

PTC5014 – Controle Não-Linear – Lista 3

Marcelo Monari Baccaro - 8989262

Controle adaptativo. Considere um sistema cujo modelo dinâmico é dado por $\dot{x} = -ax + bu$, sendo x a variável de interesse (a ser controlada), u a entrada e a, b parâmetros não conhecidos. Sabe-se apenas que $b > 0$. Para as simulações, considere $a = 1/100$ e $b = 2$.

1) (MRAC) O objetivo do controlador adaptativo a ser desenvolvido é prover uma resposta em malha fechada de tal forma que o sistema se comporte o mais próximo possível do modelo de referência dado por $\dot{x}_m = -a_m x_m + b_m v$, sendo r a referência (set point) e $a_m = b_m = 1/10$. Projete o controlador adaptativo por modelo de referência, indicando as leis de adaptação e controle e demonstre que o erro de acompanhamento $x - x_m \rightarrow 0$. Faça simulações considerando estimativas iniciais para a e b ($\hat{a} = 2/100$ e $\hat{b} = 1$) com entrada degrau ou senoidal com período de 2s. Verifique se o erro de acompanhamento tende a 0 e se as estimativas paramétricas estão tendendo ao valor dos parâmetros reais.

1.1) Projeto do controlador

Sistema: $\dot{x} = -a \cdot x + b \cdot u$

Modelo: $\dot{x}_m = -a_m \cdot x_m + b_m \cdot v$

1.1.1) Erro de acompanhamento

$$\begin{aligned} z &= x - x_m \\ \dot{z} &= \dot{x} - \dot{x}_m \\ &= -a \cdot x + b \cdot u - (-a_m \cdot x_m + b_m \cdot v) \\ &= -a_m \cdot z + b \cdot (\tilde{a}_x \cdot x + \tilde{a}_v \cdot v) \end{aligned}$$

$$\tilde{a}_x = \hat{a}_x - a_x^*, \text{ para } a_x^* = \frac{a - a_m}{b}$$

$$\tilde{a}_v = \hat{a}_v - a_v^*, \text{ para } a_v^* = \frac{b_m}{b}$$

Sendo que \tilde{a} é o erro de acompanhamento, \hat{a} é o estimador e a^* é o valor ideal para o qual o estimador converge. Ao utilizar a lei de controle $u = \hat{a}_x \cdot x + \hat{a}_v \cdot v$, em regime permanente, temos que $\hat{a}_x = a_x^*$ e $\hat{a}_v = a_v^*$, assim dinâmica do sistema passa a ser

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a \cdot x + b \cdot u \\ &= -a \cdot x + b \cdot (\hat{a}_x \cdot x + \hat{a}_v \cdot v) \\ &= -a \cdot x + b \cdot (a_x^* \cdot x + a_v^* \cdot v) \\ &= -a \cdot x + b \cdot \left(\frac{a - a_m}{b} \cdot x + \frac{b_m}{b} \cdot v \right) \\ &= -a_m \cdot x + b_m \cdot v \end{aligned}$$

Desta maneira, a dinâmica do sistema passa a ser idêntica à dinâmica do modelo.

1.1.2) Método direto de Lyapunov

Função positiva definida candidata a função de Lyapunov:

$$V = \frac{z^2}{2} + \frac{|b|}{2\gamma} \cdot (\tilde{a}_x^2 + \tilde{a}_v^2)$$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= z \cdot \dot{z} + \frac{|b|}{\gamma} \cdot (\tilde{a}_x \cdot \dot{\tilde{a}}_x + \tilde{a}_v \cdot \dot{\tilde{a}}_v) \\ &= z \cdot (-a_m \cdot z + b \cdot (\tilde{a}_x \cdot x + \tilde{a}_v \cdot v)) + \frac{|b|}{\gamma} \cdot (\tilde{a}_x \cdot \dot{\tilde{a}}_x + \tilde{a}_v \cdot \dot{\tilde{a}}_v) \\ &= -a_m \cdot z^2 + \tilde{a}_x \cdot \left(z \cdot b \cdot x + \frac{|b|}{\gamma} \cdot \dot{\tilde{a}}_x \right) + \tilde{a}_v \cdot \left(z \cdot b \cdot v + \frac{|b|}{\gamma} \cdot \dot{\tilde{a}}_v \right)\end{aligned}$$

$$z \cdot b \cdot x + \frac{|b|}{\gamma} \cdot \dot{\tilde{a}}_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\tilde{a}}_x = -\frac{b}{|b|} \cdot \gamma \cdot z \cdot x = -\text{sgn}(b) \cdot \gamma \cdot z \cdot x$$

$$z \cdot b \cdot v + \frac{|b|}{\gamma} \cdot \dot{\tilde{a}}_v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\tilde{a}}_v = -\frac{b}{|b|} \cdot \gamma \cdot z \cdot v = -\text{sgn}(b) \cdot \gamma \cdot z \cdot v$$

Assim, temos que $\dot{V} = -a_m \cdot z^2$, que é uma função negativa definida, o que implica que o sistema é estável segundo Lyapunov para as leis de adaptação de $\hat{\tilde{a}}_x$ e $\hat{\tilde{a}}_v$ descritas acima. Desta maneira, é garantido que o erro de acompanhamento (z) tenda a zero, mas, com relação aos erros de estimação \tilde{a}_x e \tilde{a}_v , apenas é garantido que eles fiquem limitados. Como $b > 0$, então $\text{sgn}(b) = 1$.

