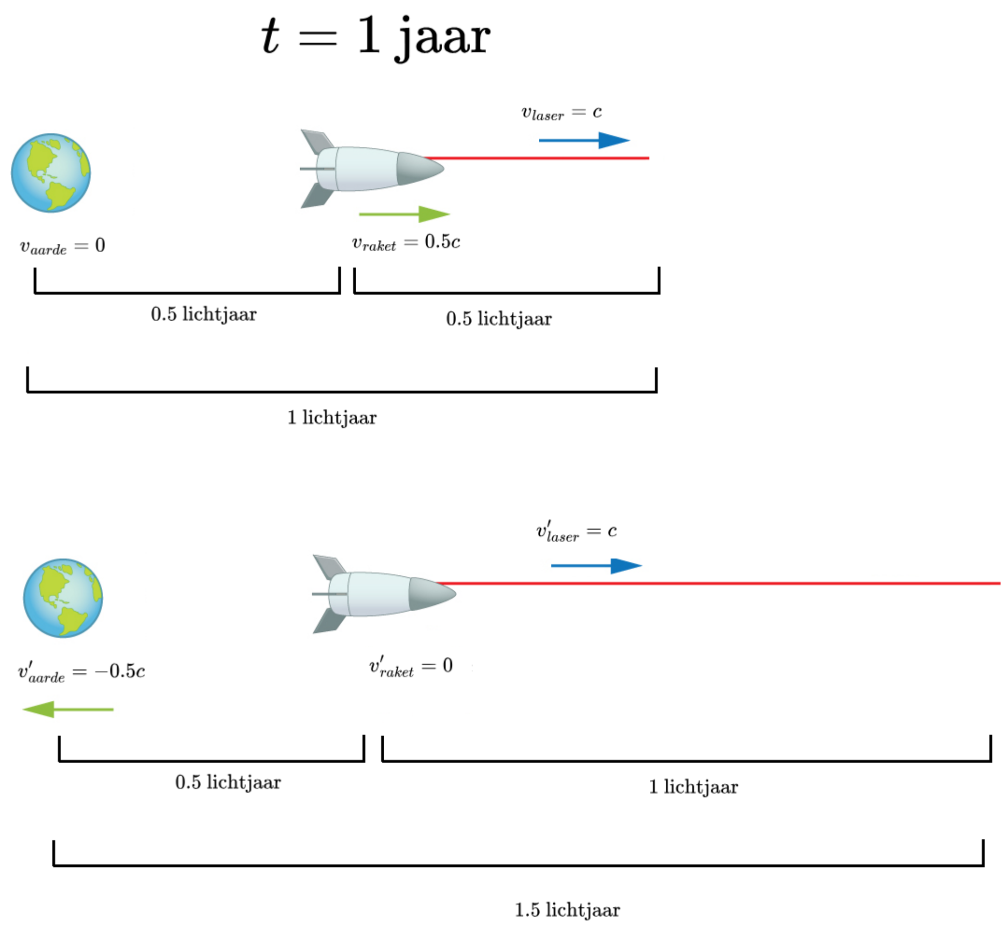
2.1.1 Metingen met een invariante lichtsnelheid

We zullen nu kort demonstreren waarom de invariantie van de lichtsnelheid verregaande gevolgen heeft. Stel dat een ruimteschip met een snelheid $0.5c$ ten opzichte van de aarde beweegt. Het ruimteschip zendt op het moment dat het lanceert een laserstraal voor zich uit. Vanuit het perspectief van een astronaut in het ruimteschip beweegt de aarde van zich weg met een snelheid $-0.5c$. Zowel waarnemers op de aarde en astronauten in het ruimteschip zien de laserstraal met dezelfde snelheid c bewegen.



Figuur 2.2: Snelheden van een ruimteschip, de aarde en een laserstraal in twee inertiaalstelsels.

Wat is nu de afstand tussen het ruimteschip en de laserstraal na een jaar tijd? De volgende afbeelding toont alle lengte intervallen in het inertiaalstelsel van de aarde en in het inertiaalstelsel van het ruimteschip.



Figuur 2.3: Lengte intervallen in twee inertiaalstelsels.

