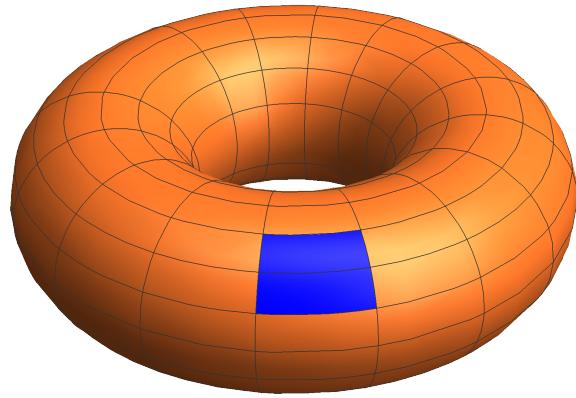


Zusammenfassung

HÖHERE ANALYSIS



Max Melching

Stand: 9. März 2023

Vorwort

Die aktuellste Version dieser Datei ist unter https://github.com/MaxMelching/physics_notes zu finden.

Diese Zusammenfassung wurde von auf Basis von Skripten meiner Dozenten an der Leibniz Universität Hannover geschrieben (besonders zu erwähnen sind dort Dr. Sebastian Heller, Prof. Dr. Knut Smoczyk). Sehr hilfreich war außerdem das Buch "The Road to Reality" von Sir Roger Penrose.

Natürlich übernehme ich keine Garantie für die Richtigkeit aller Ausführungen, auch wenn ich mir größte Mühe dabei gegeben habe.

Thematisch werden hier vor allem fortgeschrittene Konzepte der Analysis sowie Geometrie behandelt. Das umfasst insbesondere Mannigfaltigkeiten, Lie-Gruppen, Vektorbündel und Differentialformen. Zu Anfang erfolgt eine Wiederholung besonders relevanter Grundlagen, die immer wieder benötigt werden, Vorkenntnisse in Analysis und (Linearer) Algebra sind jedoch unabdingbar.

Zum Schluss soll noch die Bedeutung einiger Begriffe erläutert werden:

- **Definition:** selbsterklärend
- **Satz:** für das Thema wichtige Aussage (Beweise hierzu werden nur aufgeführt, wenn sie zum Verständnis des Themas beitragen und nicht zu technisch sind)
- **Lemma** (hier zusätzlich noch äquivalent zu Proposition verwendet): Aussagen, die eher zum Beweis eines Satzes wichtig sind als allgemein (für Beweise gilt das Gleiche wie bei Sätzen)
- **Korollar:** (mehr oder weniger) offensichtliche Folgerungen aus Sätzen (Beweise sind meist recht kurz und werden daher nicht immer voll ausformuliert)
- **Beispiel:** selbsterklärend
- Überschriften mit * bedeuten, dass Abschnitt noch nicht vollständig sind

Inhaltsverzeichnis

1 *Wiederholung Grundlagen*	1
1.1 *Mengenlehre*	2
1.2 *Topologie*	5
1.2.1 Metrische Räume	9
1.3 *Stetige Abbildungen*	11
1.4 *Differenzierbarkeit*	14
1.5 *Gewöhnliche Differentialgleichungen*	16
2 Grundlegende Definitionen	20
2.1 Karten, Atlanten	21
2.2 Mannigfaltigkeiten	28
2.3 Differenzierbare Abbildungen	37
2.4 Untermannigfaltigkeiten	43
2.5 Lie-Gruppen	49
3 Tangentialräume	55
3.1 Definition	56
3.1.1 Von Untermannigfaltigkeiten	56
3.1.2 Geometrisch	58
3.1.3 In Karten	63
3.1.4 Derivationen	66
3.1.5 Vergleich	72
3.2 Kotangentialraum und Differentiale	75
3.2.1 Linearformen auf dem Tangentialraum (Kotangentialraum) .	75
3.2.2 Abbildungen auf dem Tangentialraum (Differentiale)	79
4 Felder und Formen	85
4.1 Tangentialbündel und Kotangentialbündel	86
4.1.1 Tangentialbündel	87
4.1.2 Kotangentialbündel	99
4.2 Vektorfelder und 1-Formen	104
4.2.1 Weiterführende Aussagen	114
4.2.2 (Matrix-)Lie-Gruppen 2 und Maurer-Cartan-Theorie	122

5 Multilineare Abbildungen	135
5.1 Tensoren	136
5.2 Vektorbündel	148
5.2.1 Tensorbündel und -felder	151
5.2.2 *Distributionen und der Satz von Frobenius*	156
5.3 Differentialgleichungen und Flüsse	159
5.4 Push-Forward, Pullback und Lie-Ableitung	168
6 Differentialformen	182
6.1 Alternierende multilineare Abbildungen	183
6.1.1 Äußere Algebra	190
6.2 Differentialformen und Äußeres Differential	192
6.2.1 Äußeres Differential	197
6.3 Integration von Differentialformen	206
6.4 Satz von Stokes	216
6.5 De-Rham-Kohomologie	227
6.5.1 *Mayer-Vietories-Sequenz*	232
6.5.2 Grad von Abbildungen	238
6.6 Hodge-Dualität	243
7 Riemannsche Geometrie	244
7.1 Längen und Abstände	245
7.1.1 Auf Untermannigfaltigkeiten	245
7.1.2 Skalarprodukte und Riemannsche Metriken	246
7.1.3 Notizen	250
7.2 Kovariante Ableitung, Paralleltransport und Krümmung	252
7.2.1 Geodäten	260
7.2.2 *Exponentialabbildung und Geodätischer Spray*	263
7.2.3 Krümmung	265
7.2.4 Notes	270
7.3 Anderer Stuff	272
7.4 *Satz von Gauß-Bonnet*	273
8 Restlicher Stuff	278
8.1 Aus Fragestunde/ Sonstige Ergänzungen	278
8.2 Literatur	285
8.2.1 Links	285
8.2.2 Bücher	285
8.2.3 Quellen	285
Index	286

Abbildungsverzeichnis

2.1	Kartesische Koordinaten vs. Polarkoordinaten	25
2.2	Stereographische Projektion	27
2.3	Torus	31
4.1	Veranschaulichung Drehvektorfeld	106
5.1	Veranschaulichung eines Schnittes	150
7.1	Unterteilung einer Kurve	246
7.2	Paralleltransport	269

1 *Wiederholung Grundlagen*

Vor der Behandlung der eigentlichen Themen dieser Ausarbeitung werden noch die wichtigsten und dafür nötigen Grundlagen (vor allem aus der Analysis, aber auch ausgewählte Themen der Linearen Algebra) wiederholt.

Das Meiste wird dabei ohne expliziten Beweis angegeben, der Fokus liegt eher auf dem Vermitteln eines intuitiven Verständnisses, warum manche Dinge nützlich sind und wofür man sie brauchen wird. Da auch die Fülle der Beispiele sich in Grenzen hält, sind jedoch Vorkenntnisse unbedingt empfehlenswert.

1.1 *Mengenlehre*

In der Mathematik arbeitet man ganz allgemein immer mit gewissen Objekten, die untersucht werden. Im Allgemeinen handelt es sich zudem um Ansammlungen von solchen Objekten und diese lassen sich in unterschiedliche Kategorien einteilen.

Definition 1.1: Menge, Tupel

Eine ungeordnete Ansammlung von paarweise verschiedenen Objekten $o_i, i = 1, \dots, m$ heißt **Menge** und wird notiert mit $M = \{o_1, \dots, o_m\}$. Die Objekte o_i heißen dann auch **Elemente von M** und $m = |M|$ ist die **Mächtigkeit von M** .

Eine geordnete Ansammlung heißt **Tupel** und wird notiert mit $T = (o_1, \dots, o_m)$, Elemente werden hier meist als **Komponenten** bezeichnet.

Der Unterschied zwischen Menge und Tupel ist also, dass

$$M = \{o_1, o_2\} = \{o_2, o_1\} = \tilde{M} \quad T = (o_1, o_2) \neq (o_2, o_1) = \tilde{T}$$

und dass bei M noch $o_1 \neq o_2$ gilt (Einfügen eines bereits enthaltenen Objekts ändert Mengen nicht). Beide Begriffe haben große Anwendungen. Die Mächtigkeit ist hierbei einfach als Anzahl der Elemente einer Menge zu deuten, zumindest für $n < \infty$. In diesem Fall verliert die Mächtigkeit etwas an Aussagekraft, mit unendlich kann man zunächst nicht so viel anfangen. Immerhin lässt sich aber immer noch die „Stärke“ der Unendlichkeit messen (hier aber noch nicht möglich, siehe dazu ??).

Definition 1.2: Teilmenge, Mengensystem, Potenzmenge, Familie

Eine Auswahl von Objekten $o_j \in M, \forall j = 1, \dots, n \leq m$ aus $M = \{o_1, \dots, o_m\}$ heißt **Teilmenge von M** , man schreibt $N \subset M$.

Eine Menge, deren Elemente wiederum Mengen sind, wird auch als **Mengensystem** bezeichnet. Das spezielle Mengensystem, das alle Teilmengen einer Menge M enthält, ist die **Potenzmenge von M** und mit $\mathcal{P}(M)$ notiert.

Beispiel 1.3: Euklidischer Raum \mathbb{R}^n

hier werden Elemente meist als Punkte bezeichnet (entsprechen quasi einelementigen Teilmengen)

Beispiel für Teilmenge neben Punkten wäre eine Achse oder Ebene

Mächtigkeit unendlich, da ja $1, 1.1, 1.11, 1.111, \dots$ enthalten (das kann man belie-

big weit weiter machen)

Definition 1.4: Mengenoperationen

Vereinigung, Durchschnitt, Differenz, Komplement

hiernach dann Familie oder? Als Vereinigung zusammenhängender (schlechter Begriff hier; vlt einfach von Verbindung zwischen denen sprechen?) Mengen

Gleichmächtigkeit, Abzählbarkeit und so noch erklären ([https://de.wikipedia.org/wiki/M%C3%A4chtigkeit_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/M%C3%A4chtigkeit_(Mathematik))) - ; aber erst nach Abbildungen möglich
eine *Äquivalenzrelation* \mathcal{R} ist eine Teilmenge einer Menge $M \times M$, deren Elemente gewisse Relationen erfüllen (Symmetrie, Reflexivität, Transitivität); die Menge von Elementen $x \in M$, die äquivalent sind, bilden eine sogenannte *Äquivalenzklasse* oder auch *Restklasse* $[x] = [x]_{\sim} := \{y \in M : x \sim y\}$ (nicht gleich der Relation, da die Elemente von \mathcal{R} und $[x]$ aus unterschiedlichen Räumen kommen, $\mathcal{R} \subset M \times M$, $[x] \in M/\mathcal{R}$!)

zwischendurch: eine *Familie* von Mengen ist eine Menge von gewissen in irgendeiner Weise zusammenhängenden Elementen, was meist durch einen Index der Form U_i angedeutet wird; der Index i läuft dabei über eine gewisse Indexmenge I , die aber eigentlich eher formal so notiert wird und selten wirklich relevant wird (wenn dann ist meist $I = \mathbb{N}$)

auf jeden Fall auch *Gruppe* und *Vektorraum* einführen als Mengen mit ganz spezieller Struktur - ; Struktur heißt, dass man damit noch was machen kann (z.B. Operationen mit Elementen ausführen und zwar sinnvolle bzw. man sagt dann wohldefinierte)

Abbildungen zwischen Mengen sind Zuordnungen von Elementen zueinander

zu linearen Abbildungen auf Vektorräumen (von https://de.wikipedia.org/wiki/Lineare_Abbildung#Bild_und_Kern): der Nullvektor $0_V \in V$ wird von einer linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$ auf den Nullvektor $0_W \in W$ abgebildet, weil: $f(0_V) = f(0 \cdot 0_V) = 0 \cdot f(0_V) = 0_W$; der Kern einer Abbildung ist ja definiert als $\text{Kern}(f) = \{v \in V : f(v) = 0_W\}$, das heißt für die Injektivität von f (und damit insbesondere bei bijektiven Abbildungen wie Isomorphismen oder Diffeomorphismen) muss $\text{Kern}(f) = \{0_V\}$ gelten; interessant ist zudem der Homomorphiesatz, der $W/\text{Kern}(f) \cong f(V) \subset W$ besagt (etwas ausführlicher hier: <https://de.wikipedia.org/wiki/Faktorraum#Eigenschaften>)

gutes Beispiel Quotientenvektorraum V/U ist mit Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$ und Untervektorraum $U_k = \{v \in \mathbb{R}^n : v_j = \delta_{jk}\}$ (also einfach die k -te Achse des Koordinatensystems); dann ist $\mathbb{R}^n/U_k \ni [v] = v + U_k = \{v + u : u \in U_k\} = \{v + c e_k : c \in \mathbb{R}\}$, also die zur k -Achse parallele Gerade durch v (hat e_k als Richtungsvektor) - ; die Elemente

1.1 *MENGENLEHRE*

dieses QVR sind dann also immer noch Vektoren/ Punkte, aber die auf einer Geraden werden eben nicht mehr als unterschiedlichen Elemente behandelt (es würde eine Dimension weniger ausreichen zur Veranschaulichung; also in 3D dann z.B. eine Ebene und zwar genau die senkrecht zur Achse e_k , weil alle Punkte nicht auf dieser Ebene mit irgendeinem Punkt darauf identifiziert werden und zwar genau dem, der mittels e_k erreichbar ist)

1.2 *Topologie*

Für viele Anwendungen erlauben Mengen aber keine „tollen“ Aussagen und damit keine reichhaltige Theorie, weil sie einfach zu allgemein sind. Um das zu ändern, schränkt man diese allgemeinen Mengen auf gewisse Weisen ein und erhält so speziellere Mengensysteme, beispielsweise die hier vor allem relevanten Topologien:

Definition 1.5: Topologie

Für eine Menge M heißt ein Mengensystem $\tau \subset \mathcal{P}(M)$ *Topologie*, wenn

1. $\emptyset, M \in \tau$
2. $U_1, U_2 \in \tau \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \tau, \forall U_i$
3. $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \tau, \forall \mathcal{U} \subset \tau.$

Man nennt eine Menge $U \in M$ *offen bezüglich τ* , wenn $U \in \tau$, und *abgeschlossen bezüglich τ* , wenn $M \setminus U \in \tau$. Das Tupel (M, τ) heißt *topologischer Raum*.

Diese Eigenschaften ermöglichen dann (quasi per Definition) einige grundlegende Operationen mit Elementen einer Topologie, z.B. eben Schnitt und Vereinigung. Die dadurch gegebene Struktur offener Mengen stellt sich bereits als ausreichend für den Aufbau einer reichhaltigen Theorie heraus.

Beispiel 1.6: Standardtopologie (des \mathbb{R}^n)

wird standardmäßig auf \mathbb{R}^n genutzt werden, also insbesondere wenn einfach von offenen Mengen darauf gesprochen wird; definiert über offene Bälle und den hier noch sehr intuitiven Nähebegriff

gilt allgemeiner so in jedem metrischen Raum - ; das einfach nach der Einführung metrischer Räume sagen?

hier sagt man oft auch nur offen/ abgeschlossen und lässt das „bezüglich“ weg

Beispiel 1.7: Teilraumtopologie

eine Topologie τ auf einer Menge M definiert (man sagt auch: induziert) sofort auch eine Topologie auf Teilmengen $A \subset M$ (man schneidet einfach jedes Element von τ mit A ; dabei hilft, dass $\emptyset \in \tau$), die Teilraumtopologie τ_A ; es werden hier dann viele Eigenschaften von τ geerbt (wie Hausdorffsch oder Zweites Abzählbarkeitsaxiom, beides mal klar warum)

Teilraumtopologie des \mathbb{R}^k im \mathbb{R}^n ist gerade Standardtopologie des \mathbb{R}^k

Eine Topologie gibt also nun eine ausreichende Struktur, ist aber immer noch sehr allgemein. Es gibt daher einige weitere Klassifikationen topologischer Räume, die nun vorgestellt werden. Zunächst ist bis jetzt nichts allgemein über die Mächtigkeit der Topologie auszusagen, jedoch spielt genau diese Eigenschaft in vielen Fällen eine wichtige Rolle. Ein wichtiges Kriterium ist beispielsweise, wie viele Mengen aus der Topologie zur Überdeckung der Grundmenge erforderlich sind:

Definition 1.8: Zweites Abzählbarkeitsaxiom

Man sagt, dass ein topologischer Raum (M, τ) das *Zweite Abzählbarkeitsaxiom* erfüllt (kürzer sagt man auch: (M, τ) ist *zweitabzählbar*), wenn man abzählbar viele offene Mengen $U_i \in \tau$ findet, die jede offene Menge $U \in \tau$ überdecken.

Da M insbesondere offen ist, wird es im Falle eines zweitabzählbaren topologischen Raumes ebenfalls bereits von abzählbar vielen offenen Mengen überdeckt.

Dass der Schnitt offener Mengen wiederum eine offene Menge bildet, ermöglicht dann eine weitere Klassifikation von Mengen und deshalb sogar Punkten in topologischen Räumen. Dass zwei Mengen disjunkt sind bzw. zwei Punkte in disjunkten Mengen liegen, lässt sich nämlich offenbar so deuten, dass diese Mengen auseinanderliegen (im geometrischen Sinne). Eine Topologie ermöglicht also die Abstrahierung/ Verallgemeinerung des intuitiven Abstandsbegriffs und auch hier handelt es sich um eine wertvolle, oft verwendete/ geforderte Eigenschaft.

Definition 1.9: Hausdorffraum

Ein topologischer Raum (M, τ) heißt *Hausdorffraum* oder auch *hausdorffsch*, wenn zu allen Punkten $p, q \in M$ mit $p \neq q$ zwei Mengen $U, V \in \tau$ existieren, sodass

$$p \in U \quad q \in V \quad U \cap V = \emptyset.$$

Das bedeutet, dass sich zwei Punkte p, q in Hausdorffräumen immer topologisch trennen lassen. Offenbar handelt es sich also um eine Art Abstandsbegriff, man kann jedoch nur die Aussagen „Abstand 0“/ „Abstand $\neq 0$ “ treffen (also kein sehr guter Begriff, aber immerhin). Glücklicherweise ist eine Verbesserung auf „in der Nähe von“ möglich, auch wenn es immer noch nicht die genaue Messung ermöglicht:

Definition 1.10: Umgebung

Für einen topologischen Raum (M, τ) und $A \subset M$ heißt $U \subset M$ *offene Umgebung von A*, wenn $A \subset U$ und $U \in \tau$. Allgemeiner nennt man $B \subset M$ *Umgebung von A*,

wenn $A \subset U \subset B$ für ein $U \in \tau$.

Spezieller heißt für einen Punkt $p \in M$ die Menge $\dot{U} \subset M$ *punktierte Umgebung von p* , wenn $p \notin \dot{U}$ und $U := \dot{U} \cup \{p\}$ eine Umgebung von p ist. Das *Umgebungssystem von p* ist $\mathcal{U}(p) := \{U \subset M : U \text{ ist bezüglich } \tau \text{ eine Umgebung von } p\}$.

Eine einfache Folgerung ist, dass offene Mengen ihre eigenen offenen Umgebungen sind. Für das Finden einer Umgebung muss man zudem offenbar eine offene Umgebung parat haben, diese also im besten Falle zuerst finden und dann „erweitern“ (in welchem Sinne das möglich ist, wird z.B. bei der Definition des Randbegriffs gleich klar). Der Umgebungs begriff ist dabei zwar allgemein für Mengen definiert, der primäre Einsatz wird in (zumindest hier) jedoch für Punkte sein.

Interessant ist, dass der Umgebungs begriff sogar als Grundlage für die Definition von Topologien genutzt werden kann, es gilt der folgende Satz:

Satz 1.11

Eine nicht leere Teilmenge $U \subset M$ eines topologischen Raumes (M, τ) ist genau dann offen, wenn sie eine Umgebung eines jeden Punktes $p \in U$ ist.

Diese Herangehensweise mag etwas anschaulicher sein und das zeigt sich auch in der angekündigten Erweiterung des Nähebegriffs mithilfe von Umgebungen. Der meint hier, dass eine Menge A in einer offenen Menge U liegt und innerhalb der Topologie erlaubt die Operation Durchschnitt mit Ergebnis $\emptyset / \neq \emptyset$ die Aussage „irgendwie nahe“/„irgendwie nicht nahe“ (wobei die Güte der Aussage natürlich von der „Größe“ der Menge U abhängt; ein Maß dafür könnte z.B. sein, für wie viele Mengen U eine Umgebung, wie viele Punkte also enthalten sind).

Auch die folgenden Definitionen sind die Erweiterung intuitiver Begriffe:

Definition 1.12: Rand, Inneres, Abschluss

(M, τ) sei ein topologischer Raum und $A \subset M$.

1. $p \in M$ heißt *Randpunkt von A*, wenn

$$A \cap U \neq \emptyset \quad (M \setminus A) \cap U \neq \emptyset$$

für alle offenen Umgebungen U von p gilt. Die Menge ∂A aller Randpunkte wird als *Rand von A* bezeichnet.

2. $\overline{A} := A \cup \partial A$ heißt *Abschluss von A*.
3. $A^\circ := A \setminus \partial A$ heißt *Inneres von A*.

4. $M \setminus \bar{A}$ heißt *Äußeres von A*.

Ganz wichtig ist, dass Randpunkte nicht immer zur eigentlichen Menge gehören müssen, sie können auch einfach sehr nahe an ihr dran liegen. Das beste Beispiel ist dort ein offenes Intervall der Form $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, dessen Rand genau die Menge $\partial A = \{0, 1\}$ ist. Das Intervall geht nämlich genau bis an die 0, 1 heran, enthält diese aber nicht mehr. Offenbar ist der Abschluss von A genau $\bar{A} = [0, 1]$ und $A = A^\circ$ (das Äußere ist hier nicht eindeutig anzugeben, sondern hängt von der gewählten Übermenge M ab; $M = \mathbb{R}$ ist möglich, aber auch andere Teilmengen, die A enthalten, sind denkbar). Von Aussagen wie $A = A^\circ$ lassen sich indes auch allgemeine Versionen angeben:

Korollar 1.13

(M, τ) sei ein topologischer Raum und $A \subset M$.

1. A° ist offen und $\bar{A}, \partial A$ sind abgeschlossen.
2. A offen $\Leftrightarrow A = A^\circ \Leftrightarrow \partial A \subset M \setminus A$.
3. A abgeschlossen $\Leftrightarrow \bar{A} = A \Leftrightarrow \partial A \subset A$.
4. A ist offen und abgeschlossen $\Leftrightarrow \partial A = \emptyset$.

Es handelt sich jeweils Schlussfolgerungen aus topologischen Argumenten in Widerspruchsbeweisen und man sieht z.B. direkt, dass 2., 3. \Rightarrow 4..

Nachdem primär allgemeinere offene Mengen diskutiert wurden, sollen kurz etwas speziellere Mengen mit ebenso interessanten Eigenschaften besprochen werden.

Definition 1.14: Kompaktheit

$K \subset M$ heißt kompakt, wenn man eine endliche Überdeckung findet (also endlich viele offene Teilmengen von M , in deren Vereinigung K liegt) - ; beachte, dass endlich eine noch stärkere Einschränkung ist als abzählbar!; abgeschlossene Teilmengen von kompakten Mengen sind wieder kompakt (aber nicht jede kompakte Menge muss abgeschlossen sein! Also allgemein kann man das in topologischen Räumen nicht so sagen!)

Definition 1.15: Zusammenhang

Zusammenhangskomponenten sind maximale (also größtmögliche) zusammenhängende Mengen eines topologischen Raumes; **zusammenhängend** heißt bei einem topologischen Raum M , dass es nicht zwei disjunkte Mengen geben kann, die zusammen wieder der M ergeben (formal: existieren offene Mengen U_1, U_2 mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset, U_1 \cup U_2 = M$, so muss $U_1 = \emptyset, U_2 = M$ oder $U_1 = M, U_2 = \emptyset$ folgen); man verallgemeinert das sinnvollerweise auf Teilmengen eines topologischen Raumes, indem man das Ganze bezüglich der Teilraumtopologie untersucht, dann darf die Teilmenge also nicht aus solchen disjunktten Mengen bestehen

? Hausdorffraum hat nur zwei Zusammenhangskomponenten (ist also zusammenhängend) ? Sehe jetzt nicht direkt, warum das so sein sollte ehrlich gesagt...

