Informatica Teorica

Massimo Perego

Contents

1 Introduzione

Si "contrappone" all'informatica applicata, ovvero qualsiasi applicazione dell'informatica atta a raggiunger uno scopo, dove l'informatica è solamente lo strumento per raggiungere in maniera efficace un obiettivo.
Con "*informatica teorica*" l'oggetto è l'informatica stessa, si studiano i fondamenti della disciplina in modo rigoroso e scientifico. Può essere fatto ponendosi delle questioni fondamentali: il *cosa* e il *come* dell'informatica, ovvero cosa è in grado di fare l'informatica e come è in grado di farlo.

Cosa: L'informatica è "la disciplina che studia l'informazione e la sua elaborazione automatica", quindi l'oggetto sono l'informazione e i dispositivi di calcolo per gestirla; scienza dell'informazione. Diventa lo studio come risolvere automaticamente un problema. Ma tutti i problemi sono risolvibili in maniera automatica? Cosa è in grado di fare l'informatica?

La branca dell'informatica teorica che studia cosa è risolvibile si chiama **Teoria della Calcolabilità**, studia cosa è calcolabile per via automatica. Spoiler: non tutti i problemi sono risolvibili per via automatica, e non potranno mai esserlo per limiti dell'informatica stessa. Cerchiamo una caratterizzazione generale di cosa è calcolabile e cosa no, si vogliono fornire strumenti per capire ciò che è calcolabile. La caratterizzazione deve essere fatta matematicamente, in quanto il rigore e la tecnica matematica permettono di trarre conclusioni sull'informatica.

Come: Una volta individuati i problemi calcolabili, come possiamo calcolarli? Il dominio della **Teoria della Complessità** vuole descrivere le risoluzione dei problemi tramite mezzi automatici in termini di risorse computazionali necessarie. Una "risorsa computazionale" è qualsiasi cosa che viene consumata durante l'esecuzione per risolvere il problema, come possono essere elettricità o numero di processori, generalmente i parametri più importanti considerati sono tempo e spazio di memoria. Bisognerà definire in modo preciso cosa si intende con "tempo" e "spazio". Una volta fissati i parametri bisogna definire anche cosa si intende con "risolvere efficientemente" un problema, in termini di tempo e spazio.

La teoria della calcolabilità dice quali problemi sono calcolabili, la teoria della complessità dice, all'interno dei problemi calcolabili, quali sono risolvibili efficientemente.

1.1 Ripasso di Matematica

Funzione: Una funzione f dall'insieme A all'insieme B è una legge che dice come associare a ogni elemento di A un elemento di B. Si scrive

$$f : A \to B$$

E chiamiamo A dominio e B codominio. Per dire come agisce su un elemento si usa $f(a) = b$, b è l'immagine di a secondo f (di conseguenza a è la controimmagine).
Per definizione di funzione, è possibile che elementi del codominio siano raggiungibili da più elementi del dominio, ma non il contrario. Possiamo classificare le funzioni in base a questa caratteristica:

- **Iniettiva:** $f : A \to B$ è iniettiva sse $\forall a, b \in A$, $a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$
- **Suriettiva:** $f : A \to B$ è suriettiva sse $\forall b \in B$, $\exists a \in A : f(a) = b$: un altro modo per definirla è tramite l'insieme immagine di f, definito come
$$\mathrm{Im}_f = \{b \in B : \exists a, f(a) = b\} = \{f(a) : a \in A\}$$
Solitamente $\mathrm{Im}_f \subseteq B$, ma f è suriettiva sse $\mathrm{Im}_f = B$;
- **Biettiva:** $f : A \to B$ è biettiva sse è sia iniettiva che suriettiva, ovvero
$$\begin{matrix} \forall a, b \in A, a \neq b : & f(a) \neq f(b) \\ \forall b \in B, \exists a \in A : & f(a) = b \end{matrix} \implies \forall b \in B, \exists! a \in A : f(a) = b$$

Inversa: Per le funzioni biettive si può naturalmente associare il concetto di "inversa": dato $f : A \to B$ biettiva, si definisce inversa la funzione $f^{-1} : B \to A$ tale che $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$.

Composizione di funzioni: Date $f : A \to B$ e $g : B \to C$, f composto g è la funzione $g \circ f : A \to C$ definita come $g \circ f(a) = g(f(a))$. Generalmente non commutativo, $f \circ g \neq g \circ f$, ma è associativo.

Funzione identità: Dato l'insieme A, la funzione identità su A è la funzione $i_A : A \to A$ tale che $i_A(a) = a$, $\forall a \in A$.

Un'altra possibile definizione per l'inversa diventa:

$$f^{-1} \circ f = i_A \wedge f \circ f^{-1} = i_B$$