$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$$

$$S_i'(x) = b_i + c_i(x - x_i) + \frac{d_i}{2}(x - x_i)^2$$

$$S_i''(x) = c_i + d_i(x - x_i)$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}, i = 1..n$$

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6f_i$$

$$\begin{cases} c_0 = A \\ h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6f_i,\ i = 1..n-1 \\ c_{n-1} + 2c_n = \frac{6}{h_n}(B - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}) \end{cases}$$

Для удобства решения приведем систему к виду:

$$\begin{cases} C_0 c_0 + B_0 c_1 = F_1 \\ A_i c_{i-1} + C_i c_i + B_i c_{i+1} = F_i,\ i = 1..n-1 \\ A_n c_{n-1} + C_n c_n = F_n \end{cases}$$

Следовательно:

$C_0 = 1$ $\quad C_i = 2(h_i + h_{i+1}),\ i = 1..n-1$ $\quad Cn = 2$

$B_0 = 0$ $\quad B_i = h_{i+1},\ i = 1..n-1$

$A_i = h_i,\ i = 1..n-1$ $\quad A_n = 1$

$F_1 = A$ $\quad F_i = 6f_i,\ i = 1..n-1$ $\quad F_n = \frac{6}{h_n}(B - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n})$

Пусть $c_0 = \mu_1 c_1 + \nu_1$, тогда

$A_1(c_1 + \nu_1) + C_1 c_1 + B_1 c_2 = F_1$

$$c_1 = \frac{-B_1}{C_1 + A_1\mu_1}c_2 + \frac{F_1 - A_1\nu_1}{C_1 + A_1\mu_1}$$

Пусть $\mu_2 = \frac{-B_1}{C_1 + A_1\mu_1}, \nu_2 = \frac{F_1 - A_1\nu_1}{C_1 + A_1\mu_1}$

Аналогично по i=1..n-1 выразим c_i

$A_i(c_i + \nu_i) + C_i c_i + B_i c_{i+1} = F_i$

$$c_{i+1} = \frac{-B_i}{C_i + A_i\mu_i}c_{i+1} + \frac{F_i - A_i\nu_i}{C_i + A_i\mu_i}$$

Пусть $\mu_{i+1} = \frac{-B_i}{C_i + A_i\mu_i}, \nu_{i+1} = \frac{F_i - A_i\nu_i}{C_i + A_i\mu_i}$

Пусть $c_{n-1} = \mu_n c_n + \nu_n$. Зная, что $A_n c_{n-1} + C_n c_n = F_n$, получим:
$x_n = \dfrac{F_n - A_n \nu_n}{C_n + A_n \mu_n}$.

Вернемся к исходному виду. Получим:

$$\mu_{i+1} = \frac{-B_i}{C_i + A_i \mu_i} = \frac{-h_{i+1}}{2(h_i + h_{i+1}) + h_i \mu_i},$$
$$\nu_{i+1} = \frac{F_i - A_i \nu_i}{C_i + A_i \mu_i} = \frac{6f_i - h_i \nu_i}{2(h_i + h_{i+1}) + h_i \mu_i}$$

Получим алгоритм для решения исходной системы уравнений методом трехточечной прогонки:

1 шаг

$$\mu_1 = -\frac{B_0}{C_0} = -\frac{0}{1} = 0,$$
$$\nu_1 = \frac{F_0}{C_0} = \frac{A}{1} = A.$$

2 шаг

Для всех $i = 1..n-1,\ i++$
Начало цикла

$$D_i = C_i + A_i \mu_i = 2(h_i + h_{i+1}) + h_i \mu_i = 2(x_{i+1} - x_{i-1}) + (x_i - x_{i-1})\mu_i$$

$$\mu_{i+1} = \frac{h_{i+1}}{D_i} = \frac{x_{i+1} - x_i}{D_i}$$

$$\nu_{i+1} = \frac{6f_i - h_i \nu_i}{D_i} = \frac{6f_i - (x_i - x_{i-1})\nu_i}{D_i}$$

Конец цикла

3 шаг

$$c_n = \frac{F_n - A_n \nu_n}{C_n + A_n \mu_n} = \frac{\frac{6}{h_n}(B - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}) - \nu_n}{2 + \mu_n} = \frac{\frac{6}{x_n - x_{n-1}}(B - \frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}) - \nu_n}{2 + \mu_n}$$

4 шаг

Для всех $i = n-1..0,\ i--$
Начало цикла

$$c_i = \mu_{i+1} c_{i+1} + \nu_{i+1}$$

Конец цикла