1.1.3) Problema de rastreamento da dinâmica do modelo

$$\tilde{x}_m = x_m - r \quad \Rightarrow \quad \dot{\tilde{x}}_m = \dot{x}_m - \dot{r}$$

$$v = \frac{a_m \cdot x_m + w}{b_m}, \quad \text{para } w = \dot{r} - K_0 \cdot \tilde{x}_m$$

$$\dot{x}_m = -a_m \cdot x_m + b_m \cdot v = -a_m \cdot x_m + b_m \cdot \frac{a_m \cdot x_m + w}{b_m} = w = \dot{r} - K_0 \cdot \tilde{x}_m$$

$$\dot{x}_m - \dot{r} = \dot{\tilde{x}}_m = -K_0 \cdot \tilde{x}_m \quad \Rightarrow \quad \tilde{x}_m(t) = \tilde{x}_{m0} \cdot \exp(-K_0 \cdot (t - t_0))$$

Considerando, como objetivo de controle, que o sistema deve estar a 1% do valor em regime permanente após 0.5s, ou seja, o erro de rastreamento deve ser 1% do seu valor inicial após 0.5s, temos que o ganho do controlador é

$$\exp(-K_0 \cdot 0.5) = \frac{\tilde{x}_m}{\tilde{x}_{m0}} = \frac{0.01 \cdot \tilde{x}_{m0}}{\tilde{x}_{m0}} = 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad K_0 = \frac{\ln(0.01)}{-0.5} = 4 \cdot \ln(10) \cong 9.21$$