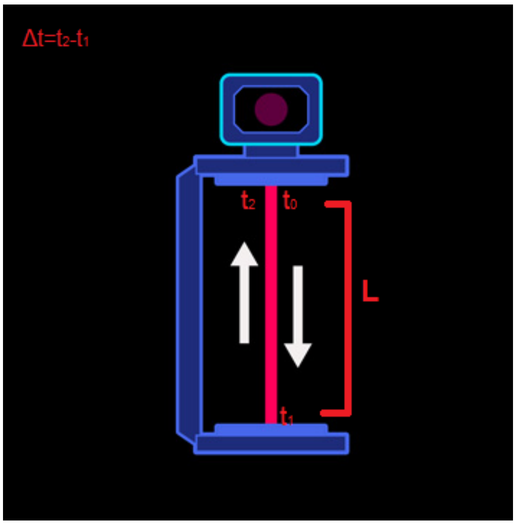
Vanuit het perspectief van een waarnemer op de aarde zal de raket na een jaar tijd een half lichtjaar hebben afgelegd. De lichtstraal zal dan een afstand van één lichtjaar hebben afgelegd. Een waarnemer op de aarde zou dan beredeneren dat de afstand tussen het ruimteschip en de laser een half lichtjaar is. Het ruimteschip ziet de laser echter ook met een snelheid van c van zich weg bewegen. Een astronaut in het ruimteschip zou dus beredeneren dat de laser na een jaar tijd zich één lichtjaar verder van het ruimteschip bevindt.

Het lijkt dus te zijn dat beide waarnemers een andere afstand tussen de positie van het ruimteschip en de positie van de laser meten. Een andere mogelijkheid is dat een klok op de aarde niet gelijk staat met de klok van het ruimteschip. In het volgende hoofdstuk zullen we zien dat twee waarnemers die met een constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen zowel tijd en lengte anders dan elkaar zullen meten.

3. Ruimte en Tijd

3.1 Tijddilatatie

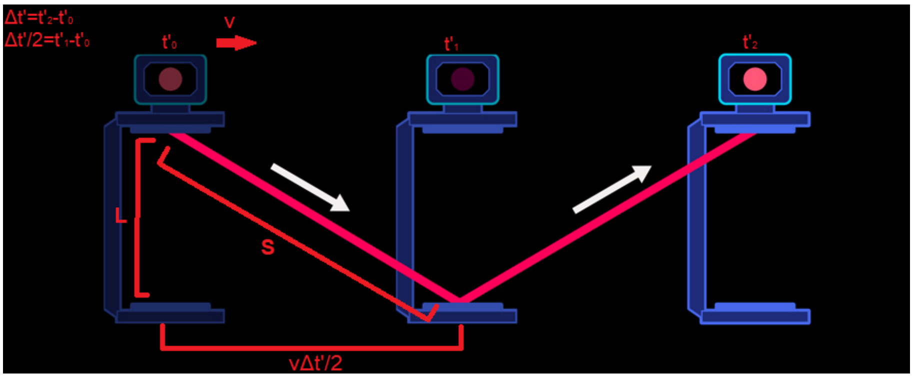
In dit hoofdstuk zullen we de correcte uitdrukkingen voor tijddilatatie en lengtecontractie afleiden door twee gedachtenexperimenten uit te voeren. Beschouw een gesloten kamer waarin er een lichtbron aan de bovenkant wordt geplaatst. Deze lichtbron zal een lichtstraal uitzenden die recht naar onder beweegt. Aan de onderkant van de kamer is er een spiegel aanwezig. De lichtstraal wordt door de spiegel gereflecteerd en zal nu recht naar boven bewegen. Wanneer de lichtstraal de bovenkant van de kamer terug bereikt wordt ze gedetecteerd door een lichtsensor. Op dit moment wordt er een nieuwe lichtstraal uitgezonden.



Figuur 3.1: Een stilstaande lichtklok.

De hoogte van de kamer L en de lichtsnelheid c zijn gekend. Er geldt dan: $c = \dfrac{2L}{\Delta t}$. Hier is Δt het tijdsinterval tussen wanneer de lichtstraal wordt uitgezonden en wanneer ze wordt gedetecteerd. We kunnen deze opstelling gebruiken om de tijd te meten door de hoeveelheid gedetecteerde lichtstralen te tellen. Daarom noemen we deze opstelling een lichtklok.