1.2.1 Metrische Räume

In topologischen Räumen lässt sich bereits sehr viel Mathematik betreiben, aber nicht alles ist dort möglich. Eine Beschränkung ist beispielsweise, dass Hausdorffräume, offene Mengen zwar einen Nähebegriff liefern und damit auch einen Grenzwertbegriff – dieser hängt jedoch maßgeblich von der gewählten Topologie auf der jeweiligen Menge ab. Außerdem ist er in Nicht-Hausdorffräumen nicht eindeutig und damit auch nicht wirklich brauchbar. Einen alternativen und besseren Nähe-, Grenzwertbegriff erhält man in einer ganz speziellen Klasse topologischer Räume, die noch etwas mehr Struktur besitzen:

Definition 1.16: Metrik

Metrischer Raum ist Menge M mit Abbildung $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ (die Metrik) mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in M$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (positive Definitheit)
- (ii) $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y$ (Symmetrie)
- (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in M$ (Dreiecksungleichung)

können so also Abstände messen und damit sehr ähnlich zum \mathbb{R}^n argumentieren; das ist nun auch quantitativ und nicht qualitativ

dass metrische Räume eine Teilmenge der topologischen Räume ist, sieht man am folgenden Beispiel

Beispiel 1.17: Abstandstopologie

kriegen also immer eine Topologie auf metrischen Räumen (natürlich können

auch noch andere existieren, nicht jede von Metrik induziert), die Umkehrung gilt hingegen nicht

wichtige Beispiele sind

Beispiel 1.18: Normierte Vektorräume

hierzu gehört insbesondere \mathbb{R}^n

Satz 1.19

jede endliche Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen (und damit kompakt)

damit insbesondere Punkte abgeschlossen

Heine-Borel machen? Vor allem wegen Folgerungen daraus: abgeschlossen als Komplement offen, aber daher gilt natürlich auch offen als Komplement abgeschlossen!
! die zweite Aussage kann besser zu zeigen sein, z.B. wegen Folgenabgeschlossenheit

Satz 1.20

im \mathbb{R}^n mit der Standardmetrik ist ein $K \subset \mathbb{R}^n$ genau dann kompakt, wenn es abgeschlossen und beschränkt ist

metrische Räume scheinen immer hausdorffsch zu sein (seems irgendwie legit, können ja Abstände gut messen) - ; ne, aber dann folgt trotzdem was tolles (steht bei Heller)

jetzt schon zu MF: deren Topologie ist immer metrisierbar (das Wort Abstandstopologie fiel, weil man mit einer Metrik genau das definieren kann); das ist dann Teil der Riemann'schen Geometrie, aber bei UMF als Teilmengen des \mathbb{R}^n schon besser vorstellbar (übernimm einfach die Metrik vom \mathbb{R}^n , die über Standardskalarprodukt definiert ist und sonst konstruieren wir uns halt ein solches)

1.3 *Stetige Abbildungen*

Ein weiterer großer Vorteil des Mengensystems Topologie ergibt sich bei der Betrachtung von Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Auch dort betrachtet man nicht unbedingt beliebige, sondern gewisse Klassen. Wichtig ist unter Anderem der Begriff der Stetigkeit, den man aus dem \mathbb{R}^n eher anschaulich motiviert kennt („man muss den Stift beim Zeichnen nicht absetzen“) und der die Basis für weitere Klassifikationen wie Differenzierbarkeit oder auch Integrierbarkeit bildet.

Definition 1.21: Stetigkeit

Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen topologischen Räumen (M, τ_M) , (N, τ_N) heißt *stetig*, wenn

$$f^{-1}(U) \in \tau_M, \quad \forall U \in \tau_N. \quad (1.1)$$

Ist f zusätzlich bijektiv und auch die Umkehrabbildung f^{-1} stetig, so nennt man es auch *Homöomorphismus* und die topologischen Räume *homöomorph*.

Anmerkung: daraus lässt sich die Definition punktweiser Stetigkeit ableiten, dass für $x_0 \in M$ jede offene Umgebung von $f(x_0)$ auf eine Umgebung von x_0 abgebildet werden soll (nicht unbedingt eine offene).

Die Stetigkeit einer Abbildung bedeutet in topologischen Räumen also einfach nur, dass diese Abbildung die tollen Eigenschaften offener Mengen in gewisser Weise erhält. Dabei ist es jedoch nicht so, dass offene Mengen auf offene Mengen abgebildet werden (das wäre schön, da besser zu merken/ intuitiver; Abbildungen mit dieser Eigenschaft werden manchmal auch *offen* genannt), sondern „lediglich“ die Offenheit von Urbildern offener Mengen wird gefordert. Bei Homöomorphismen ist diese Aussage hingegen möglich, weil ja auch die Umkehrabbildung stetig ist (auch die Struktur anderer topologischer Begriffe wie zusammenhängender Mengen bleibt unter ihnen erhalten).

Als direkte Folgerung ergibt sich das folgende Korollar.

Korollar 1.22

Die Verkettung stetiger Abbildungen ist stetig.

Man mag sich nun fragen, inwiefern das eine Verallgemeinerung des intuitiven Stetigkeitsbegriffes ist. Im folgenden Beispiel wird zu diesem Zweck die Definition offener Mengen in der Standardtopologie untersucht:

Beispiel 1.23: ϵ - δ -Kriterium

Die neben Grenzwertbildung wohl bekannteste Methode, um die Stetigkeit einer Abbildung im \mathbb{R}^n zu zeigen, ist das **ϵ - δ -Kriterium**. Im Spezialfall einer Funktion $f : U \rightarrow V$ mit $U, V \subset \mathbb{R}$ lautet es (aus Wikipedia zu Stetigkeit):

„ f heißt stetig in x_0 , wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle $x \in U$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.“

In kurz also: für x nahe x_0 soll auch $f(x)$ nahe $f(x_0)$ sein.

Übersetzt man das aber ein wenig in die Sprache von Mengen und Topologien, so heißt das einfach nur, dass eine offene Menge U (das Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$) abgebildet wird auf die Menge $f(U)$ und diese soll ebenfalls offen sein (hier ist das $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) = (f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta))$). Intervalle sind ja nichts anderes als eindimensionale Bälle und deshalb entsprechen offene Intervalle den offenen Mengen bezüglich der Standardtopologie.

Auch dieses Beispiel zeigt also, dass die Definition einer Topologie bestens geeignet ist, um intuitive Begriffe aus dem \mathbb{R}^n aus allgemeinere Mengen zu übertragen. Außerdem sieht man auch, dass ein $\delta(\epsilon)$ gesucht wird und das ϵ beschränkt den Bildbereich (es geht also um offene Mengen im Bildbereich und abhängig davon schaut man sich den Definitionsbereich an), also genau wie in der Definition zuvor.

Probleme beim Akzeptieren dieses Stetigkeitsbegriffes kommen vermutlich zumindest in Teilen daher, dass man in topologischen Räumen nicht von der Existenz gewisser Grenzwerte sprechen kann (diese lassen sich erst mit einer Metrik in metrischen Räumen messen), für die das Nicht-Absetzen eines Stiftes sonst ein sehr gutes Symbol ist. Es ist sogar so, dass Stetigkeit eigentlich zunächst auf metrischen Räumen definiert wird und dann nach Zeigen einiger äquivalenter Definitionen übertragen wird, weil diese eben auch auf topologischen Räumen gelten (hier sind topologische Räume aber zunächst wichtiger, daher wird dieser Schritt übersprungen).

Einen weiteren direkten zwischen stetigen Abbildungen und Topologien zeigt das folgende Beispiel auf.

Beispiel 1.24: Quotiententopologie

man kann Abbildungen hiermit quasi per Definition zu Homöomorphismen machen, indem man die von ihnen induzierte Quotiententopologie betrachtet

Dieser Begriff wird sich im weiteren Laufe dieser Zusammenfassung noch als sehr nützlich erweisen (siehe Lemma 2.6).

Auch wenn stetige Abbildungen im Allgemeinen keine analogen Aussagen über abgeschlossene Mengen erlauben, da man nicht davon ausgehen kann, dass überhaupt alle Punkte im jeweiligen Komplement getroffen werden (an der Formulierung des Problems ist zu erkennen, dass diese Aussage für Homöomorphismen gilt), ist das immerhin auf kompakten Mengen möglich, dort gilt der folgende Satz.

Satz 1.25

Eine stetige Abbildung bildet kompakte Mengen auf kompakte Mengen ab.

Interessant ist, dass es sich hier um entgegengesetzte Richtung im Vergleich zur Definition von Stetigkeit handelt, also von Definitions- in Wertebereich. Dieser Satz ermöglicht dann schon fast als Korollar den Beweis des folgenden, sehr wichtigen Satzes (auch wenn dieser hier nicht explizit ausgeführt wird).

Satz 1.26

Eine stetige Abbildung $f : M \rightarrow N$ ist auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset M$ beschränkt und nimmt dort Infimum sowie Supremum an.

Da Infimum und Supremum tatsächlich angenommen werden, handelt es sich dann sogar um Minimum und Maximum der Funktion f . Kompakte Mengen schränken die Allgemeinheit also genug ein, um solche recht speziellen Aussagen zu erlauben und sind (wenn auch bei weitem nicht nur deswegen) beliebte Objekte. Dieser Satz erinnert jedoch vermutlich eher an Extrempunkte/ Differenzierbarkeit als an Stetigkeit und genau diesen Themen ist der nächste Abschnitt gewidmet.

1.4 *Differenzierbarkeit*

ja, stetige Funktionen nehmen auf einem Kompaktum Minimum/ Maximum an, aber für Differenzierbarkeit braucht man dann doch noch etwas mehr (die Existenz einer linearen Abbildung in jedem Punkt ist wichtig, nicht nur in den Extrema quasi)

werden uns hier auf reelle, endlichdimensionale VR einschränken (müssen nicht, das geht auch in Banachräumen, aber eben nicht in den bis jetzt behandelten topologischen und von daher wäre das nur verwirrend)

bei differenzierbar auch direkt Diffeomorphismus definieren

hier wird nicht mehr Verhalten auf \mathbb{R}^n betrachtet, sondern die auf topologischen Räumen (allgemeiner als vorher)

bedenke: Differential $D_p f$ ist eine Approximation an die Funktion f am Punkt p und zwar nur die erster Ordnung, damit man eine lineare Abbildung hat (wertvolle Eigenschaft); man kriegt also Tangente an f in p

hier genutzte Notation: $D_p f(v)$ ist die Ableitung von f (sonst eher geschrieben als $f(x)$ und x wird variiert; p ist dann ein spezieller Punkt x , an dem das Ding ausgewertet werden soll, man könnte aber vlt auch $f(p)$ setzen und p als beliebigen Punkt ansehen) an der Stelle p und in Richtung des Vektors v - ; der Vektor wird da ja als Argument reingesteckt und es kommt ein neuer raus ! Die Jacobi-Matrix ist dann halt die Darstellungsmatrix des Differentials $D_p f$ und die Richtungsableitung entlang v entspricht der Multiplikation mit v von rechts an die Jacobi-Matrix

Satz 1.27: Kettenregel

Sind $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f(\Omega) \subset \Lambda \subset \mathbb{R}^m$ (beide offen) in $x_0 \in \Omega$ differenzierbar und $g : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^l$ in $f(x_0) \in \Lambda$ differenzierbar, so ist auch $g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^l$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$D_{x_0}(g \circ f) = D_{f(x_0)}g \circ D_{x_0}f . \quad (1.2)$$

? Bild als Teilmenge wird wegen Stetigkeit gefordert ? jo scheint so

Dabei bedeutet $D_{f(x)}g \circ D_x f(v)$, dass man f am Punkt p in Richtung v ableitet und danach (daher das \circ) das Ergebnis davon als Richtung einsetzt, in die g am Punkt $f(p)$ abgeleitet wird, also eher: $D_{f(x)}g \circ D_x f(v) = D_{f(x)}g(D_x f(v))$; nur für Abbildungen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wird das Ganze zur Multiplikation der Ableitungen !!! Bzw. auch im Spezialfall einer linearen Abbildung der Form $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto \lambda x$, weil dann die Linearität des Differentials nutzbar ist: $D_{f(x)}g(D_x f(v)) = D_{f(x)}g(\lambda \mathbb{1} \cdot v) = D_{f(x)}g(\lambda v) = \lambda D_{f(x)}g(v) = \frac{df(x)}{dx} D_{f(x)}g(v) = D_x f D_{f(x)}g(v)$ (weil ja $\lambda = \frac{d\lambda x}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$; λ muss jedoch im Allgemeinen keine reelle Zahl sein, kann auch Matrix z.B. sein,

wobei das dann natürlich nicht mehr so klappen würde); man beachte, dass das Auswerten des Differentials von g im Punkt $f(x_0)$ heißt, dass die Verknüpfung mit der Funktion da bleibt, aber dass man halt dazu die (in der Schule so genannte, hier aus später zu erläuterten Gründen eher irreführend) äußere Ableitung machen muss, während $D_x f(v)$ der inneren Ableitung entspricht

äquivalente Notationen für die Ableitung von $\psi \circ \phi^{-1}$ am Punkt $\varphi(p)$ in Richtung v sind:

$$(D_{\varphi(p)}\psi \circ \phi^{-1})(v) \equiv D_{\varphi(p)}(\psi \circ \phi^{-1})(v) \equiv D_{\varphi(p)}\psi \circ \phi^{-1}(v). \quad (1.3)$$

Zudem mega wichtig (von https://de.wikibooks.org/wiki/Analysis_II:_Ableitungen:_Diffeomorphismen):

Satz 1.28

Für eine diffeomorphe Abbildung $\phi : U \rightarrow V$ zwischen Teilmengen $U \subset X, V \subset Y$ zweier Vektorräume X, Y sind für jedes $x \in U$ die Differentiale $D_x \phi, D_{\phi(x)} \phi^{-1}$ Isomorphismen und es gilt

$$(D_x \phi)^{-1} = D_{\phi(x)} \phi^{-1}. \quad (1.4)$$

Insbesondere folgt Bijektivität des Differentials (das ist auch eigentlich nur zu zeigen, weil die Linearität ja per Definition erfüllt ist)! Dabei müssen X, Y gleiche Dimension haben (bzw. folgt das bereits aus der Existenz eines Diffeomorphismus zwischen ihnen). Beweis wurde für Mannigfaltigkeiten auf den Übungszetteln einmal gemacht

-; wichtig: das heißt nicht, dass man die inversen (also reziproken) Komponenten nimmt! Gemeint sind die von der Umkehrfunktion

Satz 1.29: Lokales Diffeomorphie-Kriterium

Bei Existenz des Diffeomorphismus in einem Punkt erhält man hier also die Existenz in einer ganzen offenen Umgebung.

auch was zu Extremstellen mit Nebenbedingung machen, das hier von Whatsapp dazu (Kommentar zu Abschnitt Smoczyk dazu): Auf jeden Fall auch Extremwerte unter Nebenbedingungen reinhauen, nach (oder als subsection in) Differenzierbarkeit. Idee ist da einfach, dass nicht das Minimum in einem Intervall bzw auf dem gesamten Definitionsbereich gesucht wird, sondern das Minimum auf einer speziellen Menge, die eine gewisse Nebenbedingung erfüllt. Dort ist nicht garantiert (bzw auch eigentlich fast nie so), dass das Minimum auf dieser Menge dann wirklich 0 wird im Differential, sondern man muss sich echt alle Punkte angucken und dann die Werte des Differentials an diesen Punkten vergleichen, aber es gibt glücklicherweise die eine Formel mit den Lagrange Multiplikatoren

1.5 *Gewöhnliche Differentialgleichungen*

schauen uns hier jetzt neue Objekte an und nutzen dabei den neuen Begriff der Differenzierbarkeit; Objekt kann man anschaulich daran sehen, dass uns das Ding ne Lösungskurve gibt, die halt darin nur versteckt ist quasi (nicht direkt ersichtlich)

hier Beschränkung auf 1. Ordnung (also keine zweiten oder höhere Ableitungen)

hier dann Wiederholung *Gewöhnlicher Differentialgleichungen (GDGL)*

man braucht dann immer ein Intervall (offen oder geschlossen egal, meist wird $0 \in I$ angenommen, weil dann die verallgemeinerte Behandlung oft besser geht, beispielsweise bei Anfangswertproblemen) vor, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und ein zeitabhängiges Vektorfeld $X : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf U , das zu jeder Zeit $t \in I$ und an jedem Punkt $p \in U$ einen Vektor und damit eine Richtung vorgibt

eine *Lösung* (allgemeiner oft auch als *Integralkurve* bezeichnet) der Gleichung (das ist die GDGL)

$$\gamma'(t) = X(t, \gamma(t)) \quad (1.5)$$

ist dann eine Kurve $\gamma : J \subset I \rightarrow U$ (J muss dabei nicht-trivial sein, also mindestens zwei Punkte enthalten), sodass die DGL für alle Zeiten $t \in J$ gilt (natürlich muss dann γ differenzierbar sein)

man nennt anscheinend auch GDGL glatt (und zwar wenn das Vektorfeld X glatt ist, die Kurve müsste auch glatt sein dann)

ein *Anfangswertproblem (AWP)* ist das Suchen einer Lösung der DGL mit fest vorgegebenem Startwert $p = \gamma(0) \in U$

anschauliche Erklärung: die Lösungskurve $\gamma(t)$ gibt zwar immer nur Punkte aus, schickt uns aber gerade auf so einem Weg zu diesen Punkten, dass die Bewegung immer in die Richtung des Vektorfeldes erfolgt und damit die Ableitung der Kurve (Richtungsableitung ist hier ja überflüssig zu sagen beim skalaren Parameter t , weil man in \mathbb{R} eh nur Vielfache von $1, -1$ als Richtungen hat und daher meist oBdA 1 dafür einsetzt) in Richtung des Vektorfelds zeigt

Beispiel 1.30

betrachte das Vektorfeld mit der zugehörigen DGL

$$X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \left(t, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_2(t) \\ \gamma_1(t) \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

-? da fehlen dots oder?

dann ist für $p = (x_0, y_0)$ die Kurve

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

eine Lösung für das Anfangswertproblem $\gamma' = X(\cdot, \gamma(\cdot))$ mit $\gamma(0) = p$

Beispiel 1.31

betrachte das AWP und die zugehörige DGL

$$X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto x^2 \Rightarrow \gamma'(t) = \gamma(t)^2 \quad (1.8)$$

mit $\gamma(0) = 1$

eine Lösung ist dann gegeben durch

$$\gamma : \mathbb{R}^{<1} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{1-t} \quad (1.9)$$

beachte: das entspricht dem x (wird ja gerade eingesetzt ins Vektorfeld) !

man kann nun nämlich leicht berechnen, dass $\gamma'(t) = \frac{1}{(1-t)^2} = (\gamma(t))^2$ und zudem lässt sich die Lösung nicht über $t = 1$ hinaus fortsetzen

neben dem Finden von Lösungen (wozu sie erst einmal existieren müssen) war es ja auch immer wichtig, dass diese eindeutig sind; unter gewissen Voraussetzungen an die Vektorfelder kann man das nun allgemein untersuchen

nehmen nun an: $X : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und $I = [-1, 1]$; warum geht das ? naja, können einfach reskalieren (geht nur bei symmetrischem Intervall der Kurve oder ? sonst aber bestimmt auch Translation möglich) und die äquivalente DGL auf $[-1, 1]$ benutzen, das sieht man für $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(ct), 0 < c \in \mathbb{R}$, weil dann nach der Kettenregel $\tilde{\gamma}'(t) = c\gamma'(ct) = c X(ct, \gamma(ct))$

nehmen dann Banachräume der stetigen Abbildungen auf I (nach \mathbb{R}^n) und der stetig dfb Abbildungen auf I - ; ab hier reicht es dann auch, was sollen denn die Banachräume da jetzt...

beide Normen sind vollständig, das heißt im induzierten metrischen Raum konvergieren alle Cauchy-Folgen

wollen stetige Abhängigkeit vom Punkt (der eingesetzt wird, also wie immer bei Differenzierbarkeit)

Satz 1.32: Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung

Für $X : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existiert ein $V \subset U$ offen mit $x_0 \in V$ und ein $\delta > 0$, sodass $\forall x \in V : \exists \gamma^x$ sodass $\gamma'(t) = X(t, \gamma(t))$ sich eindeutig auf $J = (-\delta, \delta)$ lösen lässt und zudem $\gamma^x(0) = x_0$ erfüllt. Darüber hinaus ist die Abbildung

$$J \times V \rightarrow \mathbb{R}^n, (t, x) \mapsto \gamma^x(t) \quad (1.10)$$

glatt.

? ist das Picard-Lindelöf ? Hatte das eigentlich im Kopf, dass da was mit Iteration rauskam...

haben also Existenz (vorher nicht garantiert !) einer eindeutigen Lösung für das AWP (der Anfangswert gibt also eindeutig die Lösung der DGL vor !) und auch glatte Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert (weil die Abbildung auf die Lösung für alle Punkte und alle Zeiten glatt ist - das ist doch sogar schon ein Fluss oder ?), folgt im Wesentlichen durch Anwenden des Satzes über implizite Funktionen

sagen glatte DGL, wenn das Vektorfeld glatt ist - Lösung sollte eigentlich immer Integralkurve heißen (weil man ja im Prinzip integriert weil man ne Ableitung wegmacht und dann eine Kurve erhält)

zudem folgt aufgrund der Beweisführung sofort, dass für ein Vektorfeld $X_y : I \times U \times W \rightarrow \mathbb{R}^n$, das glatt von einem zusätzlichen Parameter $y \in W \subset \mathbb{R}^k$ (W offen) abhängt, auch die Lösung des AWP $\gamma'(t) = X_y(t, \gamma(t))$ glatt von y abhängt

Man nennt $\gamma : J \rightarrow U$ *maximale Lösung* eines AWP und J *maximales Definitionsintervall*, wenn für jedes andere Intervall $J \subset \tilde{J} \subset I$ und jede Lösung $\tilde{\gamma} : \tilde{J} \rightarrow U$ mit $\tilde{\gamma}|_J = \gamma$ gilt: $\tilde{J} = J$.

Satz 1.33

Ein maximales Definitionsintervall J ist offen in I .

Falls $b := \sup_{t \in J} t < \sup_{t \in I} t$ oder $a := \inf_{t \in J} t > \inf_{t \in I} t$, dann existiert für jede kompakte Teilmenge $K \subset U$ ein $\epsilon > 0$ mit

$$\gamma(t) \notin K, \forall t \in J \text{ mit } t > b - \epsilon \text{ oder } t < a + \epsilon, \quad (1.11)$$

insbesondere existieren

$$\lim_{t \rightarrow b, t < b} \gamma(t) \quad \lim_{t \rightarrow a, t > a} \gamma(t) \quad (1.12)$$

nicht in U .

Die Lösung verlässt also irgendwann das eigentlich betrachtete Gebiet U , wenn das maximale Definitionsintervall J kleiner als I ist (weil man ja sonst eine Fortsetzung außerhalb von J finden würde, aber dann wäre J nicht maximal und daher findet man keine solche Fortsetzung).

2 Grundlegende Definitionen

In Vorlesungen wie Analysis I und II wurde sehr ausführlich das Rechnen (also Integrieren, Differenzieren etc.) auf dem euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^n diskutiert.

Bereits in Kursen zu Linearer Algebra wurde jedoch klar, dass es viel mehr Vektorräume oder allgemeiner Mengen gibt, die man mathematisch untersuchen kann. Wie darauf aber gerechnet werden soll, ist nicht immer klar und deshalb wird hier der Versuch unternommen, das Rechnen auf/ mit diesen Mengen zurückzuführen auf Rechnungen im bereits bekannten \mathbb{R}^n . Das muss jedoch auf eine Weise geschehen, die wohldefiniert ist (kann Verschiedenes meinen, wird aber immer erläutert/ klar), sodass man den Blick auf „hinterstehende/richtige“ Eigenschaften der Menge beibehält, die nicht nur wegen der gewählten Veranschaulichung auftreten.

Bei der Entwicklung dieses neuen Formalismus der Mannigfaltigkeiten werden natürlich viele neue Begriffe benötigt, die in diesem Anfangskapitel eingeführt werden.

2.1 Karten, Atlanten

Es sei nun eine beliebige Menge M gegeben. Der erste Schritt auf dem Weg, diese Menge mithilfe des eben angedeuteten Formalismus' zu beschreiben, muss natürlich die Identifizierung von M mit dem \mathbb{R}^n sein. Das kann man über bestimmte Abbildungen schaffen, die in Anlehnung an die Geographie Karten genannt werden, da sie eine Art Navigation auf Mengen wie M ermöglichen.

Definition 2.1: Karte

Eine bijektive Abbildung

$$x : U \rightarrow V, \quad (2.1)$$

von $U \subset M$ auf eine (in der Standardtopologie) offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Karte** (äquivalent schreibt man manchmal auch (U, x) oder (U, x, V)). Der Definitionsbereich U wird **Kartengebiet**, die Bildmenge V **Koordinatengebiet** und die Grundmenge M auch **lokal euklidisch** genannt.

Anmerkung: man fordert hier keine Offenheit von U , weil M im Allgemeinen (bisher) gar keine weitere Struktur hat und daher insbesondere keine Topologie. Manchmal wird zudem statt V einfach der \mathbb{R}^n als Wertebereich geschrieben (auch wenn gar nicht alle Punkte darin als Bild angenommen werden), um so allgemein wie möglich zu bleiben (analog wie bei Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o.Ä., hier muss ja auch nicht ganz \mathbb{R} angenommen werden, man denke nur an konstante Funktionen).

Das Ziel ist, Teilmengen von M oder Punkte $p \in M$ in den \mathbb{R}^n übersetzen (ganz M ist in den meisten Fällen nicht möglich). Das kann man auch so interpretieren, dass U bzw. M mit Koordinaten versehen wird, die ja charakteristisch für den \mathbb{R}^n sind. Das ist wichtig, weil wir Menschen nur den euklidischen Raum und damit nur in Koordinaten sehen können - eine solche Übersetzung ist daher zum Beispiel auch für die Veranschaulichung abstrakter Mengen und Sachverhalte sehr relevant !

Die Offenheit der Koordinatengebiete wird dabei natürlich gefordert, damit Punkte, die in M nahe beieinander liegen, auch im \mathbb{R}^n nahe beieinander liegen (entspricht also im Prinzip Stetigkeit, nur dass der Begriff hier wegen des Fehlens einer Topologie nicht benutzt wird). Nur dann können Begriffe wie Nähe/ Konvergenz sinnvoll vom \mathbb{R}^n (wo das alles bereits bekannt ist) auf die abstrakte Menge M übertragen werden. „Nähe“ ist im \mathbb{R}^n tatsächlich auch sehr wörtlich zu verstehen (die nicht-mathematische Intuition stimmt), weil die Standardtopologie im \mathbb{R}^n ja über offene Bälle mit gewissen Radien definiert ist (muss nicht immer sein).

