№1

Заметим, что (an an – 1 3)T = ((5 1 0)T (2 0 0)T (1 0 1)T) \* (an – 1 an – 2 3)T (это умножение матрицы на столбец). Тогда (ak ak – 1 3)T = ((5 1 0)T (2 0 0)T (1 0 1)T) \* (ak – 1 ak – 2 3)T = ((5 1 0)T (2 0 0)T (1 0 1)T)2 \* (ak – 2 ak – 3 3)T = … = ((5 1 0)T (2 0 0)T (1 0 1)T)k – 1 \* (a1 a0 3)T = ((5 1 0)T (2 0 0)T (1 0 1)T)k – 1 \* (8 13 3)T , т.е. чтобы получить ak, нам надо возвести ((5 1 0)T (2 0 0)T (1 0 1)T) в k – 1-ую степень. Это делается бинарным умножением за O(log(k – 1)).

№2

Разобьем сумму S = A + A2 + A3 + … + An на две подсуммы S = S11 + S12, где S11 = A + A2 + … + An/2 и S12 = An/2 + 1 + A n/2 + 2 + … + An = An/2(A + A2 + … + An/2). Видим, что S12 = An/2 \* S11 => S = S11 + An/2 \* S11 = (E + An/2)S11.

Аналогично, разобьем S11на S21 и S­22: S11 = S21 + S22, т.ч. S22 = An/4 \* S21 => S11 = S21 + An/4 \* S21 = (E + An/4)S21…

Имеем, Si1 = (E + An/(2^(i + 1))) \* Si+1,1. Тогда вся сумма S = (E + An/2)S11 = (E + An/2)(E + An/4)S21 = … = (E + An/2)(E + An/4)… (E + A)A.

Если все элементарные арифметические операции выполняются за O(1), то матрицы размера q x q умножаются за O(q3). Количество умножений матриц и элементарных операций в конечной формуле – log n => общая асимптотика – O(q3log n).

№3

Рассмотрим самый далекий предмет. Есть два варианта хода: либо мы забираем только его, тогда ответ на задачу - удвоенное расстояние до этого предмета + ответ на множестве предметов без текущего, либо мы забираем этот далекий предмет и еще какой-то вместе с ним, в этом случае перебираем все оставшиеся предметы и берем вариант с наименьшим расстоянием. Чтобы можно было перебирать за полиномиальное время, будем сохранять уже полученные ответы так, чтобы в текущем ходе (текущей итерации рекурсивной функции) можно было получить ответы для всех подмножеств без текущих самого далекого предмета и еще какого-то. Т.к. таких подмножеств 2n, то асимптотика – O(2n poly(n))