

PMR5014 – Controle Não-Linear – Lista 2

Marcelo Monari Baccaro – 8989262

1) Considere o sistema abaixo. Determine a lei de controle que controla a saída y através da técnica de *feedback linearization* (linearização entrada-saída). Realize uma simulação impondo valores de dinâmica em malha fechada desejada, e verifique que suas especificações de controle foram atendidas.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

1.1) Projeto do controlador

Derivando a saída até aparecer a variável de controle:

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2$$

$$\ddot{y} = 2x_1 \cdot \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 2x_1 \cdot (x_1^2 + x_2) + u = 2x_1^3 + 2x_1x_2 + u$$

Vemos que a ordem relativa é 2 e a ordem do sistema também é 2, o que significa que o este sistema não tem dinâmica interna. Fazendo $u = v - 2x_1^3 - 2x_1x_2$, sendo $v = \ddot{y}_d - K_1 \cdot \dot{\tilde{y}} - K_0 \cdot \tilde{y}$, para $\tilde{y} = y - y_d$, $\dot{\tilde{y}} = \dot{y} - \dot{y}_d$ e $\ddot{\tilde{y}} = \ddot{y} - \ddot{y}_d$, temos que

$$\ddot{y} = v = \ddot{y}_d - K_1 \cdot \dot{\tilde{y}} - K_0 \cdot \tilde{y} \Rightarrow \ddot{\tilde{y}} + K_1 \cdot \dot{\tilde{y}} + K_0 \cdot \tilde{y} = 0$$

Equação característica: $s^2 + K_1 \cdot s + K_0 = 0 \Rightarrow (s - \lambda_1) \cdot (s - \lambda_2) = 0$, para $\lambda_{1,2} = -\sigma \pm j \cdot \omega_d$

$$\begin{cases} K_1 = -\lambda_1 - \lambda_2 = 2\sigma \\ K_0 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \sigma^2 + \omega_d^2 \end{cases}$$

Tempo de acomodação (critério de 2%): $t_s = 4/\sigma \Rightarrow \sigma = 4/t_s$

Sobressinal máximo: $M_p = \exp(-\pi \cdot \sigma/\omega_d) \Rightarrow \omega_d = -4\pi/(t_s \cdot \ln(M_p))$

$$\begin{cases} K_1 = -\lambda_1 - \lambda_2 = 2\sigma = 8/t_s \\ K_0 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \sigma^2 + \omega_d^2 = (4/t_s)^2 + (4\pi/(t_s \cdot \ln(M_p)))^2 \end{cases}$$

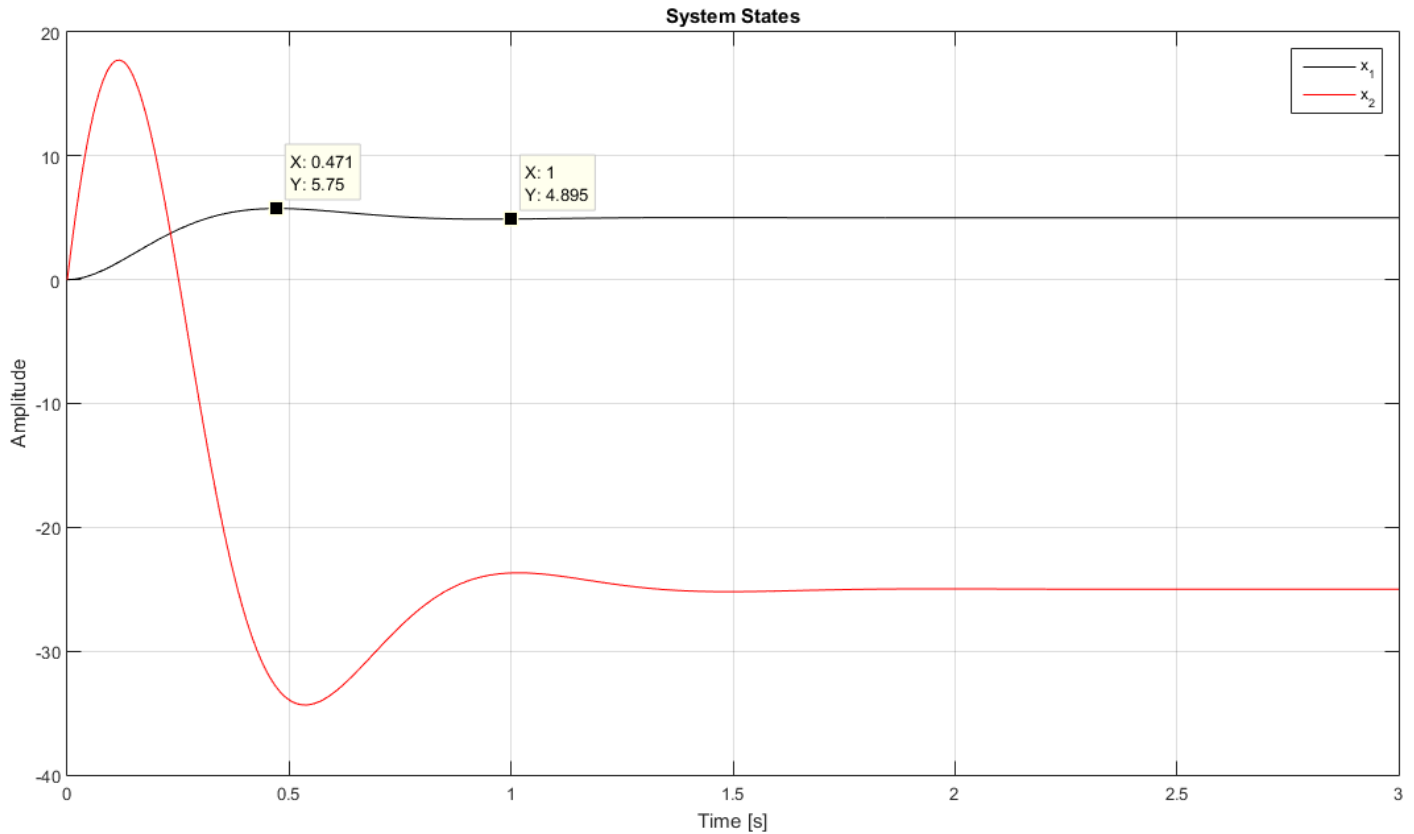
Para $t_s = 1s$ e $M_p = 0.15$, temos os ganhos do controlador: $K_1 = 8$ e $K_0 \cong 60$. Considerando que o objetivo de controle é fazer a saída convergir para $y_d = 5$, o que implica em $\dot{y}_d = 0$ e $\ddot{y}_d = 0$. Desta maneira, a equação de v pode ser simplificada para:

$$v = \ddot{y}_d - K_1 \cdot (\dot{y} - \dot{y}_d) - K_0 \cdot (y - y_d) = -K_1 \cdot (x_1^2 + x_2) - K_0 \cdot (x_1 - 5)$$