Hoe ziet dit proces er uit vanuit het perspectief van iemand die de lichtklok van zich weg ziet bewegen? Als de lichtklok met een snelheid v horizontaal weg beweegt ten op zichte van een waarnemer zal de lichtstraal met de lichtklok mee bewegen. Vanuit het perspectief van deze waarnemer zal de lichtstraal een diagonale beweging uitvoeren.



Figuur 3.2: Een lichtklok die met een constante snelheid v beweegt.

Deze waarnemer meet een tijdsinterval $\Delta t'$ tussen wanneer de lichtstraal wordt uitgezonden en wanneer ze wordt gedetecteerd. In het tijdsinterval $\frac{\Delta t'}{2}$ zal de lichtklok dan een afstand van $\frac{v\Delta t'}{2}$ afleggen. In dit tijdsinterval legt de lichtstraal de diagonale afstand S af. Volgens de stelling van Pythagoras geldt: $S^2 = \frac{(v\Delta t')^2}{4} + L^2$.

Aangezien deze waarnemer ook meet dat de lichtstraal met de snelheid c beweegt geldt er dat $S = \frac{c\Delta t'}{2}$. In het inertiaalstelsel van een waarnemer die met de lichtklok mee beweegt geldt $L = \frac{c\Delta t}{2}$. De hoogte van de lichtklok L verandert niet. Door deze uitdrukkingen in de bovenstaande vergelijking in te vullen vinden we: $\frac{(c\Delta t')^2}{4} = \frac{(v\Delta t')^2}{4} + \frac{(c\Delta t)^2}{4}$. We vormen dit om en vinden de uitdrukking voor tijddilatatie:

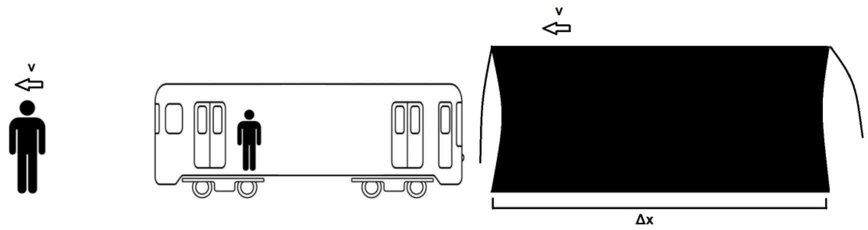
$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

De waarnemer die de lichtklok van zich weg ziet bewegen zal een groter tijdsinterval meten dan de waarnemer die met de lichtklok mee beweegt. De lichtklok is een echte klok die nauwkeurig tijd kan meten. Dit wilt zeggen dat tijd trager loopt op een klok die met een zekere snelheid beweegt ten opzichte van een klok die stilstaat.

Waarom zouden we dit resultaat niet vinden in de Galileïsche fysica? Volgens Galileo zou de waarnemer die de lichtklok ziet bewegen meten dat de lichtstraal een grotere snelheid heeft. De uitdrukking $S = \frac{c\Delta t'}{2}$ zou dan niet kloppen.

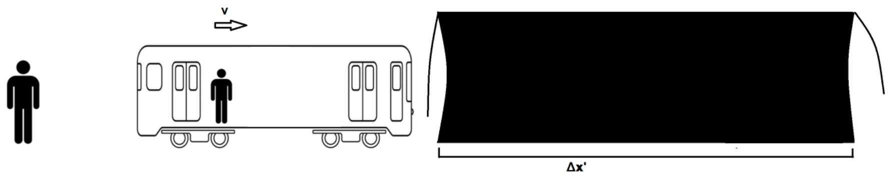
3.2 Lengtecontractie

We kunnen lengtecontractie rechtstreeks afleiden uit tijddilatatie. Beschouw een trein die met een snelheid v door een tunnel rijdt. Net zoals bij de lichtklok beelden we de situatie eerst af vanuit het perspectief van een waarnemer die met de trein mee beweegt. Die ziet de tunnel naar zich toe bewegen met een snelheid v. Er is ook een tweede waarnemer die stil staat ten opzichte van de tunnel.



Figuur 3.3: Tunnel in het inertiaalstelsel van een waarnemer in de trein.

