

# El Problema Restringido de los Tres Cuerpos

César Becerra, Leslie Brenes, Maximiliano Medina

Mayo 2019

## 1. Introducción

### Problema de los $n$ cuerpos

Se llama así al problema de describir el movimiento de  $n$  masas puntuales bajo las leyes de la mecánica clásica. Esto significa que bastan la segunda ley de Newton y la ley de Gravitación Universal para entender la dinámica del sistema. Si  $x_i(t) \in \mathbb{R}^3$  denota la posición de la  $i$ -ésima masa,  $m_i$  al tiempo  $t$ , para  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , entonces, el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales resume la dinámica:

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j \neq i, j=1}^n \frac{G m_i m_j (x_j - x_i)}{\|x_j - x_i\|^3}$$

donde  $G$  es la constante de Gravitación Universal. Así, la igualdad se fundamenta en que el lado izquierdo, la masa por la aceleración del  $i$ -ésimo cuerpo, es igual a la suma de fuerzas gravitacionales que los demás cuerpos ejercen sobre este; dichas fuerzas gravitacionales están descritas en el formato de la mecánica Newtoniana.

## 2. Marco teórico

### Problema de los 2 cuerpos

Para el caso muy particular de  $n = 2$ , estudiaremos cómo al describir la dinámica del centro de masa, definido más adelante, se reduce el sistema al de un solo cuerpo, dando así solución al problema de los dos cuerpos.

Si denotamos la posición de las dos masas,  $m_1$  y  $m_2$ , en cada instante del tiempo por  $x_1, x_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , el centro de masa de los cuerpos se define como la función  $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por lo siguiente:

$$R(t) = \frac{m_1 x_1(t) + m_2 x_2(t)}{m_1 + m_2}$$

Además, si designamos al vector de desplazamiento entre las dos masas como  $r = x_2 - x_1$ , notemos que podemos recuperar las posiciones  $x_1, x_2$ , si ya se conoce

la del centro de masa:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \\ 1 & \frac{m_1}{m_1 + m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ r \end{pmatrix}$$

Después, del planeamiento general del problema de los  $n$  cuerpos, deducimos para  $n = 2$  lo siguiente:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= f_{12}(x_1, x_2) \doteq G \frac{m_1 m_2 (x_2 - x_1)}{\|x_2 - x_1\|^3} \\ m_2 \ddot{x}_2 &= f_{21}(x_1, x_2) \doteq G \frac{m_1 m_2 (x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|^3} \end{aligned} \quad (1)$$

En consecuencia,  $f_{12} + f_{21} = 0$ , en concordancia con la tercera ley de Newton. Por otro lado, expresando  $(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2) = F(x_1, x_2)$ ,  $F \doteq (f_{12}, f_{21})$ , se usará más adelante un equivalente al método del potencial para sistemas conservativos con el fin de resolver las ecuaciones. Aún más, la masa reducida definida por  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  permite llegar a la siguiente igualdad:

$$\ddot{r} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \frac{f_{12}(x_1, x_2)}{m_1} - \frac{f_{21}(x_1, x_2)}{m_2} = f_{12}(x_1, x_2) \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

En conclusión, la ecuación diferencial  $\mu \ddot{r} = f(r)$ , donde  $f(x_2 - x_1) \doteq f_{12}(x_1, x_2)$ , es equivalente al sistema original. Esto significa que un sistema de dos cuerpos se redujo a uno que solo depende de la separación entre dichos cuerpos. Asimismo, si se define

$$U(|r|) = \frac{G m_1 m_2}{|r|}$$

cumple  $\nabla U = F$ . Esta función será fundamental para dar solución al problema más adelante, pues no es otra cosa que el potencial gravitacional.

Ahora, probaremos que en el problema de los dos cuerpos el centro de masa se mueve en el espacio de manera lineal. De la definición del centro de masa, se deduce la siguiente expresión:

$$\ddot{R}(t) = \frac{m_1 \ddot{x}_1(t) + m_2 \ddot{x}_2(t)}{m_1 + m_2}$$

Según la expresión (1), el numerador de la expresión anterior es cero. Luego, se cumple que  $\ddot{R}(t) = 0$ , por lo que  $\dot{R}(t) = \vec{a}$ , y finalmente obtenemos:

$$R(t) = \vec{a}t + \vec{b}$$

De esta manera, queda demostrado que el centro de masa se mueve a lo largo de una trayectoria lineal. Por lo tanto, si desplazamos el origen (nuestro centro de referencias) por el vector  $\vec{b}$  y le restamos  $\vec{a}$  a las condiciones iniciales de

velocidad, podemos fácilmente asumir que el origen de nuestro plano cartesiano va a ser el centro de masas para todo tiempo  $t$ . Tras resolver el problema, siempre lo podemos volver a desplazar usando estos mismos vectores.

