МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ИНФОРМАТИКИ

НЕКОТОРЫЕ РАСШИРЕНИЯ ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ БАССА (FURTHER EXTENSIONS OF BASS DIFFUSION MODEL)

КУРСОВАЯ РАБОТА

Выполнил:
Коматовский Максим
студент группы э301
Научный руководитель:
к.ф-м.н., доцент
Тищенко С.А.

Москва, 2019

Содержание

Введение **3**

Модель Басса **3**
- Основная идея . . . 3
- Обозначения . . . 3
- Поиск равновесных положений системы . . . 3
- Оценка параметров в модели Басса . . . 5

Конкуренция двух поставщиков в условиях фиксированного объема рынка **5**
- Постановка задачи . . . 5
- Исследование динамики . . . 5

Численный пример **7**

Немного о функции разрыва **8**
- Как думать? . . . 8
- Зависимость Δ_∞ от конкретных пареметров . . . 10

Моделирование цикла победителя **12**

Дальнейшие направления исследования **13**

Заключение **13**

Введение

В силу последних событий на рынке такси в Москве, видится естественным рассмотреть причины, по которым одни фирмы выигрывают рыночную борьбу, а другие ее проигрывают. В основе исследования лежит информационный подход Фрэнка Басса, предполагающий, что основное влияние на распределение долей на рынке оказывает распространение информации о новом продукте в среде потребителей (в нашем случае среда потребителей будет моделироваться с помощью некоторой сети).

После изложения основных принципов модели Басса, модель существенно расширяется, что позволяет описать взаимодействие нескольких фирм, конкурирующих в рамках одного рынка недифференцированного информационного продукта. Необходимо выяснить, каким именно образом конкретные параметры моделей влияют на итоговое устойчивое положение равновесия, как фирмы могут и должны воздействовать на этот параметр, чтобы победить в борьбе за рыночную власть. Исследование предполагает построение общих теоретических выводов, основываясь на которые, в дальнейшем можно будет перейти к практической части исследования.

В работе используется математический аппарат из элементарной теории дифференциальных уравнений, теории катастроф, теории популяций. Прежде, чем мы начнем, заинтригуем читателя следующей мыслью: рыночную борьбу производителей на ограниченном рынке потребителей можно рассматривать как конкуренцию двух различных видов хищников за ограниченную популяцию жертв.

Модель Басса

Основная идея

Пусть существует множество потребителей и некоторый инновационный товар или технология, например, агрегатор такси. Будем считать «приобретением» товара начало пользования услугами агрегатора (а не каждую конкретную поездку). Вопрос состоит в том, как информация о новой технологии распространится в среде потребителей, обладающей заранее заданными чертами.

Обозначения

Введем параметры информационной диффузии и опишем нашу систему дифференциальным уравнением:

$$\frac{dF(t)}{dt} = (p + qF(t))(m - F(t))$$

Здесь $m \in [0; 1]$ - доля рынка, потенциально доступная для покрытия данной технологией (например, невозможно предложить новые кофейные зерна человеку, у которого на кофе аллергия).

$p \in [0; 1]$ - доля тех потребителей из множества еще не воспользовавшихся технологией, которые узнают о ней самостоятельно.

$q \in [0; 1]$ - доля тех потребителей из множества еще не воспользовавшихся технологией, которые узнают о ней от уже воспользовавшихся.

$F(t) \in [0; 1]$ - доля потребителей, использующих услугу на момент времени t. Отсюда $m - F(t)$ - доля рынка, не занятая на момент времени t.

В дальнейшем мы будем обозначать функцию $F(t)$ как F, если не требуется иное.

Поиск равновесных положений системы

Отдельно необходимо обговорить начальные условия системы, т.е. величину $F(0)$. Покажем, что положение устойчивого равновесия не зависит от начального условия, а в дальнейшем, если не оговорено иное, будем считать $F(0) = 0$.

Построим, для полного осознания происходящего, два графика: первый - в осях $(F; \frac{dF}{dt})$, второй - в осях $(t; F)$, причем в последнем случае нас будет скорее интересовать поле направлений, нежели конкретный вид изоклин (хотя к нему мы тоже обратимся).

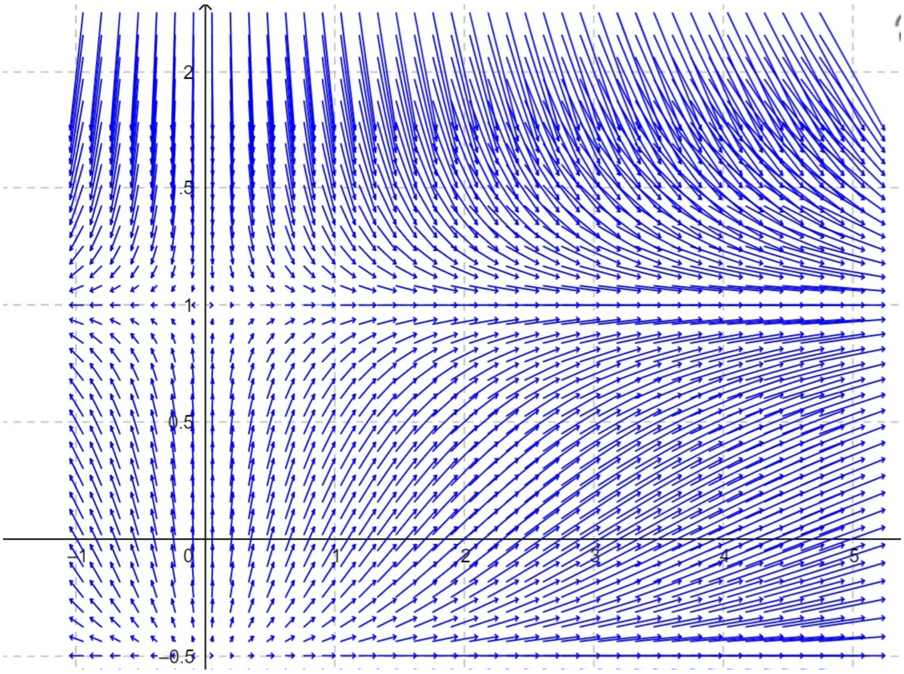

Рис. 1: Стационарные множества и предполагаемые траектории для $m = 1, p = 1, q = 2$, значения параметров выбраны исключительно для иллюстративных целей и не несут смысловой нагрузки