De waarnemer in de trein meet dat de tunnel een lengte van Δx heeft. Deze waarnemer meet ook dat de trein in het tijdsinterval Δt doorheen de tunnel rijdt. Er geldt dan $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$. Hoe ziet deze situatie er nu uit vanuit het perspectief van de waarnemer die stilstaat ten opzichte van de tunnel?



Figuur 3.4: Perspectief van de waarnemer die stilstaat ten opzichte van de tunnel.

Deze persoon ziet dat de klok van de waarnemer in de trein trager loopt dan zijn eigen klok wegens tijddilatatie. Vanuit het perspectief van de waarnemer die stilstaat ten opzichte van de tunnel zal de trein dus meer tijd nodig hebben om door de tunnel te rijden. Deze waarnemer ziet de trein echter met een snelheid v bewegen. Hoe kunnen we dit dan verklaren? De enige mogelijkheid is dat de tunnel langer is vanuit het perspectief van deze waarnemer.

Voor deze waarnemer geldt $v = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$. We gebruiken de tijddilatatie formule $\Delta t' = \dfrac{\Delta t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Dan geldt er: $v = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{\Delta x'}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Oftewel:

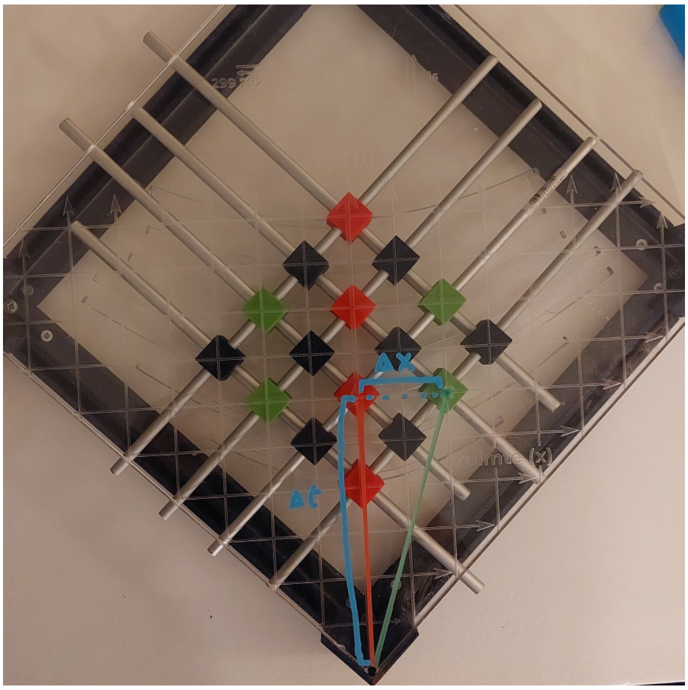
$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Bij de lichtklok is Δt de tijd die gemeten wordt door iemand die stilstaat ten opzichte van de lichtklok. Bij het gedachtenexperiment met de trein is $\Delta x'$ de lengte van de tunnel die gemeten wordt door iemand die stilstaat ten opzichte van de tunnel. Om verwarring te vermijden drukken we tijddilatatie en lengtecontractie als volgt uit:

> In een inertiaalstelsel meet een stilstaande klok de tijd T_0 en is de lengte van een voorwerp L_0. Als een waarnemer met een snelheid v tenopzichte van de klok en het voorwerp beweegt worden de tijd T en de lengte van het voorwerp L die deze waarnemer meet gegeven door:
>
> - $T = \gamma T_0$
> - $L = \dfrac{L_0}{\gamma}$
>
> Hier is $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. We noemen γ de Lorentzfactor. ■