En seguida, resulta que aunque los dos cuerpos se mueven en  $\mathbb{R}^3$ , su movimiento está restringido solamente a un plano  $P \subset \mathbb{R}^3$ , con lo cual se reduce a estudiar el problema en  $\mathbb{R}^2$ . Para probar lo anterior, aplicaremos el producto cruz a  $x_2(t)$  y  $\dot{x}_2(t)$ ; notemos que:

$$\frac{d}{dt}(x_2(t) \times \dot{x}_2(t)) = \dot{x}_2(t) \times \dot{x}_2(t) + x_2(t) \times \ddot{x}_2(t)$$

En esta ecuación,  $\dot{x}_2(t) \times \dot{x}_2(t) = 0$ , ya que el producto cruz de vectores que sean múltiplos escalares es cero y  $\dot{x}_2(t)$  es múltiplo escalar de sí mismo para todo tiempo. Por otro lado,  $\ddot{x}_2(t)$  es un vector que apunta en dirección  $(x_1(t) - x_2(t))$ . Por lo tanto,

$$x_2(t) \times (x_1(t) - x_2(t)) = x_2(t) \times x_1(t) - x_2(t) \times x_2(t)$$

Nuevamente,  $x_2(t) \times x_2(t) = 0$  y como el origen es para todo tiempo el centro de masa, y el centro de masa de dos cuerpos se encuentra en la recta que une sus respectivos centros de masa, resulta que  $x_2(t)$  y  $x_1(t)$  son múltiplos escalares para todo tiempo. Por ende,

$$x_2(t) \times (x_1(t) - x_2(t)) = 0$$

Y por lo tanto,

$$x_2(t) \times \ddot{x}_2(t) = 0$$

Se sigue entonces que  $\frac{d}{dt}(x_2(t) \times \dot{x}_2(t)) = 0$ . En consecuencia, se obtiene lo que sigue:

$$x_2(t) \times \dot{x}_2(t) = \vec{y}$$

en donde  $\vec{y}$  es un vector constante en el tiempo. Si  $y \neq 0$ , debe ser perpendicular para todo tiempo al plano generado por  $x_2(t), \dot{x}_2(t)$ . Luego,  $x_2(t), \dot{x}_2(t)$  viven para todo tiempo en un mismo plano  $P$ . Si  $y = 0$ , se sigue que  $x_2(t), \dot{x}_2(t)$  son múltiplos escalares el uno del otro para todo tiempo. Si la posición  $x_2(t)$  solo cambia a lo largo de su misma dirección, entonces se mantiene sobre una recta, la cual está contenida en el plano  $\mathcal{P}$ .

Con razonamiento análogo,  $x_1(t)$  vive en el mismo plano  $\mathcal{P}$ . El problema de los dos cuerpos, por la discusión previa, se puede estudiar en  $\mathbb{R}^2$ .

Una vez probado el hecho de que el movimiento se lleva a cabo en un plano, transformando a coordenadas polares  $r - \phi$  en ese plano, usaremos técnicas de la mecánica Lagrangiana para dar solución a las ecuaciones -para un tratamiento detallado consultar [2] y [3]. El desarrollo posterior es válido para campos centrales, que son aquellos que dependen únicamente de la distancia a un punto fijo -la argumentación inicial explica por qué estamos precisamente en este caso-. Recordemos dos hechos fundamentales. Primero, del principio de mínima acción

se deduce que la función  $L(t, q, \dot{q})$ , el lagrangiano, que minimiza la integral de acción satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange (E-L):

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

donde  $q = (q_j)$  son coordenadas generalizadas. En ese sentido, definiendo al momento generalizado como  $p_j \doteq L_{\dot{q}_j}$ , las ecuaciones se reescriben compactamente como  $\dot{p}_j = L_{q_j}$ . Segundo, en un sistema cerrado -por ejemplo, partículas que interactúan entre sí solamente-, el lagrangiano en coordenadas generalizadas toma la forma

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q)$$

donde  $a$  es una función y de esa manera se define al primer término de la resta como la energía cinética,  $T$ , y al segundo se le llama energía potencial, función que depende de la interacción.