Por fim, chegamos a variável de controle:

$$u = v - 2x_1^3 - 2x_1x_2 = -8 \cdot (x_1^2 + x_2) - 60 \cdot (x_1 - 5) - 2x_1^3 - 2x_1x_2$$

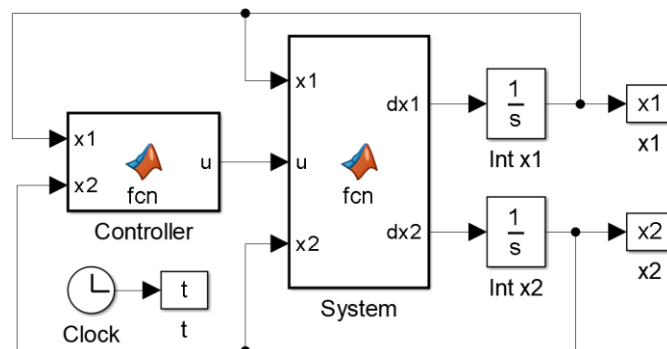
1.2) Resultado da simulação



Pela imagem acima, vemos que o sobressinal da saída y , que equivale à variável de estado x_1 , é de $(5.75 - 5)/5 = 0.15$, que é exatamente o valor especificado. Além disso, em 1s de simulação, a saída assume o valor de $(5 - 4.895)/5 = 0.021$, que é bem próximo ao critério de 2% para o tempo de acomodação. Então, esse controlador atendeu aos critérios de projeto para a saída.

1.3) Programa

1.3.1) Diagrama de blocos no Simulink



1.3.2) Main

```
close, clear, clc;
ts = 1;
Mp = 0.15;

K1 = 8 / ts;
K0 = (4/ts)^2 + (4*pi/(ts*log(Mp)))^2;
```

```

r = 5;

tf = 3;
t_step = 1e-3;
sim('L2_Q1_Sim.slx');

figure(1);
plot(t,x1,'k',t,x2,'r'), grid on, legend('x_{1}','x_{2}');
ylabel('Amplitude'), xlabel('Time [s]'), title('System States');
set(gcf,'color','white');

```

1.3.3) Bloco “System”

```

function [dx1, dx2] = fcn(x1, u, x2)
dx1 = x1^2 + x2;
dx2 = u;

```

1.3.4) Bloco “Controller”

```

function u = fcn(x1, x2, K1, K0, r)
v = - K1 * (x1^2 + x2) - K0 * (x1 - r);
u = v - 2*x1^3 - 2*x1*x2;

```



2) Considere o sistema abaixo. Determine a lei de controle que estabiliza os estados em torno de um ponto desejado através da técnica de *feedback linearization* (linearização entrada-estado). Realize uma simulação impondo valores de dinâmica em malha fechada desejada, e verifique que suas especificações de controle foram atendidas.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 7x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + \cos(x_2) + u\end{aligned}$$

2.1) Projeto do controlador

O **primeiro passo** para executar a técnica de controle por linearização entrada-estado é colocar o sistema na forma $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u$, em que, no problema em questão, \mathbf{f} e \mathbf{g} são dados por:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -x_1 + 7x_2 \\ -x_2 + \cos(x_2) \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ignorando o teste das condições necessárias e suficientes para poder aplicar a técnica de linearização entrada-estado, o **segundo passo** é fazer a seguinte mudança de variável (forma normal):

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ L_f z_1 \\ \vdots \\ L_f^{n-1} z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ L_f z_1 \\ \vdots \\ L_f(L_f^{n-2} z_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ L_f z_1 \\ \vdots \\ L_f z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \nabla z_1 \cdot \mathbf{f} \\ \vdots \\ \nabla z_{n-1} \cdot \mathbf{f} \end{bmatrix}$$

Sendo que $L_f z_1 = \nabla z_1 \cdot \mathbf{f}$ é a derivada de Lie de z_1 em relação a \mathbf{f} . Como o sistema é de 2ª ordem, então $\mathbf{z}(\mathbf{x}) = [z_1 \quad z_2]^T$. A variável de estado transformada z_1 deve satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{cases} \nabla z_1 \cdot \text{ad}_f^i g = 0, \text{ para } i = 0, 1, \dots, n-2 \\ \nabla z_1 \cdot \text{ad}_f^{n-1} g \neq 0 \end{cases}$$

Sendo que $\text{ad}_f^i g = [f, \text{ad}_f^{i-1} g]$, para $\text{ad}_f^0 g = g$ e $\text{ad}_f^1 g = [f, g] = \nabla g \cdot f - \nabla f \cdot g$, em que esta último operador $[\cdot, \cdot]$ é conhecido como bracket (colchete) de Lie. Para o problema em questão, podemos usar a seguinte transformação de variável:

$$\nabla z_1 \cdot \text{ad}_f^0 g = 0 \Rightarrow \frac{\partial z_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot g = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial z_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\nabla z_1 \cdot \text{ad}_f^1 g = 1 (\neq 0, \text{normalizado}) \Rightarrow \frac{\partial z_1}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g} \right) = 1$$

$$\begin{aligned} \nabla z_1 \cdot \text{ad}_f^1 g &= \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{f} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{g} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -x_1 + 7x_2 \\ -x_2 + \cos(x_2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 0 & -1 - \sin(x_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ 1 + \sin(x_2) \end{bmatrix} = -7 \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + (1 + \sin(x_2)) \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x_2} = -7 \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \end{aligned}$$

$$\nabla z_1 \cdot \text{ad}_f^1 g = 1 \Rightarrow \frac{\partial z_1}{\partial x_1} = -\frac{1}{7} \Rightarrow z_1 = -\frac{x_1}{7}$$

$$z_2 = L_f z_1 = \nabla z_1 \cdot \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -x_1 + 7x_2 \\ -x_2 + \cos(x_2) \end{bmatrix} = \frac{x_1}{7} - x_2$$

O **terceiro passo** é calcular o controlador descrito abaixo:

$$\alpha(\mathbf{x}) = -\frac{L_f^n z_1}{L_g L_f^{n-1} z_1} = -\frac{\nabla(L_f^{n-1} z_1) \cdot \mathbf{f}}{L_g z_n} = -\frac{\nabla z_n \cdot \mathbf{f}}{\nabla z_n \cdot \mathbf{g}}$$

$$\beta(\mathbf{x}) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} z_1} = \frac{1}{L_g z_n} = \frac{1}{\nabla z_n \cdot \mathbf{g}}$$

$$u = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \cdot v = -\frac{\nabla z_n \cdot \mathbf{f}}{\nabla z_n \cdot \mathbf{g}} + \frac{1}{\nabla z_n \cdot \mathbf{g}} \cdot v = \frac{v - \nabla z_n \cdot \mathbf{f}}{\nabla z_n \cdot \mathbf{g}}$$