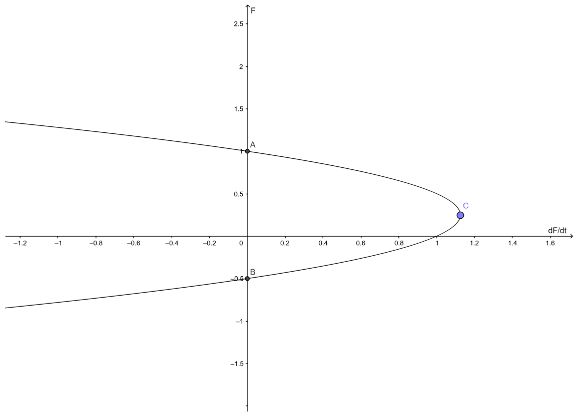

Рис. 2: Построение в осях $(\frac{dF}{dt}; F(t))$ выявляет одно устойчивое равновесие (верхнее) и одно неустойчивое (нижнее). При $F < -\frac{p}{q}$ производная $\frac{dF}{dt} < 0$, т.е. F убывает. Аналогично при $F > m$. В промежуточном положении $\frac{dF}{dt} > 0$, наибольшая скорость роста в вершине параболы.

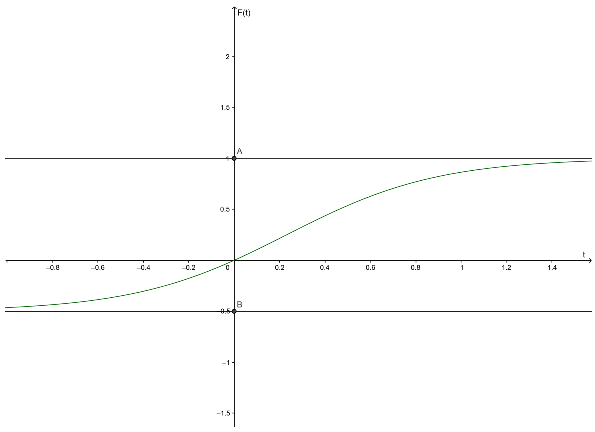

Рис. 3: График части решения задачи Коши с начальным условием $F(0) = 0$, параметры на обеих иллюстрациях: $p = 1$, $q = 2$, $m = 1$

Соответствующая задача Коши решается однозначно (в качестве начального условия положим $F(0) = A$). В частности, можно использовать метод разделения переменных.

Нас будет интересовать «центральная» часть решения, имеющая форму $S-$образной кривой. выбор конкретной кривой происходит под влиянием начального условия: ось $O_{F(t)}$ пересекается нужным решением в точке A. Интуиция $S-$образной кривой становится понятнее, если взглянуть на поле направлений.

Отдельно заметим, что в случае излишних начальных вложений в рекламную компанию ($A > m$), развитие рынка будет происходить по нисходящей траектории, стабилизация произойдет на предельном уровне m. В дальнейшем мы увидим, что сумма долей рынка, занятые несколькими фирмами при $t \to +\infty$ в сумме дает ровно m. Интуитивно это можно объяснить следующим мысленным экспериментом: предположим, что две малые фирмы слились в одну большую, в силу отсутствия конкурентного фактора систему можно будет рассмотреть как единственное дифференциальное уравнение, описанное выше.

Оценка параметров в модели Басса

Модель не была бы столь популярна, если бы не выходила за рамки теоретических суждений. На текущий момент существуют десятки подходов к оценке параметров как классической модели Басса, так и ее усложнений. С тчоки зрения автора, наиболее удобен подход, описанный в работе [6], позволяющий оценить параметры модели на относительно простых данных (количество продаж в каждый момент времени).

Разумеется, непрерывная модификация модели - это в некотором роде идеалистический подход, однако, чем более гранулированными данными по количеству продаж тоавра в момент времени будет обладать автор, тем точнее окажутся выводы и прогнозы, полученные из модели.

Конкуренция двух поставщиков в условиях фиксированного объема рынка

Постановка задачи

Рассмотрим следующую непрерывную конкурентную модель:

$$\begin{cases} \dfrac{dg_1(t)}{dt} = \Big(a + bg_1(t)\Big)\Big(m - g_1(t) - g_2(t)\Big) \\ \\ \dfrac{dg_2(t)}{dt} = \Big(a + bg_2(t)\Big)\Big(m - g_1(t) - g_2(t)\Big) \end{cases}$$

В системе выше $g_1, g_2 \in [0; 1]$ - доли рынка, занятые в момент времени t, причем $G(t) = g_1(t) + g_2(t) \in [0; 1]$, т.е. фирмы в совокупности не могут занять большую доля рынка, чем 1. В дальнейшем, для удобства, обозначение $g_i(t)$ заменим на более компактное g_i.

$a, b \in (0; 1]$ - параметры диффузинной модели Басса.

Параметр a - коэффициент самостоятельной диффузии (мера распространения информации, происходящего самостоятельно, вне зависимости от g_i), параметр b - мера зависимости темпов роста предложения услуг, зависящих от предоставляемого на момент t объема. $m \in (0; 1]$ - максимально доступный объем рынка (доля потребителей, готовых приобрести данный товар).