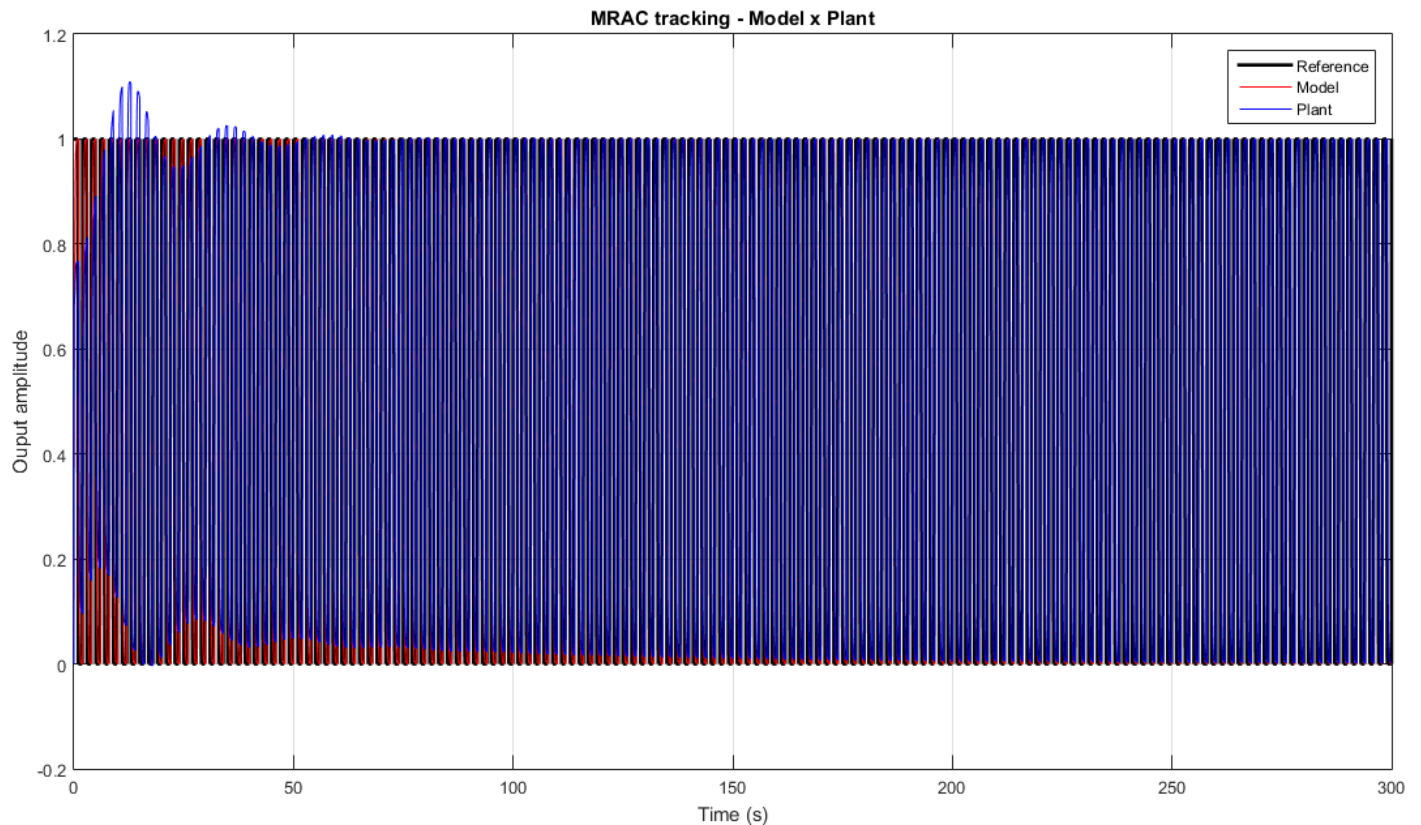
1.1.4) Controlador adaptativo MRAC

(1) Controle do erro de rastreamento da dinâmica do modelo: $w = \dot{r} - K_0 \cdot (x_m - r)$

- (2) Controle da dinâmica do modelo: $v = (a_m \cdot x_m + w)/b_m$
- (3) Dinâmica do modelo: $\dot{x}_m = -a_m \cdot x_m + b_m \cdot v$
- (4) Erro de acompanhamento: $z = x - x_m$
- (5) Lei de adaptação do parâmetro associado a x : $\dot{\hat{a}}_x = -\gamma \cdot z \cdot x$
- (6) Lei de adaptação do parâmetro associado a v : $\dot{\hat{a}}_v = -\gamma \cdot z \cdot v$
- (7) Controlador da planta: $u = \hat{a}_x \cdot x + \hat{a}_v \cdot v$