Beispiel 2.2

zum ersten Beispiel 1.2 in Skript: ? wirklich machen ? wählen Koordinaten durch

Angabe einer Karte; Rechnung zeigt, dass die Mathematik dann unabhängig von der gewählten Karte bzw. den gewählten Koordinaten ist (Einschränkung auf x- und y-Koordinate gibt jeweils gleiches Ergebnis für kritischen Punkt)

Natürlich gibt es auf M im Allgemeinen nicht nur eine Karte und es ist auch nicht garantiert, dass verschiedene Karten immer verschiedene Kartengebiete haben. Ein Punkt $p \in M$ kann dann also auf zwei Weisen in den \mathbb{R}^n abgebildet werden. Das muss aber kein Problem sein, wenn man auf eine gewisse Verträglichkeit achtet:

Definition 2.3: Kartenwechsel

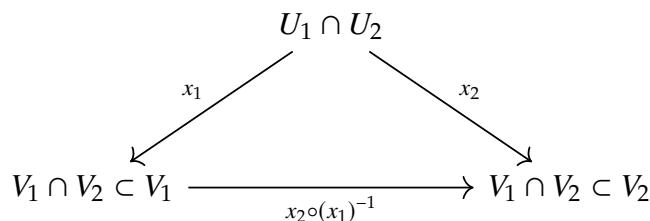
Ist das gemeinsame Koordinatengebiet $U_\alpha \cap U_\beta$ zweier Karten x_α, x_β abgebildet unter diesen Karten offen ($x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta), x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset M$ offen), so heißen

$$\begin{aligned} x_\alpha \circ (x_\beta)^{-1} &: x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \\ x_\beta \circ (x_\alpha)^{-1} &= \left(x_\alpha \circ (x_\beta)^{-1} \right)^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Kartenübergangsabbildungen oder auch *Kartenwechsel*. Man nennt zwei Karten x_α, x_β kompatibel oder verträglich, wenn die beiden Kartenwechsel existieren.

Anmerkung: über die Glattheit o.Ä. muss hier keine allgemeiner Aussage getroffen werden, wichtig ist die Offenheit des Definitionsbereichs und Zielgebiets. Diese Offenheit ist zudem nicht direkt aus der von $x_\alpha(U_\alpha), x_\beta(U_\beta)$ klar!

Die Idee hinter diesen Forderungen ist, dass verschiedene Karten in Bereichen, die von beiden abgebildet werden, in gewisser Weise das Gleiche machen sollen (hier berücksichtigt in der Forderung nach einem Übergang). Das entspricht damit wieder einer Art Übersetzung, diesmal zwischen verschiedenen Karten. Die Idee bei der Reihenfolge der Verknüpfung zeigt das folgende Kommutationsdiagramm:



Offenbar ist also z.B. jede Karte mit sich selber kompatibel mithilfe $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}$.

Beispiel 2.4

sein Beispiel zu Kartenwechsel (nutzt das von vorher, 1.2 in seinem Skript) ist gut

Definition 2.5: Atlas

Eine Sammlung/ Familie

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha) : \alpha \in I\} \quad (2.3)$$

von Tupeln (U_α, x_α) , bestehend aus kompatiblen Karten $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ und den zugehörigen Kartengebieten $U_\alpha \subset M$, die zusammen

$$M \subset \bigcup_{\alpha} U_\alpha, \quad (2.4)$$

erfüllen, heißt *Atlas der Dimension n auf M* (bei differenzierbaren Kartenwechseln auch differenzierbarer Atlas oder *differenzierbare Struktur (der Klasse C^k)*).

Anmerkung: der Begriff „Dimension“ ergibt hier Sinn, weil alle Karten in den \mathbb{R}^n gleicher Dimension n abbilden und man diesen Raum ja gerade mit M identifiziert.

Die Notwendigkeit wird aus der Geographie klar. Eine Karte deckt schließlich in den meisten Fällen nur einen Teil eines bestimmten Gebiets ab, anstatt das gesamte Gebiet (mathematisch wäre dann $U = M$ und es läge eine *globale Karte* vor) - also zum Beispiel nur Norddeutschland ($\equiv U$) statt ganz Deutschland/ Europa/ die Welt (das wären Beispiele für M). Dazu braucht man mehrere Karten, die eben in einem Atlas gesammelt/ zusammengefasst werden. Dieser Atlas enthält dann Karten für alle Gebiete, also ganz Deutschland/ ganz Europa/ die ganze Welt (mathematisch erfasst in der Überdeckung von M mit den U_α , so wird jeder Punkt $p \in M$ kartiert).

Man kann nun einen weiteren großen Schritt machen und die durch den Atlas hinzugefügte Struktur noch erweitern. Jeder Atlas induziert nämlich in natürlicher Weise über die in ihm enthaltenen Karten eine (Quotienten-)Topologie:

Lemma 2.6: Induzierte Topologie

Für einen Atlas \mathcal{A} auf einer Menge M bildet die Menge

$$\tau = \tau_{\mathcal{A}} = \{U \subset M : x_\alpha(U \cap U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}, \forall x_\alpha \in \mathcal{A}\} \quad (2.5)$$

eine Topologie auf M . Das Tupel (M, τ) bildet dann einen topologischen Raum.

Beweis. Sofort verifiziert man wegen $x_\alpha(\emptyset \cap U_\alpha) = x_\alpha(\emptyset) = \emptyset$ und $x_\alpha(M \cap U_\alpha) = x_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha$ die Offenheit von \emptyset, M . Außerdem folgen für $U_i \in \tau$ wegen $x_\alpha(\cup_i U_i \cap U_\alpha) = \cup_i x_\alpha(U_i \cap U_\alpha)$ und analog bei $U, V \in \tau$ wegen $x_\alpha(U \cap V \cap U_\alpha) = x_\alpha(U \cap U_\alpha) \cap x_\alpha(V \cap U_\alpha)$ aus der Abgeschlossenheit der Standardtopologie des \mathbb{R}^n unter beliebigen Vereinigungen, endlichen Schnitten auch die restlichen Forderungen. \square

Wegen $U_\alpha \cap U_\alpha = U_\alpha$ ist sofort klar, dass damit jedes Kartengebiet offen ist (die Koordinatengebiete $V_\alpha = x_\alpha(U_\alpha)$ sind nämlich per Definition einer Karte offen). Zudem wird so jede Karte per Definition ein Homöomorphismus (eine solche Klassifizierung hätte vorher, ohne Topologie, überhaupt keinen Sinn gemacht)!

Analog zu Karten kann auch die Kompatibilität verschiedener Atlanten untersucht werden (über die Kompatibilität der enthaltenen Karten).

Definition 2.7: Kompatibilität

Eine Karte (U, x) heißt *kompatibel* mit einem Atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha) : \alpha \in I\}$, wenn x mit allen Karten x_α aus \mathcal{A} kompatibel ist. Das ist äquivalent zu der Forderung, dass die Menge $\{(U, x)\} \cup \mathcal{A}$ wieder ein Atlas auf M ist.

Weiter heißen zwei Atlanten \mathcal{A}, \mathcal{B} *kompatibel*, wenn $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ wieder ein Atlas ist und damit alle Karten der beiden Atlanten kompatibel sind.

Auf dieser Basis definiert man einen *maximalen Atlas* \mathcal{A}_{max} als die Vereinigung eines Atlas \mathcal{A} mit allen möglichen verträglichen Karten oder äquivalent mit allen möglichen verträglichen Atlanten (jeder Atlas \mathcal{A} induziert also ein \mathcal{A}_{max}).

Der Begriff des maximalen Atlas ist dabei vor allem wichtig für die mathematische Stringenz, wie noch klar werden wird. In vielen Fällen reicht es aber aus, mit zum maximalen Atlas kompatiblen Atlanten zu arbeiten, wie z.B. $\tau_{\mathcal{A}_{max}} = \tau_{\mathcal{A}}$ zeigt. Einer der Hauptvorteile ist aber die sehr flexible Kartenwahl. Oft kann man Karten mit sehr speziellen Eigenschaften verwenden, weil sich deren Verträglichkeit mit beliebigen anderen Karten zeigt und sie daher bereits im maximalen Atlas liegen müssen.

Definition 2.8: Parametrisierung

die Umkehrung/das Inverse einer Karte ist die *Parametrisierung*, ? die eine abstrakte Menge $U \subset M$ im \mathbb{R}^n veranschaulicht (das heißt von dort abbildet und in der abstrakten ankommt, gut für Veranschaulichung) und daher eine Abbildung ?

$$\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow U \quad (2.6)$$

Offensichtlich ist z.B. jede Umkehrabbildung einer Karte eine Parametrisierung und jede Umkehrabbildung einer Parametrisierung eine Karte.

Gute Quelle glaub ich: <https://www.math.uni-kiel.de/geometrie/klein/phyws12/di1311.pdf>

Beispiel 2.9: Euklidischer Raum \mathbb{R}^n

Kartenwechsel mittels $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ bzw. der Umkehrung $x = r \cos(\phi), y = r \sin(\phi)$

hier nur den Aspekt der Erklärung aufnehmen, wie die Idee ist (KS irgendwo hin etc.; auch Punkt über Ortsvektor aufnehmen):

der euklidische Raum und seine Vektoren sind als eigenständige Objekte zu sehen, ein Punkt ist NICHT gleich $(1, 1)$ oder so, sondern das ist unsere Beschreibung in Standardkoordinaten (als Ortsvektor, also wie man vom Ursprung sich bewegen muss um zu dem Punkt zu kommen); das heißt bezüglich des Koordinatensystems, das halt aus Achsen = Geraden (eigentlich auch einfach nur Vektoren) besteht, die sich in einem Ursprung schneiden (dessen Ort wir halt festlegen müssen, der aber auch beliebig gewählt werden kann) -; das ist also auch einfach nur Beschreibung in einer Karte! Halt die anschaulichste, aber brauchen eben auch eine (sonst ist der Ort eines Punktes nicht präzise beschreibbar, sondern nur mit „das liegt über dem und dem und neben dem und dem“)

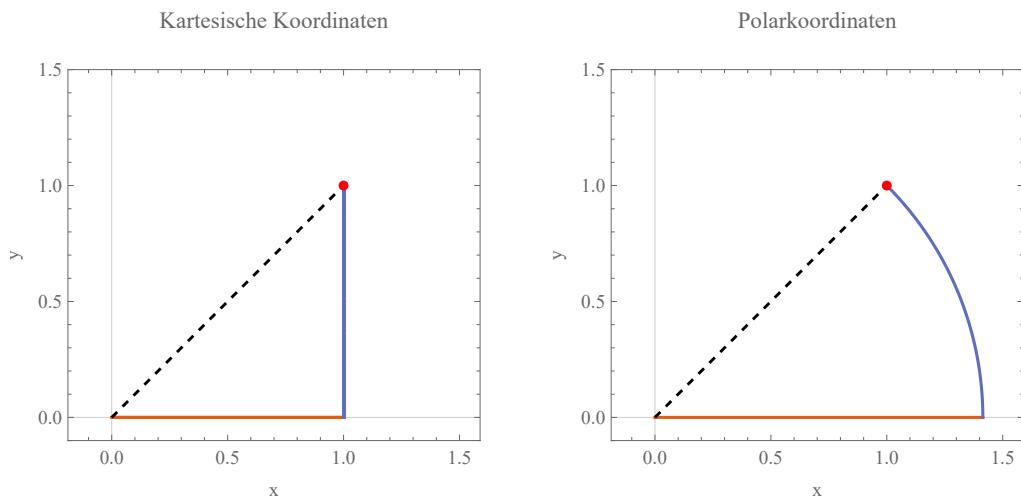


Abbildung 2.1: gestrichelte = Ortsvektor

Beispiel 2.10: 2-Sphäre

dann zum Standardbeispiel (wird sich auch hier durchziehen): Längengrad gibt Position von oben nach unten an und Breitengrad von links nach rechts; müssen

die Einschränkung betrachten, da sonst Sprung des Breitengrades an eben jener Grenze, die herausgenommen wurde und zudem kein eindeutig definierter Breitengrad an den Polen (die aber gerade auch rausgenommen); man nennt dann das Tupel (l, b) Koordinaten auf $\mathbb{S}^2 \setminus K$

mache hier Standardkarten, also stereographische oder (ist gut bei HÜ 2 in ART gemacht)

Ergebnis (vor allem für die hiernach genutzte Benennung wichtig):

$$\begin{aligned}\phi : U = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} &\rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto \frac{1}{1+z}(x, y) =: (\phi_1, \phi_2) \\ \psi : V = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto \frac{1}{1-z}(x, y) =: (\psi_1, \psi_2) \\ \phi^{-1} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}, (\phi_1, \phi_2) \mapsto (x, y, z) = \left(\frac{2\phi_1}{1 + \phi_1^2 + \phi_2^2}, \frac{2\phi_2}{1 + \phi_1^2 + \phi_2^2}, \frac{1 - \phi_1^2 - \phi_2^2}{1 + \phi_1^2 + \phi_2^2} \right) \\ \psi^{-1} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, (\psi_1, \psi_2) \mapsto (x, y, z) = \left(\frac{2\psi_1}{1 + \psi_1^2 + \psi_2^2}, \frac{2\psi_2}{1 + \psi_1^2 + \psi_2^2}, \frac{\psi_1^2 + \psi_2^2 - 1}{1 + \psi_1^2 + \psi_2^2} \right) \\ \psi \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{N, S\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{N, S\}, (\psi_1, \psi_2) = \frac{1}{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}(\varphi_1, \varphi_2)\end{aligned}$$

oof, musst noch umbenennen alles...

Kartenwechsel bei stereographische ist gerade Reskalierung (von außen nach innen geht man; wenn man jetzt in dem Plot der Karte redet, den hier dann auch zeigen !!!); Punkte nahe bei N werden im einen Fall in Richtung ∞ und im anderen Fall in Richtung 0 geschickt

Punkte nahe dem Nordpol werden Richtung unendlich geschickt/ gestreckt

obere Hälfte wird nach unten gedrückt (aber dabei auch aufgeklappt) und die untere Hälfte wird nach oben gedrückt (deshalb muss die obere aufgeklappt werden, sonst nicht bijektiv; bei ϕ_S wäre es umgekehrt, da würde hier ausgeklappt werden)

Das Bild unter der Stereographischen Projektion ϕ_N ist in Abbildung 2.2 gezeigt.

Anmerkung: im gesamten Abschnitt muss man überhaupt keine Forderungen an M stellen, Karten/ Atlanten existieren also nicht nur für Mannigfaltigkeiten !

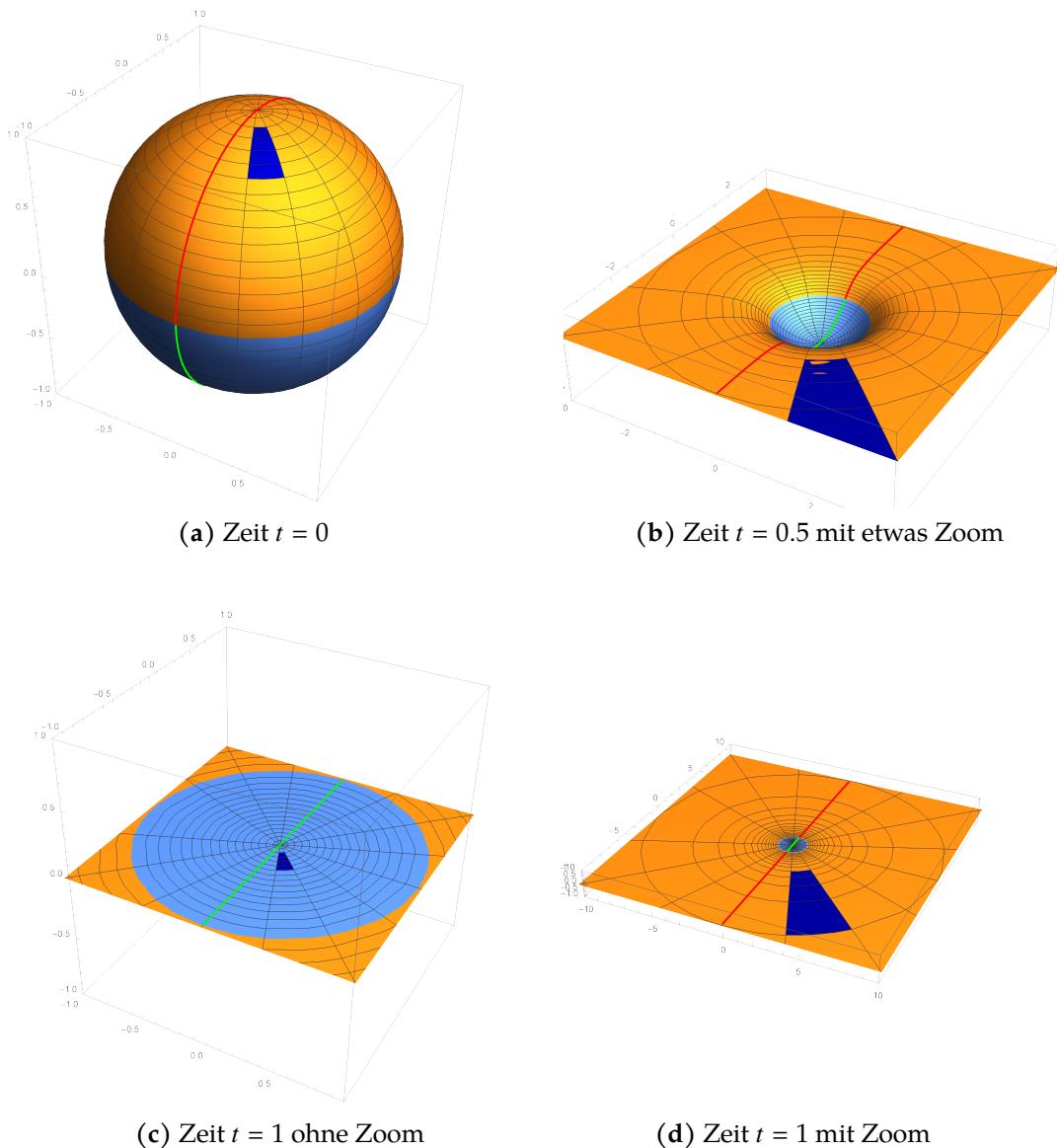


Abbildung 2.2: Veranschaulichung der Transformation der Sphäre und zweier Gebiete (das dunkelblaue unten liegt bei den selben (x, y) -Werten wie das obere) unter der Stereographischen Projektion ϕ_N (ist fertig bei $t = 1$).

2.2 Mannigfaltigkeiten

Mit der Vorarbeit aus dem vorherigen Abschnitt, wo die Menge M mit mehr Struktur (genauer: einer Topologie) ausgestattet wurde, kann man nun nicht immer arbeiten. Man muss daher noch mehr fordern, um Mannigfaltigkeiten definieren zu können.

Definition 2.11: Mannigfaltigkeit

Das Tripel $(M, \mathcal{A}, \tau_{\mathcal{A}})$ heißt *n-dimensionale Mannigfaltigkeit*, wenn die vom Atlas \mathcal{A} induzierte Topologie $\tau_{\mathcal{A}}$ Hausdorffsch und zweitabzählbar ist.

Abhängig von der C^k -Klasse der Kartenwechsel und damit des Atlas spricht man teilweise auch von *n-dimensionalen C^k -Mannigfaltigkeiten* oder für die Spezialfälle $k = 0, \infty$ von *topologischen, glatten Mannigfaltigkeiten*.

Anmerkung: es geht hier tatsächlich nur um die Kartenwechsel, nicht die Karten selber ! Bei denen reicht es weiterhin, nur einen Homöomorphismus zu fordern und es folgt dann, dass sie die gleiche C^k -Klasse haben (gezeigt in Korollar 2.24).

Analog zu den Gründen, aus denen man diese Eigenschaften bei topologischen Räumen forderte, will man so sicherstellen, dass Punkte sinnvoll (also topologisch) trennbar sind und damit keine Probleme mit Überabzählbarkeit auftreten (z.B. beim Atlas). Auch hier ist es zum Glück der Fall, dass man nicht immer beide Eigenschaften prüfen muss (was wiederum recht aufwendig wäre), wie der folgende Satz zeigt:

Satz 2.12

Jede Menge M zusammen mit einem Atlas \mathcal{A} aus abzählbar vielen Karten und einer induzierten Topologie, die Hausdorffsch ist, bildet mit dem von \mathcal{A} induzierten maximalen Atlas \mathcal{A}_{max} eine Mannigfaltigkeit.

Man kann sich also die Arbeit wieder deutlich vereinfachen, weil nur die Hausdorff-Eigenschaft gezeigt werden muss und das noch nicht einmal auf dem maximalen Atlas (wichtig ist dabei natürlich, dass $\tau_{\mathcal{A}_{max}} = \tau_{\mathcal{A}}$ gilt) !

Bevor nun einige Beispiele für ein besseres Verständnis dieses neuen Begriffs gezeigt werden, soll eine Motivation für die Wahl des maximalen Atlas gegeben werden: wie bereits im Vorwort zu diesem Kapitel erwähnt, sind Mannigfaltigkeiten abstrakte Mengen, auf denen nun Mathematik (oder auch Physik) betrieben werden soll, weshalb man Karten zur Rückführung der Probleme auf den \mathbb{R}^n benutzt. Die Aussagekraft eines Sachverhalts hängt dann aber nachvollziehbarerweise maßgeblich

davon ab, ob dieser Sachverhalt nur in einer Karte und damit in gewissen gewählten Koordinaten oder allgemeiner beobachtbar ist (aus der Physik ist das zum Beispiel als Forderung nach Unabhängigkeit einer Beobachtung vom Bezugssystem aus der SRT bekannt). Es darf also keine besonderen/ ausgezeichneten Karten geben und deshalb wählt man den maximalen Atlas, der alle möglichen Karten enthält und zudem auch immer einen Wechsel zwischen Karten (und damit den geforderten Vergleich) ermöglicht.

Beispiel 2.13: Euklidischer Raum \mathbb{R}^n

Etwas trivial mag dieses erste Beispiel erscheinen, da der \mathbb{R}^n mittels der Karte

$$\text{id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, v \mapsto v \quad (2.7)$$

ganz offensichtlich eine Mannigfaltigkeit bildet. Es ist jedoch von Vorteil, anhand dieses eigentlich trivial erscheinenden Beispiels einmal zu erläutern, was am \mathbb{R}^n nun überhaupt die Mannigfaltigkeit ist.

Den euklidischen Raum lernt man in grundlegenderen Vorlesungen meist einfach nur als Koordinatensystem kennen, dessen Elemente sich als (x_1, \dots, x_n) schreiben lassen. Das ist jedoch nicht die ganze Wahrheit, denn wie nun klar sein sollte, sind diese Standardkoordinaten (x_1, \dots, x_n) lediglich eine spezielle Karte. Nichts hält einen aber davon ab, andere Karten/ Koordinaten wie Polar-/ Kugelkoordinaten oder ein höherdimensionales Analogon zu wählen (siehe Abb. 2.1; die wesentliche Idee ist, eine Achse entlang zu gehen und dann mehrfach zu rotieren).

Der Punkt dabei ist, dass ein Punkt oder Vektor im euklidischen Raum \mathbb{R}^n nicht gleich seinen Standardkoordinaten ist! Das ist lediglich der Weg, den Menschen sich ausgedacht haben, um eine mathematisch präzisere Fassung des Lagebegriffs zu haben. Den \mathbb{R}^n gibt es auch ohne Koordinatensysteme, aber dann ist er mathematisch eben kaum sinnvoll zu fassen/ beschreiben.

Nichtsdestotrotz kann man sich den \mathbb{R}^n zunächst gedanklich als aus diesen Koordinaten aufgebaut vorstellen, solange man die Unterscheidung zwischen Koordinaten und dem eigentlichen, eigenständigen Objekt im Kopf behält (man kann das so formulieren, dass man nach dem Aufbau die genutzten Koordinaten vergisst).

Beispiel 2.14: Bereits bekannte Beispiele

Das vorherige Beispiel des \mathbb{R}^n lässt sich problemlos auf eine größere Klasse von Objekten übertragen die Vektorräume.

jeder Vektorraum V , der hat nämlich eine sogenannte globale Karte (die also

überall funktioniert und bijektiv ist), die durch die Basis gegeben ist; man kann nämlich die Entwicklungskoeffizienten des Vektors vor den jeweiligen Basisvektoren als Vektor im \mathbb{R}^n auffassen; andere Karten erhält man dann mit anderen Basen, aber die sind alle verträglich (es existieren ja Basiswechsel !)

ganz wichtig: jede offene Teilmenge U einer Mannigfaltigkeit M ist ebenfalls eine Mannigfaltigkeit (hat gleiche Dimension); dazu muss man einfach nur die Karten einschränken auf U , die Eigenschaften für die induzierte Topologie folgen direkt, weil die von M induzierte Topologie ja bereits alles erfüllt und wir nur Teilmengen herausgreifen (also weniger und daher Zweites Abzählbarkeitsaxiom erfüllt; Hausdorffsch auch sofort klar)

damit ist insbesondere jede offene Teilmenge des \mathbb{R}^n eine Mannigfaltigkeit (der \mathbb{R}^n selber ist ja auch, siehe vorheriges Beispiel)

Diese Beispiele mögen teilweise erst einmal trivial wirken, aber das ist bei genauem Nachdenken sogar gut so! Es zeigt nämlich, dass die hier neu angefangene Theorie altbekannte Objekte als Spezialfälle enthält und man daher offenbar auf dem richtigen Weg zu einer Verallgemeinerung ist.