Как было показано выше, устойчивым равновесием в данной системе является ситуация, в которой фирмы в совокупности занимают весь доступный рынок. Отличие от базовой модели состоит в наличии фактора конкуренции за потребителя. Заметим, что если установить темп роста одной из фирм раным нулю тождественно, мы окажемся в случае действия на рынке единственной фирмы и придем к результату, полученному ранее, устойчивому равновесию на уровне $g = m$.

Исследование динамики

Вопрос, на который мы пытаемся дать ответ с помощью этой модели: в какой пропорции фирмы поделят рынок в предельном устойчивом случае, т.е. при $t \longrightarrow \infty$.

Очевидно, в случае полной симметрии фирм, решение системы также будет симметричным, и фирмы поделят рынок в пропорции 1 : 1. Нас, однако, будет интересовать случай различных начальных позиций. Установим следующие начальные условия:

$$g_1(0) = A < m$$
$$g_2(0) = B \in (0; A)$$

Вернемся к системе. Поделим первое уравнение на второе, исключая тем самым dt и скобку, отвечающую за долю незанятого рынка:

$$\frac{dg_1}{dg_2} = \frac{a + bg_1}{a + bg_2}$$

Разделяем переменные:

$$\frac{dg_1}{a + bg_1} = \frac{dg_2}{a + bg_2}$$

Домножаем обе части уравнения на $b > 0$, интегрируем:

$$\int \left(\frac{dg_1}{\frac{a}{b} + g_1} \right) = \int \left(\frac{dg_2}{\frac{a}{b} + g_2} \right)$$

$$\ln \left(\frac{a}{b} + g_1 \right) = \ln \left(\frac{a}{b} + g_2 \right) + const$$

$$\frac{a}{b} + g_1 = e^{const} \cdot \left(\frac{a}{b} + g_2 \right)$$

Переобозначив $e^{const} := \hat{c}$, имеем:

$$g_1 = \hat{c} \cdot \left(\frac{a}{b} + g_2 \right) - \frac{a}{b} = (\hat{c} - 1) \cdot \frac{a}{b} + \hat{c} \cdot g_2$$

Подставим $g_1 = g_1(g_2)$ во второе уравнение системы:

$$\frac{dg_2}{dt} = \Big(a + bg_2 \Big) \Big(m - g_2 - (\hat{c} - 1) \cdot \frac{a}{b} - \hat{c} \cdot g_2 \Big)$$

Это дифференциальное уравнение может быть решено методом разделения переменных (делим обе части на многочлен справа, домножаем на dt, разбиваем дробь слева в сумму простейших с помощью метода непопеределенных коэффициентов и интегрируем обе части). Решение выглядит следующим образом:

$$\hat{g_2} : \left(\{t\} \to \frac{ae^{2abc_1 + b^2 c_1 m} + a(-\hat{c})e^{2at+bmt} + ae^{2at+bmt} + bme^{2at+bmt}}{b\left(-e^{2abc_1+b^2c_1m} + \hat{c}e^{2at+bmt} + e^{2at+bmt}\right)} \right)$$

Преобразуем решение:

$$g_2 = \frac{a^{bc_1(2a+bm)} + e^{(2a+bm)t}\Big(bm + (1-\hat{c})a \Big)}{-b \cdot \Big(e^{bc_1(2a+bm)} - (1+\hat{c})e^{(2a+bm)t} \Big)}$$

Используем начальное условие $g_2(0) = B$:

$$\frac{a \cdot e^{bc_1(2a+bm)} + 1 \cdot \Big(bm + (1-\hat{c})a \Big)}{-b \cdot \Big(e^{bc_1(2a+bm)} - (1+\hat{c}) \cdot 1 \Big)} = B$$

Отсюда может быть найдена g_1:

$$\hat{g_1} = (\hat{c} - 1) \cdot \frac{a}{b} + \hat{c} \cdot \hat{g_2}$$

Используем начальное условие $g_2(0) = B$:

$$\frac{a \cdot e^{bc_1(2a+bm)} + 1 \cdot \Big(bm + (1-\hat{c})a\Big)}{-b \cdot \Big(e^{bc_1(2a+bm)} - (1+\hat{c}) \cdot 1\Big)} = B$$

Тогда начальное условие для $g_1(0) = (\hat{c}-1) \cdot \dfrac{a}{b} + \hat{c} \cdot B = A$.
Решим систему начальных условий:

$$\begin{cases} a \cdot e^{bc_1(2a+bm)} + \Big(bm + (1-\hat{c})a\Big) = -B \cdot b \cdot e^{bc_1(2a+bm)} + Bb(1+\hat{c}) \\ \hat{c} \cdot \Big(\dfrac{a}{b} + B\Big) = A + \dfrac{a}{b} \end{cases}$$

Преобразуем:

$$\begin{cases} \hat{c} = \dfrac{Ab+a}{Bb+a} \\ (a+bB) \cdot e^{bc_1(2a+bm)} = Bb(1+\hat{c}) - bm - (1-\hat{c})a \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение:

$$(a+Bb) \cdot e^{bc_1(2a+bm)} = Bb(1+\hat{c}) - (bm+2a) + (1+\hat{c})a$$

$$(a+Bb) \cdot e^{bc_1(2a+bm)} = Bb(1+\hat{c}) - (bm+2a) + (1+\hat{c})a$$

$$e^{bc_1(2a+bm)} = (1+\hat{c})\frac{Bb+a}{Bb+a} - \frac{bm+2a}{Bb+a} = (1+\hat{c}) - \frac{bm+2a}{Bb+a}$$