Sendo que v é a variável de controle encarregada pela controle linear no espaço das variáveis de estado transformadas. Para o problema em questão, temos que

$$\nabla z_2 \cdot \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -x_1 + 7x_2 \\ -x_2 + \cos(x_2) \end{bmatrix} = -\frac{x_1}{7} + 2x_2 - \cos(x_2)$$

$$\nabla z_2 \cdot g = \left[\frac{\partial z_2}{\partial x_1} \quad \frac{\partial z_2}{\partial x_2} \right] \cdot g = \left[\frac{1}{7} \quad -1 \right] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1$$

$$u = \frac{v - (-x_1/7 + 2x_2 - \cos(x_2))}{-1} = -v - \frac{x_1}{7} + 2x_2 - \cos(x_2)$$

O **quarto passo** é definir variável de controle v para resolver o problema de *tracking* de um sistema dinâmico linear. Para isto, é preciso notar que, no espaço das variáveis transformadas, o sistema linearizado é descrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot v \Rightarrow \dot{z}_n = z_1^{(n)} = v$$

Fazendo $v = z_{d1}^{(n)} - K_{n-1} \cdot \tilde{z}_1^{(n)} - \cdots - K_0 \cdot \tilde{z}_1$, para $\tilde{z}_1 = z_1 - z_{d1} \Rightarrow \tilde{z}_1^{(i)} = z_1^{(i)} - z_{d1}^{(i)}$, em que a variável z_{d1} é um referencial a ser seguido pelo sistema, e substituindo na última equação acima, temos que

$$z_1^{(n)} = v = z_{d1}^{(n)} - K_{n-1} \cdot \tilde{z}_1^{(n-1)} - \cdots - K_0 \cdot \tilde{z}_1 \Rightarrow \tilde{z}_1^{(n)} + K_{n-1} \cdot \tilde{z}_1^{(n-1)} + \cdots + K_0 \cdot \tilde{z}_1 = 0$$

Ao fazer $K_{n-1}, \dots, K_0 > 0$, o sistema é estável e convergirá para a referência a ser seguida. Agora temos um problema de imposição de polos. Para o problema em questão, temos a seguinte equação característica:

$$\ddot{\tilde{z}}_1 + K_1 \cdot \dot{\tilde{z}}_1 + K_0 \cdot \tilde{z}_1 = 0 \Rightarrow s^2 + K_1 \cdot s + K_0 = 0 \Rightarrow (s - \lambda_1) \cdot (s - \lambda_2) = 0$$

Usando os mesmos critérios de projeto do item anterior (tempo de assentamento e sobressinal), para $t_s = 1s$ e $M_p = 0.15$, novamente temos os ganhos do controlador: $K_1 = 8$ e $K_0 \cong 60$.

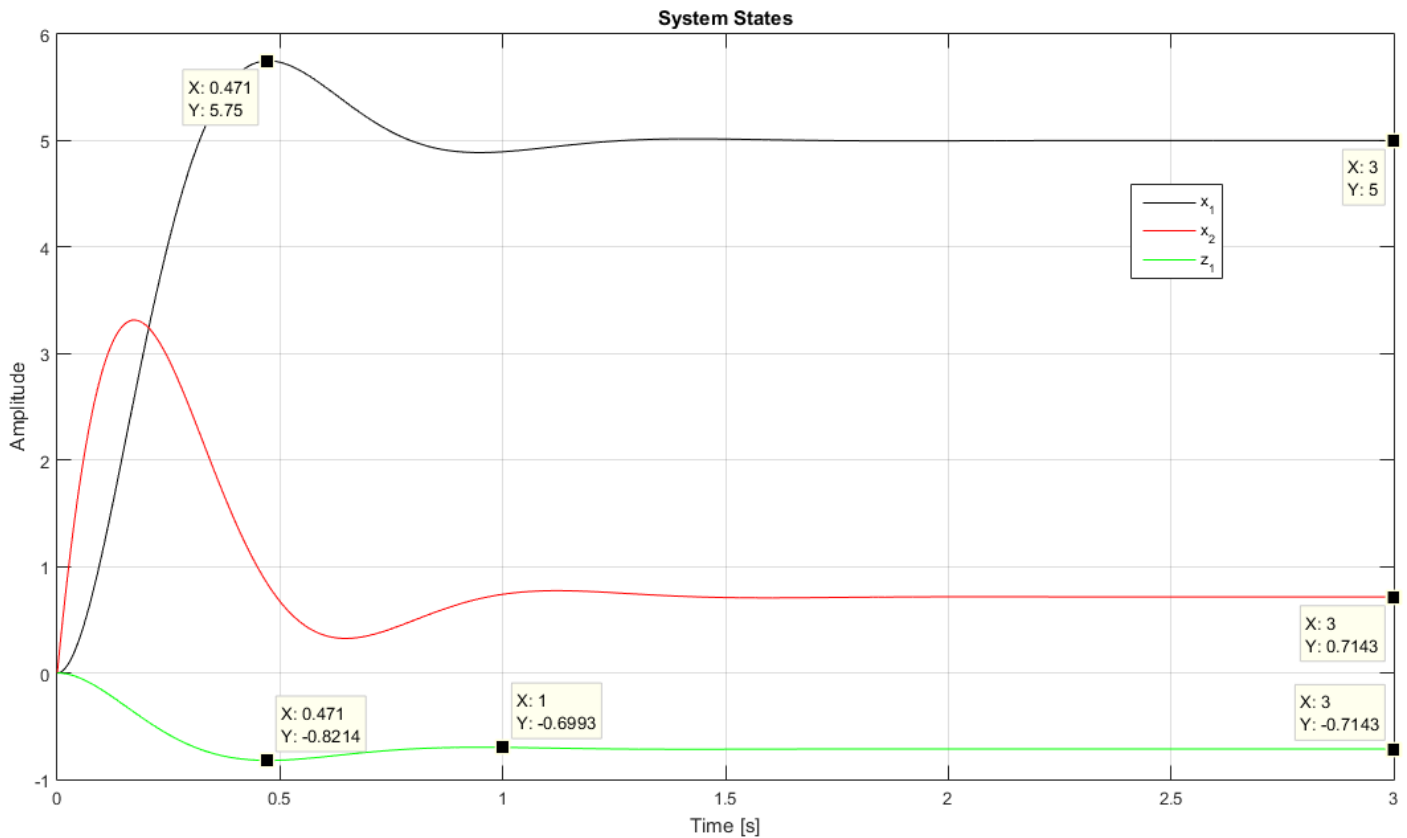
Ao analisar o ponto de equilíbrio do sistema ($\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$), é possível notar que $x_1^* = 7x_2^*$, ou seja, os valores estacionários dos estados são relacionados. Desta maneira, ao definir o valor de um deles, o outro valor fica automaticamente definido. Logo, não é possível fazer o sistema convergir para um ponto qualquer no espaço de estado.