3.3 Relativistische ruimtetijddiagrammen

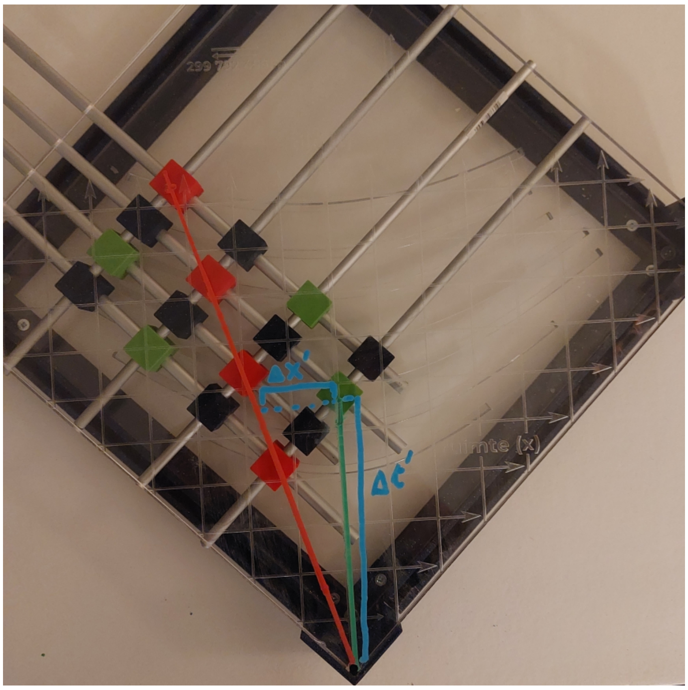
Hoe kunnen we fenomenen als lengtecontractie en tijddilatatie op een ruimtetijddiagram aflezen? Je kan een punt op een ruimtetijddiagram zien als een "gebeurtenis in de ruimtetijd". Beschouw het onderstaande diagram. Hier wordt de wereldlijn van een persoon op de aarde en de wereldlijn van een ruimteschip dat met een constante snelheid beweegt voorgesteld. Het groen blokje staat op de wereldlijn van het ruimteschip en kan bijvoorbeeld de gebeurtenis "het ruimteschip landt op de maan"voorstellen.



Figuur 3.5: Ruimtetijddiagram van twee waarnemers.

De horizontale lengte Δx tussen de wereldlijnen op dit punt stelt de afstand tussen de maan en de aarde voor. De verticale lengte Δt tussen dit punt en de oorsprong is het tijdstip wanneer de raket de maan bereikt. Afstand en tijd worden hier gemeten in het inertiaalstelsel van een waarnemer op de aarde.

Op de volgende figuur zien we hetzelfde ruimtetijddiagram in het inertiaalstelsel van een astronaut in het ruimteschip.



Figuur 3.6: Het zelfde ruimtetijddiagram vanuit het perspectief van de astronaut.

$\Delta x'$ en $\Delta t'$ zijn nu dezelfde afstand en tijd gemeten door de astronaut. We zien dat het groene blokje nu iets lager staat en dat de afstand tussen de wereldlijnen op dit punt iets kleiner is. Dit wilt zeggen dat de astronaut een kortere afstand tussen de aarde en de maan meet, en dat de reis minder lang voor hem duurt. We kunnen op deze manier lengtecontractie en tijddilatatie visualiseren.

4. Relativistische Fenomenen

4.1 Sneller dan licht?

Stel dat je twee waarnemers ziet die in de tegengestelde richting van elkaar bewegen. Waarnemer 1 beweegt met een snelheid van $-0.9c$ en waarnemer 2 beweegt met een snelheid van $0.9c$. Volgens de Galileïsche optelwet van snelheid zou waarnemer A dan meten dat waarnemer B met een snelheid van $1.8c$ beweegt. Dit is echter niet geldig in de speciale relativiteitstheorie. Als een waarnemer met een snelheid c zou bewegen wordt de Lorentzfactor oneindig groot. Als een waarnemer met een snelheid $v > c$ beweegt zouden we een de vierkantswortel van een negatief getal moeten nemen om de Lorentzfactor te berekenen. In de speciale relativiteitstheorie wordt de energie van een voorwerp met massa m gegeven door $E = \gamma mc^2$. We zouden dus een oneindige hoeveelheid energie nodig hebben om een voorwerp tot de snelheid c te versnellen. Het is dus onmogelijk om de snelheid van het licht te bereiken.

> Alle waarnemers bewegen met een snelheid kleiner dan de lichtsnelheid in alle mogelijke inertiaalstelsels. De lichtsnelheid is de universele snelheidslimiet. ■

Wilt dit zeggen dat het theoretisch onmogelijk is om in één jaar tijd een afstand van meer dan een lichtjaar te overbruggen? Stel dat een ruimteschip met een snelheid $v = 0.9999999999999999999c$ ten opzichte van de aarde beweegt. Dit ruimteschip is opweg naar Proxima Centauri, een ster die 4.25 lichtjaar van de aarde verwijderd is. Vanuit het perspectief van een waarnemer op de aarde zou deze reis ongeveer 4.25 jaar duren. Het is echter zo dat de tijd in het ruimteschip vertraagt wegens tijddilatatie. De Lorentzfactor voor dit ruimteschip is $\gamma \approx 2.2 \times 10^9$. Als we de tijddilatatie formule omvormen vinden we dat de reis maar 0.06 seconden duurt voor een waarnemer in het ruimteschip!