Beispiel 2.15: Sphäre

man sieht nun, warum es DAS Standardbeispiel schlechthin werden wird: es ist eben eine MF und weil Kreise und Kugeln immer eingebettet in den euklidischen Raum dargestellt werden können, ist es halt ein mega anschauliches Beispiel (genau wie ja Kartendarstellung und -wechsel schon sehr anschaulich waren)

einfach noch sagen, dass mit bereits vorgestellten Karten und vom \mathbb{R}^n vererbter Struktur sofort klar oder soweas in die Richtung

Beispiel 2.16: Torus

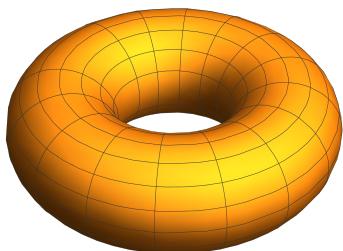
nun zu einem weiteren Standard-Beispiel beim Thema Mannigfaltigkeiten, dem Torus $T^n = \frac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{Z}^n}$ (man teilt also in 2D z.B. ein Gitter aus)

können auch Torus in 1D definieren (? das als eigenes Beispiel ?), da ist es der Kreis; Parametrisierung des Torus mit Sinus/ Cosinus macht Sinn, weil die ja auch periodisch sind und durch geeignete Wahl der Frequenzen da drin (mit π wahrscheinlich) kann man die Periodizität in \mathbb{Z} übertragen auf Periodizität in der Parametrisierung

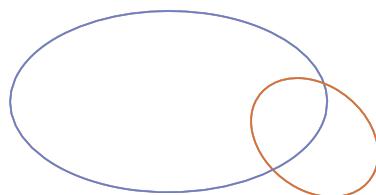
2-Torus, der durch „Zusammenknicken“ der verschiedenen Seiten eines Quadrats entsteht (der \mathbb{R}^2 ist ja im Wesentlichen ein Quadrat), wobei das Zusammenziehen dann als Äquivalenzrelation ausgedrückt wird (sieht man leicht, da die verschiedene Punkte auf gegenüberliegenden Seiten des Quadrats, verbunden

durch eine zum Rand senkrechte Gerade, immer den gleichen Abstand haben und dann zusammengefasst werden; der Plot dieser Menge eingebettet in den \mathbb{R}^3 ergibt dann gerade den Torus); man kann dafür dann auch einen expliziten Atlas finden (Kartenwechsel sind in den Schnitten der Kartengebiete gerade die Identität und sonst die Identität mit einer Verschiebung), für den das Zweite Abzählbarkeitsaxiom offensichtlich gilt (haben ja nur vier Karten) und auch Hausdorffsch ist gut nachweisbar (weil in Kartengebieten immer auf den metrischen und damit insbesondere Hausdorffschen \mathbb{R}^2 abgebildet wird, wegen Diffeo überträgt sich das, oder außerhalb davon eben immer wegen Äquivalenzrelation und daher Abstand 1/2 in einer Komponente); man kann nicht die ganze Mannigfaltigkeit bijektiv überdecken, weil man ja gewisse Zahlen gerade miteinander identifiziert (daher muss man immer Sachen mit Abstand < 1 nehmen, also Intervalle mit Länge < 1) und ja immer auch offene Mengen braucht (daher ist ein Kartengebiet $[0, 1]$ nicht möglich und man braucht stattdessen mindestens zwei Karten); bilden mit jeder Karte verschiedene Teilgebiete/ Intervalle (in 1D) auf den Kreis ab, der Kartenwechsel ist dann wieder nur auf den Schnittgebieten definiert; im Schnitt liegen noch mehr Intervalle als die offensichtlichen, weil man die Sachen miteinander identifiziert und daher $y \in [y]$ ist, aber ja auch $y + 1 \in [y]$ und $y - 1 \in [y]$; müssen nicht so viel überdecken mit den Karten, weil wir ja (in 1D, Verallgemeinerung easy) die meisten Punkte über das Intervall $[0, 1]$ bereits abdecken und dann nur mehr dazu nehmen für gute Kartenwechsel (bzw. auch weil wir Bijektivität brauchen; aber man wählt dann so viel, dass man gut wechseln kann)

es gilt $T^2 = S^1 \times S^1$, das kann man sich auch sehr gut bildlich veranschaulichen (siehe Abb. 2.3)



(a) Torus eingebettet



(b) Torus als $S^1 \times S^1$

Abbildung 2.3: bewege orangen Kreis entlang des blauen, das ergibt dann genau Torus (der ist ja nicht ausgefüllt)

Wie inzwischen klar geworden sein sollte, sind Karten toll. Das einzige Problem ist, dass man eigentlich keine allgemeine Aussagen über die Koordinatengebiete hat. Jedoch wäre es natürlich sehr nützlich, wenn man von Anfang an wüsste, mit welchem Teil des \mathbb{R}^n man es bei Benutzung einer gewissen Karte am Ende zu tun hat. Glücklicherweise kann man (wenn nötig) genau das machen, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 2.17: Zentrierte Karte

Für einen beliebigen Punkt p auf einer Mannigfaltigkeit M existiert eine in p zentrierte Karte $\varphi = \varphi_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$, für die gilt:

$$\varphi_p(p) = 0 \quad V_p = \varphi_p(U_p) = B(0; 1). \quad (2.8)$$

Anmerkung: man beachte, dass $B(0; 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$, nur daher hat man eine offene Menge. Den abgeschlossenen Ball bezeichnet man mit $\overline{B(0; 1)}$.

Beweis. Zu zeigen ist die Existenz einer solchen Karte und dass sie auch im maximalen Atlas enthalten ist (sonst wäre sie nicht benutzbar auf M). Für Letzteres reicht es aber, die Verträglichkeit mit Karten aus dem maximalen Atlas zu zeigen, weil sie dann bereits in ihm enthalten sein muss.

Man nehme eine beliebige Karte $\tilde{\varphi} : U \rightarrow V$. Daraus lässt sich ganz einfach eine in $p \in U$ zentrierte Karte $\hat{\varphi} : U \rightarrow V_2$ definieren, indem man $\tilde{\varphi}(p) \in \mathbb{R}^n$ abzieht, es gilt also $\hat{\varphi}(q) = \tilde{\varphi}(q) - \tilde{\varphi}(p)$. Wegen $\tilde{\varphi} \in \mathcal{A}_{max}$ folgt sofort auch $\hat{\varphi} \in \mathcal{A}_{max}$, da der Kartenwechsel nur einer Translation entspricht und damit insbesondere diffeomorph ist (daraus folgt auch sofort die Kompatibilität mit allen Karten in \mathcal{A}_{max} , weil $\tilde{\varphi}$ ja mit allen kompatibel ist). Im Urbild dieser neuen Karte liegt nun per Definition der Nullpunkt (nämlich in $\hat{\varphi}(p)$) und aufgrund der Stetigkeit von Karten (Abbildung auf offene Mengen $V_2 \in \mathbb{R}^n$; dort liegt per Definition ein kleiner Ball um $x \in V_2$ immer noch in V_2) folgt sofort, dass es ein $r \in \mathbb{R}$ gibt mit $B(0; r) \subset V_2$. Durch Definition von $\varphi : \hat{\varphi}^{-1}(B(0; r)) \rightarrow V_3, q \mapsto \frac{\hat{\varphi}(q)}{r}$ hat man die gesuchte Karte gefunden (die Skalierung erfolgt, weil bei der Bildmenge Radius 1 statt r gefordert ist). \square

Das heißt, dass die Karte aus der Umgebung U_p des Punktes p in den Einheitsball $B(0; 1) \subset \mathbb{R}^n$ mit Radius 1 sowie Mittelpunkt = Ursprung abbildet und zwar so, dass p gerade dem Ursprung $0 \in \mathbb{R}^n$ zugeordnet wird. Hier wird der große Vorteil von maximalen Atlanten klar, denn weil sie alle möglichen kompatiblen Karten enthalten, sind insbesondere diese *nützlichen Karten* dort drin. Auch wenn man bei einer gewissen Anwendung nicht die Forderung braucht, dass nur auf den Einheitsball abgebildet wird, finden diese um p zentrierten Karten häufig Verwendung und es wird auch klar, dass Karten häufig in Abhängigkeit von Punkten p betrachtet (z.B. ist das Kartengebiet dann durch die Umgebung des Punktes gegeben).

Allgemeiner erlaubt der maximale Atlas ja eine beliebige Wahl der Koordinaten (durch Wahl einer Karte) und damit eine bestmögliche Anpassung an das geometrische/ analytische/ physikalische Problem (man hat also z.B. die Wahl zwischen kartesischen oder Kugelkoordinaten, wie es bis jetzt immer intuitiv einfach so gemacht wurde).

Beispiel 2.18: Projektiver Raum

Man kann nun auch den sogenannten *Projektiven Raum* \mathbb{RP}^n betrachten, der formal als Menge aller eindimensionalen Unterräume des \mathbb{R}^{n+1} definiert ist (analog für andere Körper wie \mathbb{C}). Anschaulich handelt es sich dabei einfach um die Menge aller Ursprungsgeraden im \mathbb{R}^{n+1} (ohne Ursprung würde man affine Unterräume untersuchen, die nicht die 0 enthalten). Die Beweisideen beim Zeigen der Eigenschaften einer Mannigfaltigkeit sind besonders gut für $n = 1$ zu verstehen und werden daher zunächst für diesen Fall vorgestellt.

Eine Ursprungsgerade im \mathbb{R}^2 ist gegeben durch eine Gleichung wie $y = m x$ und entspricht damit der Menge/ dem Untervektorraum $l = \{(x, y) : y = m x\}$. Nimmt man sich nun einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ (Richtung nur eindeutig bis auf Vielfache !), so liegt dieser nun auf genau einer solchen Geraden ($\exists! l : v \in l$), daher findet man die ebenfalls äquivalente Form $l = \mathbb{R}v$. Insgesamt kann man also schreiben:

$$\begin{aligned}\mathbb{RP}^1 &= \{l \subset \mathbb{R}^{n+1} : l \text{ ist 1D-UVR}\} \\ &= \{l = \{(x, y) : y = m x\} : m \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\mathbb{R}v : v \in l\}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Man führt nun zur Vereinfachung der Notation eine Äquivalenzrelation ein:

$$(x, y) \sim (v, w) \Leftrightarrow \exists! \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (v, w) = \lambda(x, y).\tag{2.10}$$

Die daraus entstehenden Äquivalenzklassen heißen auch *homogene Koordinaten* und werden als $[x : y]$ notiert. Hier wird auch noch einmal klar, warum der Raum eindimensional ist. Die Fixierung von beispielsweise $y = 1$ entspricht nun lediglich der Wahl des Repräsentanten mit diesem y -Wert und dann ist jede Gerade l bereits durch den x -Wert aus $[x : 1]$ bestimmt, man hat also nur einen Freiheitsgrad (zudem kann man sich überlegen, dass nach $m x = y = 1$ gerade $x = 1/m$ gilt).

Im nächsten Schritt sollen Karten für den Projektiven Raum gesucht werden. Aus den eben gefundenen Darstellungen ist das aber nicht mehr schwer, weil jedes Element des Projektiven Raums eindeutig durch die Steigung m und damit eine reelle Zahl festgelegt ist (eindimensional, also passend zur 1 in \mathbb{RP}^1 !). Man muss nun aber vor der Definition der Karte aufpassen, weil der Fall $l = \mathbb{R}y$ Achse

so nicht erfasst werden kann (dort ist ja überall $x = 0 \Leftrightarrow m = \infty$!). Somit erhält man

$$\varphi_x : U_x = \{\mathbb{R}v : v = (x, y) \text{ mit } x \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}, [x : y] = \left[1 : \frac{y}{x}\right] \mapsto m = \frac{y}{x} \quad (2.11)$$

und man erkennt direkt in der Vorschrift, warum $x \neq 0$ gefordert werden muss. Wichtig ist nun, zu überprüfen ob das Ganze wohldefiniert ist, was hier einfach bedeutet, dass verschiedene Elemente einer Äquivalenzklasse auf das gleiche Bild abgebildet werden sollen (sonst würde die Abbildung keinen Sinn ergeben, weil man verschiedene Repräsentanten ja gerade gleich abbilden möchte). Das ist aber klar, weil zwei Repräsentanten $(x, y), (v, w)$ per Definition eines Unterraums Vielfache sind und daher gilt: $m = \frac{y}{x} = \frac{w}{v} = \frac{x}{y} = m$.

Auch wenn sie eigentlich nicht wirklich relevant ist, kann man nun sehr einfach die zugehörige inverse Abbildung angeben:

$$\varphi_x^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow U_x, m \mapsto [1 : m] \quad (2.12)$$

und das erfasst wegen $y = mx$ bereits alle Punkte (x, y) auf der jeweiligen Ursprungsgeraden mit Steigung m .

Mit U_x hat man nun fast ganz \mathbb{RP}^1 überdeckt (also fast jede Gerade erfasst), nur die x -Achse fehlt noch. Die Idee zur Lösung versteht man nun besser bei der Betrachtung von $\frac{y}{x}$ statt m . Die problematische Stelle war dort die y -Achse mit $x = 0$, aber der Quotient $\frac{x}{y}$ ist in diesem Punkt ohne Probleme zu bilden. Man muss also lediglich das Reziproke bilden (kaum Änderungen zu φ_x) und dementsprechend hier aber bei der x -Achse mit $y = 0$ aufpassen. Das führt zu

$$\varphi_y : U_y = \{\mathbb{R}v : v = (x, y) \text{ mit } y \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}, [x : y] = \left[\frac{x}{y} : 1\right] \mapsto n = \frac{x}{y}. \quad (2.13)$$

Nun gilt offenbar $U_x \cup U_y = \mathbb{RP}^1$, $U_x \cap U_y = \{[x : y] : x \neq 0 \text{ und } y \neq 0\} = \mathbb{RP}^1 \setminus \{[0 : y], [x : 0]\}$ und daher $\varphi_x(U_x \cap U_y) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \varphi_y(U_y \cap U_x)$ (offen, weil die Achsen abgeschlossen sind), sodass die Kartenwechsel sich wegen $n \equiv 1/m$ (vergleiche einfach die Quotienten) ergeben zu:

$$\begin{aligned} \varphi_x \circ \varphi_y^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, n = \frac{x}{y} \mapsto m = \frac{1}{n} = \frac{y}{x} \\ \varphi_y \circ \varphi_x^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, m = \frac{y}{x} \mapsto n = \frac{1}{m} = \frac{x}{y} \end{aligned} \quad (2.14)$$

und das ist jeweils ein Diffeomorphismus, weil die kritischen Punkte gerade herausgenommen wurden. Somit hat man einen abzählbaren (weil zweidimen-

sionalen) Atlas $\mathcal{A} = \{(U_x, \varphi_x), (U_y, \varphi_y)\}$ gefunden und es fehlt wegen Satz 2.12 nur noch die Hausdorff-Eigenschaft. Diese folgt aber einfach daraus, dass man für Punkte aus dem gleichen Kartengebiet aufgrund der Bijektivität die Bilder im \mathbb{R}^n trennen kann.

Für beliebige n sind nun einfach mehr Karten zu konstruieren, die aber alle die gleiche, allgemeine Form haben:

$$\begin{aligned} U_k &= \{[v_1 : \dots : v_{n+1}] \text{ mit } v_k \neq 0\} \\ \varphi_k : U_k &\rightarrow \mathbb{R}^n, [v_1 : \dots : v_{n+1}] \mapsto \frac{1}{v_k}(v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_{n+1}) \\ \varphi_k^{-1} : \mathbb{R}^n &\rightarrow U_k, (w_1, \dots, w_n) \mapsto [v_1 : \dots : v_{k-1} : 1 : v_{k+1} : \dots : v_{n+1}]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Weil nun von jeder Karte eine Koordinate gestrichen wird, muss man bei den Kartenwechseln mit der Nummerierung der Indizes aufpassen (bei $\varphi_2(U_1 \cap U_3)$ fällt ja beispielsweise der zweite Index weg und daher wird ein Index 3 bei einem reingesteckten Vektor zu einer 2 im Ergebnis), am Ende ergibt sich:

$$\begin{aligned} l < k : \varphi_k(U_k \cap U_l) &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k \neq 0, x_l \neq 0\} \\ \varphi_l \circ \varphi_k^{-1}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{x_l}(x_1, \dots, x_{l-1}, x_{l+1}, \dots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ l > k : \varphi_k(U_k \cap U_l) &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k \neq 0, x_{l-1} \neq 0\} \\ \varphi_l \circ \varphi_k^{-1}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{x_{l-1}}(x_1, \dots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_{l-2}, x_l, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Man kann Mannigfaltigkeiten aber auch gezielter konstruieren und zwar durch das sogenannte *Verkleben*. Dabei kann man sich nicht (1D-Fall, wo also zwei Punkte auf verschiedenen Geraden \equiv Koordinatenachsen liegen) ein verschlangeltes Übereinanderlegen vorstellen, weil man dann wegen der Schnittpunkte keinen Hausdorffraum mehr hätte. Stattdessen verklebt man sie umgekehrt, was mathematisch die Identifikation verschiedener Punkte bedeutet (je weiter weg der Punkt auf der einen Geraden, desto näher der damit identifizierte Punkt auf der anderen Geraden; immer bezogen auf die betrachteten Punkte x_1, x_2); das heißt wenn man weiter zu diesem einen offenen Punkt geht, geht man eigentlich auf der anderen Mannigfaltigkeit weiter weg von dem Punkt

$x/\langle x, x \rangle$ bildet innere Kreisringe Torus auf äußere ab (skaliert ja nur !); das auch Idee bei Verkleben !

keine Ahnung wohin: wichtiger Satz (wenn auch hier egal): MF immer als UMF eines höherdimensionalen Raums gegeben ! Bei Riemannscher Geometrie gibt es Nash-Einbettungs-Satz (gilt nur bei glatten oder topologischen; bei komplexen oder

so, generell bei mehr Struktur, geht das nicht mehr so allgemein); daher allgemeines Kalkül besser, der das auch bei Räumen mit Metrik macht; diese Interpretation wird aber nicht immer genutzt, weil man sonst immer gucken muss, ob Rechnungen von der MF abhängen oder nur von der (gewählten) Einbettung; wird zudem oft angenehmer für Vorstellung in abstrakt, weil sonst in \mathbb{R}^4 das schwieriger wird; das Ganze ist oft halt viel natürlicher, wenn man es nicht im Umgebungsraum betrachtet

Anmerkung: wenn nicht explizit anders vermerkt, werden von nun an immer glatte Mannigfaltigkeiten verwendet und diese mit M sowie manchmal N bezeichnet.

Mannigfaltigkeiten für Kinder erklärt: <https://www.matheplanet.com/default3.html?call=viewtopic.php?topic=23874&ref=https%3A%2F%2Fwww.qwant.com%2F>

2.3 Differenzierbare Abbildungen

Nach der Definition von Mannigfaltigkeiten M, N kann man nun auch Funktionen der Form $f : M \rightarrow N$ zwischen diesen Objekten betrachten. Da Mannigfaltigkeiten insbesondere eine Topologie besitzen (die durch die Karten induzierte), verhalten sich diese Abbildungen erst einmal analog zu solchen zwischen topologischen Räumen und man kann bereits von Begriffen wie Stetigkeit sprechen. Das ist äußerst wichtig, weil erst dadurch Begriffe wie Nähe/ Konvergenz Sinn ergeben und damit Grenzwerte erklärt werden können (für stetige Abbildungen sind ja für Punkte q nahe einem p auch die Punkte $f(q)$ nahe $f(p)$).

Man kann jedoch noch einen Schritt weiter gehen und auch die Differenzierbarkeit von Abbildungen (entspricht ja ebenfalls einem Grenzwert) diskutieren.

Definition 2.19: Differenzierbarkeit

Für eine stetige Funktion $f : M \rightarrow N$ zwischen den differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M der Dimension m mit Karten (U_α, x_α) und N der Dimension n mit Karten (V_β, y_β) heißt f *differenzierbar*, wenn für alle Karten x_α, y_β die Funktion

$$y_\beta \circ f \circ (x_\alpha)^{-1} : x_\alpha(f^{-1}(V_\beta) \cap U_\alpha) \rightarrow y_\beta(V_\beta) \quad (2.16)$$

differenzierbar ist. Damit bekommen auch die Begriffe *Glattheit* (∞ oft differenzierbar) und *Diffeomorphismus* (bijektiv, glatt, glatte Inverse) einen Sinn.

Diese Definition sieht sehr kompliziert aus und wird daher noch einmal erklärt: die grundlegende Idee ist (wie im gesamten Kapitel), den Begriff der Differenzierbarkeit auf Mannigfaltigkeiten zurückzuführen auf den $\mathbb{R}^m/\mathbb{R}^n$, wo man das ohne Probleme machen kann. Schön veranschaulicht wird das Ganze im folgenden Kommutationsdiagramm:

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \subset M & \xrightarrow{f} & V_\beta \subset N \\ x_\alpha \downarrow & & \downarrow x_\beta \\ x_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m & \xrightarrow{y_\beta \circ f \circ (x_\alpha)^{-1}} & y_\beta(V_\beta) \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Dazu muss man natürlich die Karten benutzen, um zwischen den Mannigfaltigkeiten und dem euklidischen Raum zu wechseln. Weil diese aber im Allgemeinen nur lokal definiert sind, liegen recht komplexe/ unübersichtliche Definitionsbereiche vor, die hier noch einmal genau aufgedröselt werden:

- Beim Zielbereich ist alles noch relativ klar: man möchte am Ende statt in N (wo f hinführt) im \mathbb{R}^n landen und das geht, indem man mit y_β abbildet. Man landet dann im Koordinatengebiet $y_\beta(V_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ des Kartengebiets V_β und das ist ja gerade, was gewollt ist. Sehr wichtig ist dabei die Tatsache, dass $y_\beta(V_\beta)$ offen bezüglich der von N induzierten Topologie ist und das ganze Konstrukt in (2.16) damit stetig (was ja nötig ist für Differenzierbarkeit).
- Beim Startbereich ist etwas mehr Denkarbeit nötig. Man kann hier nicht beliebige Punkte aus M nehmen, auch wenn diese von f abgebildet werden könnten. Das Problem ist, dass man (siehe erster Stichpunkt) im Kartengebiet von y_β und damit in V_β landen muss und um das sicherzustellen, werden einfach Punkte aus dem Urbild von V_β unter f genommen.

Nun muss aber weiterhin beachtet werden, dass man mit dem Konstrukt in (2.16) aus dem \mathbb{R}^m abbilden möchte und nicht von M aus, weshalb wieder die Karte x_α genutzt wird. Diese hat aber nur ein bestimmtes Kartengebiet U_α , auf dem sie definiert ist, man muss also auch daraus abbilden !

Um diese beiden Forderungen gleichzeitig zu erfüllen, schneidet man die nötigen Bereiche und kommt so auf ein Gebiet $f^{-1}(V_\beta) \cap U_\alpha$, das von x_α abgebildet wird. Man hat übrigens auch hier immer offene Mengen stehen, weil sowohl Karten- als auch Koordinatengebiete per Definition offen bezüglich der von M induzierten Topologie sind (die ja gerade über die Karten definiert ist), wegen der Stetigkeit von f (offene Mengen werden auf offene Mengen abgebildet) und weil der (endliche, offensichtlich erfüllt) Schnitt offener Mengen wieder offen ist.

Das Ganze ist dabei unabhängig von den gewählten Karten (wohldefiniert), weil

$$y_\beta \circ f \circ x_\alpha^{-1} = y_\beta \circ \tilde{y}_\beta^{-1} \circ \tilde{y}_\beta \circ f \circ \tilde{x}_\alpha^{-1} \circ \tilde{x}_\alpha \circ x_\alpha^{-1} = (y_\beta \circ \tilde{y}_\beta^{-1}) \circ (\tilde{y}_\beta \circ f \circ \tilde{x}_\alpha^{-1}) \circ (\tilde{x}_\alpha \circ x_\alpha^{-1}) \quad (2.17)$$

gilt und die Kartenwechsel $y_\beta \circ \tilde{y}_\beta^{-1}$, $\tilde{x}_\alpha \circ x_\alpha^{-1}$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit immer selber glatt sind. Weil aber links eine glatte Abbildung steht, folgt automatisch die Glattheit von $\tilde{y}_\beta \circ f \circ \tilde{x}_\alpha^{-1}$ (zumindest auf dem Schnitt der Kartengebiete).

Diese Definition ergibt Sinn, ist aber sehr unhandlich im Gebrauch, wenn wirklich gerechnet werden muss. Schließlich muss man das Ganze für alle Karten in den maximalen Atlanten $\mathcal{A}_M, \mathcal{B}_M$ prüfen, was sehr viel Arbeit ist (dazu müssen diese zudem explizit gegeben sein, was schon eine Herausforderung ist). Glücklicherweise ist jedoch keine neue, bessere Definition nötig (da wäre die Frage, wie/ ob das sinnvoll überhaupt möglich wäre), sondern man kann einige hilfreiche Eigenschaften zeigen.

Man fängt dabei schon beim Begriff der Stetigkeit an, der wegen der analogen Definition offener Mengen über alle Karten (die ja die Topologie auf M und definieren damit den Begriff der offenen Menge) ähnlich kompliziert zu zeigen ist.

Satz 2.20: Stetigkeit von Abbildungen

Findet man für eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ für alle Punkte $p \in M$ Karten $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $p \in U$ und $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(p) \in V$ und erfüllt sie

$$f(U) \subset V \quad y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow y(V) \text{ ist stetig,} \quad (2.18)$$

so ist f bereits stetig.

Analog zur Differenzierbarkeit kann also (in den meisten Fällen) auch Stetigkeit auf Mannigfaltigkeiten zurückgeführt werden auf Stetigkeit im \mathbb{R}^n und damit in Koordinaten. Die Vereinfachung bei der Differenzierbarkeit bringt folgender Satz:

Satz 2.21: Differenzierbarkeit von Abbildungen

Für ein paar von mit den induzierten maximalen Atlanten $\mathcal{A}_{max}, \mathcal{B}_{max}$ verträglichen Atlanten \mathcal{A}, \mathcal{B} auf M, N ist eine stetige Abbildung $f : M \rightarrow N$ bereits dann glatt, wenn $y_\beta \circ f \circ x_\alpha$ für alle Karten $x_\alpha \in \mathcal{A}, y_\beta \in \mathcal{B}$ glatt ist.