Fazer a variável de estado x_1 acompanhar o referencial constante x_{d1} equivale a fazer a variável de estado transformada z_1 acompanhar o referencial constante $z_{d1} = -x_{d1}/7$, além disso $z_{d1}^{(i)} = 0$, para $i = 1, \dots, n-1$. Considerando $x_{d1} = 5$, no problema em questão, o controlador u é dado por:

$$v = -K_1 \cdot z_2 - K_0 \cdot (z_1 - z_{d1}) = -K_1 \cdot \left(\frac{x_1}{7} - x_2 \right) - K_0 \cdot \left(-\frac{x_1}{7} + \frac{x_{d1}}{7} \right)$$

$$u = -v - \frac{x_1}{7} + 2x_2 - \cos(x_2) = 8 \cdot \left(\frac{x_1}{7} - x_2 \right) + 60 \cdot \frac{5 - x_1}{7} + 2x_2 - \cos(x_2)$$

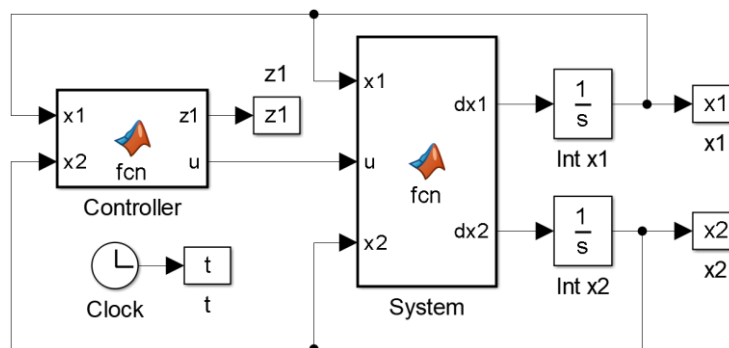
2.2) Resultado de simulação



Pela imagem acima, vemos que o sobressinal da variável de estado transformada z_1 é de $|1 - 0.8214/0.7143| \cong 0.15$, que equivale ao valor especificado. Além disso, em 1s de simulação, z_1 assume o valor de $|1 - 0.6993/0.7143| \cong 0.021$, que é bem próximo ao critério de 2% para o tempo de acomodação. Então, esse controlador atendeu aos critérios de projeto para z_1 .

2.3) Programa

2.3.1) Diagrama de blocos no Simulink



2.3.2) Main

```
close, clear, clc;
ts = 1;
Mp = 0.15;

K1 = 8 / ts;
K0 = (4/ts)^2 + (4*pi/(ts*log(Mp)))^2;
xd1 = 5;

tf = 3;
```

```
t_step = 1e-3;
sim('L2_Q2_Sim.slx');

figure(1); set(gcf, 'color', 'white');
plot(t,x1,'k',t,x2,'r',t,z1,'g'), grid on, legend('x_{1}','x_{2}','z_{1}');
ylabel('Amplitude'), xlabel('Time [s]'), title('System States');
```

2.3.3) Bloco “System”

```
function [dx1, dx2] = fcn(x1, u, x2)
dx1 = -x1 + 7*x2;
dx2 = -x2 + cos(x2) + u;
```

2.3.4) Bloco “Controller”

```
function [z1, u] = fcn(x1, x2, K1, K0, xd1)
zd1 = -xd1/7;
z1 = -x1/7;
z2 = x1/7 - x2;
v = - K1 * z2 - K0 * (z1 - zd1);
u = -v - x1/7 + 2*x2 - cos(x2);
```

-----/\/\/\-----/\/\/\-----/\/\/\-----

3) Projete um controlador u para estabilizar o sistema. Caso haja alguma dinâmica não controlada, mostre de forma teórica (transformando o sistema para a forma normal) e por simulação se a mesma é ou não limitada. Realize simulações com condições iniciais diferentes de 0.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 + 8x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_3 + x_1^4 - x_1^2 + u \\ y &= x_1\end{aligned}$$

3.1) Projeto do controlador

Derivando a saída até aparecer a variável de controle:

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_3 + 8x_2$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_3 + 8\dot{x}_2 = -x_3 + x_1^4 - x_1^2 + u + 8 \cdot (-x_2 + x_3) + u = x_1^4 - x_1^2 - 8x_2 + 7x_3 + u$$

Vemos que a ordem relativa é 2 e a ordem do sistema é 3, o que significa que o este sistema tem uma dinâmica interna de ordem 1. Mas nos preocuparemos com ela depois. Primeiro vamos projetar o controlador. Fazendo $u = v - (x_1^4 - x_1^2 - 8x_2 + 7x_3)$, sendo $v = \ddot{y}_d - K_1 \cdot \dot{\tilde{y}} - K_0 \cdot \tilde{y}$, para $\tilde{y} = y - y_d$, $\dot{\tilde{y}} = \dot{y} - \dot{y}_d$ e $\ddot{\tilde{y}} = \ddot{y} - \ddot{y}_d$, temos que

$$\ddot{y} = v = \ddot{y}_d - K_1 \cdot \dot{\tilde{y}} - K_0 \cdot \tilde{y} \Rightarrow \ddot{\tilde{y}} + K_1 \cdot \dot{\tilde{y}} + K_0 \cdot \tilde{y} = 0$$

Equação característica: $s^2 + K_1 \cdot s + K_0 = 0 \Rightarrow (s - \lambda_1) \cdot (s - \lambda_2) = 0$, para $\lambda_{1,2} = -\sigma \pm j \cdot \omega_d$

$$\begin{cases} K_1 = -\lambda_1 - \lambda_2 = 2\sigma \\ K_0 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \sigma^2 + \omega_d^2 \end{cases}$$

Tempo de acomodação (critério de 2%): $t_s = 4/\sigma \Rightarrow \sigma = 4/t_s$

Sobressinal máximo: $M_p = \exp(-\pi \cdot \sigma/\omega_d) \Rightarrow \omega_d = -4\pi/(t_s \cdot \ln(M_p))$

$$\begin{cases} K_1 = -\lambda_1 - \lambda_2 = 2\sigma = 8/t_s \\ K_0 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \sigma^2 + \omega_d^2 = (4/t_s)^2 + (4\pi/(t_s \cdot \ln(M_p)))^2 \end{cases}$$

Para $t_s = 1s$ e $M_p = 0.15$, temos os ganhos do controlador: $K_1 = 8$ e $K_0 \cong 60$. Considerando que o objetivo de controle é fazer a saída convergir para $y_d = 5$, o que implica em $\dot{y}_d = 0$ e $\ddot{y}_d = 0$. Desta maneira, a equação de v pode ser simplificada para:

$$v = \ddot{y}_d - K_1 \cdot (\dot{y} - \dot{y}_d) - K_0 \cdot (y - y_d) = -K_1 \cdot (x_3 + 8x_2) - K_0 \cdot (x_1 - y_d)$$