En conjunto, regresando al problema de interés, el lagrangiano de nuestro sistema en coordenadas polares -hacemos la aclaración de que, respecto al planteamiento anterior, las coordenadas generalizadas en este caso son  $q = (r, \phi)$ ,  $\dot{q} = (\dot{r}, \dot{\phi})$ - es el siguiente:

$$L(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - U(r)$$

A su vez, como  $L$  no es función explícitamente de  $\phi$ , las ecuaciones E-L indican  $0 = L_{\phi} = \dot{p}_{\phi}$ , donde  $p_{\phi} = L_{\dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi}$  es el momento angular por definición. Entonces, por un lado, obtuvimos la ley de conservación de momento angular:

$$p_{\phi} = mr^2 \dot{\phi} = M$$

para alguna  $M \in \mathbb{R}$  constante. Por otro lado, la igualdad anterior se interpreta geoméricamente al aproximar el área barrida por un radio en un instante  $dt$  con un triángulo de base  $r$  y de altura  $r d\phi$ , el arco. Luego, el ritmo de cambio del área barrida es exactamente  $r^2 \dot{\phi} = M'$ ; es decir, es constante, de manera que en tiempos iguales, se barren áreas iguales. Este hecho es la segunda ley de Kepler.

Después, la solución completa se obtiene a partir de la ley de Conservación de Energía, y ya que  $\dot{\phi} = M/mr^2$ , resulta:

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + U(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{M^2}{r^2 m} + U(r)$$

A continuación, despejamos  $\dot{r}$  e integramos respecto a  $t$ ; el resultado es:

$$t = \int dt = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + c_1$$

También, otra vez  $d\phi = Mdt/mr^2$  implica que mutiplicando la igualdad del lado derecho por  $M/mr^2$ , se obtiene:

$$\phi = \int \frac{Mdr/r^2}{\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{M^2}{r^2}}} + c_2$$

Las dos integrales anteriores dan solución al problema de un cuerpo en un campo central, que a su vez resuelve el problema de los dos cuerpos.

### 3. Problema restringido de los 3 cuerpos

Aunque el problema de los tres cuerpos es un problema no resuelto de las matemáticas, existen varias simplificaciones y suposiciones que, aunque no siempre ciertas, nos permiten estudiar el problema de una manera mucho más sencilla. Replicando el planeamiento del problema de los  $n$  cuerpos, el problema se escribe como:

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j \neq i, j=1}^3 \frac{Gm_i m_j (x_j - x_i)}{\|x_j - x_i\|^3} \quad (2)$$

#### Simplificación

Se pueden asumir diferentes hipótesis; nosotros asumiremos en las simulaciones numéricas que:

1. El tercer cuerpo es de masa despreciable en comparación a los otros dos, por lo cual estos se moverán en concordancia con el problema de los dos cuerpos.
2. Todo el movimiento está ocurriendo en  $\mathbb{R}^2$ . (por lo explicado en la introducción y por el punto 1).
3. El primer cuerpo va a ser de masa mucho mayor que el segundo, de modo que el centro de masa del sistema se halle a una distancia despreciable del centro de masa del primer cuerpo. Nuestro origen será, por lo tanto, el centro de masa y, por lo tanto, el centro del primer cuerpo,  $x_1$ . Esto quiere decir que  $x_1(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ .

Por otro lado, una diferente simplificación que se puede hacer (y bajo la cual también haremos simulaciones), es omitir el punto 3 pero suponer que las órbitas de los primeros dos cuerpos son círculos centrados en el centro de masa. Si mantenemos los ejes  $X$  y  $Y$  fijos de manera que los primeros dos cuerpos se desplacen respecto a estos ejes, obtenemos lo que se conoce como un sistema de coordenadas sidéreo. En este, el origen de  $\mathbb{R}^2$  es el centro de masa para todo tiempo, es decir  $R(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ , y los cuerpos se mueven con trayectorias:

$$\begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \cos(t2\pi/T) \\ b \sin(t2\pi/T) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{21}(t) \\ x_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos(t2\pi/T) \\ a \sin(t2\pi/T) \end{pmatrix}$$

en donde  $T$  es el periodo que tardan ambos cuerpos en dar una vuelta completa respecto al sistema sidéreo y en donde  $a$  y  $b$  son el radio o distancia (constante) que mantiene cada astro respecto del centro de masa. Para obtener  $a$  y  $b$ , retomemos la segunda ecuación vista en el problema de los dos cuerpos y una distancia constante  $1 = \|r(t)\|$ ; resulta:

$$a = \|x_2\| = \|R(t) + \frac{m_1}{M}r(t)\| = \frac{m_1}{M}$$

$$b = \|x_1\| = \|R(t) + \frac{m_2}{M}r(t)\| = \frac{m_2}{M}$$

donde  $M = m_1 + m_2$ .