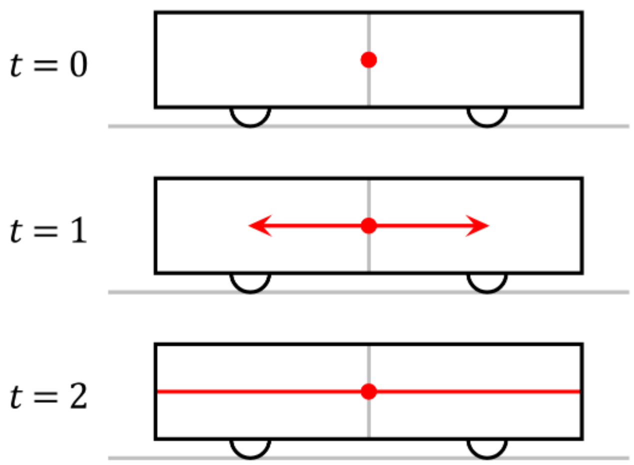
Hoe kunnen we dit nu verklaren in het inertiaalstelsel van een astronaut in dit ruimteschip? Vanuit het perspectief van de astronaut zal zijn eigen klok niet trager lopen dan normaal. De astronaut ziet Proxima Centauri naar zich toe bewegen met een snelheid $v = 0.9999999999999999999c$. De aarde beweegt van zich weg met dezelfde snelheid. Er is nu een extreme hoeveelheid lengtecontractie tussen de aarde en Proxima Centauri. Vanuit het perspectief van de astronaut zullen de aarde en Proxima Centauri maar 19000 kilometer van elkaar verwijderd zijn! Daarom zal de reis vanuit het perspectief van de astronaut helemaal niet zo lang duren.

> Een ruimteschip kan in theorie grotere afstanden overbruggen dan mogelijk lijken te zijn wegens de snelheidslimiet c. De reis van het ruimteschip duurt minder lang dan verwacht.
>
> - Vanuit het perspectief van iemand op aarde zal de klok in het ruimteschip trager lopen.
> - Vanuit het perspectief van een astronaut in het ruimteschip zal de afstand van de reis kleiner zijn.

Dit is natuurlijk puur theoretisch. In de werkelijkheid kunnen we met onze technologie onmogelijk een ruimteschip tot relativistische snelheden versnellen. Het is ook zo dat de reis naar Proxima Centauri nog altijd minstens 4.25 jaar zou duren vanuit het perspectief van iemand op de aarde. Het zou dus minstens 9.5 jaar duren voordat we de astronaut terug zouden zien. Zelfs als we een ruimteschip zodanig zouden kunnen versnellen zouden reizen naar verre planeten helemaal niet praktisch zijn.