Por fim, chegamos a variável de controle:

$$u = v - (x_1^4 - x_1^2 - 8x_2 + 7x_3) = -8 \cdot (x_3 + 8x_2) - 60 \cdot (x_1 - 5) - (x_1^4 - x_1^2 - 8x_2 + 7x_3)$$

$$u = -x_1^4 + x_1^2 - 60x_1 - 56x_2 - 15x_3 + 300$$

3.2) Dinâmica interna

A dinâmica interna do sistema corresponde a dinâmica dos estados não controlados (não dependem da variável de controle u). Para encontrá-la, é preciso fazer a mudança de variável $z = [\mu \quad \psi]^T$, em que $\mu \in \mathbb{R}^r$ é o vetor dos estados controlados e r é o grau relativo do sistema, e $\psi \in \mathbb{R}^{n-r}$ é o vetor dos estados não controlados e n é a dimensão do sistema, sendo que os estados de μ estão na forma normal do sistema original, como mostrado abaixo:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{r-1} \\ \mu_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(r-2)} \\ y^{(r-1)} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\mu} = \begin{bmatrix} \dot{\mu}_1 \\ \dot{\mu}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mu}_{r-1} \\ \dot{\mu}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(r-1)} \\ y^{(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(r-1)} \\ \alpha(\mu, \psi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(\mu, \psi) \end{bmatrix} \cdot u$$

Enquanto que a dinâmica interna (estados não controlados) pode ser descrita matematicamente através da equação $\dot{\psi} = w(\mu, \psi)$, em que a variável de controle u não está presente. O vetor de estados $\psi = k(x)$ pode ser descrito com qualquer mapeamento k que satisfaça as duas seguintes condições:

- (1) $\nabla\psi \cdot g = 0$ (sendo que o vetor g refere-se a $\dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u$)
- (2) $\det(J(z)) = \det(\nabla z) \neq 0$ (matriz jacobina de z é não-singular)

Após encontrar o mapeamento $k(x)$, podemos determinar a transformação inversa $x = l(\mu, \psi)$ (da forma normal para a forma original) para chegar na equação $\dot{\psi} = w(\mu, \psi)$, que só depende de μ e ψ . Para analisar a estabilidade da dinâmica interna, usa-se o artifício da dinâmica zero, em que faz-se $\mu = 0$ e verifica-se a estabilidade de $\dot{\psi} = w(0, \psi)$, que é a dinâmica zero. Se esta dinâmica for estável, então a dinâmica interna é limitada.

Para o problema em questão, temos que os estados controláveis na forma normal são dados por

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 + 8x_2 \end{bmatrix}$$

Como a ordem da dinâmica interna é 1, então $\psi = \psi_1$, o que implica em $z = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \psi_1]^T$.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \mu_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \mu_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \mu_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \mu_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \mu_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \neq 0 \Rightarrow \psi_1 = x_2 \text{ (escolha)}$$

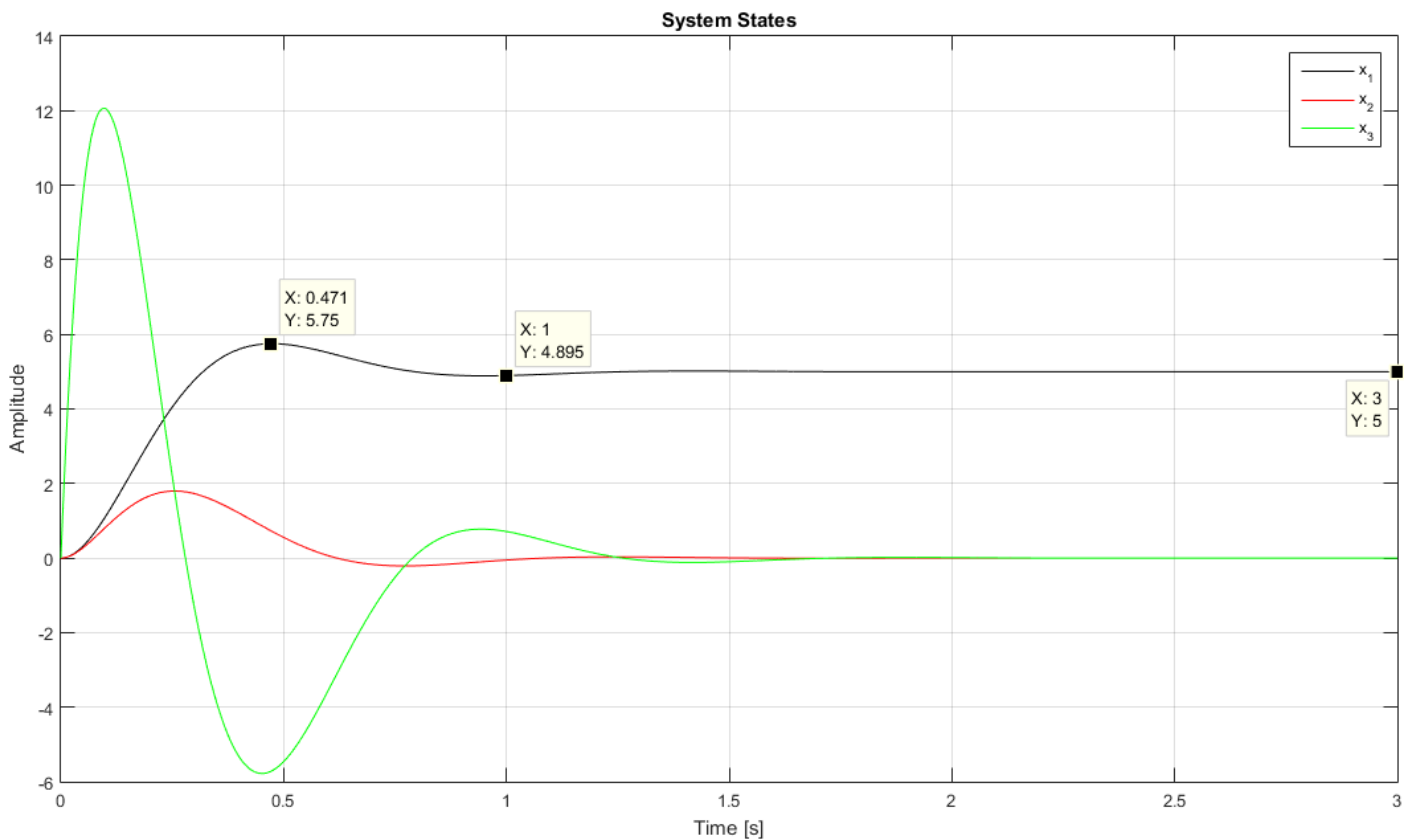
$$\begin{cases} \mu_1 = x_1 \\ \mu_2 = x_3 + 8x_2 \\ \psi_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \mu_1 \\ x_2 = \psi_1 \\ x_3 = \mu_2 - 8\psi_1 \end{cases}$$

Dinâmica interna: $\dot{\psi}(\mu, \psi) = \dot{\psi}_1 = \dot{x}_2 = -x_2 + x_3 = -\psi_1 + \mu_2 - 8\psi_1 = -9\psi_1 + \mu_2$

Dinâmica zero: $\dot{\psi}(0, \psi) = -9\psi_1$

Como a dinâmica zero é estável, então a dinâmica interna do sistema é limitada.