Finalmente, notamos que ahora en la distancia  $\|x_j - x_3\|$  la única incógnita es  $x_3$  puesto que ya conocemos la trayectoria de  $x_j$  para  $j = 1, 2$ . En seguida, definimos los siguientes radios:

$$R_1(t) = \|x_1 - x_3\| = [(b \cos(t2\pi/T) - x_{31}(t))^2 + (b \sin(t2\pi/T) - x_{32}(t))^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$R_2(t) = \|x_2 - x_3\| = [(a \cos(t2\pi/T) - x_{31}(t))^2 + (a \sin(t2\pi/T) - x_{32}(t))^2]^{\frac{1}{2}}$$

De aquí se sigue que la ecuación (2) se convierta, para el tercer cuerpo, en

$$m_3 \ddot{x}_3 = G \frac{m_1 m_3 (x_1 - x_3)}{R_1^3} + G \frac{m_2 m_3 (x_2 - x_3)}{R_2^3}$$

lo cual nos da un sistema del tipo

$$\ddot{x}_3 = F(x_3)$$

el cual podemos transformar en un sistema de ecuaciones de primer grado no lineal con el cambio de variable  $v = \dot{x}_3$ , de manera que se transforma en:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ G \frac{m_1 (x_1 - x_3)}{R_1^3} + G \frac{m_2 (x_2 - x_3)}{R_2^3} \end{pmatrix} \quad (3)$$

En este último sistema estudiaremos la estabilidad y luego será el utilizado en los métodos RK4 de las simulaciones numéricas.

## Análisis de estabilidad

A partir del sistema (3), estudiaremos la estabilidad de los puntos de equilibrio. Supondremos además que  $m = m_1 = m_2$ , lo que implica, después de ajustar las unidades,  $a = b = 1$ . Más aún, cuando las masas son iguales y se fija el origen en el centro de masa, i.e.:  $R = 0$ , a consecuencia es la siguiente:

$$R = \frac{mx_1 + mx_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2} = 0$$

de donde concluimos  $-x_1 = x_2$ . Al mismo tiempo, cuando  $a = b$ , necesariamente  $R_1 = R_2$ . Tomando en cuenta estos dos hechos, en virtud de (3), sucede que si  $(0, 0)^T = (\dot{x}_3, \dot{v})^T$ , entonces

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{Gm}{R_1^3}(x_1 - x_3 - x_1 - x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{-2Gm}{R_1^3}(x_3) \end{pmatrix}$$

de donde concluimos que  $(x_3, v)^T = (0, 0)^T$  es el único punto de equilibrio. Recordando la función potencial del problema de los dos cuerpos, análogamente reconocemos que la función potencial de (3) es  $U(R_1, R_2) \doteq \sum \frac{Gm_i}{R_i}$  que satisface  $\nabla U = F(x_3)$ . Aplicando el método del potencial, resulta que la matriz Hessiana,  $H$ , de  $U$  es la siguiente:

$$H(x_3) = -2Gm \begin{pmatrix} 1/R_1^3 + \frac{3}{R_1^5}x_{31}(x_{21} - x_{31}) & 0 + \frac{3}{R_1^5}x_{31}(x_{22} - x_{32}) \\ 0 + \frac{3}{R_1^5}x_{32}(x_{21} - x_{31}) & 1/R_1^3 + \frac{3}{R_1^5}x_{32}(x_{22} - x_{32}) \end{pmatrix}$$

Entonces, al evaluar en el punto de equilibrio  $x_3 = 0$ , se obtiene que

$$H(0) = \begin{pmatrix} -2Gm/R_1^3 & 0 \\ 0 & -2Gm/R_1^3 \end{pmatrix}$$

Consecuentemente, la matriz es negativa definida y, así, el potencial tiene un máximo local en  $x_3 = 0$ . Por lo tanto, el punto de equilibrio  $(x_3, v)^T = (0, 0)^T$  es inestable. Si se reflexiona sobre esta conclusión, puesto que los dos cuerpos masivos ejercen fuerzas gravitacionales atractoras sobre el punto de equilibrio, el campo de direcciones en ese punto debería verse como una fuente, pues la fuerza está orientada desde  $x_3$  hacia  $x_2$  y  $x_1$ ; esta es la descripción de un punto inestable. Aún más, en las secciones siguientes se muestra una simulación que confirma e ilustra perfectamente la inestabilidad del punto de equilibrio en este escenario.

## Colisiones

Aunque en las colisiones la función de fuerza de atracción queda indeterminada, no será necesario tratar de modelar estas colisiones ya que para que tomen lugar, los centros de masa  $m_i, m_j$  deben estar muy cerca. Sin embargo, para planetas o estrellas, hay una distancia  $D = R_{Planetai} + R_{Planetaj}$  de la que no se pueden acercar más ya que colisionarían los cuerpos físicos de los objetos,

perderían masa por fragmentación y su comportamiento requeriría de muchas otras ecuaciones para ser explicado que la ley de gravitación universal no ofrece. Por lo tanto, consideraremos que una colisión ocurrirá si en cualquier tiempo  $t$ , la distancia entre dos cuerpos es menor a  $D$ .