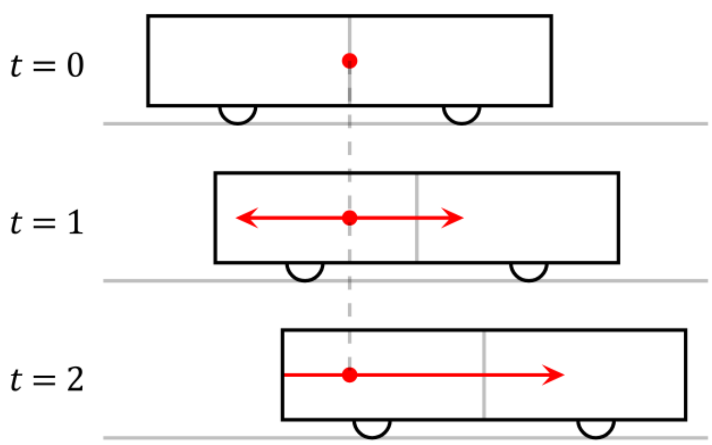
4.2 Gelijktijdigheid

We weten dat verschillende waarnemers een andere hoeveelheid tijd tussen twee gebeurtenissen meten. We kunnen nu de vraag stellen: zijn gelijktijdige gebeurtenissen voor één waarnemer nog steeds gelijktijdig voor een andere waarnemer? Stel dat we een lichtbron in het midden van een trein zetten. We beschouwen eerst het perspectief van iemand die op de trein zit. Op het tijdstip $t = 0$ zal de lichtbron twee lichtstralen uitzenden. De eerste lichtstraal beweegt naar de achterkant van de trein. De andere lichtstraal beweegt naar de voorkant van de trein. Aangezien de lichtstralen even snel bewegen en de lichtbron in het midden van de trein staat zullen beide lichtstralen op hetzelfde moment de twee uiteinden van de trein raken.



Figuur 4.1: Lichtstralen in het inertiaalstelsel van de trein.

Hoe ziet deze situatie er dan uit voor een waarnemer die de trein met een constante snelheid in de positieve x-richting ziet bewegen?

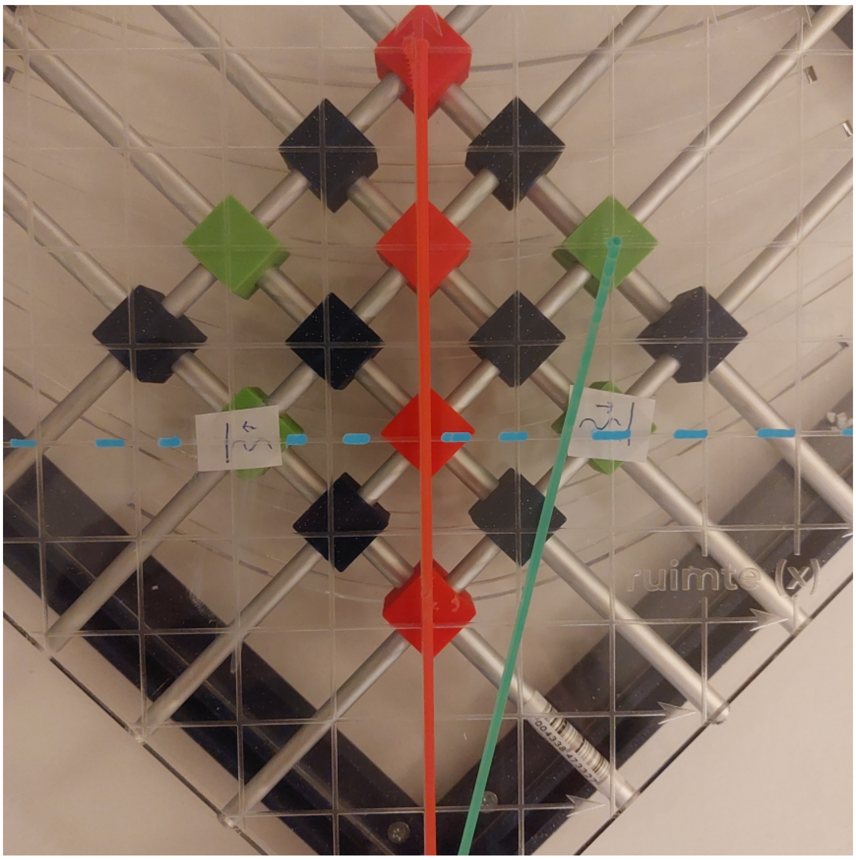


Figuur 4.2: Dezelfde lichtstralen in het inertiaalstelsel waar de trein beweegt.

Vanuit het perspectief van deze waarnemer beweegt de voorkant van de trein weg van de rechtse lichtstraal. De achterkant van de trein beweegt naar de linkse lichtstraal toe. De rechtse lichtstraal zal dus een langere afstand moeten afleggen om het uiteinde van de trein te bereiken dan de linkse lichtstraal. Aangezien de snelheid van het licht invariant is zullen beide lichtstralen dezelfde snelheid hebben. Daarom raakt de linkse lichtstraal het uiteinde van de trein eerder dan de rechtse lichtstraal. Deze gebeurtenissen zijn dus gelijktijdig in het inertiaalstelsel van de trein, maar ze zijn niet gelijktijdig in het inertiaalstelsel waar de trein met een constante snelheid beweegt. Voor een waarnemer die de trein in de negatieve x-richting ziet bewegen zal de rechtse lichtstraal het uiteinde van de trein eerder bereiken dan de linkse lichtstraal.