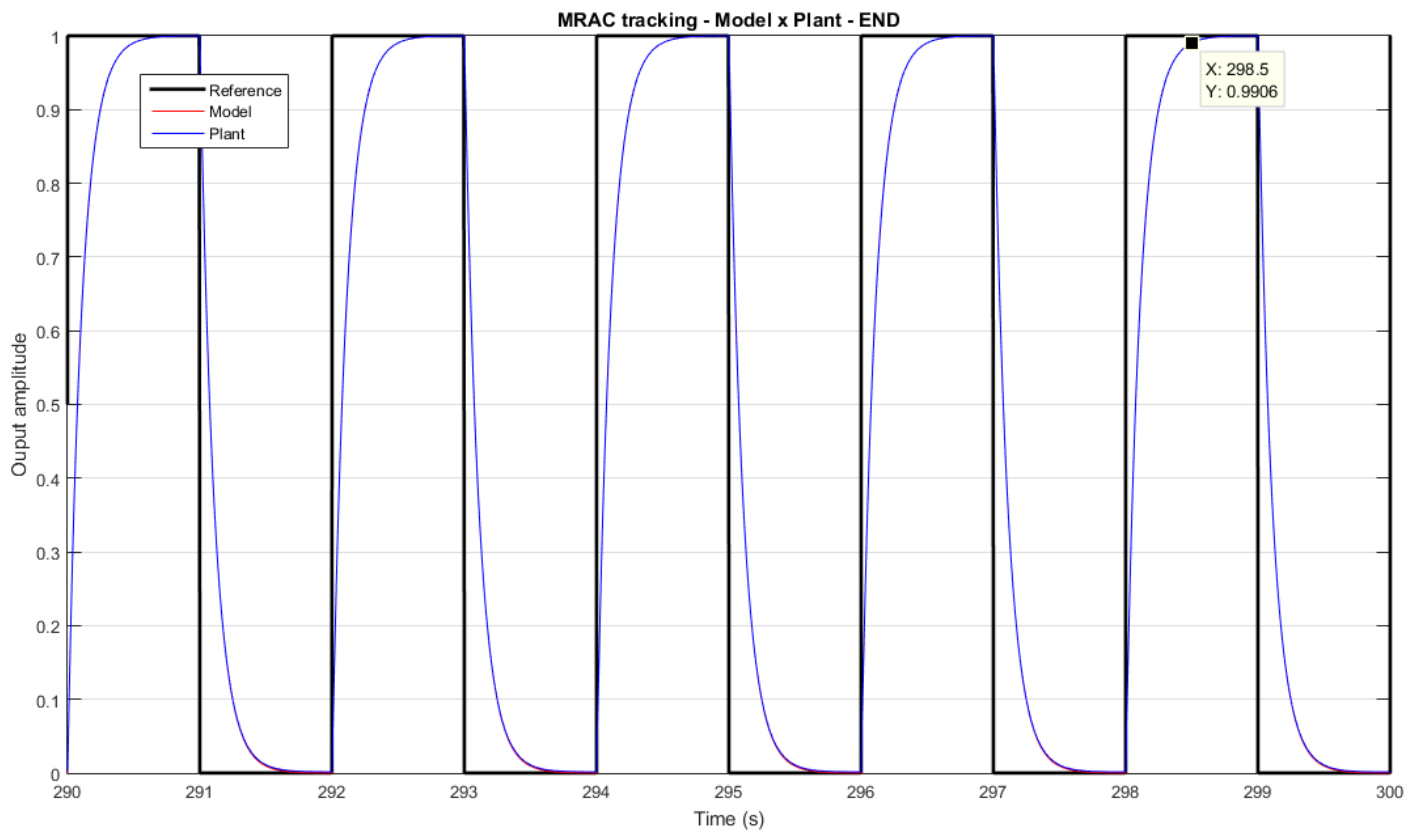
1.2) Resultados de simulação

1.2.1) Saída da planta



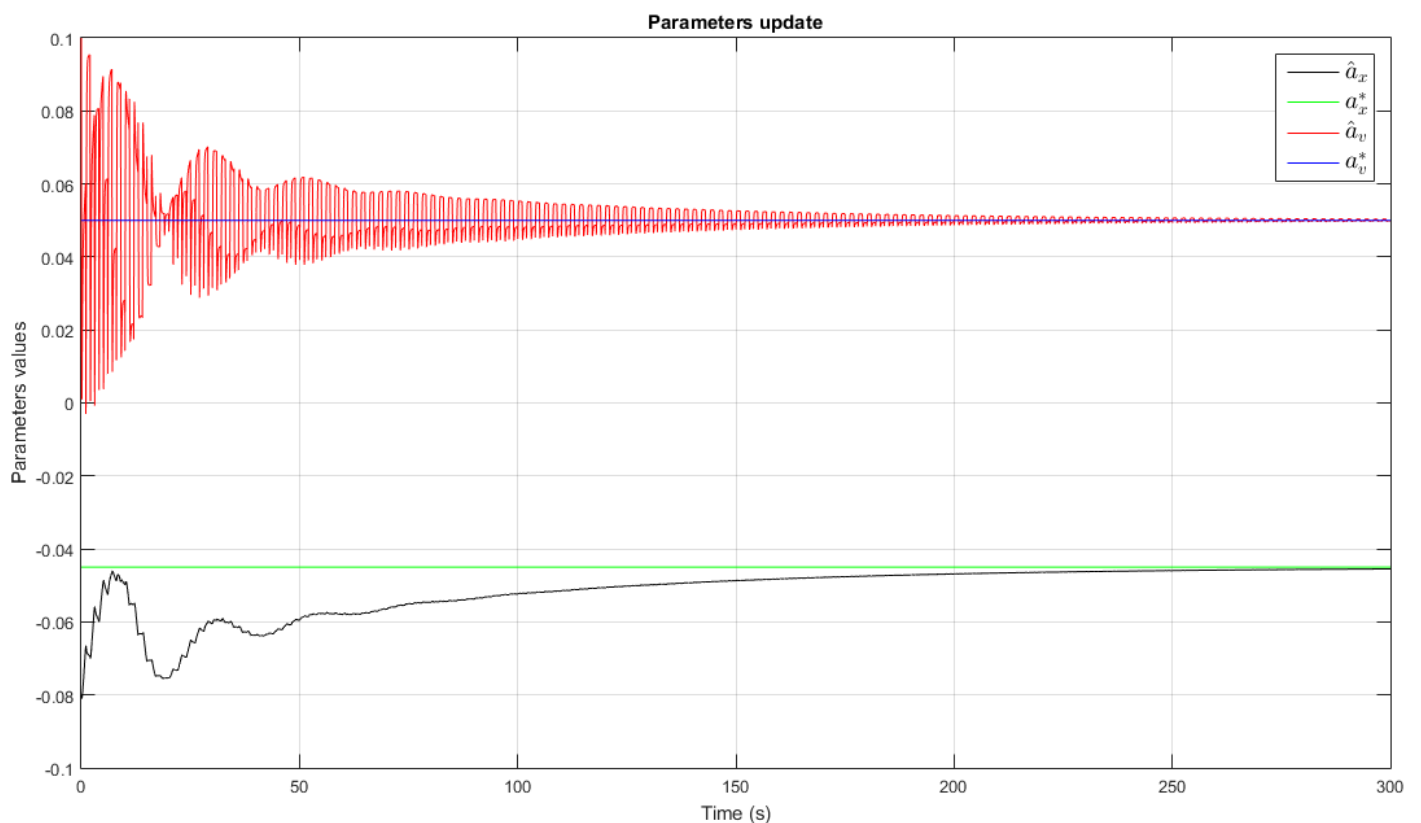
Em 250s de simulação, pode-se dizer que a dinâmica da planta está acompanhando a dinâmica do modelo. A velocidade de convergência da estimação, e consequentemente do acompanhamento, pode ser controlada através do parâmetro γ das leis de adaptação, de tal forma que, conforme aumenta-se o valor, mais rápida é a convergência, entretanto menor é a precisão da estimação.

1.2.2) Saída da planta com trecho final ampliado



Como esperado, a dinâmica da planta acompanha fielmente a dinâmica do modelo, além disso, o critério do erro de rastreamento ser 1% do seu valor inicial após 0.5s é obedecido.