Das verringert den Aufwand bei guter Wahl von \mathcal{A}, \mathcal{B} natürlich ganz erheblich. Auch der Beweis ist nicht schwer, daher werden hier kurz die wesentlichen Ideen geschildert:

Beweisidee. im Wesentlichen Ausnutzen der Glattheit von Kartenwechseln, sodass man dort eine Verknüpfung von glatten Abbildungen stehen hat und durch Wahl geeigneter Definitionsbereiche (schneide clever) auch offene Mengen als Bilder. \square

Korollar 2.22: Differenzierbarkeit von Abbildungen V2

Findet man für eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ die für alle Punkte $p \in M$ Karten $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $p \in U$ und $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(p) \in V$ und erfüllt sie

$$f(U) \subset V \quad y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow y(V) \text{ ist glatt,} \quad (2.19)$$

so ist f glatt.

Das folgt natürlich sofort als Kombination der beiden vorherigen Sätze (weil glatt \Rightarrow stetig). Diese Aussage kann eben je nach Anwendungsfall besser zu prüfen sein (außer wenn z.B. stetig bereits gegeben). Man muss so tatsächlich nur die Bedingung $f(U) \subset V$ zusätzlich überprüfen im Vergleich zu Differenzierbarkeit auf dem \mathbb{R}^n . Die grundlegende Idee ist dabei also, die Glattheit von $f|_U$ für die Umgebung U eines beliebigen Punktes $p \in U \subset M$ zu zeigen und das letztendlich mit Karten auf den \mathbb{R}^n zurückzuführen. Offenbar ist Differenzierbarkeit also eine erst einmal lokale Eigenschaft (ist sie aber lokal, also für $f|_U$, überall auf M erfüllt, spricht man von der globalen Eigenschaft „Differenzierbarkeit“ und nennt f glatt).

Man hat nun also sinnvolle Definitionen für Stetigkeit und Differenzierbarkeit auf Mannigfaltigkeiten, mit denen sich auch praktisch rechnen lässt. Das ist ein wichtiger Schritt auf dem Weg dahin, ihre Struktur besser kennenzulernen und zu verstehen. Insbesondere wird es interessant sein, wann zwei glatte Mannigfaltigkeiten M, N *diffeomorph* sind, ob also ein Diffeomorphismus $\Phi : M \rightarrow N$ existiert. Diese sind dann nämlich im Prinzip gleich (wenn auch rein mathematisch natürlich nicht, aber zur Vorstellung; man kann sie dann miteinander identifizieren), weil man dann etwas wie Kartenwechsel zwischen den beiden angeben kann (es liegt ja schließlich gerade ein Diffeomorphismus vor!). Die Strukturen sind also bei Betrachtung im \mathbb{R}^n (dahin gehen Karten, M, N müssen nämlich gleichdimensional sein für die Existenz einer bijektiven Abbildung, zudem ist nur dann die später auftretende Jacobi-Matrix quadratisch, die Invertierbarkeit also überhaupt denkbar) faktisch nicht zu unterscheiden, was oft auch mit $M = N$ notiert wird (obwohl $M \cong N$ o.Ä. passender wäre).

Anmerkung: für allgemeinere C^k -Mannigfaltigkeiten ist diese Äquivalenz bei Existenz einer Abbildung $f \in C^k$ zwischen diesen gegeben, im Falle von topologischen also beispielsweise durch einen Homöomorphismus.

Beispiel 2.23

eine doppelt periodische (= elliptische) Funktion ist glatt! Er hat in der VL aber paar Hüte vergessen

Ein wichtiges Korollar daraus ist:

Korollar 2.24: Differenzierbarkeit von Karten

Für glatte Mannigfaltigkeiten sind Karten Diffeomorphismen. Allgemeiner haben Karten die gleiche C^k -Klasse wie die Mannigfaltigkeit.

Beweis. Die Stetigkeit einer beliebigen Karte $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist gegeben, daher muss nur noch die k -fache Differenzierbarkeit in jeder Karte überprüft werden. Zu untersuchen

ist also $z \circ x \circ y^{-1}$. Weil x aber bereits auf die offene Menge $x(U) \subset \mathbb{R}^n$ abbildet, kann man z weglassen (bzw. als Identität setzen) und damit muss nur die Abbildung $x \circ y^{-1} \in C^k$ sein. Das ist aber nichts anderes als der Kartenwechsel zwischen x, y und dieser ist nach Definition von der Klasse C^k . \square

Auch wichtige Sätze zur Differenzierbarkeit aus der Analysis lassen sich nun übertragen:

Korollar 2.25: Verknüpfung

Die Komposition $g \circ f$ glatter Abbildungen f, g ist glatt.

Beweis. Die Verknüpfung stetiger Abbildungen ist wieder stetig. Nutze dann analog zur Unabhängigkeit der Differenzierbarkeit von der Karte geschickte Verknüpfungen und nutze zum Schluss, dass auf dem \mathbb{R}^n die Verknüpfung glatter Abbildungen wieder glatt ist (das reicht nach der Definition von Differenzierbarkeit). \square

Als Abschluss dieses Abschnitts sollen *Funktionen* (seltener: *Funktionale*) betrachtet werden, wo $N = \mathbb{R}$ gesetzt wird und es folglich um Abbildungen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ geht.

Korollar 2.26: Funktionenraum

Die Menge $C^\infty(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ aller glatten Funktionale auf einer Mannigfaltigkeit M bildet zusammen mit den punktweise definierten Operationen

$$(f + \lambda g)(p) = f(p) + \lambda g(p) \quad (fg)(p) = f(p)g(p) \quad (2.20)$$

einen Vektorraum und wegen der Existenz des Produkts sogar eine Algebra (natürlich gilt dabei $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$).

Das heißt, dass im Allgemeinen kein Inverses vorliegt, aber sonst eben vieles analog zu Gruppen gilt. Der Beweis basiert wiederum auf Ausnutzen der Eigenschaften in \mathbb{R} .

Korollar 2.27: Dimension C^∞

Für $\dim(M) \geq 1$ gilt $\dim(C^\infty(M, \mathbb{R})) = \infty$.

Beweis. Die Idee basiert darauf, dass sich sogenannte Buckelfunktionen b von offenen Mengen $U \subset M$ konstruieren lassen, die den charakteristischen Funktionen aus der Maßtheorie entsprechen und von denen existieren bereits unendlich viele. Explizit fordert man dort, dass b nur auf U Werte $\neq 0$ annimmt und außerdem in einem gewissen Punkt $p \in M$ $b(p) = 1$ gilt (dazwischen glatter Übergang, also b glatt). \square

Die Forderung $\dim(M) \geq 1$ röhrt daher, dass man nicht bloß eine Sammlung von Punkten betrachten möchte, sondern eine „richtige“ Mannigfaltigkeit. Man findet darauf eben unendlich viele linear unabhängige Funktionen (das bedeutet Dimension unendlich ja gerade), weil man gezielt Funktionen konstruieren kann, deren Nicht-Nullstellenmengen (wo sie nicht den Funktionswert 0 annehmen) disjunkt sind. Weil die lineare Unabhängigkeit aber punktweise gemessen wird und wegen $0 \cdot x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ für den Fall $f(p) = 0, \tilde{f}(p) \neq 0$ kein $c \in \mathbb{R}$ existieren kann mit $cf(p) = \tilde{f}(p)$, folgt die lineare Unabhängigkeit der so konstruierten Funktionen (diese Nicht-Nullstellenmengen kann man aber beliebig klein machen und so unendlich viele finden).

2.4 Untermannigfaltigkeiten

Im \mathbb{R}^n werden oft Untervektorräume $U \subset \mathbb{R}^n$ betrachtet, das heißt Mengen, für die

$$\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } \Psi(U) = \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k} = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) : (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k\}$$

mit einem Isomorphismus Ψ (mit $\{0\}^{n-k}$ ist der Ursprung des \mathbb{R}^{n-k} gemeint). Das bedeutet nämlich automatisch, dass für die Projektion

$$\pi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

auch die Abbildung $\pi_k \circ \Psi_U : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ ein Isomorphismus ist (man nimmt hier die Einschränkung von Ψ auf U !) und U daher ein k -dimensionaler (Unter-)Vektorraum.

Dieser Begriff soll nun auf glatte Art und Weise verallgemeinert werden, also in den neuen Formalismus der Mannigfaltigkeiten eingebunden (man schränkt sich dabei zunächst auf Teilmengen des \mathbb{R}^n ein und erst später auf allgemeine Mannigfaltigkeiten).

Satz 2.28: Existenz von Plattmachern

Existieren für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ um alle Punkte $p \in M$ offene Umgebungen $U_p =: \hat{U} \subset \mathbb{R}^n$ und Diffeomorphismen $\Phi : \hat{U} \rightarrow \hat{V}$ in offene $\hat{V} \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$\hat{\Phi}(\hat{U} \cap M) = \hat{V} \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) \quad (k < n \in \mathbb{N}), \quad (2.21)$$

so trägt M eine natürliche Mannigfaltigkeitenstruktur der Dimension k mittels

$$\{(U, \Phi)\} = \left\{(\hat{U} \cap M, \pi_k \circ \hat{\Phi})\right\}. \quad (2.22)$$

Definition 2.29: Plattmacher, Untermannigfaltigkeit

Eine solche Abbildung Φ heißt auch *Plattmacher von M* , die Tupel (U, Φ) heißen *induzierte Karten* und M wird *k -dimensionale Untermannigfaltigkeit (des \mathbb{R}^n)* genannt. Die Zahl $n - k$ heißt *Kodimension von M (im \mathbb{R}^n)*.

In Worten heißt das einfach, dass man Koordinaten (also Karten) findet, in denen die Menge M (bzw. der Teil von M , der im Definitionsbereich des Diffeomorphismus liegt), nur k relevante Komponenten hat, weil die restlichen immer 0 sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA) werden diese dabei als die ersten k Komponenten gesetzt (man könnte sonst einfach immer umordnen), sodass die restlichen $n - k$ Komponenten lediglich mit Nullen aufgefüllt werden und man durch Projektion

auf die ersten k Komponenten (was natürlich glatt geht) einen Diffeomorphismus zwischen M und offenen Teilmengen des \mathbb{R}^k erhält. Das genügt aber die Definition einer Karte und somit lässt sich die nötige differenzierbare Struktur in Form eines Atlas aus diesen Karten aufbauen, die direkt alle nötigen Eigenschaften erfüllt (die topologischen Forderungen passen, weil der \mathbb{R}^n sie an Teilmengen überträgt).

Anmerkung: die Projektion mittels π_k ist dabei unbedingt nötig und nicht nur für einfache/ kürzere Ausdrücke, weil das Bild nur offen im \mathbb{R}^k ist, aber nicht im \mathbb{R}^n (ist klar, weil das Bild $\Phi(\hat{U} \cap M)$ im Prinzip nur eine Koordinatenebene ist, die insbesondere einen Rand hat bei Betrachtung im \mathbb{R}^n und daher abgeschlossen ist).

Untermannigfaltigkeiten liefern eine große Klasse neuer Mannigfaltigkeiten und zudem einige der wichtigsten Beispiele (ein großer Vorteil ist, dass man sie sich immer eingebettet vorstellen kann, weil es eben Teilmengen des \mathbb{R}^n sind). Die Konstruktion von Plättmachern ist in der Praxis auch meist nicht so kompliziert, wie die Definition zunächst vermuten lässt, wie nun anhand eines Beispiels gezeigt werden soll:

Beispiel 2.30: Geraden

Eines der einfachsten Beispiele für 1D-Untermannigfaltigkeiten sind Geraden. Diese sind im Allgemeinen als Gleichung wie $y = a \cdot x + b$ gegeben, was man äquivalent ausdrücken kann als Menge

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = a \cdot x + b \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ a \cdot x + b \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2.23)$$

Dann findet man aber schnell die Abbildung

$$\hat{\Phi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, y - a \cdot x - b), \quad (2.24)$$

die offenbar Punkte $(x, y) \in g$ auf $(x, 0)$ abbildet und damit einen Plättmacher für die über $y = a \cdot x + b$ gegebene Gerade g liefert. Damit bildet jede solche Gerade g eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 , die die Dimension 1 hat und daher über die Koordinate x beschrieben werden kann (das war übrigens bereits in der zweiten Schreibweise in (2.23) zu erkennen). Bei $\hat{\Phi}$ handelt es sich für $a \neq 0$ nun ganz offenbar um einen Diffeomorphismus, weil das Differential

$$D_{p=(x,y)} \hat{\Phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -a \cdot v_2 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

bijektiv ist und die Umkehrabbildung

$$\hat{\Phi}^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (z, w) \mapsto (x, y) = (z, \frac{w - b}{a}) \quad (2.26)$$

(glatt und bijektiv, wenn $a \neq 0$) ebenfalls ein für $a \neq 0$ bijektives Differential

$$D_{p=(z,w)}\Phi^{-1}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{v_2}{a} \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

besitzt.

? müsste die Umkehrabbildung nicht in der zweiten Komponente $w + a \cdot z + b$ sein? Dann halt auch ganz andere Jacobi, aber häää

Anmerkung: ein anderer Plattmacher wäre $\hat{\Phi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x, \frac{y-b}{a} - x)$ und dort wird auch direkt klar, warum $a \neq 0$ nötig ist (nicht erst beim Differential).

Der fundamentale Satz zu Untermannigfaltigkeiten kommt aber erst jetzt:

Satz 2.31: Satz vom regulären Wert

Ist für $k < n \in \mathbb{N}$, eine glatte Abbildung $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ und $M = F^{-1}(\{q\})$ nicht-leer das Differential $D_p F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ surjektiv für alle $p \in M$, so ist M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . In diesem Fall heißt $q \in \mathbb{R}^{n-k}$ *regulärer Wert* und Punkte $p \in M$ heißen *reguläre Punkte*.

Beweis. Kriegen halt direkt Plattmacher bei surjektivem Differential oder haben nach Umkehrsatz lokalen Diffeo; nutzen iwie Satz über implizite Funktion \square

Anmerkung: der Satz vom regulären Wert und der Umkehrsatz sind im Wesentlichen äquivalent, der eine folgt leicht aus dem jeweils anderen. Die Aussage des Umkehrsatzes (auch lokales Diffeomorphiekriterium genannt) ist, dass man für eine Abbildung f mit in einem Punkt invertierbarer Jacobi-Matrix offene Umgebungen um den Punkt und sein Bild findet, zwischen denen f diffeomorph abbildet.

Man betrachtet hier also die Urbildmenge M eines gewissen Punktes q (was der *Niveaumenge* der Abbildung zu q entspricht) und wenn das Differential an jedem Punkt in dieser Menge maximalen Rang hat (was hier wegen $n - k < n$ gerade Surjektivität bedeutet), dann bildet das Urbild eine Untermannigfaltigkeit. Dieser Satz vereinfacht das Finden von Untermannigfaltigkeiten natürlich ganz massiv, auch wenn diese erst einmal nur implizit gegeben sind als

$$M = F^{-1}(q) = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = q\}. \quad (2.28)$$

Eine sehr interessante Folgerung erhält man dann, wenn oBdA der Fall des regulären Wertes $q = 0$ und damit $M = F^{-1}(0)$ betrachtet wird (für $q \neq 0$ mit $M = F^{-1}(q)$ setze

einfach $\tilde{F}(p) = F(p) - F(q)$, sodass $M = \tilde{F}^{-1}(0)$). Dann erhält man als allgemein mögliche Form von Plättmachern $\hat{\Phi} = (\Phi, F)$ mit den induzierten Karten Φ , weil das für Punkte $p \in M$ offenbar die Form $\hat{\Phi}(p) = (\Phi(p), 0)$ annimmt (die Dimensionen passen, F bildet ja nach \mathbb{R}^{n-k} ab). Das bildet auf geeigneten Mengen einen Diffeomorphismus, weil die Karten auf glatten Mannigfaltigkeiten per Definition solche sind und $D_p F$ nach dem Satz vom regulären Wert für alle Punkte aus M surjektiv ist, sodass es auf geeigneten Mengen bijektiv abbildet. Mit der Linearität des Differentials ist $D_p F$ sogar ein Isomorphismus, F also ein Diffeomorphismus und damit $\hat{\Phi}$ auch einer.

Liegt also eine Mannigfaltigkeit als Urbild eines regulären Wertes vor, bekommt man die differenzierbare Struktur sofort dazu (Topologie wird einfach vom \mathbb{R}^n vererbt, hier geht es ja nur um Teilmengen davon), sodass sich das Zeigen der Mannigfaltigkeiten-Eigenschaften stark vereinfacht. Das hat viele Anwendungen, unter Anderem bei sehr anschaulichen bzw. sogar Standardbeispielen:

Beispiel 2.32: Sphäre

Auch die bereits als Standardbeispiel eingeführte n -Sphäre stellt sich als Untermannigfaltigkeit heraus, was aber auch nicht überraschen sollte (man hat dort ja gerade die schöne Visualisierung als Teilmenge des \mathbb{R}^{n+1}). Aus der definierenden Gleichung $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = 1$ kann man sich dann leicht überlegen, dass

$$\mathbb{S}^n = F^{-1}(1) \text{ für } F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \langle p, p \rangle. \quad (2.29)$$

Damit ist aber nichts bewiesen, es muss noch das Differential berechnet werden:

$$D_p F(v) = (2p_1 \ 0 \ \dots \ 2p_{n+1}) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = 2\langle p, v \rangle. \quad (2.30)$$

Das ist als Abbildung $D_p F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto D_p F(v)$ surjektiv. Um zu sehen, dass jedes $x \in \mathbb{R}$ angenommen wird, reicht es dabei aus, Vektoren der Form $v = (0, \dots, \frac{x}{p_j}, 0, \dots, 0)$ mit nur einem Eintrag an der Stelle j zu betrachten (Surjektivität forderte ja keine Eindeutigkeit des Urbilds). Dabei findet man immer mindestens ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $p_j \neq 0$ (wichtig für Existenz v , durch 0 teilen sollte vermieden werden), weil nur Punkte auf der Sphäre betrachtet werden und diese müssen ja Länge 1 haben (es gibt also keine kritischen Punkte auf der Sphäre und für alle Punkte im Urbild des damit regulären Wertes 1 ist $D_p F$ surjektiv).

Man kann sich aber auch recht einfach Plattmacher überlegen, weil diese hier im wahrsten Sinne des Wortes die Sphäre plattdrücken. Einer für die Teilmenge $U_{>0} = \{x \in \mathbb{S}^2 : z > 0\}$ (man beachte: nicht $z \geq 0$!) wäre

$$\begin{aligned}\hat{\Phi} : U_{>0} &\rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \hat{\Phi}(x, y, z) = (x, y, 1 - x^2 - y^2) \\ \Rightarrow \quad \hat{\Phi}(x, y, z) \Big|_{\mathbb{S}^2} &= (x, y, 0) \quad \Rightarrow \quad \Phi(x, y, z) = (x, y)\end{aligned}\tag{2.31}$$

und diese Vorschrift funktioniert auch für $U_{<0} = \{x \in \mathbb{S}^2 : z < 0\}$ (die Idee ist, den Punkt von der Sphäre in die xy -Ebene zu projizieren). Weil nun aber der Kreisring mit $z = 0$ fehlt, braucht man analoge Plattmacher in die xz - und yz -Ebene, sodass man am Ende eine Familie von induzierten Karten $\hat{\Phi}$ erhält, die einfache Projektionen sind und sich in folgender allgemeine Form bringen lassen:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_{ij} : \mathbb{S}^n \cap U_{ij} &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \{0\}, \quad x \mapsto (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n, 0) \\ \Phi_{ij} : \mathbb{S}^n \cap U_{ij} &\rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n).\end{aligned}\tag{2.32}$$

wobei man die speziellen offenen Mengen U_{ij} betrachtet. Der Index i nimmt dabei nur die Werte 1, 2 an und kennzeichnet im Prinzip, in welcher Hemisphäre man sich befindet, j hingegen läuft $1, \dots, n$ durch und damit jede mögliche Koordinatenebene, in die man hineinprojizieren kann. Damit wird einfach

$$U_{1j} = \{x \in \mathbb{S}^n : x_j > 0\} \quad U_{2j} = \{x \in \mathbb{S}^n : x_j < 0\}.\tag{2.33}$$

Auch das eben behandelte Beispiel mit den Geraden wird so noch einfacher:

Beispiel 2.33: Geraden V2

Man kann für die Gerade $y = a \cdot x + b$ auch sehr einfach über den Satz vom regulären Wert zeigen, dass es sich um eine Untermannigfaltigkeit handelt. Betrachtet man nämlich das oben bereits berechnete Differential

$$D_{p=(x,y)}\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -a \cdot v_2 \end{pmatrix},$$

so kann jeder Wert $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ angenommen werden, indem $(v_1, v_2) = (x, -\frac{y}{a})$ gesetzt wird, und das zeigt die Surjektivität.

Zur Topologie von Untermannigfaltigkeiten gibt es folgende allgemeine Aussage:

Lemma 2.34: Topologie einer Untermannigfaltigkeit

Die Teilraumtopologie einer Untermannigfaltigkeit M aufgefasst als Untervektorraum des \mathbb{R}^n entspricht der von M als Mannigfaltigkeit induzierten Topologie.

Beweis. Idee ist, zwei Implikationen zeigen: offene Menge $U \subset \mathbb{R}^k$, dann gilt für alle $p \in U \exists \epsilon > 0 : B^k(p, \epsilon) \subset U$; definiere nun $V := U \times \mathbb{R}^{n-k}$. Definiere dann $q = (p, y) \in V$ mit $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ und messe dann Abstand (haben dann per Definition Abstand klein genug)

andere Richtung: nehme $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und wähle einen Punkt $p \in V \cap \mathbb{R}^k \times \{0\} =: U$ - ; aus Fragestunde, siehe Screenshots □

Anwendungsbeispiele von Untermannigfaltigkeiten in der Physik sind Teilchen, die sich nur in bestimmten Gebieten aufhalten dürfen, wo man deshalb nur auf gewissen Teilmengen des \mathbb{R}^n rechnen möchte, die trotzdem noch genug Struktur haben sollen.

Nach dieser Vorarbeit ist die Verallgemeinerung des Begriffs der Untermannigfaltigkeit als Teilmenge anderer Mannigfaltigkeiten $M \neq \mathbb{R}^n$ wenig problematisch:

Definition 2.35: Untermannigfaltigkeit V2

Für eine Mannigfaltigkeit M der Dimension m heißt eine Teilmenge $N \subset M$ *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit von M*, wenn für jeden Punkt $q \in N$ eine offene Umgebung $U \subset N$ und eine bijektive Abbildung $\Psi : U \rightarrow V$ in die offene Menge $V \subset \mathbb{R}^m$ existiert, sodass

$$\Psi(U \cap N) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}). \quad (2.34)$$

2.5 Lie-Gruppen

Untermannigfaltigkeiten sind ein sehr ergiebiges Thema und man kann viele Klassen von ihnen studieren. Einige von ihnen haben auch eine (mit der Mannigfaltigkeitenstruktur verträgliche) Zusatzstruktur. In diesem Abschnitt soll es um die Betrachtung zusätzlicher Gruppeneigenschaften gehen, also das Vorliegen einer Verknüpfung sowie einer Menge, die zusammen die Gruppenaxiome erfüllen - das ist das Feld der *Lie-Gruppen*. Spezieller wird sich hier auf den sehr anschaulichen Fall von sogenannten Matrix-Lie-Gruppen konzentriert, wo man den Vektorraum $GL(n, \mathbb{R})$ und Untergruppen davon mit der natürlichen Matrixmultiplikation als Verknüpfung betrachtet.

Das ist zwar nicht der allgemeine Fall von Lie-Gruppen, aber es ist durchaus sinnvoll, zunächst diesen Spezialfall zu betrachten. Matrizen sind als Objekte nämlich bereits recht gut bekannt und außerdem sehr anschaulich darstellbar, Rechnungen können also so gut wie immer explizit ausgeführt werden. Außerdem haben sie ein weites Feld an Anwendungen, beispielsweise in der Physik, wo sie die Beschreibung von Symmetrien ermöglichen, und der Großteil der Erkenntnisse überträgt sich ohnehin ziemlich analog auf allgemeine Lie-Gruppen.

Es werden hier jedoch keine allgemeinen Aussagen zu (Matrix-)Lie-Gruppen gezeigt, diese folgen immer mal wieder zwischendurch in einem Beispiel oder wenn allgemein neue Objekte eingeführt wurden. Stattdessen werden die wichtigsten Beispiele vorgestellt und der Beweis geführt, dass es sich um eine Mannigfaltigkeit handelt (die Gruppeneigenschaften hingegen werden nicht alle gezeigt und sollten zumindest teilweise in Kursen der Linearen Algebra behandelt worden sein). Sehr angenehm ist dabei, dass so gut wie alle Matrix-Lie-Gruppen gleichungsdefiniert sind und das Schema/ die Idee deshalb nur ist, den Satz vom regulären Wert anzuwenden.