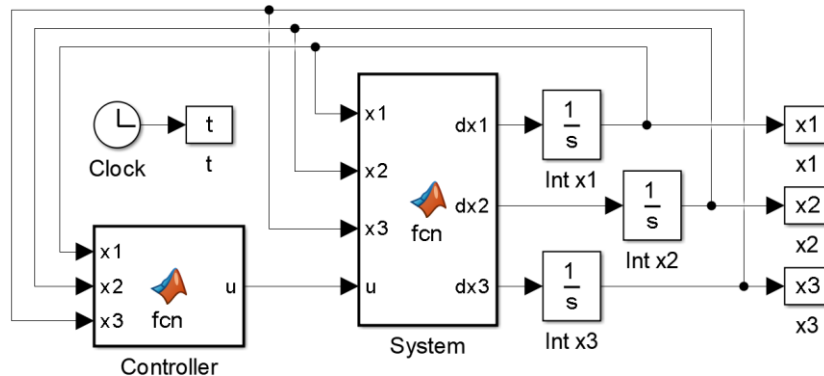
3.3) Resultado de simulação



Pela imagem acima, vemos que o sobressinal da saída y , que equivale à variável de estado x_1 , é de $(5.75 - 5)/5 = 0.15$, que é exatamente o valor especificado. Além disso, em 1s de simulação, a saída assume o valor de $(5 - 4.895)/5 = 0.021$, que é bem próximo ao critério de 2% para o tempo de acomodação. Então, esse controlador atendeu aos critérios de projeto para a saída. Além disso, como previsto pela análise da dinâmica interna do sistema, os demais estados, x_2 e x_3 , são limitados.

3.4) Programa

3.4.1) Diagrama de blocos no Simulink



3.4.2) Main

```
close, clear, clc;
ts = 1;
Mp = 0.15;

K1 = 8 / ts;
K0 = (4/ts)^2 + (4*pi/(ts*log(Mp)))^2;
yd = 5;

tf = 3;
t_step = 1e-3;
sim('L2_Q3_Sim.slx');

figure(1), set(gcf, 'color', 'white');
plot(t,x1,'k',t,x2,'r',t,x3,'g'), grid on, legend('x_{1}','x_{2}','x_{3}');
ylabel('Amplitude'), xlabel('Time [s]'), title('System States');
```

3.4.3) Bloco “System”

```
function [dx1, dx2, dx3] = fcn(x1, x2, x3, u)
dx1 = x3 + 8*x2;
dx2 = -x2 + x3;
dx3 = -x3 + x1^4 - x1^2 + u;
```

3.4.4) Bloco “Controller”

```
function u = fcn(x1, x2, x3, K1, K0, yd)
v = - K1 * (x3 + 8*x2) - K0 * (x1 - yd);
u = v - x1^4 + x1^2 + 8*x2 - 7*x3;
```



4) Considere o modelo $\ddot{x} + c \cdot |x| \cdot \dot{x}^2 + k \cdot x^3 \cdot \cos(2x) = u$, onde c e k não são conhecidos com precisão e variam ao longo do tempo. Sabe-se apenas que $|c| \leq 1$; $-1 \leq k \leq 5$. Projete um controlador robusto para garantir que x acompanhe um valor de referência, sem *chattering*. Mostre, por simulações, a coerência entre os parâmetros do controlador por modos deslizantes e o tempo de alcance, erro máximo e a constante de tempo em malha fechada após alcançar a superfície de escorregamento.

4.1) Projeto do controlador

Superfície deslizante:

$$s(x, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} \cdot \tilde{x} \xrightarrow{n=2} s(x, t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^1 \cdot \tilde{x} = \dot{\tilde{x}} + \lambda \cdot \tilde{x} = (\dot{x} - \dot{x}_d) + \lambda \cdot (x - x_d)$$

Sistema a ser controlado:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + u, \text{ sendo } f(x, \dot{x}) = -c \cdot |x| \cdot \dot{x}^2 - k \cdot x^3 \cdot \cos(2x)$$

Mudança de variável:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) + u \end{cases}, \text{ sendo } f(x_1, x_2) = -c \cdot |x_1| \cdot x_2^2 - k \cdot x_1^3 \cdot \cos(2x_1)$$

$$s = (\dot{x} - \dot{x}_d) + \lambda \cdot (x - x_d) = (x_2 - x_{d2}) + \lambda \cdot (x_1 - x_{d1})$$

Controlador proposto:

$$u = \hat{u} - K \cdot \text{sat}\left(\frac{s}{\phi}\right), \text{ sendo } \hat{u} = -\hat{f} + \ddot{x}_d - \lambda \cdot \dot{\tilde{x}} = -\hat{f} + \ddot{x}_d - \lambda \cdot (x_2 - x_{d2})$$

para $\hat{f} = -c_m \cdot |x_1| \cdot x_2^2 - k_m \cdot x_1^3 \cdot \cos(2x_1)$

Para evitar o fenômeno de *chattering*, utiliza-se a função $\text{sat}(\cdot)$ (saturação) no lugar de $\text{sgn}(\cdot)$.

Condição de escorregamento:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}(s^2) \leq -\eta \cdot |s| \Rightarrow K \geq \eta + F, \text{ sendo } F = |f - \hat{f}|$$

Ajuste do parâmetro η :

$$\eta = \frac{|s(0)|}{t_{R,\max}} = \frac{|x_2(0) - x_{d2} + \lambda \cdot (x_1(0) - x_{d1})|}{t_{R,\max}}$$

Considerando que $\lambda = 1 \text{ rad/s}$, o sistema parte da origem, o estado x_1 deve acompanhar uma constante contínua $x_{d1} = 5$ e o tempo máximo que sistema deve chegar a superfície de escorregamento é $t_{R,\max} = 1$, temos que o valor de η é

$$\eta = \frac{|0 - 0 + 1 \cdot (0 - 5)|}{1} = 5$$

Ajuste do parâmetro ϕ :

$$\phi = \tilde{x}_f \cdot \lambda^{n-1} = 0.1 \cdot 1^2 = 0.1$$

Ajuste do parâmetro $K \geq \eta + F$:

$$F = |f - \hat{f}| = |(c_m - c) \cdot |x| \cdot \dot{x}^2 + (k_m - k) \cdot x^3 \cdot \cos(2x)| \leq |x| \cdot ((c_m - c) \cdot \dot{x}^2 + (k_m - k) \cdot x^2)$$