1.2.3) Adaptação dos parâmetros

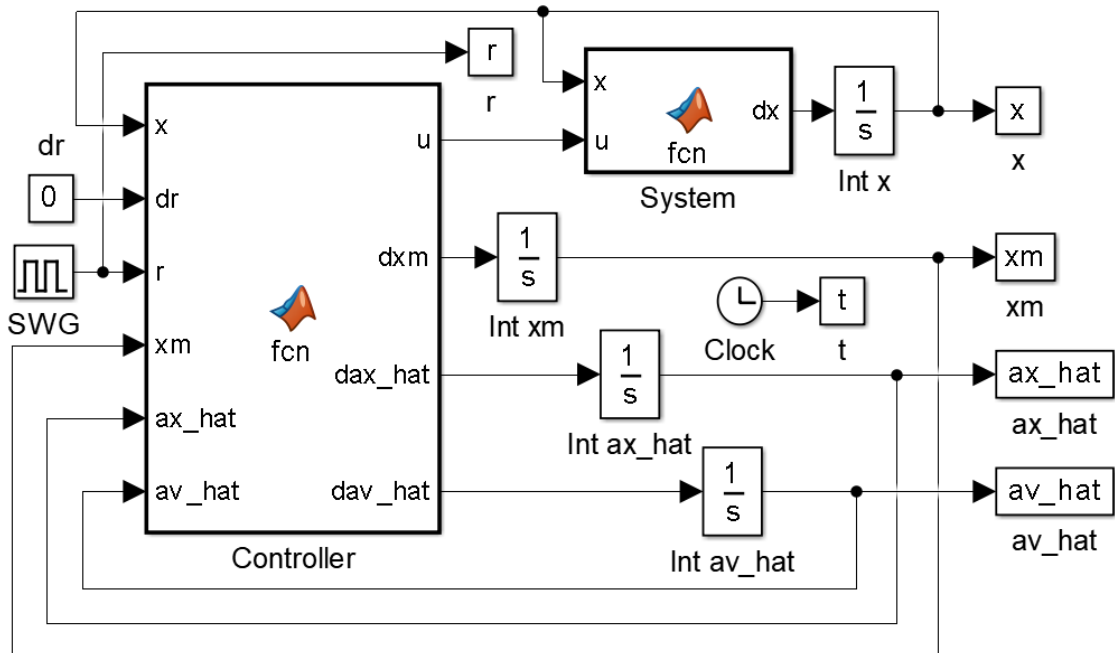


Ambos estimadores convergem para os seus respectivos valores ideais. Entretanto, o estimador \hat{a}_v apresenta uma oscilação rápida entre valores pequenos, o que pode gerar problemas ao tentar implementar o

controlador MRAC num sistema digital devido a erros de precisão numérica, além do atraso de amostragem e atualização do controlador.

1.3) Programas

1.3.1) Diagrama de blocos no Simulink



1.3.2) Main

```
close, clear, clc;
a = 0.01;
b = 2;

am = 0.1;
bm = 0.1;

a0_hat = 0.02;
b0_hat = 1;

K0 = -log(0.01)/0.5;
ax0_hat = (a0_hat - am) / b0_hat;
av0_hat = bm / b0_hat;
gamma = 0.1;

ax_str = (a - am) / b;
av_str = bm / b;

T_ref = 2;
tf = 300;
t_step = 1e-3;
sim('L3_Q1_Sim.slx');

figure(1), set(gcf,'color','w');
plot(t,r,'k','LineWidth',2), hold on, plot(t,xm,'r',t,x,'b'), hold off;
grid on, xlabel('Time (s)'), ylabel('Output amplitude');
legend('Reference','Model','Plant'), title('MRAC tracking - Model x Plant');

figure(2), set(gcf,'color','w');
plot(t,r,'k','LineWidth',2), hold on, plot(t,xm,'r',t,x,'b'), hold off;
```

```

grid on, xlabel('Time (s)'), ylabel('Ouput amplitude'), xlim([tf-10,tf]);
legend('Reference','Model','Plant'), title('MRAC tracking - Model x Plant - END');

figure(3), set(gcf,'color','w');
plot(t,ax_hat,'k'), hold on, plot([t(1),t(end)],[ax_str,ax_str],'g');
plot(t,av_hat,'r'), plot([t(1),t(end)],[av_str,av_str],'b'), hold off, grid on;
xlabel('Time (s)'), ylabel('Parameters values'), title('Parameters update');
legend({'$\hat{a}_{\{x\}}$', '$a^{\{*\}}_{\{x\}}$', '$\hat{a}_{\{v\}}$', '$a^{\{*\}}_{\{v\}}$', ...
'Interpreter','latex','FontSize',14});

```

1.3.3) Bloco “System”

```

function dx = fcn(x, u, a, b)
dx = -a*x + b*u;

```

1.3.4) Bloco “Controller”

```

function [u, dxm, dax_hat, dav_hat] = fcn(x,dr,r,xm,ax_hat,av_hat, am, bm, gamma, K0)
vm = dr - K0 * (xm - r);
um = (am*r + vm) / bm;
dxm = -am*xm + bm*um;
z = x - xm;
dax_hat = - gamma * z * x;
dav_hat = - gamma * z * um;
u = ax_hat*x + av_hat*um;

```



Controle adaptativo. Considere um sistema cujo modelo dinâmico é dado por $\dot{x} = -ax + bu$, sendo x a variável de interesse (a ser controlada), u a entrada e a, b parâmetros não conhecido. Sabe-se apenas que $b > 0$. Para as simulações, considere $a = 1/100$ e $b = 2$.