Beispiel 2.36: $GL(n, \mathbb{R})$

Das erste und allgemeinste Beispiel ist die allgemeine lineare Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$, in der alle invertierbaren $n \times n$ -Matrizen gesammelt werden (es handelt sich also um eine Teilmenge der quadratischen Matrizen $Mat(n, \mathbb{R}) =: gl(n, \mathbb{R})$). Diese Teilmenge kann aber auch präziser beschrieben werden, weil es die Determinante

$$\det : Mat(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \det(A) \quad (2.35)$$

gibt. Diese sollte aus grundlegenden Mathe-Kursen bekannt sein, genau wie ihre Eigenschaften (z.B. Basisunabhängigkeit). Besonders wichtig ist hier der Determinantenproduktsatz $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, weil daraus insbesondere

folgt:

$$1 = \det(1) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) \Leftrightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Sofort ist damit aber klar, dass Matrizen mit Determinante 0 nicht invertierbar sind, weil das Reziproke in diesem Fall nicht existiert. Dass umgekehrt sogar jede nicht invertierbare Matrix Determinante 0 hat, erkennt man bei Interpretation der Matrix als Lineare Abbildung (wirkt auf Vektoren über Multiplikation). Eine solche lineare Abbildung hat ein Inverses, wenn die Darstellungsmatrix vollen Rang hat, also die maximal mögliche Anzahl an linear unabhängigen Zeilen/ Spalten. Ist sie nicht invertierbar, dann gibt es eben linear abhängige Zeilen/ Spalten und in diesem Fall wird auch die Determinante 0 (Rechenregel aus Linearer Algebra).

Weil das insgesamt der Aussage A nicht invertierbar $\Leftrightarrow \det(A) = 0$ entspricht, ist die Determinante ein sehr kompaktes Kriterium für die Invertierbarkeit einer Matrix und die Menge der invertierbaren Matrizen kann beschrieben werden als:

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) : \det(g) \neq 0\}. \quad (2.36)$$

Es ist jedoch nicht klar (und zunächst auch nicht intuitiv), dass GL eine Mannigfaltigkeit ist, auch wenn das relativ leicht folgt. Die Isomorphie der Menge $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ zum \mathbb{R}^{n^2} ist wegen der Anzahl der Einträge einer $n \times n$ -Matrix klar (Idee: ordne alle Spaltenvektoren übereinander an, das ergibt quasi eine Karte). Weil aber mit der Determinante nun eine stetige Abbildung existiert, die GL auf die offene Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ abbildet, ist auch GL offen und damit als offene Menge des euklidischen Raums eine (Unter-)Mannigfaltigkeit.

Für eine Lie-Gruppe muss es aber zusätzlich eine Gruppe sein, wobei die Verknüpfung Matrixmultiplikation wichtig wird. Beispielhaft wird hier die Abgeschlossenheit unter der Multiplikation gezeigt (der Rest funktioniert analog): das Produkt zweier $n \times n$ -Matrizen ergibt zunächst offenbar wieder eine Matrix dieser Größe und weil für $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ in jedem Fall $\det(A) \neq 0, \det(B) \neq 0$ gilt, ist die Invertierbarkeit des Produkts wegen $\det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$ garantiert (explizit ist das Inverse über $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ gegeben).

Das ermöglicht auch die formale Definition:

Definition 2.37: Matrix-Lie-Gruppe

Eine Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, die zusätzlich eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ bezüglich der Matrix-Multiplikation ist, heißt *Matrix-Lie-Gruppe*.

Hier wurde also einfach nur festgehalten, was bereits vorher klar war. Die Dimension dieser Untergruppen ist meist kleiner als n^2 , weil sie ja spezielle Eigenschaften erfüllen und daher weniger linear unabhängige Komponenten haben.

Anmerkung: hier werden eigentlich ausschließlich reelle Lie-Gruppen betrachtet, daher wird das \mathbb{R} in der Benennung einer Gruppe von nun an weggelassen.

Beispiel 2.38: Spezielle lineare Gruppe $SL(n)$

Statt $\det(A) \neq 0$ zu fordern, kann man auch ganz spezielle Niveaumengen der Determinante betrachten, z.B. die Urbilder zur 1 und damit die Menge

$$SL(n) = \{g \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) : \det(g) = 1\}. \quad (2.37)$$

Diese sogenannte *Spezielle lineare Gruppe* hat per Definition invertierbare Elemente und bildet damit offensichtlich eine Teilmenge von $GL(n)$, zu zeigen sind jedoch noch die Gruppeneigenschaften und dass es sich um einen Mannigfaltigkeit handelt.

Ersteres geht mit den bekannten Eigenschaften der Determinante relativ einfach:

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(A) \cdot \det(B) = 1 \cdot 1 = 1 \\ \det(A^{-1}) &= 1/\det(A) = 1/1 = 1. \end{aligned}$$

Da die $\mathbb{1}$ als neutrales Element ebenfalls enthalten ist, handelt es sich bei SL um eine Gruppe mit der Verknüpfung.

Das Zeigen der Mannigfaltigkeit-Eigenschaften erfordert hauptsächlich die Berechnung des Differentials, da die Beweisidee das Anwenden des Satzes vom regulären Wert ist. Dabei wird speziell das Differential an der Identität relevant:

$$\begin{aligned} D_e \det(A)(h) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(A + th) - \det(A)}{t} \Big|_{A=e=\mathbb{1}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\det(\mathbb{1} + th) - \det(\mathbb{1})}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + t \text{tr}(h) + O(t^2) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \text{tr}(h) + O(t) = \text{tr}(h). \quad (2.38) \end{aligned}$$

Die Formel $\det(\mathbb{1} + tB) = 1 + t \text{tr}(B) + O(t^2)$ folgt dabei durch Aus- und Um-schreiben mithilfe der Leibniz-Formel (das O ist dabei ein sogenanntes Landau-Symbol, das einfach kennzeichnet, dass dort nur noch Terme $\sim t^2$ und höherer

Potenzen vorkommen). Dieses Zwischenergebnis hilft nun, da

$$\begin{aligned}
 D_g \det(A)(h) &= D_g \det(gg^{-1}A)(h) = \det(g) D_g \det(g^{-1}A)(h) \\
 &= \det(g) D_g (\det \circ L_{g^{-1}}A)(h) = \det(g) D_e \det \circ D_g L_{g^{-1}}A(h) \\
 &= \det(g) \operatorname{tr} \circ D_g L_{g^{-1}}A(h) = \det(g) \operatorname{tr} \circ D_g g^{-1}A(h) \\
 &= \det(g) \operatorname{tr} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g^{-1}(A + th) - g^{-1}A}{t} \right) \\
 &= \det(g) \operatorname{tr}(g^{-1}h).
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Man darf dabei $\det(g)$ vorbeziehen, weil nach der Variablen A differenziert wird, g aber nur ein fester Punkt ist und der Faktor damit bezüglich A konstant.

Mit diesem Ergebnis kann man nun den Satz vom regulären Wert anwenden. Da die Determinante eine Abbildung in die reellen Zahlen ist, muss $\det(g) \operatorname{tr}(g^{-1}h)$ alle möglichen Werte in \mathbb{R} annehmen können, was ja gerade der Surjektivität entspricht. Da per Definition $\det(g) = 1$ für $g \in \mathrm{SL}(n)$ ist, entspricht das der Surjektivität von $\operatorname{tr}(g^{-1}h)$. Da h aber beliebig ist und tr nicht die Nullabbildung, findet man immer ein h , sodass $\operatorname{tr}(g^{-1}h) \neq 0$ ist und das reicht bereits, weil man dann durch Skalieren dieses h mit $k \in \mathbb{R}$ jeden Wert annehmen kann:

$$\operatorname{tr}(kh) = \sum_{j=1}^n kh_{jj} = k \sum_{j=1}^n h_{jj} = k \operatorname{tr}(h).$$

Damit folgt außerdem direkt als Dimension

$$\dim(\mathrm{SL}(n)) = \dim(\mathrm{GL}(n)) - \dim(\mathbb{R}) = n^2 - 1. \tag{2.40}$$

Beispiel 2.39: Orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n)$

Das zweite wichtige Beispiel für eine Matrix-Lie-Gruppe ist die *Orthogonale Gruppe*

$$\mathrm{O}(n) = \{g \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) : gg^T = \mathbb{1}\}. \tag{2.41}$$

Hier ist das Transponierte also bereits das Inverse. Die Gruppeneigenschaften zeigt man wiederum mit zwei schnellen Rechnungen ($\mathbb{1}$ wieder als neutrales

Element):

$$gh(gh)^T = ghh^Tg^T = gg^T = \text{id}$$

$$g^{-1}(g^{-1})^T = (g^Tg)^{-1} = \left(\left(gg^T\right)^T\right)^{-1} = (\mathbb{1}^T)^{-1} = \mathbb{1}^{-1} = \mathbb{1}.$$

Auch bei $O(n)$ ist nun zu erwarten, dass es sich um eine UMF von $GL(n)$ handelt, daher wird zunächst das Differential der Funktion $gg^T = \mathbb{1}$ bestimmt:

$$\begin{aligned} D_g(g^Tg)(h) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(g + th)^T(g + th) - g^Tg}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(g^T + th^T)(g + th) - g^Tg}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g^Tg + tg^Th + th^Tg + t^2h^Th - g^Tg}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} g^Th + h^Tg + th^Th \\ &= g^Th + h^Tg. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Die Surjektivität ist hier nicht sofort ersichtlich, wird aber mit der Substitution $A = g^{-1}h$ klar. Wegen der Orthogonalität von g wird das Bild dann nämlich zu $D_g(g^Tg)(h) = A + A^T$ und bildet damit wegen $(A + A^T)^T = A^T + A = A + A^T$ eine symmetrische Matrix (wird auch rund um 5.9 behandelt). Dass man auch alle symmetrischen Matrizen $B \in \text{Sym}(n)$ trifft ist dann direkt klar, weil ohne Probleme $A = B/2$ gewählt werden kann.

Als Dimension erhält man hier wegen des unterschiedlichen Wertebereichs der Definition etwas kleineres als $n^2 - 1$ bei SL , nämlich:

$$\dim(O(n)) = \dim(GL(n)) - \dim(\text{Sym}(n)) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (2.43)$$

Die Dimension der symmetrischen Matrizen kann man sich dabei so erklären, dass die Diagonale frei wählbar ist (ändert sich bei Transposition nicht, gibt daher n freie Komponenten), aber nur eine Hälfte darunter/ darüber ($\frac{n^2-n}{2}$ mehr).

Die orthogonale Gruppe hat interessante, noch nicht ersichtliche Anwendungen, ihre Elemente fungieren in reellen Räumen als Basiswechsel. Diese noch sehr mathematische Aussage kann man auch anschaulicher formulieren, indem man die Struktur weiter untersucht. Wegen

$$1 = \det(\mathbb{1}) = \det(g^Tg) = \det(g^T)\det(g) = \det(g)\det(g) \Leftrightarrow \det(g) = \pm 1$$

hat $O(n)$ offenbar genau zwei Zusammenhangskomponenten und diese haben jeweils sehr anschauliche Bedeutungen. Die Untergruppe zur $+1$ ist die *Spezielle*

orthogonale Gruppe, die mit $\mathrm{SO}(n)$ abgekürzt wird und auch als Drehgruppe bezeichnet wird, weil ihre Elemente gerade als Raumdrehungen wirken. Der restlichen Anteil zur -1 wirkt ebenfalls als Drehung, jedoch noch verbunden mit einer Raumspiegelung, es handelt sich also um Drehspiegelungen. Diese Menge bildet jedoch keine Gruppe, da sie wegen $(-1) \cdot (-1) = +1$ nicht unter der Multiplikation abgeschlossen ist (anschaulich: doppeltes Spiegeln ergibt wieder die Anfangslage).

Auf den ersten Blick mag es nun überraschen, dass

$$\dim(\mathrm{SO}(n)) = \dim(\mathrm{O}(n)) = \frac{n(n-1)}{2} = \dim(\mathrm{O}(n) \setminus \mathrm{SO}(n)), \quad (2.44)$$

aber das ist bei offenen Teilmengen immer der Fall (ein ausgefüllter Ball im \mathbb{R}^3 ist z.B. auch ein dreidimensionales Objekt). Dass Matrix-Lie-Gruppen als Teilmengen von GL eine kleinere Dimension als $\dim(\mathrm{GL}(n)) = n^2$ haben liegt einfach daran, dass es UMF sind und daher keine offenen Mengen (man denke hier an die Kugelschale im \mathbb{R}^3 , die wegen der „unendlich dünnen“ Schale nur ein zweidimensionales Objekt bildet, sodass kein offener Ball als Charakterisierung offener Mengen in der Standardtopologie vollständig in ihr liegt).

3 Tangentialräume

Bislang wurde auf einer Mannigfaltigkeit nur mit einer zusätzlich zur Menge existierenden Struktur gearbeitet, der vom Atlas induzierten Topologie. Damit kann man, wie bereits gezeigt wurde, auch schon einiges machen, aber in vielen Fällen würde man auch gerne mit Richtungen und darauf aufbauend Vektoren arbeiten.

Das ist jedoch schwierig, weil eine Mannigfaltigkeit die dafür nötige Struktur eines Vektorraums nicht natürlicherweise besitzt (man stelle sich die Addition zweier

Punkte auf der 2-Sphäre vor, die Summe der zugehörigen Ortsvektoren liegt natürlich nicht mehr auf \mathbb{S}^2). Das Ziel dieses Abschnitts ist daher die (künstliche) Konstruktion einer solchen Struktur, was zu den sogenannten Tangentialräumen führt. Wie außerdem klar werden wird, kann man diese auf verschiedene Weisen einführen und aufbauen, die auf den ersten Blick unterschiedlich scheinen, sich aber als äquivalent herausstellen und alle ihre Vorteile haben (im späteren Verlauf ergibt sich daraus sogar der praktische Nebeneffekt, dass man sich in jeder

Situation die passendste Sichtweise aussuchen kann).

3.1 Definition

3.1.1 Von Untermannigfaltigkeiten

Die erste Veranschaulichung dieses neuen Begriffs wird auf einer speziellen Klasse von Mannigfaltigkeiten eingeführt, den Untermannigfaltigkeiten, weil diese Teilmengen des bekannten \mathbb{R}^n sind. Ein Tangentialvektor an den Punkt p ist hier dann einfach ein Vektor im \mathbb{R}^n , der in p tangential bzw. parallel an der Untermannigfaltigkeit liegt. Damit gibt man sehr intuitiv eine Richtung auf der (Unter-)Mannigfaltigkeit vor.

Um diese anschauliche Definition mathematisch fassen zu können, wird der Kurvenbegriff genutzt. Dabei handelt es sich um Abbildungen $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, die im Folgenden eigentlich immer zusätzlich als glatt angenommen werden. Ihr Bild ist ein eindimensionales Objekt im \mathbb{R}^n , im Prinzip handelt es sich um eine Verallgemeinerung von Geraden (Kurven sind in einem gewissen Sinne verformte Geraden).

Definition 3.1: Tangentialraum

Für eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt die Menge

$$T_p M := \{v \in \mathbb{R}^n : \exists \gamma \text{ mit } \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v\} \quad (3.1)$$

für glatte Kurven $\gamma : I \rightarrow M$ Tangentialraum von M am Punkt $p \in M$.

Man setzt hier also einen Tangentialvektor als Ableitung (was wegen des eindimensionalen Definitionsbereichs der Richtungsableitung entspricht) im Punkt 0 entlang einer Kurve, wenn diese Kurve am Anfang (im Punkt 0) durch p läuft.

Satz 3.2: Darstellung Tangentialraum

Der Tangentialraum einer k -dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist ein k -dimensionaler Untervektorraum des \mathbb{R}^n .

Falls M implizit über eine Bedingung der Form $M = F^{-1}(q)$ mit einem regulären Wert q von F gegeben ist, so gilt zudem

$$T_p M = \text{kern}(D_p F), \quad \forall p \in M. \quad (3.2)$$

Anmerkung: die erste Aussage gilt auch allgemeiner, für eine k -dimensionale UMF $N \subset M$ ist $T_p N \subset T_p M$ ein k -dimensionaler Untervektorraum von $T_p M$.

Dieser Satz ist sehr hilfreich, weil er in vielen Fällen die sehr einfache Berechnung von Tangentialräumen ermöglicht, die bei allgemeinen Mannigfaltigkeiten nicht durch eine einzige, spezielle Formel möglich ist! Für wichtige Beispiele gilt damit:

Beispiel 3.3: Tangentialraum der Sphäre

Wie in Beispiel 2.32 gezeigt wurde, gilt $\mathbb{S}^n = F^{-1}(1)$ für $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto \langle p, p \rangle$ und daraus berechnet man $D_p F(v) = 2\langle p, v \rangle$. Daher ist der Tangentialraum

$$T_p \mathbb{S}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, p \rangle = 0\}, \quad (3.3)$$

was man auch intuitiv so festhalten würde: ein Tangentialvektor steht tangential an der Sphäre, also senkrecht zu Ortsvektoren aus der Sphäre.

Beispiel 3.4: Tangentialräume von $\mathrm{SL}(n)$

nach der hergeleiteten Formel für das Differential der Determinante gilt

$$0 = D_g \det(g)(h) = \det(g) \operatorname{tr}(g^{-1}h) = \operatorname{tr}(g^{-1}h) = \operatorname{tr}(g^T h). \quad (3.4)$$

und damit obviously $T_g \mathrm{SL}(n) = \{h \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) : \operatorname{tr}(g^{-1}h) = 0\}$

Beispiel 3.5: Tangentialraum zu $\mathrm{O}(n)$

Zunächst soll der Tangentialraum für die Gruppe $\mathrm{O}(n)$ der orthogonalen Matrizen bestimmt werden. Dazu muss deren definierende Gleichung $F(g) = g^T g = 1$ abgeleitet werden, was in (2.42) bereits gemacht wurde. Nach dem Ergebnis dort muss jedes Element $h \in T_g \mathrm{O}(n)$ deshalb die folgende Bedingung erfüllen:

$$0 = D_g(g^T g)(h) = g^T h + h^T g. \quad (3.5)$$

Im Spezialfall der Identität $g = e$, der noch sehr wichtig wird, ergibt das

$$0 = D_e(g^T g)(h) = h^T + h \Leftrightarrow h^T = -h, \quad (3.6)$$

der Tangentialraum ist durch die schiefsymmetrischen $n \times n$ -Matrizen gegeben.

Möchte man nun noch den Tangentialraum $T_e \mathrm{SO}(n)$ bestimmen, so muss noch die zusätzliche Forderung $\det(g) = 1$ berücksichtigt werden. Das wird abgeleitet mit $g \in \mathrm{SO}(n)$ und daher $\det(1) = 1$, $g^{-1} = g^T$ analog zur Rechnung bei $T_g \mathrm{SL}(n)$ zu

$$0 = D_g \det(g)(h) = \det(g) \operatorname{tr}(g^{-1}h) = \operatorname{tr}(g^{-1}h) = \operatorname{tr}(g^T h).$$

Interessanterweise gibt das für $g = e$ gar keine zusätzliche Forderung, schließlich ist jede schiefsymmetrische Matrix h bereits spurfrei und erfüllt damit automa-

tisch $\text{tr}(e^T h) = \text{tr}(h) = 0$ (das liegt daran, dass die auch Diagonaleinträge der Schiefsymmetrie genügen müssen, $a_{jj} = a_{jj}^T = -a_{jj} \Leftrightarrow a_{jj} = 0$). Es gilt deshalb

$$T_e O(n) = T_e SO(n). \quad (3.7)$$

3.1.2 Geometrisch

Es wäre natürlich toll, wenn sich diese sehr einfache (weil geometrisch gut vorstellbare) Definition von Tangentialvektoren auf Mannigfaltigkeiten übertragen ließe. Dazu muss man sich überlegen, wie man Richtungen auf einer abstrakten Mannigfaltigkeit definieren kann (nicht alle sind wie die Sphäre eine so schön vorstellbare Einbettung).

Wie üblich ist die Idee, das Ganze über Karten auf den \mathbb{R}^n zurückzuführen. Jedoch braucht man noch etwas, das man zurückführen kann (ein Punkt wäre als Richtung ungeeignet) und muss daher ein mathematisches Konstrukt finden, das in irgendeiner Weise einer Richtung ähnelt. Die erste Idee bei Richtungen sind Ableitungen und das wird auch genutzt. Weil eine Richtungsableitung ja gerade (noch) nicht möglich ist, wählt man als abzuleitendes Objekt dabei Kurven γ , also eindimensionale Teilmengen von M (diese beschreiben einen Weg und damit eine Richtung an jedem Punkt).

Weil Kurven einfach nur (hier zumeist als glatt angenommene) Abbildungen

$$\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow M, t \mapsto \gamma(t) \quad (3.8)$$

sind, machen Definition und Ableitung keine Probleme. Meist nutzt man dabei die Darstellung in Karten $\varphi : U = \text{im}(\gamma) \rightarrow V$, also Abbildungen der Form

$$\varphi \circ \gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n \quad (3.9)$$

Man braucht dabei übrigens nur eine Karte, weil der „Input“ von γ ja bereits reelle Zahlen aus einem offenen Intervall $(-\delta, \delta)$ sind.

Die Kurve (bzw. ihre Verknüpfung mit φ) gibt also einen Punkt/ Vektor (je nach Interpretation) im \mathbb{R}^n und weil das Differential von $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung $D_p f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist, gibt auch sie einen Vektor (Ableitung steht ja für Richtung)

$$(\varphi \circ \gamma)' := D(\varphi \circ \gamma) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, s \mapsto (\varphi \circ \gamma)'(s) = D_s(\varphi \circ \gamma) = \frac{d}{dt} \varphi \circ \gamma \Big|_{t=s}. \quad (3.10)$$

Damit lassen sich für jeden Punkt $s \in \mathbb{R}$ sinnvoll Richtungen definieren. Da man das aber bei der Definition von Tangentialvektoren für Punkte $p \in M$ machen möchte,

muss man die s so wählen, dass $\gamma(s) = p$. Um es sich nicht unnötig schwer zu machen (und weil es oBdA möglich ist wegen Translationen), fordert/ setzt man allgemein

$$\gamma(0) = p. \quad (3.11)$$

Da es enorm viele Kurven gibt, hat man auch enorm viele Richtungen. Natürlich kommt es aber vor, dass zwei verschiedene Kurven im Punkt p parallel sind (also die gleiche Ableitung in p haben, wie üblich bezogen auf die Auswertung in einer Karte). Da im Rahmen dieses Abschnitts aber nur das Verhalten der Ableitung im Punkt p interessiert und gar nicht die Kurve selber (lediglich als Hilfsmittel genutzt), ist es nicht sinnvoll, solche Kurven getrennt zu betrachten. Diese Überlegung führt zu:

Definition 3.6: Kurvenkeim, Tangentialraum

Für zwei Kurven $\gamma_1 : (-\delta_1, \delta_1) \rightarrow M, \gamma_2 : (-\delta_2, \delta_2) \rightarrow M$ und eine Karte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um einen Punkt $p \in U \subset M$ mit $\gamma_1(p) = 0 = \gamma_2(p)$ definiert man

$$\gamma_1 \sim_p \gamma_2 \iff (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0). \quad (3.12)$$

Eine so definierte Äquivalenzklasse $[\gamma]_p := \gamma / \sim_p = \gamma'$ glatter Kurven durch den Punkt $p \in M$ heißt *Kurvenkeim an p* oder *geometrischer Tangentialvektor an p* .

Der *Tangentialraum $T_p M$* der Mannigfaltigkeit M am Punkt $p \in M$ ist die Menge aller (geometrischen) Tangentialvektoren $[\gamma]_p$.

Anmerkung: eine wichtige Beobachtung ist, dass die Äquivalenzrelation vollkommen unabhängig von $\delta_1, \delta_2 > 0$ sind. Das einzige Relevante ist, dass die 0 enthalten ist, weil diese auf p abgebildet wird und nur dieser Punkt hier interessiert.

Das Ganze kann man sich nun wie bei einer Geraden im \mathbb{R}^n vorstellen, wo es ja auch Orts- und Richtungsvektor gab. Das Festhalten des Punktes bei $T_p M$ entspricht dann der Betrachtung eines festen Ortsvektors und der Tangentialraum in dieser Analogie ist die Menge aller Richtungsvektoren, die an diesen Ortsvektor angelegt werden.

Eine wichtige Frage ist nun, was bei Wahl einer anderen Karte ψ passiert. Würde die Äquivalenzrelation dort nicht erhalten bleiben, wäre die Definition nicht sinnvoll (z.B. wichtig beim Nachweis gewisser Eigenschaften). Glücklicherweise kann man zeigen:

Satz 3.7: Kartenunabhängigkeit

Die so definierte Äquivalenzrelation hängt nicht von der Wahl der Karte um p ab.

Beweis. Aus der Definition der Äquivalenzklasse sollte die Grundidee klar sein:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \gamma)'(0) &= \frac{d \varphi \circ \gamma}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d \varphi \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \gamma}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d \varphi \circ \psi^{-1}}{dt} \Big|_{(\psi \circ \gamma)(0)} \circ \frac{d \psi \circ \gamma}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d \varphi \circ \psi^{-1}}{dt} \Big|_{\psi(p)} \circ \frac{d \psi \circ \gamma}{dt} \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde dabei die Forderung $\gamma(0) = p$ genutzt. Da man das aber für alle Kurven fordert (und damit insbesondere für die Repräsentanten einer Äquivalenzklasse), steht dort nur ein von der gewählten Kurve unabhängiger Faktor. Die analoge Rechnung für eine andere, zu γ äquivalente Kurve $\tilde{\gamma}$ ergibt also:

$$(\varphi \circ \tilde{\gamma})'(0) = \frac{d \varphi \circ \psi^{-1}}{dt} \Big|_{\psi(p)} \circ \frac{d \psi \circ \tilde{\gamma}}{dt} \Big|_{t=0},$$

aber die Abbildung $D_{\psi(p)}(\varphi \circ \psi^{-1}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist ein Isomorphismus (weil Kartenwechsel Diffeomorphismen sind), daher folgt aus der Injektivität

$$(\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \tilde{\gamma})'(0) \Leftrightarrow (\psi \circ \gamma)'(0) = (\psi \circ \tilde{\gamma})'(0)$$

und das war zu zeigen. □

Richtungen auf Mannigfaltigkeiten können also durch Kurvenkeime $[\gamma]_p$ beschrieben werden und jede Kurve mit $\gamma(0) = p$ repräsentiert einen solchen. Der Name sollte dabei nicht überraschen, weil man die Richtung immer ausgehend von p beschreibt und γ bildet den Ursprung (\equiv Keim) auf p ab. Statt $[\gamma]_p$ wird oft einfach $\gamma'(0)$ oder γ' genutzt (denn $[\gamma]_p$ bezeichnet schon die Ableitung γ' und nicht die Kurve γ !).