## 4. Simulación numérica

### Cómo lanzar un cohete a la Luna

#### Comentarios pertinentes

Para una de las simulaciones numéricas tomamos un cohete o satélite de masa despreciable orbitando entre la tierra y la luna. Tenemos los siguientes datos:

1. La distancia de la tierra a la luna es de 384,400,000 metros
2. El peso de la tierra es de  $5.972 \times 10^{24}$  kg y el de la luna,  $7.349 \times 10^{22}$  kg. Luego, la distancia de la tierra al centro de masa es de 4,672,834 metros. Suena a mucho, pero en comparación a la distancia de la tierra al centro de masa (aproximadamente 380,000,000 metros), es poco. Además, la tierra lleva inercia por girar en torno al sol y eso afecta su movimiento respecto a este centro de masa.
3. La aceleración se mide, normalmente en metros sobre segundo al cuadrado. Pero si realizamos los pasos de nuestro método de segundo en segundo, necesitaremos de 86,400 iteraciones para hacer un solo día de vuelo (la luna tarda 27.32 días en orbitar la tierra).

Por estas razones, asumimos que la tierra está en el centro de masa y, por lo tanto, centro del plano cartesiano en todo tiempo. Igualmente, hemos cambiado de unidades para que la computadora no trabaje con medidas muy grandes o muy chicas. Lo que antes era un Newton (de fuerza) ahora es:

$$1N = 1 \frac{m * kg}{s^2} * \frac{10^{-6} Mm}{m} * \frac{7,349 \times 10^{22-1} ML}{kg} * \frac{s^2}{(900^2)^{-1} q^2} = 1,10218 \times 10^{-23} Nn$$

Aquí, ML son masas lunares, que son cuartos de hora (15 minutos, pues de ese tamaño tomamos los pasos en la simulación), Mm son millones de metros y Nn es el nombre de la nueva unidad de fuerza creada, en la cual

$$1Nn = \frac{1ML * Mm}{q^2}$$

Haciendo lo mismo para G la constante de gravitación universal se vuelve:

$$G = 6,674 \times 10^{-11} \frac{N * m^2}{kg^2} * \frac{(10^{-6})^2 Mm^2}{m^2} * \frac{kg^2}{7,349 \times [(10^{22})^2]^{-1}} * \frac{1,10218 \times 10^{-23} Nn}{N} = 3,9728 Gn$$



De este modo podemos ahora tener una simulación que preserve datos realistas sin que la computadora tenga que manejar números muy grandes ni muy chicos.

## Cómo quedarse quieto entre gigantes

Para la segunda simulación que hicimos (nuevamente con RK4) trabajamos bajo el supuesto de que las magnitudes de las dos masas no son tan distintas entre sí. Luego, ambas giran de manera circular en torno al centro de masa.  $x_1$  con radio  $b$  y  $x_2$  con radio  $a$ . Como este sistema ya no se asemeja a observaciones sino que nace más de la teoría, abandonamos el sistema de unidades y simplemente trabajamos con  $l = 1$ .

El objetivo principal fue tratar de encontrar un punto de equilibrio. Retomando la ecuación (3), vemos que es necesario que  $v_0 = [0, 0]$  y que

$$G \frac{m_1 m_3 (x_1 - x_3)}{R_1^3} = -G \frac{m_2 m_3 (x_2 - x_3)}{R_2^3}$$

Aunque esto define toda una familia de puntos de equilibrio, el más fácil de notar es cuando  $x$  se encuentra equidistante entre dos masas de igual tamaño. En teoría, este punto resulta ser el origen. Luego, para  $m_1 = m_2$  y  $x_0 = (0, 0)$  y  $v_0 = [0, 0]$  tenemos un equilibrio. Probémoslo numéricamente.

## Resultados

### Cohete

A continuación se muestra en una tabla lo que logramos al mandar nuestro cohete a la luna. Tomamos el ángulo inicial como  $\pi/2$  y el cohete partió de una distancia 6.371 del origen, lo que equivale al radio de la tierra. Notamos que variando ligeramente la velocidad inicial conseguimos resultados muy diferentes.  $v_0$  es la velocidad inicial,  $D_{min}$  es la mínima distancia que tuvo el cohete de la luna y  $t$  de  $D_{min}$  es el tiempo de vuelo en el que se logró esa distancia.