Остановимся на этом этапе преобразования и подставим выражения для $\hat{c}$ и $e^{bc_1(2a+bm)}$ в разность функций объемов, предел которой нас интересует:

$$\Delta(t) = g_1(t) - g_2(t)$$

$$\lim_{t\to\infty} \Delta(t) = \lim_{t\to\infty}((\hat{c}-1) \cdot \frac{a}{b} + \hat{c}\hat{g_2} = (\hat{c}-1) \cdot \frac{a}{b} + \hat{c} \cdot \lim_{t\to\infty} \hat{g_2}$$

Вычислим отдельно $\lim\limits_{t\to\infty} \hat{g_2}$:

$$\lim_{t\to\infty} \hat{g_2} = \lim_{t\to\infty} \frac{a \cdot \Big((1+\hat{c}) - \dfrac{bm+2a}{Bb+a}\Big) + \Big(bm + (1-\hat{c})a\Big) \cdot e^{t(2a+bm)}}{-b \cdot \Big(((1+\hat{c}) - \dfrac{bm+2a}{Bb+a}) - (1+\hat{c}) \cdot e^{t(2a+bm)}\Big)}$$

Поскольку $f(\alpha) = e^{k\alpha},\ \ k > 0$ - монотонно возрастающая по α функция, можем отбросить постоянные величины, не зависящие от t в числителе и знаменателе:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{t(2a+bm)} \cdot \Big(bm + (1-\hat{c})a\Big)}{e^{t(2a+bm)} \cdot \Big(b(1+\hat{c})\Big)} = \frac{bm + a \cdot \dfrac{(B-A)b}{Bb+a}}{b \cdot \dfrac{(A+B)b+2a}{Bb+a}} = \frac{bm(Bb+a) + ab(B-A)}{(A+B)b^2 + 2ab} = \frac{m(Bb+a) + a(B-A)}{(A+B)b + 2a}$$

Численный пример

Пусть $a = 0.01, b = 0.05, m = 0.8, A = 0.05, B = 0.01$. Поскольку мы смогли в общем виде выразить итоговый разрыв как функцию исходных параметров модели:

$$\lim_{t\to\infty} \Delta(t) = \Big(\hat{c}(A,B,a,b) - 1\Big) \cdot \frac{a}{b} + \Big(\hat{c}(A,B,a,b) - 1\Big) \cdot \frac{m(Bb+a) + a(B-A)}{(A+B)b + 2a},$$

мы без труда сможем определить предельное разделение рынка, подставив параметры модели в функцию разрыва.

$$1 < \hat{c} = \frac{Ab + a}{Bb + a} = \frac{0.05 \cdot 0.05 + 0.01}{0.01 \cdot 0.05 + 0.01} \approx 1.19048$$

$$\lim(\Delta(0.01;\ 0.05;\ 0.8;\ 0.05;\ 0.01)) = \Big(0.19048\Big) \cdot \frac{1}{5} + \Big(0.19048\Big) \cdot \frac{0.8 \cdot (0.0105) + 0.01 \cdot (-0.04)}{0.06 \cdot 0.05 + 0.02} =$$

$$= 0.19048 \cdot \Big(0.2 + \frac{0.008}{0.023}\Big) \approx 0,10434$$

Правая дробь в вычислениях - предельная доля на *доступном* рынке второй фирмы $\overline{g_2} \approx 0.348$, соотвественно, доля первой фирмы составит долю второй фирмы с добавлением разрыва: $\overline{g_1} \approx 0.453$. Заметим, что доли фирм в сумме дают в точности $m = 0.8$, т.е. фирмы поделят весь доступный рынок.

Даже такой «наивный» анализ позволяет заметить, что, исходный разрыв в используемой доле рынка возрастает во времени. Происходит это по траекториям, сходным с $S-$образными кривыми в монополистическом случае, выбор конкретной траектории происходит в зависимости от разрыва.

Немного о функции разрыва

Как думать?

Динамика рыночного разрыва зависит от исходных параметров:

- группа переменных диффузии, которая задана экзогенна и зависит лишь от структуры сети, в которой происходит распространение
- величина исходного разрыва: $\delta = A - B$
- нижняя граница разрыва, в наших обозначениях это B (разрыв в 0.04 между 0.01 и 0.05 и точно такой же разрыв в 0.04 между 0.26 и 0.3 - совершенно разные исходные ситуации)
- экзогенный объем рынка m

Изучать функцию разрыва будет удобнее, глядя на фазовую диаграмму исходной системы дифференциальных уравнений, немного переименовав параметры (вернемся к классическим обозначениям Басса):

$$\begin{cases} \dfrac{dg_1(t)}{dt} = \Big(p + qg_1(t)\Big)\Big(m - g_1(t) - g_2(t)\Big) \\ \\ \dfrac{dg_2(t)}{dt} = \Big(p + qg_2(t)\Big)\Big(m - g_1(t) - g_2(t)\Big) \end{cases}$$

Из решения очевидной системы условий стационарности

$$\frac{dg_1}{dt} = \frac{dg_2}{dt} = 0,$$

получаем три множества стационарных точек, каждое из которых представляет собой прямую на фазовой плоскости. Такая фазовая плоскость является проекцией $S-$образной поверхности на область своего определения, тем самым мы производим некоторое «исследование с высоты птичьего полета».

Нетрудно проверить, что все устойчивые состояния системы лежат на наклонной прямой, задаваемым уравнением $g_1 + g_2 = m$. Более того, в силу интерпретации исходной задачи, с точки зрения экономической интуиции нас интересует лишь положительная четверть плоскости (g_1, g_2) (хотя с точки зрения понимания сути процесса, это, конечно, не так). Пусть в момент времени $t = 0$ фирмы входят на рынок с объемами, отраженными в координатах точки $A_0 = (A, B),\ \ A > B$.