Der Beweis der Kartenunabhängigkeit zeigt dabei, dass ein Kurvenkeim $[\gamma]_p$ auch als Richtungsableitung einer vom Repräsentanten γ induzierten Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ aufgefasst werden kann! Das sieht man in der Darstellung

$$[\gamma]_p = \gamma' \equiv (\varphi \circ \gamma)'(0) = \frac{d \varphi \circ \gamma}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d \varphi \circ \psi^{-1}}{dt} \Big|_{\psi(p)} \circ \frac{d \psi \circ \gamma}{dt} \Big|_{t=0}, \quad (3.13)$$

mit ψ als Karte um p . Schaut man sich diesen Ausdruck nämlich einmal genauer an, so kann man direkt sehen, dass $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lediglich ein Funktional/ eine

Linearform auf dem \mathbb{R}^n ist und $\psi \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (damit auch $(\psi \circ \gamma)' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$) ausgewertet am Punkt $t = 0$ einfach nur einen Vektor im \mathbb{R}^n ergibt.

Beispiel 3.8: Expliziter Kurvenkeim

Für $p \in M \subset \mathbb{R}^n$ offen gilt $T_p M = \mathbb{R}^n$, wie man sich leicht klar macht. Betrachtet man nun die auf dem Intervall $t \in (-\delta, \delta)$ definierten Kurven

$$(\varphi \circ \gamma)(t) = p + tv, \quad (3.14)$$

so gilt mit der Karte $\varphi = \text{id}$ gerade:

$$(\varphi \circ \gamma)'(0) = \gamma'(0) = (p + tv)'(0) = v. \quad (3.15)$$

Auf dem euklidischen Raum kann man also mit normalen Vektoren statt Tangentialvektoren rechnen, nur auf allgemeinen Mannigfaltigkeiten eben nicht unbedingt ! Das zeigt, wie gut die Definition gewählt wurde, weil sie altbekannte Zusammenhänge in einer verallgemeinerten Fassung enthält. Interessant ist aber, dass nun eine klare Unterscheidung von Punkten und Vektoren vorliegt (im \mathbb{R}^n ist dazu ja die verschiedenen Interpretationen Orts- und Richtungsvektor der prinzipiell gleichen Objekte nötig).

Beispiel 3.9: Auf Untermannigfaltigkeiten

Für M als UMF sollte das mit der vorherigen Definition von $T_p M$ übereinstimmen (was es tut, wie er gezeigt hat; dort wurden ja auch Richtungsableitungen im Punkt 0 genommen, aber das waren halt schon die Tangentialvektoren, weil man da den Fall des \mathbb{R}^n betrachtet hat und damit das vorherige Beispiel greift).

Es wurden nun Tangentialvektoren eingeführt und die Menge aller Tangentialvektoren an einem Punkt $p \in M$ als Tangentialraum $T_p M$ definiert. Jedoch sind die dazu nötigen Eigenschaften eines Vektorraums (was ja der Sinn des Ganzen war) noch überhaupt nicht nachgewiesen und insbesondere nicht die nötigen Operationen Addition $+$ und Skalarmultiplikation \cdot gefunden ! Das soll nun nachgeholt werden:

- Die Frage nach einer sinnvollen Skalierung bei Kurven kann recht einfach beantwortet werden. Ein doppelt so schnelles Durchlaufen der Kurve ändert schließlich die Ableitung gerade um den Faktor 2 und damit auch den Richtungsvektor in 0 um diesen Faktor (wieder zur Erinnerung: das Bild von 0 ist gerade p und die Ableitung an der Stelle daher der gesuchte Richtungsvektor !).

Definition 3.10: Skalarmultiplikation

Für eine Kurve $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow M$, $t \mapsto \gamma(t)$, $\gamma(0) = p$, die als Element von $[\gamma]_p$ einen Tangentialvektor an $p \in M$ bildet, definiert man:

$$\lambda[\gamma]_p := [\tilde{\gamma}]_p \quad \tilde{\gamma} : (-\tilde{\delta}, \tilde{\delta}) \rightarrow M, t \mapsto \tilde{\gamma}(t) = \gamma(\lambda t), \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.16)$$

Man kann $\tilde{\delta}$ auch exakt angeben, bei $|\lambda| \leq 1$ klappt $\tilde{\delta} = \delta$ und sonst $\tilde{\delta} = \frac{\delta}{|\lambda|}$.

Anmerkung: man will bei der Definition von $\tilde{\delta}$ sicher gehen, dass sich das Bild von γ nicht vergrößert, um keine Probleme mit fehlenden Definitionsbereichen bei Karten oder nicht offenen Mengen zu bekommen.

Tatsächlich gilt dann bezüglich einer Karte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ Linearität:

$$(\varphi \circ \tilde{\gamma})'(0) = D_{t=0}(\varphi \circ \gamma \circ \lambda t) = D_{\lambda t(0)}(\varphi \circ \gamma) \circ D_{t=0}(\lambda t) = \lambda(\varphi \circ \gamma)'(0).$$

- + Die Addition stellt sich als etwas kniffliger und daher im Endeffekt auch schwerer vorstellbar heraus (siehe nämlich Beispiel S^2 in der Einführung des Abschnitts). Hier ist die Idee, eine Vektoraddition in Karten durchzuführen und so die Vektorraumstruktur des \mathbb{R}^n zu nutzen (danach geht es zurück nach M):

Definition 3.11: Addition

Für $[\gamma_1]_p, [\gamma_2]_p$ zwei Tangentialvektoren an $p \in M$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert man:

$$[\gamma_1]_p + [\gamma_2]_p := [\hat{\gamma}]_p \quad \hat{\gamma} : (-\delta_1, \delta_1) \cap (-\delta_2, \delta_2) \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ t \mapsto \hat{\gamma}(t) := \varphi^{-1}((\varphi \circ \gamma_1)(t) + (\varphi \circ \gamma_2)(t) - \varphi(p)). \quad (3.17)$$

Daraus folgt auch als Kartendarstellung dieser Beispielkurve (andere sind also prinzipiell auch möglich, wenn sie sinnvoll konstruiert sind)

$$(\varphi \circ \hat{\gamma})(t) = (\varphi \circ \gamma_1)(t) + (\varphi \circ \gamma_2)(t) - \varphi(p).$$

Das ist auch sofort klar, weil die normale Kurve bereits über die inverse Karte definiert ist (für die Begründung siehe Text davor). Der letzte Term ist dabei nicht etwa nötig, weil man weiterhin in der Äquivalenzklasse bleiben muss, die Richtung soll sich sogar eigentlich auch bei einer Vektoraddition ändern.

3.1.3 IN KARTEN

Er dient dazu, die Forderung $\hat{\gamma}(0) = p$ zu erfüllen (sonst hätte man keinen Tangentialvektor in $T_p M$ mehr!), Nachrechnen zeigt die Korrektheit:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}(0) &= \varphi^{-1}((\varphi \circ \gamma)(0) + (\varphi \circ \hat{\gamma})(0) - \varphi(p)) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(p) + \varphi(p) - \varphi(p)) = \varphi^{-1}(\varphi(p)) = p.\end{aligned}$$

Bei der Skalarmultiplikation war das klar, weil $t = 0 \Leftrightarrow \lambda t = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Diese beiden Operationen machen den Tangentialraum zu einem Vektorraum, dessen Struktur aufgrund der Benutzung von Karten $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ von der des Raums $T_{\varphi(p)}V$ induziert wird (das Zurückführen auf den \mathbb{R}^n wird wieder deutlich). Das heißt aber auch, dass noch die Wohldefiniertheit des Tangentialraums zu zeigen ist:

Satz 3.12: Eigenschaften $T_p M$

Die Vektorraumstruktur von $T_p M$ ist unabhängig von der Wahl der Karte φ und die Dimension von $T_p M$ ist gleich der von M .

Für zwei Mannigfaltigkeiten M, N gilt zudem $T_{(p,q)}M \times N = T_p M \times T_q N$.

3.1.3 In Karten

Wie bei Mannigfaltigkeiten üblich, muss man explizite Rechnungen mit Tangentialvektoren in Karten und damit im \mathbb{R}^n durchführen. Diese Not kann man aber auch zur Tugend machen und den gesamten Formalismus rund um Tangentialvektoren neu darstellen (Grund: bringt einen anderen Blickwinkel). Dass das Ganze möglich ist, sollte bereits aus der geometrischen Betrachtung klar sein, wo ein Beispiel für eine Kurve ja $t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)$ war und das hängt auch von der gewählten Karte ab. In diesem Fall wird die Richtung auf M eben von vorne herein beschrieben durch den Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ und die Idee ist, das zu verallgemeinern.

Definition 3.13: (Tangential-)Vektor

Mithilfe der Menge

$$\mathcal{A}_p := \{(U_p, \varphi_p) : p \in U_p, (U_p, \varphi_p) \in \mathcal{A}_{max}\} \quad (3.18)$$

bildet die Verknüpfung zweier Tripel

$$(U, \varphi, v)_p \sim (V, \psi, w)_p \Leftrightarrow D_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})(v) = w, \quad v, w \in \mathbb{R}^n \quad (3.19)$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{A}_p \times \mathbb{R}^n$, die als *Tangentialvektor* bezeichnet wird.

Das beschreibt einen Vektor auf der Mannigfaltigkeit M , weil dort Vektor im \mathbb{R}^n gegeben ist und dazu die „Vorschrift“, mit der man zurück übersetzen kann (das Kartentupel (U, φ) bzw. (V, ψ)). Die Äquivalenzrelation sorgt für Wohldefiniertheit.

Der Sinn des Ganzen ist, dass man natürlich leicht eine Ableitung in Karten machen kann und so auch eine Richtung erhält. Da eine ganz wesentliche Forderung aber die Unabhängigkeit der dort geschehenden Mathematik von der Karte ist, muss man sich genau so anschauen, was bei der Ableitung der gleichen Funktion am gleichen Punkt in einer anderen Karte herauskommt. Die Forderung entsteht dann durch Ableitung des jeweiligen Kartenwechsels, der ja gerade diesen Wechsel macht. Die Deutung der beiden Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ ist, dass sie den gleichen Vektor bzw. die gleiche Richtung auf der Mannigfaltigkeit beschreiben, den man durch Ableitung des inversen Kartenwechsels in Richtung des jeweiligen Vektors gewinnen kann, es gilt also

$$D_{\psi(p)}\psi^{-1}(w) = D_{\psi(p)}\psi^{-1}\left(D_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})(v)\right) = D_{\varphi(p)}\psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1}(v) = D_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(v),$$

was nach $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow M$ einen Vektor auf der Mannigfaltigkeit beschreibt.

Dass man auf diese Weise Kurvenkeime und Tangentialvektoren in Karten identifizieren kann, ist nun also klar. Das zeigt jedoch noch nicht, dass das mit jedem Kurvenkeim/ jedem Vektor möglich ist, hierfür ist die Isomorphie der beiden Räume zu zeigen.

Satz 3.14: Kurvenkeim \leftrightarrow (Tangential-)Vektor

Es gilt

$$T_p M \cong (\mathcal{A}_p \times \mathbb{R}^n) / \sim, \quad (3.20)$$

wobei der Isomorphismus auf natürliche Weise gegeben ist durch

$$\Phi : T_p M \rightarrow \mathcal{A}_p \times \mathbb{R}^n, [\gamma]_p \mapsto [(U, \varphi, (\varphi \circ \gamma)'(0))]_p. \quad (3.21)$$

Man nimmt also statt des Vektors $\gamma'(0) = (\varphi^{-1}(\varphi(p) + t\gamma))'(0) =: q \in T_p M$ also den Vektor $(\varphi \circ \gamma)'(0) = v \in \mathbb{R}^n$. Wegen

$$v = D_{t=0}\varphi \circ \gamma = D_{\gamma(p)}\varphi \circ D_{t=0}\gamma = D_p\varphi(q) \quad \left(\Leftrightarrow \quad q = D_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(v) \right)$$

stellt man den Vektor also einfach im \mathbb{R}^n dar (was wichtig ist, weil man sich Vektoren auf Mannigfaltigkeiten höchstens bei eingebetteten vorstellen kann!).

Anmerkung: diese Rechnung ist dabei eher symbolisch zu sehen, weil man Vektoren auf M (also Elemente von $T_p M$) ja bereits von Anfang an (siehe bei Kurvenkeimen) gewissermaßen über den \mathbb{R}^n definiert. Diese Rechnung ist deshalb mehr zur Verdeutlichung der eigentlich offensichtlichen Äquivalenz gedacht.

Auch die Menge $(\mathcal{A}_p \times \mathbb{R}^n)/\sim$ bildet damit einen Vektorraum. Die zugehörigen Operationen sind gegeben durch

$$[U, \varphi, v]_p + \lambda [U, \varphi, w]_p = [U, \varphi, v + \lambda w]_p. \quad (3.22)$$

Weil ja v bereits ein Vektor aus dem \mathbb{R}^n ist, kann man die dort vorhandene Vektorraumstruktur einfach ausnutzen (folgt rein rechnerisch aus der Linearität der Ableitung). Es ist also in dieser Notation wirklich sehr einfach, zu rechnen und man kann zum Beispiel mithilfe der Koordinatenkurven $[U, \varphi, e_k] \equiv$ Achse ganz leicht ein Koordinatensystem und damit eine Basis konstruieren. Eine oft benutzt Repräsentation eines solchen Tripels $[U, \varphi, v]$ ist mithilfe einer Kurve $t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)$ oder in kurz auch $\varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)$ geschrieben (weil es bei dem Tripel ja eigentlich nur um den Vektor v geht, den man auch durch einen Kurvenkeim darstellen kann).

Wichtig ist dabei jedoch zu beachten, dass die Ergebnisse der Rechnungen in jeder Karte „anders aussehen“. Obwohl also das Gleiche passiert bei der Addition äquivalenter Vektoren in verschiedenen Karten, ist das Ergebnis im Allgemeinen nicht exakt das Gleiche (auch wenn die Ergebnisse natürlich in einer Äquivalenzklasse liegen, es geht hier alleine um den Zahlenwert bzw. Vektor, der herauskommt).

Beispiel 3.15: Sphäre

Sei $p = (x, y, z) \in S^2$, $z > 0$ (Bedingung mit z nur zur Vereinfachung, nicht nötig; schränkt uns einfach auf obere Hemisphäre ein).

hier wäre gut Plot möglich ! Nimm beliebige Richtung, normiere die auf 1 und plotte daran die Tangentialvektoren (auch Sphäre dazu)

Er gibt dann Plattmacher an (die z -Koordinate wird bei Länge 1 des Vektors immer 0 ! Fordere daher auch $z > 0$, damit nicht schon in der Ebene, in die reinprojiziert werden soll)

Die Motivation hinter dieser zweiten Definition von Tangentialvektoren ist ganz einfach zu verstehen. Das Ableiten von Kurven ist zwar sehr einfach, aber Relationen wie Surjektivität rechnet man besser in einer festen Karte und ohne Kurvenkeim nach (Kurvenkeime waren zwar mithilfe von Karten definiert, die Relationen aber für Äquivalenzklassen gedacht und damit etwas unhandlicher). Von nun an wird sich daher immer der Formalismus ausgesucht, der besser zum jeweiligen Problem passt und die einfachste Behandlung ermöglicht (mehr dazu im Abschnitt „Vergleich“).

3.1.4 Derivationen

Nun folgt ein weiterer Ansatz zum Thema Tangentialvektoren, der noch allgemeiner gehalten ist. Zur Motivation werden einige Eigenschaften der bereits behandelten und als Tangentialvektor identifizierten Richtungsableitung von Kurven nachgewiesen, die dann zur Verallgemeinerung der Definition selbiger genutzt werden.

Dazu wird die Richtungsableitung eines glatten Funktionals $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ definiert:

$$[\gamma]_p \cdot f := [\gamma]_p(f) := (f \circ \gamma)'(0) = (f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(p)) \circ (\varphi \circ \gamma)'(0). \quad (3.23)$$

Man wendet also den eben eingeführten Begriff des Tangentialvektors direkt an, der ja eine Richtung auf M angibt (hier in der geometrischen Repräsentation als $(\varphi \circ \gamma)'(0)$). Ganz analog zu Kurvenkeimen hat man es dann letztendlich mit Richtungsableitungen auf dem \mathbb{R}^n zu tun, schließlich steht dort $f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und das wird abgeleitet in Richtung des Vektors, der durch Auswertung der Abbildung $(\varphi \circ \gamma)' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (die zwischendurch noch nach M geht) an der Stelle 0 gegeben ist (das macht die Verknüpfung dort, Einsetzen). Das Ergebnis ist also am Ende eine reelle Zahl.

Anmerkung: offensichtlich lassen sich Kurvenkeime als Richtungsableitung einer Karte φ deuten. $[\gamma]_p$ wird damit zu einer Art Operator $[\gamma]_p : C^\infty(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Wie immer in der Mathematik ist nun die Wohldefiniertheit der Abbildung wichtig, also die Unabhängigkeit vom gewählten Repräsentanten der Äquivalenzklasse $[\gamma]_p$:

Beweis. Die Äquivalenzrelation ist $\gamma_1 \sim_p \gamma_2 \Leftrightarrow (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$. Damit gilt

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'(0) &= D_0(f \circ \gamma) = D_0(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma) = D_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1}) \circ D_0(\varphi \circ \gamma) \\ &= D_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1}) \circ D_0(\varphi \circ \tilde{\gamma}) = D_0(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{\gamma}) = (f \circ \tilde{\gamma})'(0) \quad \square \end{aligned}$$

Anmerkung: interessant / gut ist, dass man so direkt die aus Analysis I/ II bekannte Form von Richtungsableitungen erfasst. Für $M = \mathbb{R}^m$ (Karte also einfach $\varphi = \text{id}$) und eine glatte Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ gewinnt die Ableitung in Richtung von $v \in \mathbb{R}^m$ zurück, indem man oBdA die Kurve $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv) = p + tv \in [\gamma]_p$ wählt:

$$[\gamma]_p \cdot f = (f \circ \gamma)'(0) = \frac{d}{dt} f \circ \gamma \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(p + tv) \Big|_{t=0}, \quad (3.24)$$

weil $f \circ \gamma$ eine Funktion von t ist, und dafür „berechnet“ man natürlich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(p + tv) \Big|_{t=0} &= D_{t=0}(f(p + tv)) = D_{t=0}(f \circ (p + tv)) \\ &= (D_{(p+tv)(0)} f) \circ D_{t=0}(p + tv) = (D_p f) \circ v = D_p f(v) \end{aligned}$$

Diese Abbildung erfüllt dann interessante Eigenschaften, wie folgender Satz zeigt.

Satz 3.16: Eigenschaften Richtungsableitung

Für $[\gamma]_p \in T_p M$ ist die Abbildung $C^\infty(M; \mathbb{R}) \ni f \mapsto [\gamma]_p \cdot f := (f \circ \gamma)'(0)$ linear und erfüllt zudem die Produkt-/ Leibnizregel. Es gilt also

$$[\gamma]_p \cdot (f + \lambda g) = \lambda[\gamma]_p \cdot f + [\gamma]_p \cdot g \quad [\gamma]_p \cdot (fg) = f(p)[\gamma]_p \cdot g + g(p)[\gamma]_p \cdot f. \quad (3.25)$$

Beweis. Anwenden von Rechenregeln des Differentials aus Analysis I/ II (wo Linearität und Produktregel gezeigt wurden) liefert:

$$\begin{aligned} [\gamma]_p \cdot (f + \lambda g) &= D_0((f + \lambda g) \circ \gamma) = D_0(\lambda f \circ \gamma) + D_0(g \circ \gamma) \\ &= \lambda D_0(f \circ \gamma) + D_0(g \circ \gamma) = \lambda[\gamma]_p \cdot f + [\gamma]_p \cdot g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\gamma]_p \cdot (fg) &= D_0((fg) \circ \gamma) = f(\gamma(0)) D_0(g \circ \gamma) + D_0(f \circ \gamma) g(\gamma(0)) \\ &= f(p)[\gamma]_p \cdot g + g(p)[\gamma]_p \cdot f \end{aligned} \quad \square$$

Man hat somit die Gleichheit der Definition (zumindest den Eigenschaften nach) von Richtungsableitungen von Funktionen mit der aus früheren Analysis-Kursen gezeigt. Tatsächlich stellt sich aber weiter heraus, dass sich alleine mit diesen Regeln eine alternative, sinnvolle Definition von Tangentialvektoren angeben lässt:

Definition 3.17: Derivation

Eine *Derivation* X an den Punkt p auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine Linearform

$$X : C^\infty(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto X(f) =: X \cdot f, \quad (3.26)$$

die zusätzlich noch die Leibniz-Regel erfüllt, also

$$X \cdot (fg) = f(p) X \cdot g + g(p) X \cdot f, \quad \forall f, g \in C^\infty(M; \mathbb{R}). \quad (3.27)$$

Der Raum aller Derivationen an $p \in M$ wird mit $\text{Der}_p(M)$ bezeichnet.

Die genaue Abbildungsvorschrift ist dabei weniger relevant, es geht nur darum, ob die Leibniz-Regel erfüllt ist und dass es sich um eine Linearform auf dem Raum der glatten Funktionen handelt. Man erhält auch direkt eine große Klasse von Beispielen, weil offenbar jede Richtungsableitung γ' einer Kurve $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ eine Derivation ist, die mit $X_{[\gamma]_p}$ (verkürzt $X_{[\gamma]}$) oder $X_{\gamma'}$ bezeichnet wird und wirkt als

$$X_{[\gamma]_p} \cdot f = (f \circ \gamma)'(0) = D_p f(\gamma'(0)).$$

Satz 3.18: Lokalität

Für eine Derivation X an $p \in M$ und $f, g \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ mit $f(x) = g(x), \forall x \in U$ auf einer offenen Umgebung $U \subset M$ von p gilt $X \cdot f = X \cdot g$.

Dieser zunächst unscheinbar wirkende Satz hat eine spannende Aussage: sind glatte Funktionen f, g auf einer Teilmenge $U \subset M$ gleich, so ist ihre Derivation auf ganz M gleich! Die Form der Funktionen außerhalb von U ist dabei vollkommen egal, sie können dort also grundverschieden sein. Wie der Name des Satzes sagt, ist das Ausdruck der Lokalität von Derivationen. Diese sind am festen Punkt $p \in M$ definiert, deshalb ist es sogar nachvollziehbar, dass nur das Verhalten nahe p relevant ist.

Anmerkung: beim Beweis wird ein interessanter Trick angewendet. Wegen der Linearität reicht es nämlich, die Aussage nur für Funktionen zeigen, die auf U den Wert 0 annehmen und außerhalb beliebig sind (betrachte einfach Differenz der beiden Funktionen, die Aussage folgt dann mithilfe der Buckelfunktionen).

Korollar 3.19

Für eine offene Teilmenge $U \subset M$ mit $p \in U$ gilt $\text{Der}(M) = \text{Der}(U)$.

Das ist im Prinzip eine direkte Folge aus der Lokalität, weil das Verhalten einer Funktion außerhalb von U keine Rolle für die Derivationen spielt (die Beweisidee

ist daher gerade das Einschränken einer Funktion $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ auf die offene Teilmenge U , was wegen der Offenheit nichts an der Glattheit ändert und dann nur noch Anwenden der Lokalität). Insbesondere kann man sich daher bei Derivationen auf die Arbeit mit Funktionen $C^\infty(U; \mathbb{R})$ beschränken, anstatt Elemente von $C^\infty(M; \mathbb{R})$ nutzen zu müssen (Differenzierbarkeit dort unter Umständen leichter zu zeigen).

Satz 3.20: Kurvenkeim \leftrightarrow Derivation

Die Menge $\text{Der}_p(M)$ bildet mithilfe der Operationen

$$(\lambda X + Y) \cdot f := \lambda X \cdot f + Y \cdot f \quad (3.28)$$

auf natürliche Weise einen Vektorraum.

Für einen Punkt p aus einer Mannigfaltigkeit M ist zudem die Abbildung

$$T_p M \ni [\gamma]_p \mapsto X_{[\gamma]_p} \in \text{Der}_p(M) \quad (3.29)$$

ein Vektorraumisomorphismus.

Beweis. Vektorraumeigenschaften sind easy/ klar (daher „auf natürliche Weise“, hier muss nichts konstruiert werden !)