$v_0$ en m/s	$v_0$ en Mm/q	$D_{min}$	$t$ de $D_{min}$	status
11,323.33	10.191	0	159.75 h	Se estrelló en la luna
11,324.44	10.192	395,800 m	160.75 h	No regresó a la tierra
11,325.55	10.193	7,250,000 m	162 h	No regresó a la tierra
11,326.66	10.194	14,969,100 m	163 h	Regresó a la tierra

Es fácil notar que  $D_{min}$  varió mucho al variar  $v_0$ . Sin embargo,  $t$  de  $D_{min}$  se mantuvo relativamente estable. También cabe mencionar que para todas las velocidades hasta  $v_0=10.26$  el cohete regresó a la tierra, por lo que hay un intervalo en el cual esta condición (volver) se cumple. A pesar de que  $D_{min}$  es sensible,

los demás resultados parecen ser continuos respecto a condiciones iniciales. En todo caso, ha sido difícil enviar un cohete a la luna.

En la Figura 1 vemos una curva roja, que denota la trayectoria de la luna, y una curva azul, que denota la trayectoria del cohete. Es la gráfica correspondiente a  $v_0 = 10.194$  Mm/q, en la que el cohete regresó sano y salvo al planeta.

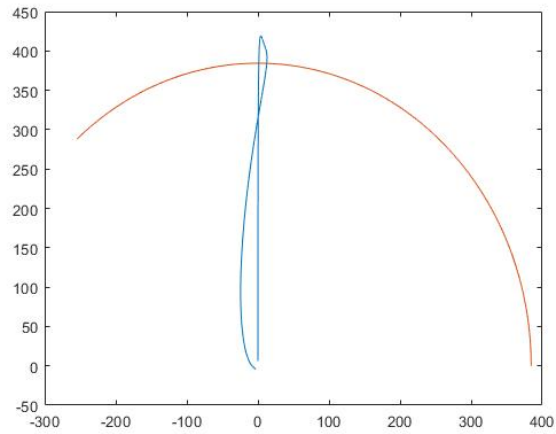


Figura 1: Regreso a la tierra

En la Figura 2 vemos el caso en que más cerca llegamos de la luna, a 395.8 km de su superficie, pero en el cual el cohete no regresa a la tierra. Corresponde a  $v_0 = 10.192$  Mm/q.

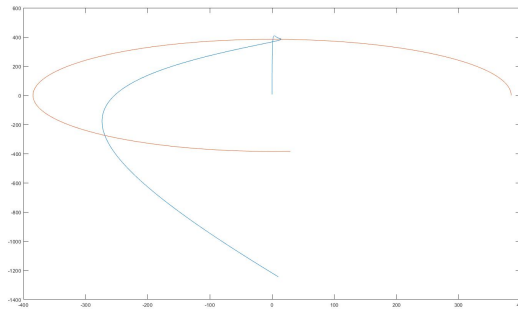


Figura 2: Pasa muy cerca a la luna y se pierde

A continuación tomamos un satélite que comienza a 150 y 346 Mm, respec-

tivamente, de la tierra y con vectores de velocidad inicial de  $[0,1.5]$  y  $[0,1.3]$  obtenemos lo siguiente:

En la Figura 3 vemos cómo orbita establemente un satélite al estar lejos de la luna (el campo gravitacional apenas y se siente).

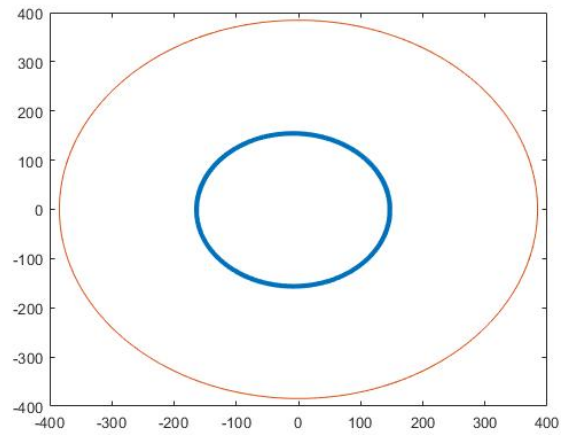


Figura 3: Órbita Estable lejos de la luna

En la Figura 4 el satélite comenzó su órbita más cerca de la luna y podemos ver cómo no es una órbita tan estable como la de la tierra.