Сформулируем следущее **утверждение**: точка, соответствующая предельному взаимодействию фирм на рынке есть точка пересечения прямой, задаваемой уравнением $g_1 + g_2 = m$ (стационарное множество) и прямой, проходящей через точку $A = (-\frac{p}{q}; -\frac{p}{q})$ и точку начального положения (в нашем случае, A_0).

Частный случай траектории отмечен на *рисунке 4* красным цветом. Поскольку до сих пор мы полагали параметры p, q одинаковыми для обеих фирм, что приводило к полной симметрии последних, в нашем частном

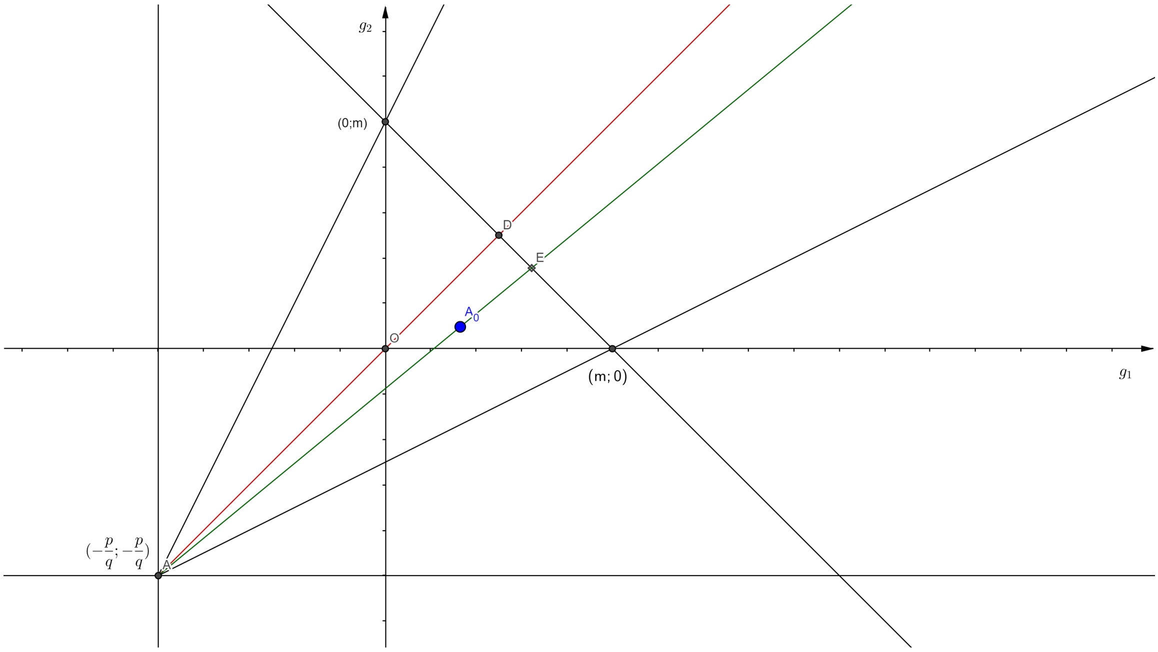

Рис. 4: Стационарные множества и предполагаемые траектории

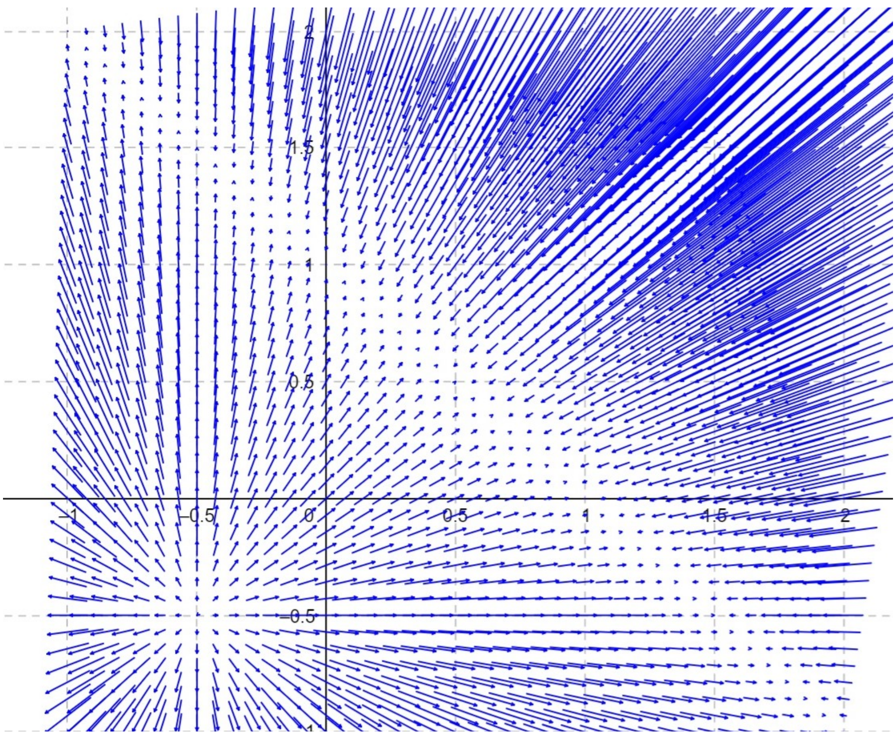

Рис. 5: Поле направлений рассматриваемой системы, по-прежнему, $p_1 = p_2 = 1$, $q = 2$, $m = 1$. Значения параметров вновь подобраны в иллюстративных целях.