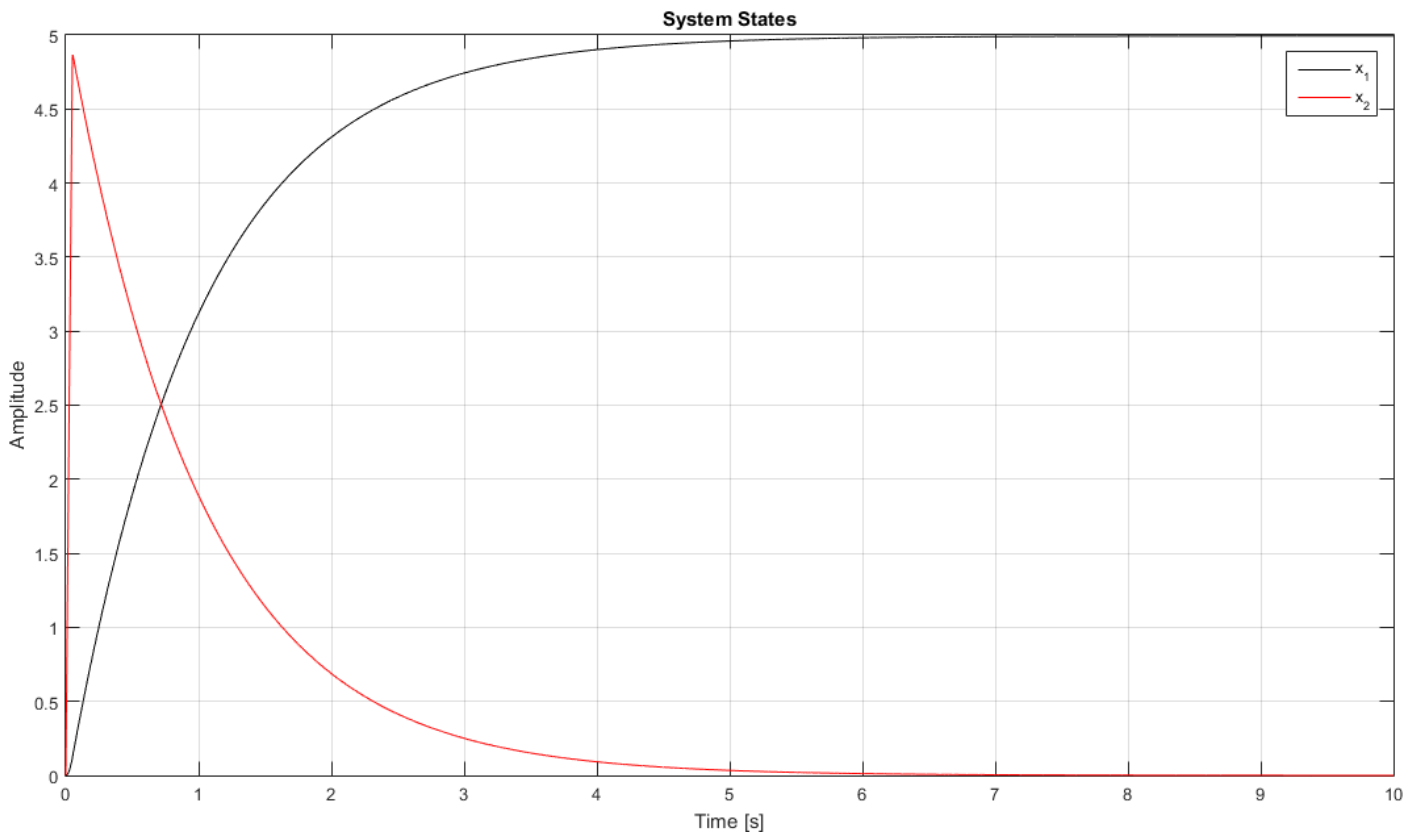
$$F \leq |x_1| \cdot (|c_m - c| \cdot x_2^2 + |k_m - k| \cdot x_1^2)$$

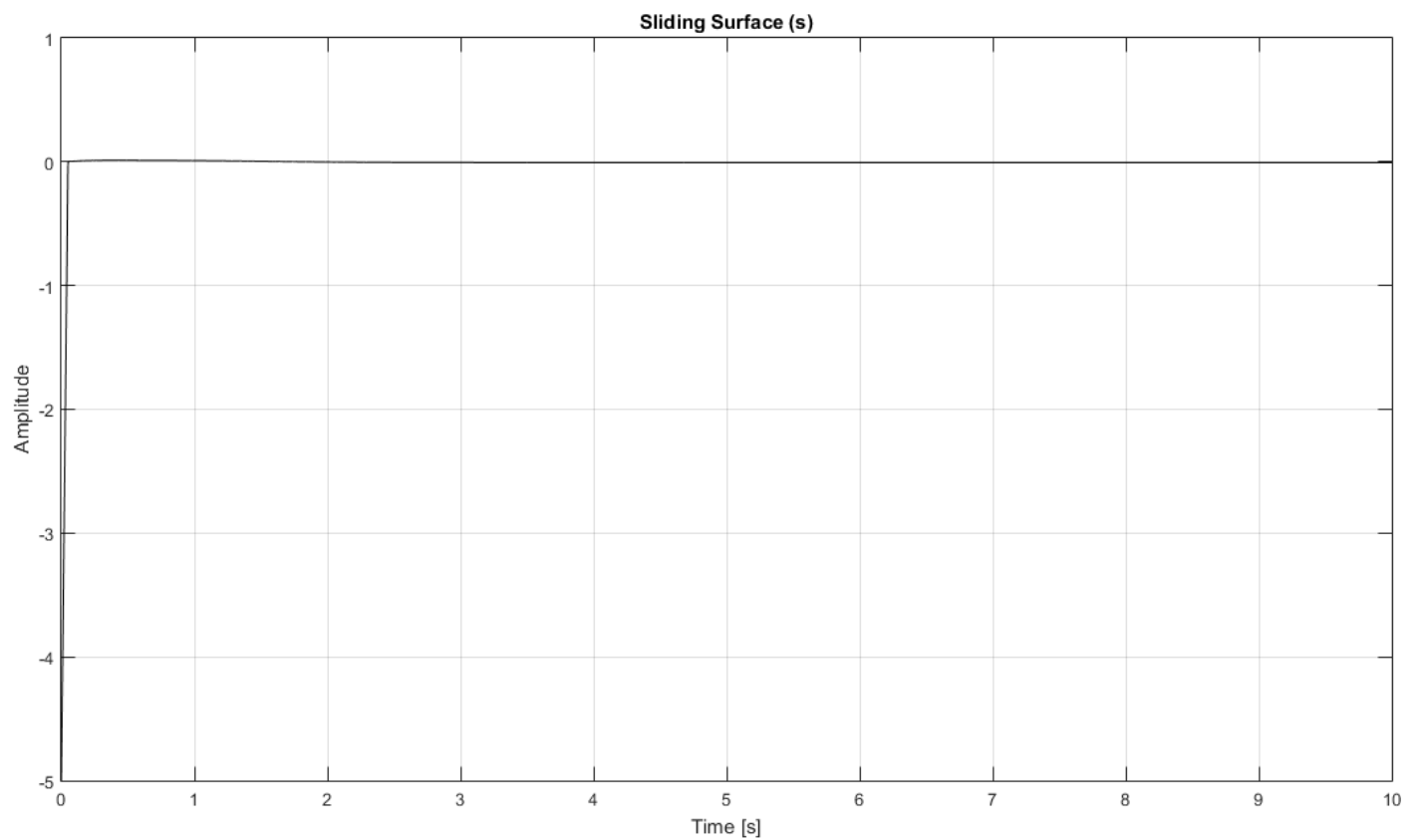
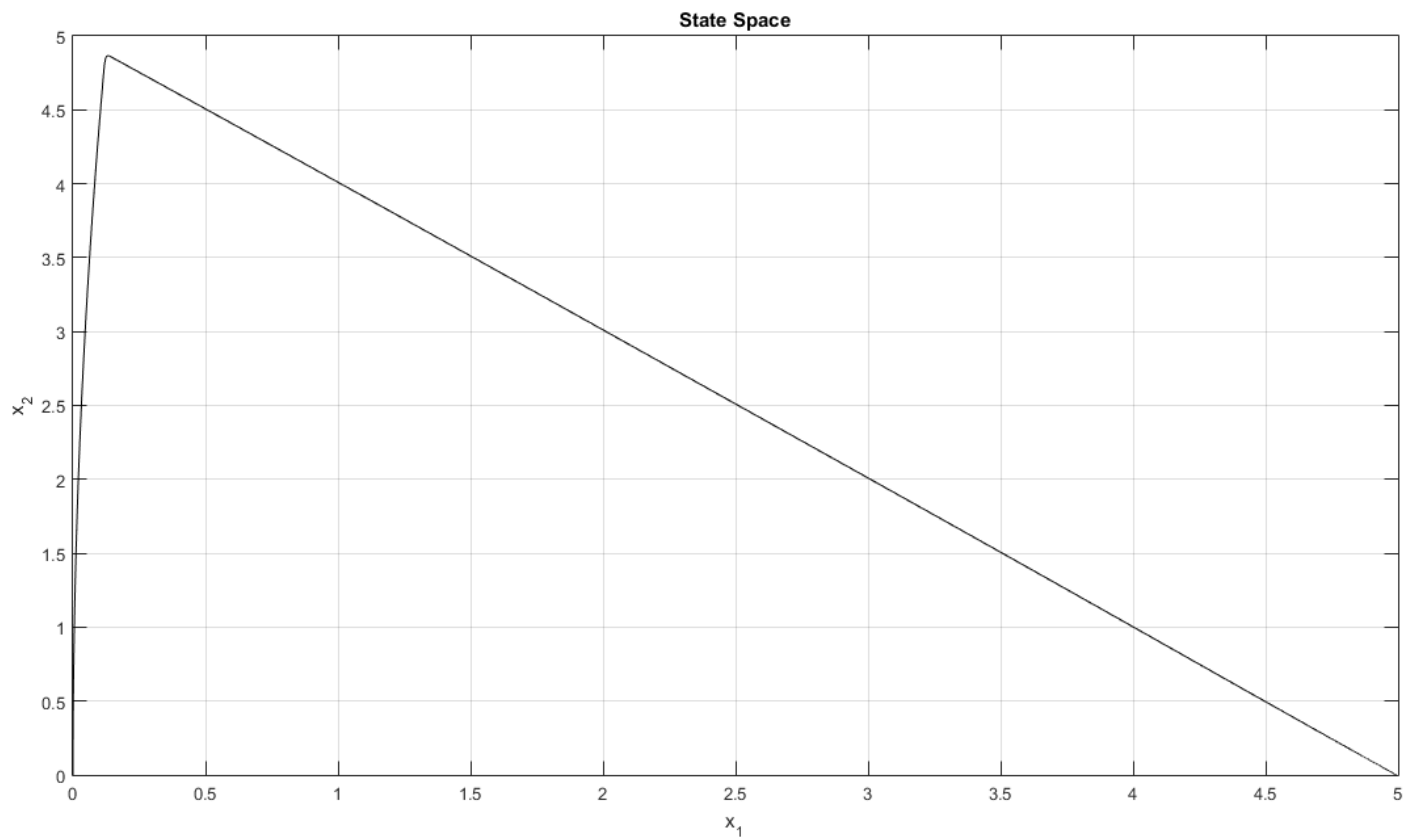
Fazendo $c_m = 0$, $k_m = 2$, $x_1 = 5$ e $x_2 = 0$, temos que $F \leq 5 \cdot (1 \cdot 0 + 3 \cdot 25) = 375$