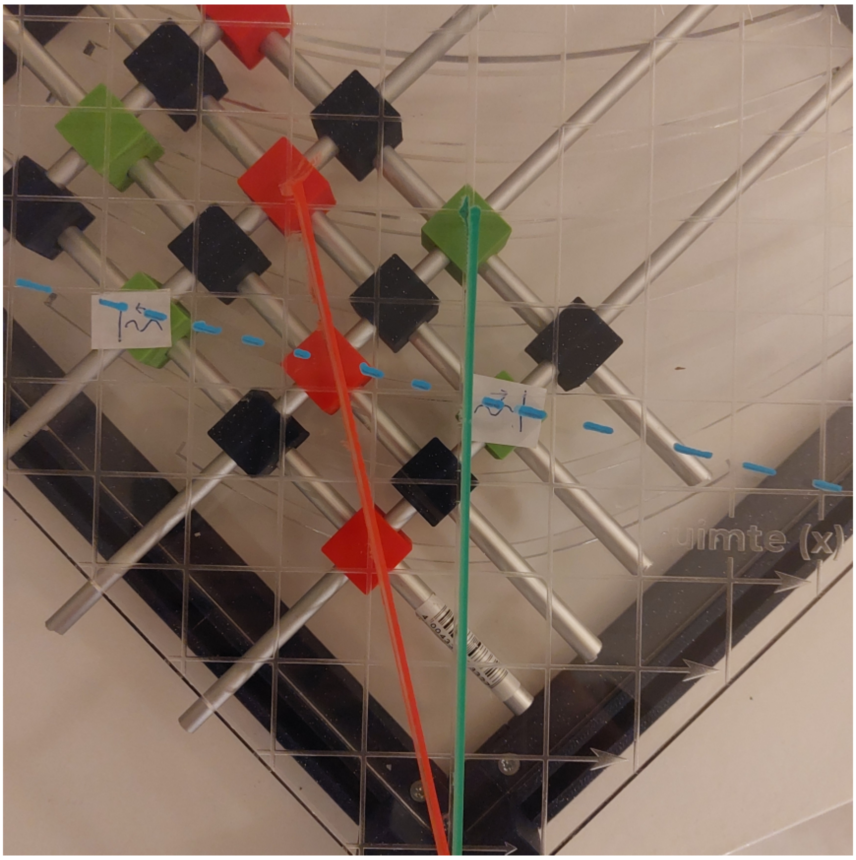
> Als twee waarnemers met een constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen zullen twee gebeurtenissen die gelijktijdig zijn voor de eerste waarnemer niet noodzakelijk gelijktijdig zijn voor de tweede waarnemer. ■

Hoe kan je dit zien op ruimtetijddiagrammen? Op de volgende figuur wordt het perspectief van een eerste waarnemer afgebeeld.



Figuur 4.3: Gebeurtenissen en wereldlijnen in een inertiaalstelsel.

De rode lijn is de wereldlijn van deze waarnemer. De groene lijn is de wereldlijn van een tweede waarnemer die met een constante snelheid in de x-richting beweegt. De stickers stellen twee gebeurtenissen voor. Deze gebeurtenissen bevinden zich op dezelfde hoogte in het ruimtetijdrooster en hebben dus hetzelfde tijdscoördinaat. Deze gebeurtenissen zijn gelijktijdig. De blauwe stippellijn stelt "het huidige moment"voor. Op de volgende afbeelding zien we het ruimtetijddiagram in het inertiaalstelsel van de tweede waarnemer.



Figuur 4.4: Gebeurtenissen en wereldlijnen in het inertiaalstelsel van een tweede waarnemer.

In dit inertiaalstelsel bevinden de gebeurtenissen zich niet op dezelfde hoogte in het ruimtetijddiagram. Ze zijn dus niet gelijktijdig vanuit het perspectief van de tweede waarnemer. De blauwe stippellijn staat niet meer evenwijdig met de x-as en stelt dus geen "moment"meer voor. Volgens de speciale relativiteitstheorie bestaat "het heden"niet! Wat we "het heden"noemen verschilt van waarnemer tot waarnemer.