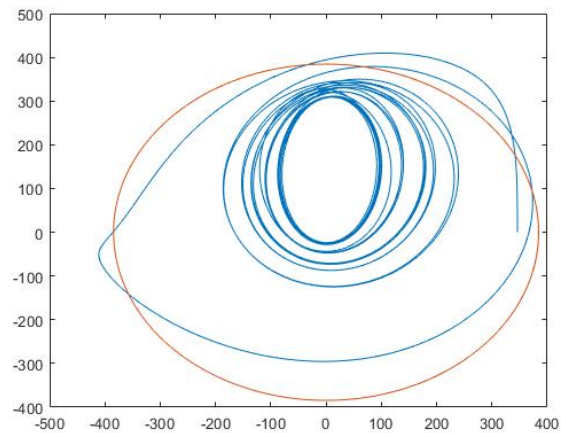


Figura 4: Órbita inestable cerca de la luna

## Equilibrio

En las figuras a continuación, el círculo rojo marca el movimiento del cuerpo 1, el que tiene más (o igual) masa. La curva amarilla denota el movimiento del segundo cuerpo y, finalmente, la curva azul representa el tercer cuerpo. Como se llegan a sobreponer las curvas, se han marcado con círculos, cruces y "x." adicionales.

La Figura 5 nos muestra cómo es la trayectoria a 100 pasos (o dos vueltas de los cuerpos primarios) si tomamos las condiciones antes discutidas de punto de equilibrio.

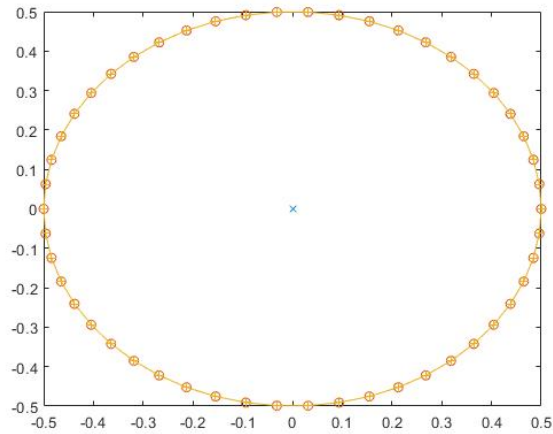


Figura 5: La masa despreciable se queda totalmente inmóvil

La Figura 6 nos muestra qué pasa si nos alejamos tan solo 0.01 unidades del centro de masa. Como se observa, la solución se aleja del origen. Esto nos lleva a creer que dicho punto de equilibrio es inestable.

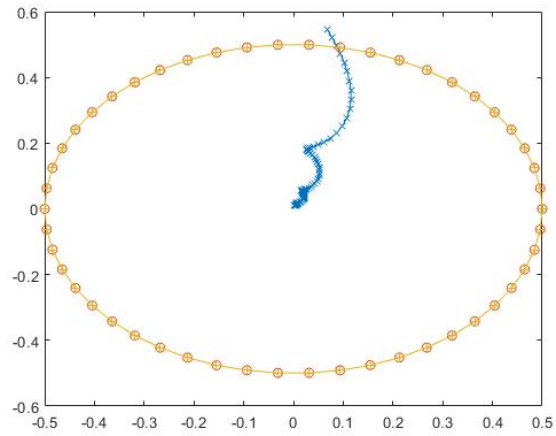


Figura 6: Un cuerpo ligeramente fuera del equilibrio

Finalmente, la Figura 7 nos muestra qué pasa si las masas no son iguales, pero seguimos colocando la tercera masa en el origen. Esto solo sirve para ejemplificar que este equilibrio es muy limitado. En este caso, la masa 1 es 1.5 veces más grande que la 2.

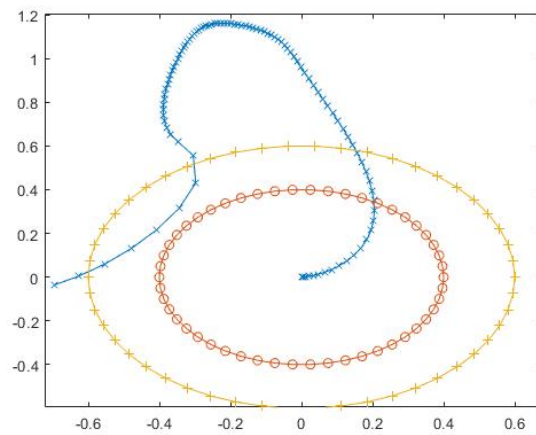


Figura 7: Si las masas difieren, ya no es equilibrio

## 5. Conclusiones

Queda claro en el sistema Tierra-Luna-Cohete que en distancias cercanas a la tierra el cohete no es influenciado por la atracción gravitacional de la luna. El problema de los 3 cuerpos se vuelve útil hasta que el cohete se aproxima mucho a la luna, como en la Figura 4. Esto mismo también justifica que no debamos estudiar los n-cuerpos si muchos de ellos están lo suficientemente lejos o tienen poca masa.

También queda claro que los viajes a la luna requieren de mucha precisión pues una variación mínima en nuestra velocidad inicial (tan pequeña como la velocidad a la que trota un ser humano) hizo que falláramos por varios miles de kilómetros.

