№1

Заметим, что $(a_n\ \ a_{n-1}\ \ 3)^T = ((5\ 1\ 0)^T\ (2\ 0\ 0)^T\ (1\ 0\ 1)^T) * (a_{n-1}\ \ a_{n-2}\ \ 3)^T$ (это умножение матрицы на столбец). Тогда $(a_k\ \ a_{k-1}\ \ 3)^T = ((5\ 1\ 0)^T\ (2\ 0\ 0)^T\ (1\ 0\ 1)^T) * (a_{k-1}\ \ a_{k-2}\ \ 3)^T = ((5\ 1\ 0)^T\ (2\ 0\ 0)^T\ (1\ 0\ 1)^T)^2 * (a_{k-2}\ \ a_{k-3}\ \ 3)^T = \ldots = ((5\ 1\ 0)^T\ (2\ 0\ 0)^T\ (1\ 0\ 1)^T)^{k-1} * (a_1\ \ a_0\ \ 3)^T = ((5\ 1\ 0)^T\ (2\ 0\ 0)^T\ (1\ 0\ 1)^T)^{k-1} * (8\ \ 13\ \ 3)^T$, т.е. чтобы получить a_k, нам надо возвести $((5\ 1\ 0)^T\ (2\ 0\ 0)^T\ (1\ 0\ 1)^T)$ в $k – 1$-ую степень. Это делается бинарным умножением за $O(\log(k – 1))$.

№2

Разобьем сумму $S = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^n$ на две подсуммы $S = S_{11} + S_{12}$, где $S_{11} = A + A^2 + \ldots + A^{n/2}$ и $S_{12} = A^{n/2+1} + A^{n/2+2} + \ldots + A^n = A^{n/2}(A + A^2 + \ldots + A^{n/2})$. Видим, что $S_{12} = A^{n/2} * S_{11}$ => $S = S_{11} + A^{n/2} * S_{11} = (E + A^{n/2})S_{11}$.

Аналогично, разобьем S_{11} на S_{21} и S_{22}: $S_{11} = S_{21} + S_{22}$, т.ч. $S_{22} = A^{n/4} * S_{21}$ => $S_{11} = S_{21} + A^{n/4} * S_{21} = (E + A^{n/4})S_{21}$…

Имеем, $S_{i1} = (E + A^{n/(2^{\wedge}(i + 1))}) * S_{i+1,1}$. Тогда вся сумма $S = (E + A^{n/2})S_{11} = (E + A^{n/2})(E + A^{n/4})S_{21} = \ldots = (E + A^{n/2})(E + A^{n/4})\ldots (E + A)A$.

Если все элементарные арифметические операции выполняются за $O(1)$, то матрицы размера $q \times q$ умножаются за $O(q^3)$. Количество умножений матриц и элементарных операций в конечной формуле – $\log n$ => общая асимптотика – $O(q^3 \log n)$.

№3

Рассмотрим самый далекий предмет. Есть два варианта хода: либо мы забираем только его, тогда ответ на задачу - удвоенное расстояние до этого предмета + ответ на множестве предметов без текущего, либо мы забираем этот далекий предмет и еще какой-то вместе с ним, в этом случае перебираем все оставшиеся предметы и берем вариант с наименьшим расстоянием. Чтобы можно было перебирать за полиномиальное время, будем сохранять уже полученные ответы так, чтобы в текущем ходе (текущей итерации рекурсивной функции) можно было получить ответы для всех подмножеств без текущих самого далекого предмета и еще какого-то. Т.к. таких подмножеств 2^n, то асимптотика – $O(2^n \text{poly}(n))$