Demonstração da equação do Filtro Ótimo de Lee para ruído Speckle

Dado um sinal de entrada $f(x)$, ao passá-lo por um sistema dinâmico que gere o ruído Speckle, o sinal de saída $g(x)$ pode ser modelado de acordo com a seguinte equação:

$$g(x) = f(x) \cdot (1 + \gamma \cdot N(0,1))$$

Em que, $N(0,1)$ é um processo estocástico com uma função densidade de probabilidade igual função gaussiana com média $E\{N(0,1)\} = 0$ e variância $Var\{N(0,1)\} = 1$. Para tentar estimar $f(x)$ a partir de $g(x)$, podemos assumir uma relação afim entre o estimador $\hat{f}(x)$ e a saída $g(x)$:

$$\hat{f}(x) = a + b \cdot g(x)$$

Para determinar os coeficientes *a* e *b*, podemos utilizar a técnica de otimização não-linear sem restrição, em que deriva-se o valor médio da diferença quadrática entre $\hat{f}(x)$ e $f(x)$ em relação ao vetor de coeficientes e iguala-se ao vetor de zeros:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(E\left\{\left(\hat{f}(x) - f(x)\right)^2\right\}\right) = E\left\{2 \cdot \left(\hat{f}(x) - f(x)\right) \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial a}(x)\right\} = 0 \rightarrow E\left\{\left(\hat{f}(x) - f(x)\right)\right\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(E\left\{\left(\hat{f}(x) - f(x)\right)^2\right\}\right) = E\left\{2 \cdot \left(\hat{f}(x) - f(x)\right) \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial b}(x)\right\} = 0 \rightarrow E\left\{\left(\hat{f}(x) - f(x)\right) \cdot g(x)\right\} = 0$$

Antes de continuarmos, precisamos demonstrar algumas relações que derivam do fato de assumir que $f(x)$ e $N(0,1)$ são processos estocásticos independentes:

(i) Relação entre $E\{g(x)\}$ e $E\{f(x)\}$:

$$E\{g(x)\} = E\{f(x) \cdot (1 + \gamma \cdot N(0,1))\} = E\{f(x)\} \cdot E\{1 + \gamma \cdot N(0,1)\} = E\{f(x)\}$$

(ii) Relação entre $E\left\{\left(g(x)\right)^2\right\}$ e $E\left\{\left(f(x)\right)^2\right\}$:

$$E\{(g(x))^2\} = E\left\{\left(f(x)\right)^2 \cdot \left(1 + \gamma \cdot N(0,1)\right)^2\right\} = E\left\{\left(f(x)\right)^2\right\} \cdot E\left\{1 + 2 \cdot \gamma \cdot N(0,1) + \gamma^2 \cdot \left(N(0,1)\right)^2\right\}$$

$$E\{(g(x))^2\} = E\left\{\left(f(x)\right)^2\right\} \cdot \left[1 + \gamma^2 \cdot \left(Var\left(N(0,1)\right) + (E\{N(0,1)\})^2\right)\right] = E\left\{\left(f(x)\right)^2\right\} \cdot (1 + \gamma^2)$$

$$E\left\{\left(f(x)\right)^2\right\} = \frac{E\left\{\left(g(x)\right)^2\right\}}{1 + \gamma^2}$$

(iii) Relação entre $E\{f(x) \cdot g(x)\}$ e $E\left\{\left(g(x)\right)^2\right\}$:

$$E\{f(x)\cdot g(x)\} = E\left\{\left(f(x)\right)^2\cdot\left(1+\gamma\cdot N(0,1)\right)\right\} = E\left\{\left(f(x)\right)^2\right\}\cdot E\{1+\gamma\cdot N(0,1)\} = E\left\{\left(f(x)\right)^2\right\}$$

$$E\{f(x)\cdot g(x)\} = \frac{E\left\{\left(g(x)\right)^2\right\}}{1+\gamma^2}$$

Agora podemos continuar em determinar o valor dos coeficientes *a* e *b*. Começando com a equação de derivação em relação a *a*:

$$E\{a+b\cdot g(x)-f(x)\} = E\left\{a+b\cdot\left(f(x)\cdot\left(1+\gamma\cdot N(0,1)\right)\right)-f(x)\right\} = 0$$

$$E\left\{a+f(x)\cdot\left(-1+b+b\cdot\gamma\cdot N(0,1)\right)\right\} = a+E\{f(x)\}\cdot E\{-1+b+b\cdot\gamma\cdot N(0,1)\} = 0$$

$$a+E\{f(x)\}\cdot(b-1) = 0 \rightarrow a+E\{g(x)\}\cdot(b-1) = 0$$

$$a+\mu_g\cdot b = \mu_g$$

Agora a equação de derivação em relação a *b*:

$$E\left\{\left(a+b\cdot g(x)-f(x)\right)\cdot g(x)\right\} = E\left\{a\cdot g(x)+b\cdot\left(g(x)\right)^2-f(x)\cdot g(x)\right\} = 0$$

$$a\cdot E\{g(x)\}+b\cdot E\left\{\left(g(x)\right)^2\right\}-E\{f(x)\cdot g(x)\} = 0$$

$$a\cdot E\{g(x)\}+b\cdot E\left\{\left(g(x)\right)^2\right\}-\frac{E\left\{\left(g(x)\right)^2\right\}}{1+\gamma^2} = 0$$

$$\mu_g\cdot a+\left(\sigma_g^2+\mu_g^2\right)\cdot b = \frac{\sigma_g^2+\mu_g^2}{1+\gamma^2}$$

Então, temos o seguinte sistema linear de duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} a+\mu_g\cdot b = \mu_g \\ \mu_g\cdot a+\left(\sigma_g^2+\mu_g^2\right)\cdot b = \dfrac{\sigma_g^2+\mu_g^2}{1+\gamma^2} \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação do sistema por μ_g e subtraindo esta da segunda temos que:

$$\sigma_g^2\cdot b = \frac{\sigma_g^2+\mu_g^2}{1+\gamma^2}-\mu_g^2 = \frac{\sigma_g^2+\mu_g^2-\mu_g^2\cdot(1+\gamma^2)}{1+\gamma^2} = \frac{\sigma_g^2-\mu_g^2\cdot\gamma^2}{1+\gamma^2}$$

$$b = \frac{\sigma_g^2 - \mu_g^2 \cdot \gamma^2}{\sigma_g^2 \cdot (1 + \gamma^2)}$$

Agora resolvendo a primeira equação para determinar o valor de a:

$$a = \mu_g \cdot (1 - b) = \mu_g \cdot \left(1 - \frac{\sigma_g^2 - \mu_g^2 \cdot \gamma^2}{\sigma_g^2 \cdot (1 + \gamma^2)}\right) = \mu_g \cdot \frac{\sigma_g^2 \cdot (1 + \gamma^2) - \sigma_g^2 + \mu_g^2 \cdot \gamma^2}{\sigma_g^2 \cdot (1 + \gamma^2)} = \mu_g \cdot \frac{\gamma^2 \cdot \left(\sigma_g^2 + \mu_g^2\right)}{\sigma_g^2 \cdot (1 + \gamma^2)}$$

$$a = \mu_g \cdot \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2} \cdot \frac{\sigma_g^2 + \mu_g^2}{\sigma_g^2}$$

Se fizermos $a = \mu_g \cdot \alpha_s$, temos que $\alpha_s = 1 - b$, que implica em $b = 1 - \alpha_s$, em que:

$$\alpha_s = \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2} \cdot \frac{\sigma_g^2 + \mu_g^2}{\sigma_g^2} = \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2} \cdot \frac{E\left\{\left(g(x)\right)^2\right\}}{\sigma_g^2}$$