2) (STC) O objetivo do controlador adaptativo a ser desenvolvido é prover uma resposta em malha fechada com tempo de estabilização 2% de 40s. Projete o controlador adaptativo STC a técnica de identificação de sistemas e a lei de controle utilizadas. Faça simulações considerando estimativas iniciais para a e b ($\hat{a} = 2/100$ e $\hat{b} = 1$) com entrada degrau ou senoidal com período de 2s. Verifique se o erro de acompanhamento tende a 0 e se as estimativas paramétricas estão tendendo ao valor dos parâmetros reais.

2.1) Projeto do controlador

2.1.1) Sistema filtrado

$$\dot{x}(t) = -a \cdot x(t) + b \cdot u(t) \quad \Rightarrow \quad s \cdot X(s) = -a \cdot X(s) + b \cdot U(s)$$

$$(s + \lambda_f) \cdot X(s) = (\lambda_f - a) \cdot X(s) + b \cdot U(s)$$

$$X(s) = (\lambda_f - a) \cdot \frac{X(s)}{s + \lambda_f} + b \cdot \frac{U(s)}{s + \lambda_f} = (\lambda_f - a) \cdot X_f(s) + b \cdot U_f(s)$$

$$x(t) = (\lambda_f - a) \cdot x_f(t) + b \cdot u_f(t) = \begin{bmatrix} x_f & u_f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_f - a \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{p}$$

2.1.2) Estimação por gradiente

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{v}^T \cdot \hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} x_f & u_f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_f - \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{v}^T \cdot \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{p} = \mathbf{v}^T \cdot (\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p}) = \mathbf{v}^T \cdot \tilde{\mathbf{p}}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}} = -\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}^2}{\partial \hat{\mathbf{p}}} = -\frac{\alpha}{2} \cdot 2\tilde{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{p}}} (\mathbf{v}^T \cdot \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{p}) = -\alpha \cdot \tilde{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} \Rightarrow \dot{\tilde{\mathbf{p}}} = -\alpha \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T \cdot \tilde{\mathbf{p}}$$

Da última equação, temos que o erro de estimação converge para zero.

$$\hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \lambda_f - \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\hat{\mathbf{p}}} = \begin{bmatrix} -\dot{\hat{a}} \\ \dot{\hat{b}} \end{bmatrix} = -\alpha \cdot \tilde{\mathbf{x}} \cdot \begin{bmatrix} x_f \\ u_f \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{a}} = \alpha \cdot \tilde{\mathbf{x}} \cdot x_f \\ \dot{\hat{b}} = -\alpha \cdot \tilde{\mathbf{x}} \cdot u_f \end{cases}, \text{ para } \tilde{\mathbf{x}} = (\lambda_f - a) \cdot x_f + b \cdot u_f - x$$

2.1.3) Controlador por imposição de polo com rastreamento

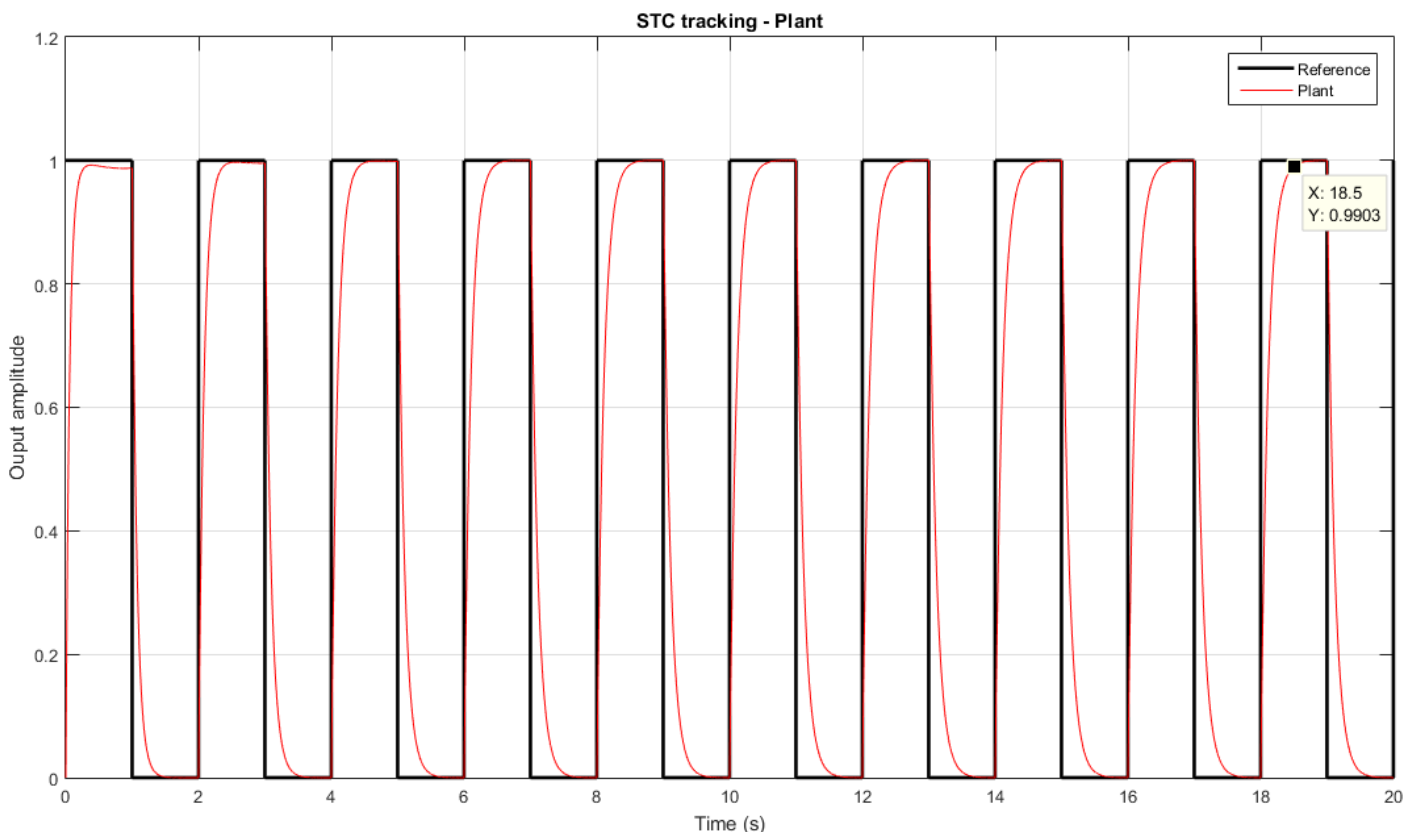
$$u = \frac{\hat{a} \cdot x + v}{\hat{b}}, \text{ para } v = \dot{r} - K_0 \cdot (x - r)$$