случае этот луч содержит биссектрису прямого угла в первой координатной четверти. Обозначим луч, проходящий черех точку D, в которой рынок делится ровно пополам и точку $(-\frac{p_1}{q}; -\frac{p_2}{q})$ как l_*.
Для того, чтобы доказать этот факт, произведем следующую замену переменных, перемещая новое начало координат в точку A пересечения двух стационарных множеств:

$$\begin{cases} s_1 := p + q \cdot g_1 \\ s_2 := p + q \cdot g_2 \end{cases} \implies \begin{cases} g_1 = \dfrac{s_1 - p}{q} \\ g_2 = \dfrac{s_2 - p}{q} \end{cases}$$

Производя подстановку, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{ds_1}{dt} = s_1 \cdot (mq - 2p - s_1 - s_2) \\ \\ \dfrac{ds_2}{dt} = s_2 \cdot (mq - 2p - s_1 - s_2) \end{cases}$$

Поделив одно уравнение на другое, получим соотношение $\frac{ds_1}{s_1} = \frac{ds_2}{s_2}$, откуда после интегрирования мгновенно следует соотношение

$$s_2 = s_1 \cdot k, \;\; k = \frac{1}{e^{const}} > 0$$

Это соотношение описывает множество лучей,с положительным наклоном, выходящих из начала координат $(s_1; s_2)$.

Заметим, что если рассмотреть сечение поверхности $\Big(g_1(t); g_2(t); t\Big)$ плоскостями, содержащими указанные лучи и ортагональными к плоскости $\Big(g_1(t); g_2(t)\Big)$, то в этом сечении останутся $S-$образные кривые, сходные с той, что мы видели на графике решения дифференциального уравнения Басса для одной фирмы. В частности, точно такую же $S-$образную кривую можно получить, взяв в случае $p_1 = p_2 = p$ сечение, содержащую бисссектриссу положительного ортанта.

Из этого множества лучей нас будут интересовать лишь те, что лежат *между* лучами, в координатах (g_1, g_2) проходящих через точки $(0; m)$, $(m; 0)$ (на рисунке отмечены черным), поскольку нас интересуют лишь траектории, проходящие через осмысленные начальные значения (а это точки внутри треугольника, образуемого наклонной стационарной прямой и осями). Отметим, что для любой точки внутри указанного треугольника найдется луч, лежащий в рассматриваемом конусе, проходящий через заданную точку, а значит, для любых начальных условий мы сможем определить итоговое положение равновесия.

Рыночный же разрыв можно пронаблюдать, вычислив максимум из разности координат итоговой точки на рассматриваемой траектории (нарпимер, E) и точки разделения рынка в пропорции 1:1, т.е. точки D. Рыночный разрыв в процессе, т.е. в некоторый момент времени между 0 и $+\infty$ можно увидеть так: проводим прямую с наклоном, аналогичным наклону стационарного множества через рассматриваемую точку, смотрим максимум из разницы координат рассматриаемой точки и точки на проведенной прямой с равными координатами (см. *рисунок 6*).

Нетрудно заметить, что с течением времени рыночный разрыв увеличивается, поскольку прямые не параллельны друг другу, а точка пересечения лежит левее рассматриваемой области.

Зависимость Δ_∞ от конкретных пареметров

В этом разделе мы откажемся от предпосылки о равенстве рекламных возможностей обеих фирм $(p_1 = p_2 = p)$ и посмотрим как будетм меняться ситуация на рынке при изменении параметров p_1, p_2, q, m, а также начального положения (A, B).

- объем доступного рынка m.

  Геометрически, этот параметр определяет насколько высоко будет расположена наклонная прямая, являющаяся одним из трех стационарных множеств (именно на ней лежат все возможные итоговые равновесия). Интуитивно, увеличечение этого параметра (приближение к единице снизу) будет приводитьк