$$K \geq \eta + F = 5 + 375 = 380$$

Como este valor é superestimado, algumas simulações podem gerar uma estimação melhor sobre qual valor utilizar para K . Eu verifiquei que $K=200$ é um valor suficiente.

4.2) Resultado de simulação

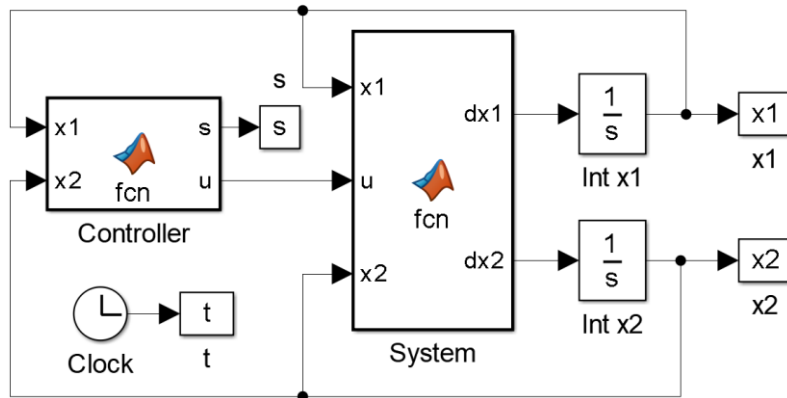




Como esperado, a variável deslizante convergiu para zero, enquanto que o estado x_1 convergiu para o valor desejado de $x_{d1} = 5$. Além disso, no espaço de estados (x_1, x_2) , após a trajetória colidir com a reta $x_2 = -\lambda \cdot x_1 = -x_1$, ela passa a deslizar pela reta até atingir o valor desejado para o estado x_1 .

4.3) Programa

4.3.1) Diagrama de blocos no Simulink



4.3.2) Main

```
close, clear, clc;
c = 2*(rand-0.5);
k = 6*rand-1;
xd1 = 5;
lamb = 1;
phi = 0.1;
K = 200;

tf = 10;
t_step = 1e-3;
sim('L2_Q4_Sim.slx');
```

```
figure(1), set(gcf,'color','white');
plot(t,x1,'k',t,x2,'r'), grid on, legend('x_{1}','x_{2}');
ylabel('Amplitude'), xlabel('Time [s]'), title('System States');
```

```
figure(2), set(gcf,'color','white');
plot(x1,x2,'k'), grid on;
ylabel('x_{2}'), xlabel('x_{1}'), title('State Space');
```

```
figure(3), set(gcf,'color','white');
plot(t,s,'k'), grid on;
ylabel('Amplitude'), xlabel('Time [s]'), title('Sliding Surface (s)');
```

4.3.3) Bloco “System”

```
function [dx1, dx2] = fcn(x1, u, x2, c, k)
dx1 = x2;
dx2 = u - c*abs(x1)*x2^2 - k*x1^3*cos(2*x1);
```

4.3.4) Bloco “Controller”

```
function [s,u] = fcn(x1, x2, xd1, lamb, phi, K)
u_hat = 2*x1^3*cos(2*x1) - lamb*x2;
s = x2 + lamb * (x1 - xd1);
sat_s = min(1, max(-1, s/phi));
u = u_hat - K * sat_s;
```