Copiei o exercício anterior ao invés de utilizar os critérios de performance do anunciado.

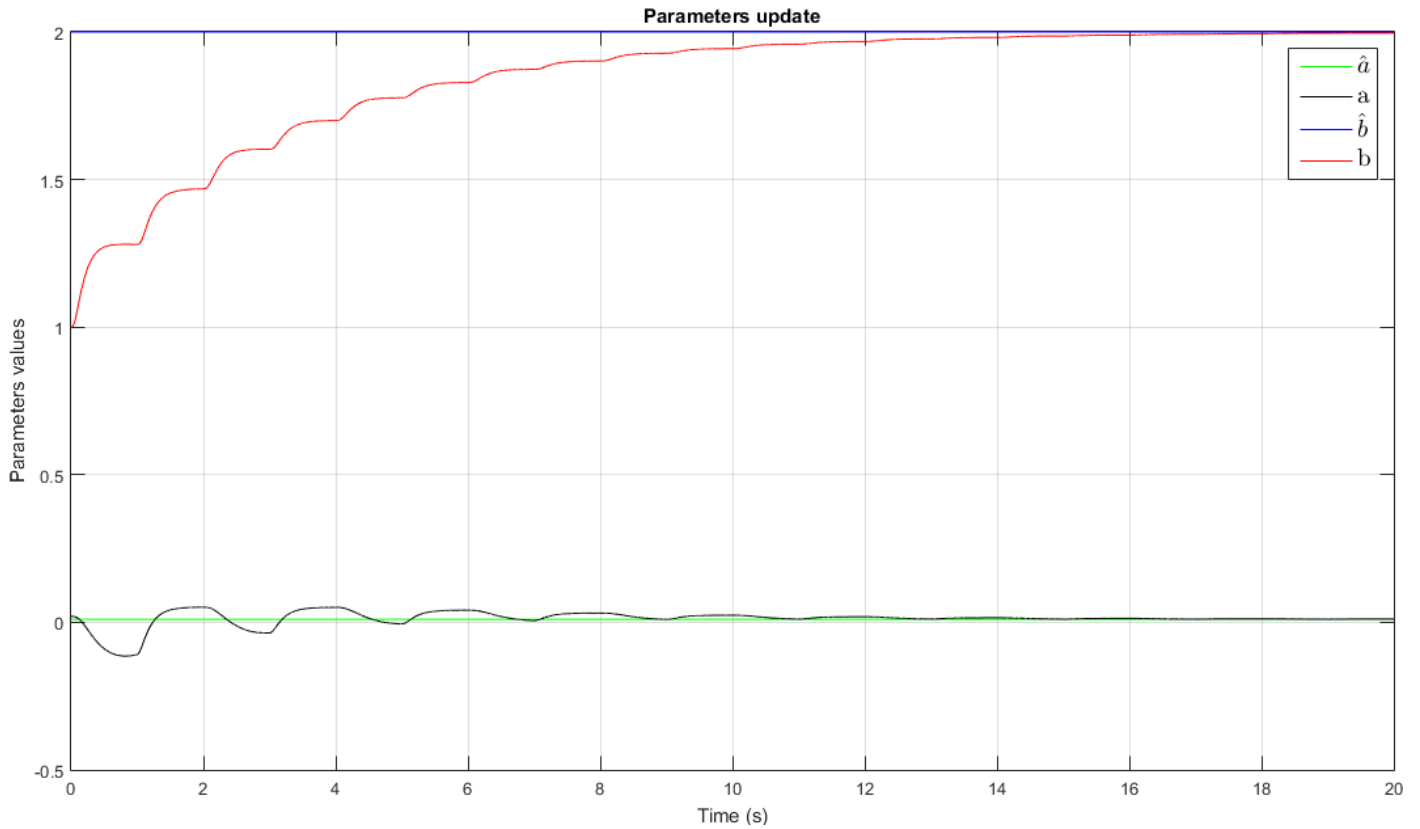
Considerando, como objetivo de controle, que o sistema deve estar a 1% do valor em regime permanente após 0.5s, ou seja, o erro de rastreamento deve ser 1% do seu valor inicial após 0.5s, temos que o ganho do controlador é $\exp(-K_0 \cdot 0.5) = 0.01$, ou seja, $K_0 \cong 9.21$.