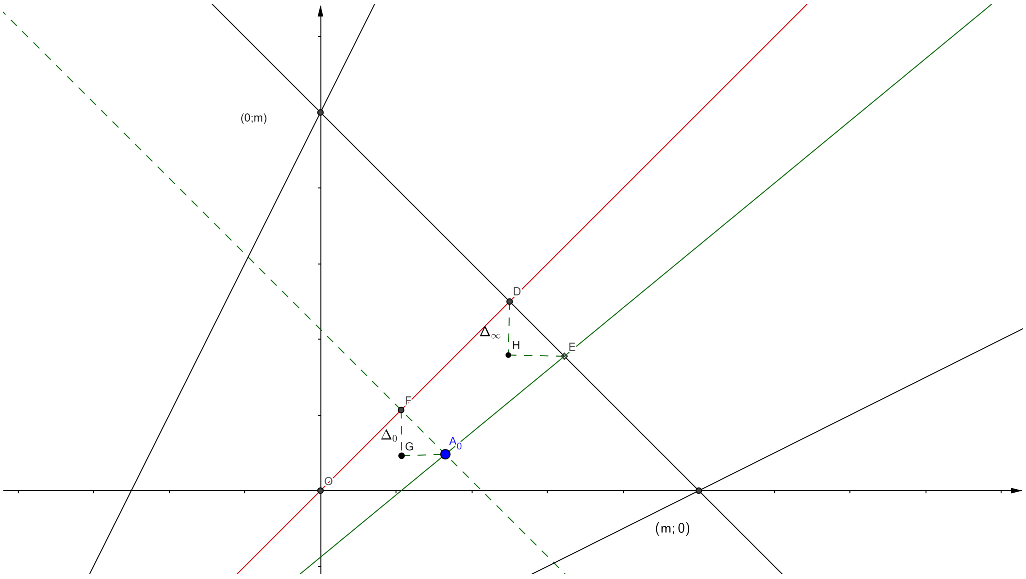

Рис. 6: Рыночные разрывы в модели

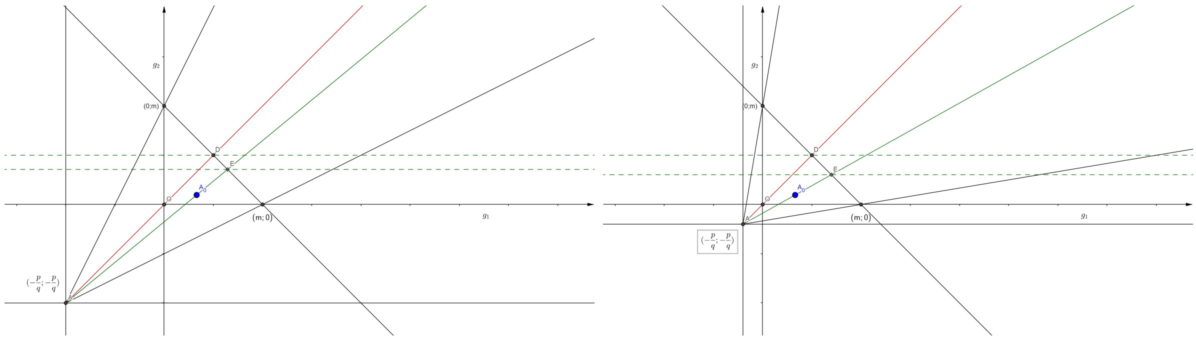

Рис. 7: Изменение q в большую сторону приводит к росту рыночного разрыва

росту величины итогового разрыва, поскольку стационарная прямая будет удаляться от вершины конуса, содержащего любую из интересующих нас траекторий. Формально увеличение разрыва можно пронаблюдать в функции итогового разрыва (она линейна по m, коэффициент положителен в силу неравенства $\hat{c} > 1$):

$$\lim_{t\to\infty} \Delta(t) = \Big(\hat{c}(A,B,a,b) - 1\Big) \cdot \frac{a}{b} + \Big(\hat{c}(A,B,a,b) - 1\Big) \cdot \frac{m(Bb+a) + a(B-A)}{(A+B)b + 2a}$$

- Параметр q, отвечающий за скорость диффузии в сети.

Геометрически, от q зависит положение вершины конуса, а на практике значение этого параметра определяется структурой сети, поэтому было бы странно полагать его различным для двух фирм, пытающихся войти на один и тот же рынок.

С ростом q вершина приближается к началу координат, что можно проинтерпретировать так: происходит событие (например, появление мобильной связи, нового бесплатного мессенджера), по причине которого повышается плотность сети, что положительно сказывается на скорости распространения информации, а значит, усиливает сетевой эффект. Освоение товара обеих фирм потребителями ускоряется, переход к равновесию происходит быстрее (достаточно вспомнить интерпретацию этого параметра в модели Басса, где наиболее быстрорастущая часть $S-$образной кривой поределялась именно его значением). Изначальный разрыв успевает увеличиться на бОльшую величину, чем в исходной ситуации.

- Параметры p_1, p_2, отражающие эффективность рекламы как способа распространения информации о товаре до вступления в силу сетевого эффекта.

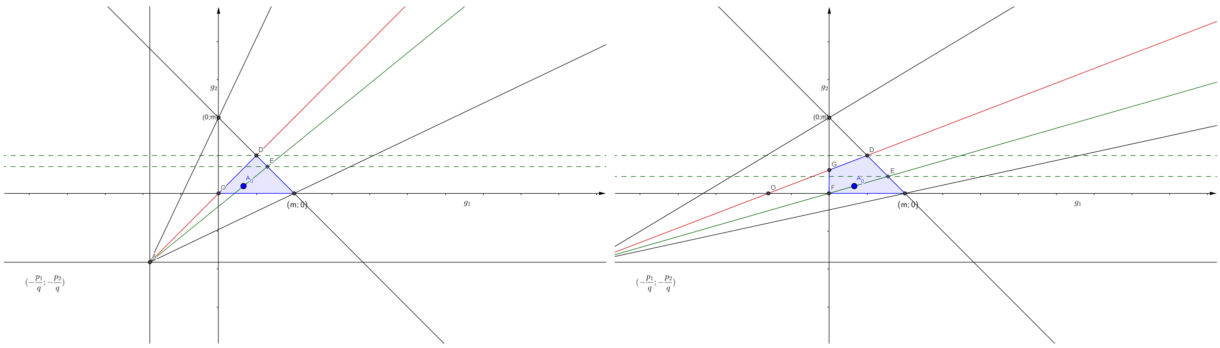

Рис. 8: Изменение p_1 в большую сторону приводит к росту рыночного разрыва и, при прочих равных, увеличению исходного выигрышного множества Ω_1

Без ограничения общности, будем исследовать влияние на итоговое равновесие параметра p_1. Предположим, что он увеличивается (например, первая фирма вложила некоторый существенный объем средств в рекламную кампанию),смотри *рисунок 8* (подразумевается, что $p_1 > p_2$).

Интуитивно, это должно, при прочих равных, дать первой фирме некоторое преимущество по сравнению со второй фирмой. Так и происходит, геометрически увеличение параметра p_1 приводит к сдвигу влево вертикальной стационарной прямой (задается уравнением $g_1 = -\frac{p_1}{q}$), что в свою очередь приводит к смещению вершины конуса вниз по стационарной прямой. Чтобы увидеть то преимущество, которое получает первая фирма, введем понятие *исходного выигрышного множества* Ω_1 :

$$\Omega_1 = \left\{(A, B)\Big| \lim_{t\to\infty}(g_1(t)) > \lim_{t\to\infty}(g_2(t))\right\}$$

Содержательно, это множество всех исходных ситуаций (начальных условий), при которых первая фирма в итоге получает более 50% рынка. Такого рода требование в дальнейшем будем называть *исходным выигрышным критерием.* Критерий может основываться не только на занятой доле рынка, но и на величине разрыва, разнице в прибылях и т.д. В нашем случае это пространство под l_* внутри треугольника, отсекаемого наклонной стационарной прямой.