## 6. Referencias

1. Andre Oliva, *Proyecto: el problema restringido de los tres cuerpos*. Universidad de Costa Rica, Mecánica Celeste, 2014. Disponible en: <http://gandreoliva.org/papers/3cuerpos.pdf>
2. Goldstein Herbert, Poole Charles, Safko John. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 2002.
3. Landau Lev, Lifshitz Evgeny. *Course in Theoretical Physics Volume I: Mechanics*. Institute of Physical Problems, USSR Academy of Sciences, 1976.
4. Luis Franco Pérez, *El problema restringido de 3 cuerpos sobre el círculo unitario*. Universidad Autónoma Metropolitana, División de Ciencias Básicas e Ingeniería, 2010. Tesis Doctoral
5. Morris Hirsch, Stephen Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, 1974
6. Sin autor, *Problema de los dos cuerpos*. Universitat de Barcelona. Sin fecha. Disponible en <http://www.publicacions.ub.edu/liberweb/astrofisica-esferica/material/version-pdf/Tomo201/3.120Conservacion20del20momento20lineal.pdf>
7. Victor Szebehely, *Theory of Orbits. The Restricted Problem of Three Bodies*. Academic Press, 1967

## 7. Código en Matlab

```

1 function [status1, status2] = simulacion(theta, r0, v0,
    steps)
2 % Esta función simula la trayectoria de un cohete de la
    tierra a la luna y de
3 % regreso. Las unidades de distancia son miles de
    kilómetros
4 %
5 % Inputs:
6 % theta, el ángulo respecto a la posición inicial de la
    luna en el cual el
7 % cohete es lanzado
8 % r0, distancia de la tierra desde donde inicia el cohete
9 % v0, la velocidad inicial del cohete
10 %
11 % Outputs:
12 % status1 dice si el cohete colisionó con la luna. 1
    colisión. 0, no
13 % colisionó
14 % status2 dice si el cohete colisionó con la tierra. 1
    colisión. 0, no
15 % colisionó
16
17 % Radio de la tierra, para medir colisiones
18 RT = 6.371;
19
20 % Distancia de la luna a la tierra
21 R = 384.4;
22
23 % radio de la luna. Si en algún momento la distancia del
    cohete a la luna
24 % es menor a esto, significa que colisionaron
25 RL = 1.7371;
26 status1 = 0;
27 status2 = 0;
28 T = 27.32;
29
30 x = zeros(steps, 2);
31 v = zeros(steps, 2);
32 x(1, :) = [cos(theta), sin(theta)] * r0;
33 v(1, :) = v0;
34 j = 0;
35 t = [0:steps-1];
36 Luna = R * [cos(t / (T * 24 * 4) * 2 * pi); sin(t / (24 * 4 * T) * 2 * pi)]';
37
38 % admin reportará la distancia mínima que hubo entre el
    cohete y la luna

```

```

39   dmin = R;
40   for i = 2:steps
41       aux = RK4(x(i-1,:),v(i-1,:), (i-2),1);
42       x(i,:) = aux(1:2);
43       v(i,:) = aux(3:4);
44       if norm(Luna(i,:) - x(i,:)) - RL < dmin
45           dmin = norm(Luna(i,:) - x(i,:)) - RL;
46           j = i;
47       end
48       if norm(Luna(i,:) - x(i,:)) < RL
49           status1 = 1;
50           i
51           break;
52       end
53       if norm(x(i,:)) < RT
54           status2 = 1;
55           i
56           break;
57       end
58   end
59
60
61   dmin
62   j
63   plot(x(:,1),x(:,2),Luna(:,1),Luna(:,2));
64
65   end
66
67
68
69
70
71
72   function [y] = RK4(x0,v0,t,h)
73
74       k1 = h*f(x0,v0,t);
75       k2 = h*f(x0 + .5*k1(1:2),v0 + .5*k1(3:4),t + .5*h);
76       k3 = h*f(x0 + .5*k2(1:2),v0 + .5*k2(3:4),t + .5*h);
77       k4 = h*f(x0 + k3(1:2),v0 + k3(3:4),t + h);
78
79       y = [x0,v0] + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
80
81   end
82
83
84   function a = f(x,v,t)
85   R = 384.4;

```



```

3  T = 27.32;
4  G = 3.9728;
5  MT = 81.2627;
6  %MT = 0;
7
8  a = [v, -MT*G*x/(norm(x)^3) + G*(R*[cos(t/T/(4*24)*2*pi
      ), sin(t/T/(4*24)*2*pi)]-x)/(norm(R*[cos(t/T/(4*24)
      *2*pi), sin(t/T/(4*24)*2*pi)]-x)^3)];
9
10 end

```