2.2) Resultados de simulação

2.2.1) Saída da planta

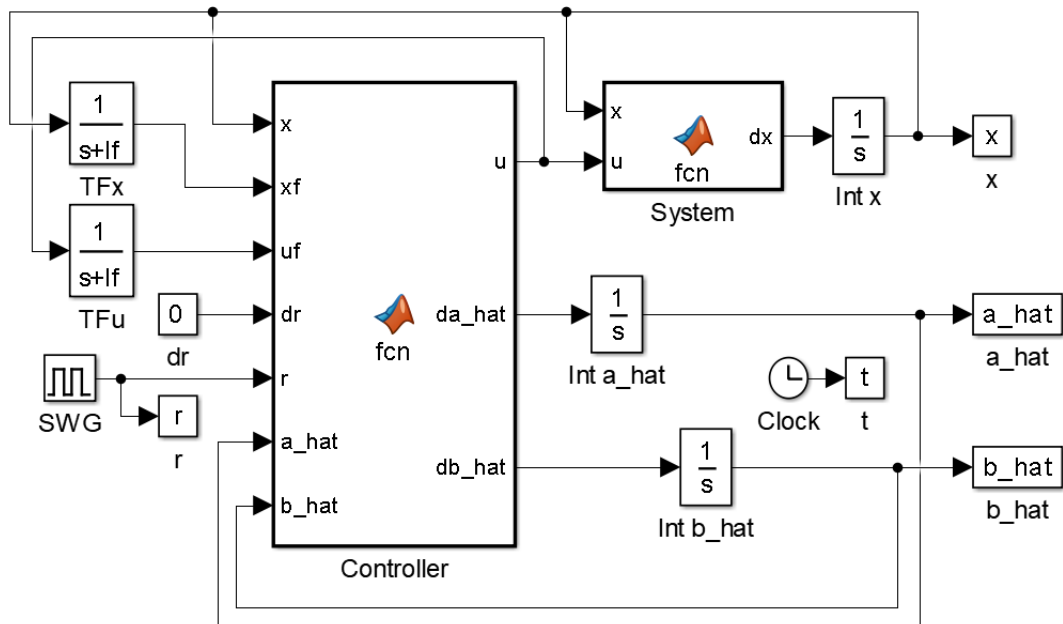


2.2.2) Evolução da estimação de parâmetros



2.3) Programas

2.3.1) Diagrama de blocos no Simulink



2.3.2) Main

```
close, clear, clc;
a = 0.01;
b = 2;
```



```

a0_hat = 0.02;
b0_hat = 1;

K0 = -log(0.01)/0.5;
alpha = 10;
lf = 3;

T_ref = 2;
tf = 20;
t_step = 1e-3;
sim('L3_Q2_Sim.slx');

figure(1), set(gcf,'color','w');
plot(t,r,'k','LineWidth',2), hold on, plot(t,x,'r'), hold off;
grid on, xlabel('Time (s)'), ylabel('Output amplitude');
legend('Reference','Plant'), title('STC tracking - Plant');

figure(2), set(gcf,'color','w');
plot([t(1),t(end)],[a,a],'g'), hold on, plot(t,a_hat,'k');
plot([t(1),t(end)],[b,b],'b'), plot(t,b_hat,'r'), hold off, grid on;
xlabel('Time (s)'), ylabel('Parameters values'), title('Parameters update');
legend({'$\hat{a}$','a','$\hat{b}$','b'},'Interpreter','latex','FontSize',14);

```

2.3.3) Bloco “System”

```

function dx = fcn(x, u, a, b)
dx = -a*x + b*u;

```

2.3.4) Bloco “Controller”

```

function [u, da_hat, db_hat] = fcn(x, xf, uf, dr, r, a_hat, b_hat, alpha, K0, lf)
v = dr - K0 * (x - r);
u = (a_hat * x + v) / b_hat;
x_tilde = xf * (lf - a_hat) + uf * b_hat - x;
da_hat = + alpha * x_tilde * xf;
db_hat = - alpha * x_tilde * uf;

```