- Влияние исходного положения (A, B) на исход взаимодействия системы отражен в концепции исходного выигрышного множества. Стоит добавить, что внутри своего выигрышного множества фирма предпочитает ту точку, в которой исходный разрыв больше (в силу возрастания разрыва по времени)

Моделирование цикла победителя

До сих пор наличие и размер рыночного разрыва никак не интерпретировались, и на данном этапе мы знаем только то, что существующий разрыв имеет тенденцию к увеличению, скорость роста разрыва напрямую зависит от параметров модели. Однако, кто считается «победителем» в этой конкурентной борьбе?

Пусть типичный агент (вершина в сети, в которой происходит диффузия информации) обладает тривиальной функцией полезности:

$$u_i = \mu \cdot g_i$$

Под g_i в данном случае понимается численность группы, в которой состоит агент, $\mu \in \mathbb{R}_++$. Пусть издержки переключения с одной группы на другую постоянны и равны c.В таком случае, в любой момент времени агент сравнивает полезности от двух взаимоисключающих действий: остаться в действующей группе, или переключится на другую (в нашем случае для двух фирм - на единственного конкурента).

Полезность i-го агента от переключения:

$$u_i = \mu \cdot g_{-i} - c$$

Находим точку безразличия:

$$\mu \cdot g_{-i} - c = \mu \cdot g_i$$

$$\mu \cdot (g_{-i} - g_i) = c$$

Отсюда видно, что если разрыв Δ в какой-то момент превышает величину $\frac{c}{\mu}$, преверженцы проигрывающей фирмы, несмотря на издежки переключения, начинают пользоваться услугами (или работать на, зависит от интерпретации) выигрывающей борьбу фирмы. Отсюда, задача для фирмы, пытающейся занять весь рынок ставится так: добиться разрыва в $\frac{c}{\mu} + \varepsilon$ на конечном временном горизонте.

Заметим, что такое рассуждение можно обобщить для произвольной «хорошей» функции полезности

$$u_i = \phi(g_i), \quad \phi(\cdot) \in C^2, \quad \frac{df}{dg_i} > 0, \quad \frac{d^2 f}{dg_i^2} < 0, \quad \lim_{g_i \to 1} \phi(g_i) = +\infty, \quad \lim_{g_i \to 0} \phi(g_i) = 0$$

В такой постановке для поиска целевой величины разрыва придется решить задачу $\phi(g_{-i}) - \phi(g_i) = c$.

Учитывая, что функция $\phi(\cdot)$ монотонно возрастает на $[0; 1]$ и принимает произвольные значения от 0 до $+\infty$, для любого $c > 0$ найдется разрыв между g_i и g_{-i} достаточно большой, чтобы при подстановке в уравнение краевых значений мы получили тождество. Единственное, что может предотвратить возникновение цикла победителя: удачные начальные условия. Требуемая величина разрыва может не достигаться, поскольку, например, препдполагает $|g_i - g_{-i}| = 0.9$, а начальные условия имеют вид $A = 0.1, \quad B = 0.1$.

Дальнейшие направления исследования

Естественным продолжением данного исследования станет проверка описанной модели на данных (как на реальных, так и на иммитированных различными методиками сетях, в т.ч. случаные графы Эрдёша-Реньи, small-world графы, k-регулярные графы). Из теоретических расширений можно выделить следующие:

1. Рекламный параметр p, который в модели вводился как заданный и постоянный можно определять в каждый момент времени *внутри* модели, например, с помощью рекламной модели Видаля-Вольфа.

2. Видится интересным рассмотрение и влияния непредусмотренных внешних шоков на параметры p_i, q, происходящих в некоторый момент времени t_* между началом взаимодействия и его завершением, как с закреплением на новом значении, так и с возвратом на исходную магистраль (в последнем случае хочется уметь оценивать влияние такого возмущения на итоговое равновесие).

3. Также естественным расширением может стать решение задачи в общем виде, для n фирм (хотя, если не вдаваться в детали, можно предположить, что существующие на рынке на момент входа фирмы представляют из себя единое целое и анализировать при помощи частного случая модели $n = 2$).

4. Отдельный интерес представляет определение критерия, относительно которого в каждом конкретном приложении стоит строить *исходное выигрышное множество*. Разумеется, они могут быть намного сложнее, чем тривиальная «половина доступного рынка».

5. Остается открытым вопрос оптимального решения задачи рыночной борьбы с учетом начальных условий и *издержек* фирм, теоретико-игровые и поведенческие аспекты взаимодействия фирм (комминтменты, теория сигналов).

Заключение

Рассмотренная модель позволяет явно определить зависимость итогового равновесия от исходных параметров диффузии информации (в том числе, от параметров сети потребителей, их частных функций полезности, количества и конфигурации связей между агентами). Подобный подход позволяет также исследовать различные шоки, происходящие на рынке инновационного товара, выявить оптимальную реакцию на эти возмущения системы.

Список литературы

[1] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование, — Успехи Физических Наук, том 8, с. 13-34. — 1928

[2] Колмогоров А.Н. Качественное изучение математических моделей популяций — Проблемы кибернетики, вып. 25 - М.: Наука, 1972, с. 101 - 106

[3] Arnold V. I. Catastrophe Theory,— 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag. — 1992

[4] F. M. Bass A New Product Growth for Model Consumer Durables, — Management Science, Vol. 15, No. 5, Theory Series, pp. 215-227, January 1969

[5] Griliches Z. Hybrid Corn: An Exploration in the Economics of Technological Change, — Econometrica, Vol. 25, No. 4 , pp. 501-522, — October 1957

[6] Satoh D. A Discrete Bass Model and Its Parameter Estimation, — Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.44, №1.— March 2001.

[7] Vidale, M.L. An Operations Research Study of Sales Response to Advertising, — M.L. Vidale, H.B. Wolfe, — Operations Research – № 5 – pp. 370 – 381, 1957