A última tarefa é determinar o valor de γ. Para isto, precisamos determinar a relação entre $Var\{g(x)\}$ e $Var\{f(x)\}$. E como esta relação se comporta em uma região em que $f(x)$ seria homogêneo.

$$Var\{g(x)\} = E\left\{\left(g(x)\right)^2\right\} - (E\{g(x)\})^2 = E\left\{\left(f(x)\right)^2\right\} \cdot (1 + \gamma^2) - (E\{g(x)\})^2$$

$$Var\{g(x)\} = [Var\{f(x)\} + (E\{f(x)\})^2] \cdot (1 + \gamma^2) - (E\{g(x)\})^2$$

$$Var\{g(x)\} = Var\{f(x)\} \cdot (1 + \gamma^2) + (E\{g(x)\})^2 \cdot (1 + \gamma^2) - (E\{g(x)\})^2$$

$$Var\{g(x)\} = Var\{f(x)\} \cdot (1 + \gamma^2) + (E\{g(x)\})^2 \cdot \gamma^2$$

$$\sigma_g^2 = \sigma_f^2 \cdot (1 + \gamma^2) + \mu_g^2 \cdot \gamma^2$$

Em uma região homogênea temos que $f_H(x) = K$, em que K é uma constante qualquer, temos que:

$$E\{f_H(x)\} = E\{K\} = K \rightarrow \mu_{f_H} = K$$

$$Var\{f_H(x)\} = E\left\{\left(f_H(x)\right)^2\right\} - (E\{f_H(x)\})^2 = E\{K^2\} - K^2 = K^2 - K^2 = 0 \rightarrow \sigma_{f_H} = 0$$

Aplicando a variância de f em uma região homogênea na equação da variância de g é possível determinar o valor de γ em função de variância e da média de g em uma região homogênea:

$$\sigma_{g_H}^2 = \mu_{g_H}^2 \cdot \gamma^2 \rightarrow \gamma^2 = \frac{\sigma_{g_H}^2}{\mu_{g_H}^2}$$

Assim, o valor de α_s pode ser mudado para:

$$\frac{\gamma^2}{1+\gamma^2} = \frac{\frac{\sigma_{g_H}^2}{\mu_{g_H}^2}}{1+\frac{\sigma_{g_H}^2}{\mu_{g_H}^2}} = \frac{\frac{\sigma_{g_H}^2}{\mu_{g_H}^2}}{\frac{\mu_{g_H}^2+\sigma_{g_H}^2}{\mu_{g_H}^2}} = \frac{\sigma_{g_H}^2}{\mu_{g_H}^2+\sigma_{g_H}^2} = \frac{\sigma_{g_H}^2}{E\left\{\left(g_H(x)\right)^2\right\}}$$

$$\alpha_s = \frac{\sigma_{g_H}^2}{E\left\{\left(g_H(x)\right)^2\right\}} \cdot \frac{E\left\{\left(g(x)\right)^2\right\}}{\sigma_g^2} = \frac{c_{g_H}}{c_g}$$

Por fim, temos que a equação do estimador ótimo é:

$$\hat{f}(x) = \mu_g \cdot \alpha_s + (1-\alpha_s) \cdot g(x)$$

Em que $\alpha_s = \frac{c_{g_H}}{c_g}$ para $c_{g_H} = \frac{\sigma_{g_H}^2}{E\left\{\left(g_H(x)\right)^2\right\}}$ e $c_g = \frac{\sigma_g^2}{E\left\{\left(g(x)\right)^2\right\}}$

A estratégia do Filtro de Lee é calcular as estatística de *g* de maneira local, ou seja, para cada pixel, ele aplica uma janela móvel de tamanho fixo para calcular μ_g e $E\left\{\left(g(x)\right)^2\right\}$ para chegar em σ_g. Ele faz o mesmo para uma região em que *f* seria homogêneo para calcular as estatísticas de g_H, mas estas só precisam ser calculadas uma única vez. Assim, α_s é calculada para cada pixel.