Wohldefiniertheit klar wegen Eigenschaften der Richtungsableitung (bereits über Äquivalenzklasse definiert)

nun wichtig: Linearität (nötig bei Isomorphismus !)

man braucht eine Karte, um Kurvenkeime vergleichen zu können; man nimmt dann zwei Kurven $\gamma \equiv (U, \varphi, v)$ und $\tilde{\gamma} \equiv (U, \varphi, w)$ (? er schreibt die Kurven aber schon mit Strichen dran ?); für die Summe gilt dann klarerweise $\gamma + \lambda \tilde{\gamma} \equiv (U, \varphi, v + \lambda w)$ oder als äquivalente Repräsentation der Kurvenkeim $t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + t(v + \lambda w))$ - ; ahhh ne, daher fehlt auch ein $\varphi(p)$ wahrscheinlich, die Addition ist bei Kurvenkeimen ja anders definiert, right ?; berechne dann einfach

$$\begin{aligned} X_{\gamma + \lambda \tilde{\gamma}} \cdot f &= \frac{d}{dt} f \circ \varphi^{-1}(\varphi(p) + t(v + \lambda w)) \Big|_{t=0} \\ &= D_t \left(f \circ \varphi^{-1} \right) (\varphi(p) + t(v + \lambda w)) \\ &= D_t \left(f \circ \varphi^{-1} \right) (\varphi(p) + tv) + \lambda D_t \left(f \circ \varphi^{-1} \right) (\varphi(p) + tw) \\ &= X_\gamma \cdot f + \lambda X_{\tilde{\gamma}} \cdot f \end{aligned}$$

nutze bei Rechnung dann einfach Linearität des Differentials; evtl. aufpassen bei dem Einsetzen da mit Klammern (also was genau abgeleitet wird); wechseln da

eigentlich zwischen verschiedenen Definitionen, aber weil die alle äquivalent sind (wegen der Isomorphismen zwischen den Räumen), ist das überhaupt kein Problem nun wichtig für Injektivität:

Kurven, deren Richtungsableitungen trivial sind (? also verschwinden ?), die entsprechen nämlich gerade den Nullvektoren im Tangentialraum; betrachte dazu Karten als Vektor von Funktionen (die als Einträge im Output ja Koordinatenfunktionen haben, die von der Mannigfaltigkeit nach \mathbb{R} gehen, es sind dann eben n Stück davon in einem Vektor da; sind dann zwar nur auf einer offenen Menge U gegeben, aber das war ja kein Problem bei Derivationen)

danach Trick: können beliebige Translationen quasi machen im Bild der Funktion (weil konstante Funktionen ja abgeleitet von der Derivation gerade 0 ergeben; geht natürlich nicht ohne weiteres auf M , weil dort ja alles an einem festen Punkt p gegeben ist und so), daher kann man z.B. oBdA $f(p) = 0$ angeben und dann auch mit Karten p in den Ursprung legen sowie das Bild clever als Ball wählen (das reicht, weil Derivationen ja lokal sind !)

? bei $\frac{df}{dt_x} = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$ nutzt man einmal Kettenregel zu $\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dt_x}{dt}$ und dann, dass dort ein Skalarprodukt steht ? Er benutzt auf jeden Fall auch Hadamards Lemma, dessen Aussage gerade ist:

$$X \cdot f = \sum_k h_k(0) X \cdot x_k \quad h(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k} dt \quad (3.30)$$

wobei $X \cdot x_k =: a_k$ ein Skalar ist (wird schließlich ausgewertet im Punkt p) und dann mit $\gamma(t) := ta$ (a eben als Vektor der a_k) auch $X_\gamma \cdot x_k = a_k$ (das zeigt gerade, die Äquivalenz von Tangentialvektor und Derivation). Man hat damit quasi eine Basisdarstellung von Derivationen.

? x_k da wieder als Komponenten des Bildes einer Karte x ? ja, $x = (x_1, \dots, x_n)$ □

Es ist also nicht nur jede Richtungsableitung eine Derivation, sondern auch umgekehrt findet man nicht Derivationen, die keine Richtungsableitungen sind ! Das zeigt sich eben, wenn man einen Kurvenkeim auf die zugehörige Richtungsableitung abbildet und im Endeffekt bedeutet es, dass Tangentialvektoren das selbe sind wie Derivationen.

Man mag sich nun fragen, warum man dann überhaupt die im Vergleich zu Richtungsableitungen viel unanschaulicheren Derivationen einführt. Das hat einfach damit zu tun, dass abstraktere Definitionen in manchen Fällen die Behandlung von Problemen vereinfachen (vor allem bei Lie-Gruppen, -Algebren und -Ableitungen wird das vorkommen). Außerdem ermöglichen sie die folgende, ungemein wichtige Konstruktion:

Beispiel 3.21: Gauß'sche Basis

Für eine Karte $x = (x_1, \dots, x_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ um $p \in U$ von M nach \mathbb{R}^m mit x_j als Komponentenfunktion ist die Abbildung

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p : C^\infty(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \cdot f = \frac{\partial f \circ x^{-1}}{\partial x_k} \Big|_{x(p)} \quad (3.31)$$

eine Derivation von enormer Wichtigkeit. Sie nimmt sich also eine glatte Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und leitet $\tilde{f} = f \circ x^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ in Richtung der k -ten Koordinate x_k ab (man arbeitet dabei natürlich am zu p Punkt im \mathbb{R}^m , also $x(p)$). Von diesen gibt es offenbar genau $m = \dim(M)$ Stück und tatsächlich bildet die Menge

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p \right\}_{k=1}^m \equiv \left\{ \left(x^{-1}(x(p) + te_k) \right)'(0) \right\}_{k=1}^m \equiv \left\{ [U, x, e_k]_p \right\}_{k=1}^m \quad (3.32)$$

eine Basis des Tangentialraums $T_p M$ (damit insbesondere $\dim(T_p M) = m$)! Man überträgt/ identifiziert also die Standardbasis e_k des \mathbb{R}^m (das sind die Spaltenvektoren) auf den Tangentialraum, was der natürliche Weg zur Definition einer Basis des $T_p M$ ist. Schließlich lassen sich alle anderen Tangentialvektoren analog in Karten beschreiben und dort bezüglich der Standardbasis darstellen.

Da man nun wieder etwas über Karten definiert, stellt sich die Frage nach dem Verhalten bei einem Kartenwechsel. Eine andere Karte $y = (y_1, \dots, y_m) : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ um $p \in M$ induziert natürlich analog zu x eine Basis $\frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_p$ von $T_p M$. Die verschiedenen Basen lassen sich dann durch eine lineare Transformation ineinander überführen, die auf die jeweiligen Koeffizienten wirkt. Explizit gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \cdot y_k \right) \frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_p = \sum_{k=1}^m \frac{\partial y_k \circ x^{-1}}{\partial x_j}(x(p)) \frac{\partial}{\partial y_k} \Big|_p, \quad (3.33)$$

was wegen $\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \equiv [U, x, e_j]_p = [V, y, D_{x(p)}(y \circ x^{-1})(e_j)]_p$ folgt (also Wechsel der in einen Spaltenvektor geschriebenen Derivationen über Multiplikation mit der Jacobi-Matrix des Kartenwechsels). Eine Merkregel (nämlich $\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \cdot y_k$) für die Koeffizienten erhält man durch Einsetzen der Komponentenfunktion y_j auf beiden Seiten und Ausnutzen von $\frac{\partial y_j}{\partial y_k} \Big|_p = \delta_{jk}$.

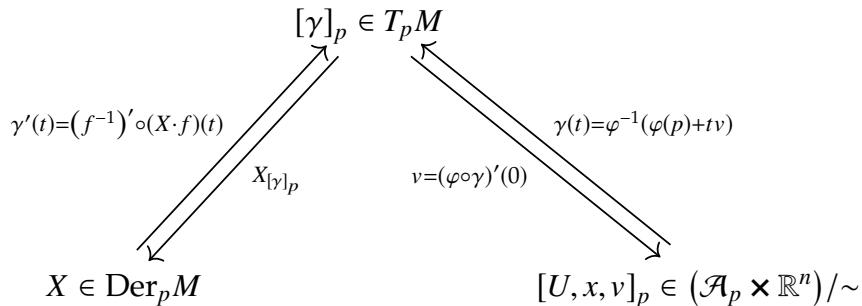
Offenbar werden also die Begriffe Kartenwechsel und Basiswechsel äquivalent bzw. der aus der Linearen Algebra bekannte Begriff des Basiswechsels verallgemeinert/ in den Formalismus von Mannigfaltigkeiten übertragen.

Diese Formel ist aufgrund der vielen Indizes sehr verwirrend, die Verwendung in der Praxis bei expliziten Rechnungen ist aber relativ einfach. Man muss sich einfach als Idee merken, dass man die Parametrisierung der Basis x durch die Komponenten y_k einsetzt, nach diesen Komponenten ableitet und am Ende einfach aufpassen muss, dass dort die richtigen Koordinaten stehen. Logisch ist die grobe Form des Ausdrucks auch sofort nachvollziehbar, weil eine Komponente (also quasi Richtung) des einen Koordinatensystems, dargestellt in Koordinaten eines anderen (das ist gerade Kartenwechsel), möglicherweise bzw. eigentlich sogar sicher mehr als einen Term enthält.

Bei der Interpretation von $\frac{\partial}{\partial x_k}$ als Vektor denkt man dabei am besten einfach an den Standardbasisvektor e_k des \mathbb{R}^n . Diese Interpretation ist nötig, weil man sich im Allgemeinen Vektoren auf Mannigfaltigkeiten nicht vorstellen kann, sondern nur die Kartendarstellung und das ist eben gerade e_k . Zudem spielen sie ja eine ganz analoge Rolle, sie bilden die Basis ihres zugrundeliegenden Raums.

3.1.5 Vergleich

Wie eben bei den Gauß'schen Basen gesehen wurde, springt man bei der Benutzung von Tangentialvektoren immer zwischen den verschiedenen möglichen Darstellungen. In diesem Abschnitt soll diese Praxis noch einmal ganz explizit begründet werden, indem die äquivalenten Darstellungen gesammelt und verglichen werden. Dazu bestens geeignet ist das folgende Diagramm:



Die Umrechnung zwischen Derivation und der Darstellung in Karten ist vollkommen analog zu der von Kurvenkeimen und Derivationen, weshalb das Ganze nicht explizit aufgeführt wird. Man kann sonst auch einfach verknüpfen, also von Derivation zu Kurvenkeimen und von dort zu geometrischen (das ergibt $v = φ' ∘ (f^{-1})' ∘ (X · f)(0)$) bzw. umgekehrt (das ergibt $X_{[φ^{-1}(φ(p) + tv)]_p}$).

Man kann sich den Zusammenhang der drei Definitionen dann wie folgt merken: die grundlegende Idee bei einem Tangentialvektor ist es, eine Richtung vorzugeben.

Daher leitet man einfach Kurven ab, das Differential als lineare Approximation ergibt dann die Tangente an die Kurve in einem gewissen Punkt und das wird der neue Richtungsbegriff (der Kurvenkeim). Man identifiziert dann Kurven mit der gleichen Steigung in diesem Punkt p , wobei die formale Definition der Gleichheit in Karten φ geschieht. Man macht das jedoch auf eine gute, wohldefinierte Art und Weise, weil für Kurven mit in einer Karte parallelen Tangenten an $\varphi(p)$ die Aussage in allen möglichen Karten analog gilt und man daher guten Gewissens sagen kann, dass die Kurven parallele Tangenten in p (also auf M) haben.

Da man jedoch nicht immer Objekte wie Kurvenkeime auf der eigentlichen Mannigfaltigkeit betrachten möchte, ist der nächste Schritt die Entwicklung einer äquivalenten Kartendarstellung v des Tangentialvektors. Das macht man einfach, indem man die Kurve in einer Karte darstellt und dann Ergebnis der Ableitung als dieses v erkennt. Hat man hingegen einen Vektor in Kartendarstellung gegeben, so kann man durch einfaches Integrieren zu $tv + c$ den zugehörigen Kurvenkeim in der Karte daraus gewinnen (die Integrationskonstante c wird dabei nicht auf 0 gesetzt, sondern muss für das Erfüllen der Konvention $\gamma(0) = p$ angepasst werden), was der Wahl eines besonders einfachen Repräsentanten entspricht, nämlich der Tangente an p selber.

Anmerkung: dabei ist es sehr wichtig, noch einmal zu betonen, dass zwar die Äquivalenzrelation bei Kurvenkeimen in Karten definiert ist, das eigentlich betrachtete Objekt aber immer noch auf der Mannigfaltigkeit liegt. Davon will man nun weg und stattdessen die wirkliche Kartendarstellung v eines Vektors betrachten.

Man kann statt nur Kurven aber auch Funktionen entlang/ auf Kurven betrachten, indem man $f(p)$ durch $f(\gamma(t))$ ersetzt (so werden nur Punkte eingesetzt, die auf der Kurve liegen). Leitet man das dann ab, so stellt man fest, dass $(f \circ \gamma)'(t)$ äquivalent zu Richtungsableitungen der Form $D_p f(v)$ ist. Da nun v eine Richtung im \mathbb{R}^m darstellt und damit eine ganze Äquivalenzklasse repräsentiert, kann man offenbar bereits den Tangentialvektor kennen, wenn man die Wirkung auf Funktionen bei der Richtungsableitung kennt ! Solche Richtungsableitungen erfüllen die Eigenschaften einer sogenannten Derivation (linear, Produktregel) und es zeigt sich sogar, dass ein Isomorphismus zwischen den beiden Mengen existiert. Mit jedem Tangentialvektor kann man also eine eindeutige Derivation \equiv Richtungsableitung assoziieren und das im Gegensatz zur Kartendarstellung als Operator ohne Karte/ Basis !

Die Äquivalenz sieht man sehr gut in Beispiel 3.21, also bei der Gauß'schen Basis, wo alle Interpretationen unmittelbar vorkommen. Es ist dann durchaus irreführend, dass mit $\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p$ nicht immer eine Richtungsableitung gemeint ist, das ist nur bei $\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \cdot f$ der Fall und gerade der äquivalenten Behandlung geschuldet. Steht dort nur $\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p$, so hat man es mit dem Kurvenkeim zu tun, der in einer Karte der j -ten Achse e_j entspricht, man muss dort also eigentlich an einen Vektor denken (insbesondere

in der angegebenen Transformationsformel muss man da sehr aufpassen) !

Als Quintessenz dieses Abschnitts sollte man mitnehmen, dass wegen der mathematischen und auch logisch gut nachvollziehbaren Äquivalenz (\equiv Isomorphie) der drei Definitionen rund um Tangentialvektoren die Begriffe nicht mehr unterscheiden werden und fließend zwischen den verschiedenen Interpretationen gewechselt wird.

3.2 Kotangentialraum und Differentiale

3.2.1 Linearformen auf dem Tangentialraum (Kotangentialraum)

Mit dem Tangentialraum kann man nun wie mit einem „ganz normalem“ Vektorraum arbeiten und als erste Anwendung wird der zugehörige Dualraum konstruiert, also der Raum der Linearformen/ linearen Funktionale/ 1-Formen von $T_p M$ nach \mathbb{R} .

Definition 3.22: Kotangentialraum

Lineare Abbildungen

$$\alpha_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.34)$$

heißen *Kotangentialvektoren*. Der Menge aller Kotangentialvektoren und somit der Dualraum von $T_p M$ ist der *Kotangentialraum* $T_p^* M := (T_p M)^*$.

Die Vektorraum-Operationen sind dabei punktweise definiert über

$$(\alpha_p + \lambda \beta_p)(v) = \alpha_p(v) + \lambda \beta_p(v). \quad (3.35)$$

Konsequenterweise trifft man also nach der Zuordnung Vektor \rightarrow Tangentialvektor die Zuordnung Kovektor \rightarrow Kotangentialvektor. Man kann aber auch eine etwas anschaulichere Definition finden, nämlich das Analogon zu Kurvenkeimen $[\gamma]_p \equiv \gamma'$.

Definition 3.23: Funktionenkeim

Für zwei glatte Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ auf offenen Mengen $U, V \subset M$ definiert man an einem Punkt $p \in U \cap V$

$$f \sim_p g \Leftrightarrow (f \circ \gamma)'(0) = (g \circ \gamma)'(0), \forall \gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow M \text{ mit } \gamma(0) = p. \quad (3.36)$$

Eine so definierte Äquivalenzklasse $[f]_p$ (auch mit $d_p f$ bezeichnet) auf den glatten Funktionen am Punkt p heißt *Funktionenkeim*.

Man identifiziert hier also Funktionen miteinander, die in einem gewissen Punkt (wegen der Stetigkeit aller beteiligten Funktionen, Karten etc. auch in einer kleinen Umgebung darum) die gleiche Ableitung in jede Richtung haben (weil es ja $\forall \gamma$ gelten soll). Oftmals fordert man zudem noch $f(p) = g(p)$ und damit *Gleichheit bis zur ersten Ordnung* der beiden Funktionen in p . Das ist hier jedoch nicht unbedingt nötig und wird daher weggelassen, weil man sonst nur mehr Notation hätte (dann müsste man nämlich bei \sim_p ein kartesisches Produkt von \mathbb{R} und $C^\infty(M; \mathbb{R})$ betrachten).

Der Gedanke hinter der Definition dieser Äquivalenzklassen ist dabei bereits von der Diskussion bei Tangentialvektoren klar, man möchte nämlich wieder eine Isomorphie zeigen. Dafür braucht man aber eine eindeutige Zuordnung und deshalb eine gewisse Eindeutigkeit der betrachteten Objekte (zumindest bei den relevanten Eigenschaften, was hier eben die erste Ableitung ist).

Satz 3.24: Funktionenkeim \leftrightarrow Kotangentialvektor

Mithilfe der Operationen

$$\lambda[f]_{\sim p} + [g]_{\sim p} := [\lambda f + g]_{\sim p} \quad \lambda f + g : U \cap V \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \lambda f(p) + g(p) \quad (3.37)$$

bildet die Menge aller Funktionenkeime auf natürliche Weise einen Vektorraum \mathcal{F}_p . Dieser Vektorraum ist kanonisch isomorph zum Kotangentialraum T_p^*M mittels

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{F}_p &\rightarrow T_p^*M, [f] \mapsto \Phi_{[\gamma]_p}([f]) \\ \text{mit } \Phi([f]_{\sim p}) &: T_p M \rightarrow \mathbb{R}, [\gamma]_p \mapsto (\gamma \circ f)'(0). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Beweis. Beweisidee ist, sich die Wirkung auf Elemente des Tangentialraums anzusehen; kriegen Injektivität wegen Benutzung Äquivalenzrelation (rechnen ja letztendlich dann mit $[f](\gamma) = (f \circ \gamma)'(0)$). Surjektivität überlegt man sich über Funktionenkeime, die von einer Karte $x = (x_1, \dots, x_n)$ gegeben werden und das sind gerade $d_p x_1, \dots, d_p x_n$, was man als dual zu $\frac{\partial}{\partial x_1|_p}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n|_p}$ ausrechnen kann.

Trick für nur auf Teilmenge U definierte Funktion (wird deshalb so selbstverständlich genutzt): nimm Buckelfunktion, damit kann man glatt fortsetzen (ist schon sick bei denen, das ging sonst ja nicht auf glatte Art und Weise) \square

Diese Äquivalenz führt dazu, dass man bei Kotangentialvektoren oft lieber an Funktionenkeime $d_p f = [f]_{\sim p} \in T_p^*M$ denkt, weil diese etwas anschaulicher sind (bei Tangentialvektoren stellt man sich analog meist Kurvenkeime vor). Das funktioniert auch mathematisch, weil man beim problematischen Fall eines zu kleinen Definitionsbereichs eine glatte Fortsetzung finden kann, die nur „weit weg“ vom betrachteten Punkt p Funktionswerte ändert und damit nicht die Äquivalenzklasse o.Ä. (wie im Beweis gerade, man ändert nichts in der betrachteten Umgebung, aber außerhalb).

? müsste damit nicht jede 1-Form integrierbar sein, weil es Isomorphismus zwischen T_p^*M und Raum der Funktionenkeime = Ableitungen von Funktionen gibt ?

Beispiel 3.25: Funktionenkeim \leftrightarrow Derivation

Man kann nun auch eine sehr interessante Verbindung zwischen Tangential-

und Kotangentialvektoren herstellen, wie folgende Relation zeigt:

$$d_p f : T_p M \cong \text{Der}_p M \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto d_p f(X) = X \cdot f . \quad (3.39)$$

Das kann man tatsächlich sehr schnell nachrechnen. Dazu soll der Vektor X zunächst in der Basisdarstellung $X = \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \equiv X_p$ betrachtet werden, entlang dem nun auch die Richtungsableitung von f berechnet werden kann:

$$\begin{aligned} d_p f(X) &= \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \Big|_p \, d_p x_j \right)(X) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \Big|_p \, d_p x_j \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \Big|_p \, \lambda_k d_p x_j \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p \right) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \Big|_p \, \lambda_k \delta_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \Big|_p \end{aligned}$$

Dabei wurde genutzt, dass λ_j genau wie v an einem festen Punkt p (variabel, aber natürlich muss ein fester Punkt betrachtet werden) einfach nur Konstanten sind, daher muss man nichts darauf anwenden und kann es aus $d_p x_j$ herausziehen (dabei wird zudem genutzt, dass 1-Formen linear sind!). Wichtig ist zudem, dass man f ja nicht einfach partiell ableiten kann (als Abbildung auf M , x_j ist ja eine Koordinate im \mathbb{R}^n !), stattdessen gilt nach der Definition der Gauß'schen Basis:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \cdot f = \frac{\partial f \circ x^{-1}}{\partial x_j} \Big|_p =: \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \Big|_p . \quad (3.40)$$

Anmerkung: eigentlich handelt es sich bei X sogar um ein sogenanntes Vektorfeld mit $\lambda_j = \lambda_j(p)$, also Koeffizientenfunktionen. Hier erfolgt aber die Betrachtung an einem festen Punkt p , wo diese konstant sind (Vektorfelder werden im nächsten Kapitel eingeführt und ausführlich behandelt).

Andererseits erhält man bei der Interpretation von X als Derivation (und damit Richtungsableitung) bei Anwendung auf die Funktion f :

$$X \cdot f = \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) \cdot f = \sum_{j=1}^n \lambda_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \cdot f \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \Big|_p$$

und damit ganz offenbar das Gleiche. Jeder Tangentialvektor gibt also sofort auch einen Kotangentialvektor vor (das wurde ja beim Beweis der Äquivalenz von Funktionenkeim und Kotangentialvektor bereits gezeigt), bzw. besser: für

einen festen Tangentialvektor $[\gamma]_p$ und eine feste Funktion f sind die Wirkung der zum Vektor gehörigen Derivation $X_{[\gamma]_p}$ auf f und die des Funktionenskeims von f auf $[\gamma]_p$ nicht zu unterscheiden (das alles findet am Punkt p statt)!

Eine andere Formulierung dieser Aussage ist: man kennt einen Kotangentialvektor, wenn man weiß, wie er auf eine beliebige Derivation wirkt.

Diese Interpretation erlaubt nun sehr einfach das Finden einer Basis von T_p^*M :

Beispiel 3.26: Duale Gauß'sche Basis

Von der dualen Basis \tilde{e}_i einer gegebenen Basis e_j wird ja gefordert, dass $\tilde{e}_i(e_j) = \delta_{ij}$. Eine Basis des Tangentialraums ist bekannt, nämlich $e_j = \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p$, man muss also nun die dazu duale Basis finden (bevorzugt ausgedrückt als Funktionenkeim).

Wie bereits beim Beweis der Äquivalenz von Funktionenkeim und Kotangentialvektor klar wurde, muss man nun lediglich die Familie von glatten Funktionen $\{f_j = x_j\}_{j=1}^m$ betrachten. Aus der Analysis ist nämlich bekannt, dass

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_k} \right|_p \cdot f_j = \left. \frac{\partial x_j \circ x^{-1}}{\partial x_k} \right|_{x(p)} = \left. \delta_{jk} \right|_{x(p)} = \delta_{jk}.$$

Wegen der Wirkung $d_p f(X) = X \cdot f$ ist damit die duale Basis von T_p^*M zur von der Karte $x = (x_1, \dots, x_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ induzierten Gauß'schen Basis gegeben durch

$$\{d_p x_j\}_{j=1}^m, \quad (3.41)$$

also die Funktionenkeime der Komponentenfunktionen (analog zu den Derivationen bzw. äquivalent Kurvenkeimen dieser Komponentenfunktionen als Basis von $T_p M$).

Auch hier kann man den Basiswechsel zur von einer anderen Karte $y = (y_1, \dots, y_n) : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ induzierten Basis $d_p y_1, \dots, d_p y_n$ betrachten, es ergibt sich auf $U \cap V$:

$$d_p x_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_j \circ y^{-1}}{\partial y_k}(y(p)) d_p y_k \quad (3.42)$$

mit der analogen Merkregel $d_p x_j \left(\left. \frac{\partial}{\partial y_k} \right|_p \right) = \left. \frac{\partial}{\partial y_k} \right|_p \cdot x_j$ für die Koeffizienten.

3.2.2 Abbildungen auf dem Tangentialraum (Differentiale)

Was bis jetzt für Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ gemacht wurde, soll natürlich auch auf allgemeinere Abbildungen $F : M \rightarrow N$ zwischen Mannigfaltigkeiten erweitert werden.

Satz 3.27: Differential

Das Differential einer glatten Abbildung $F : M \rightarrow N$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M, N ist gegeben durch

$$D_p F : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N, [\gamma]_p \mapsto [F \circ \gamma]_{F(p)}. \quad (3.43)$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert und linear. Bezuglich zweier Karten $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ um $p \in M$ sowie $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ um $F(p) \in N$ gilt zudem

$$D_p F([U, x, v]_p) = \left[V, y, D_{x(p)}(y \circ F \circ x^{-1})(v) \right]_p. \quad (3.44)$$

Das Ganze sollte nicht allzu sehr überraschen. Differentiale bilden im \mathbb{R}^n Richtungen auf Richtungen ab, sie beschreiben ja gerade die Richtungsableitung (Ergebnis ist die Änderung einer Abbildung in eine gewisse Richtung). Statt Vektoren nimmt man nun Tangentialvektoren und erhält so eine Abbildung zwischen verschiedenen Tangentialräumen. Die Definition zeigt zudem direkt eine Kartendarstellung und diese entspricht einfach der Jacobi-Matrix $D_{x(p)}(y \circ F \circ x^{-1})$ (in den meisten Fällen abhängig von p bzw. $x(p)$, also nur eine punktweise Darstellung)! In Karten kann man daher die Anwendung des Differentials einfach über die Matrixmultiplikation des jeweiligen Richtungsvektors von rechts an die Jacobi-Matrix darstellen.

Eine nach dem vorherigen Abschnitt natürlich äquivalente Interpretation des Differentials wäre, dass man hier aus einem Kurvenkeim auf M einen neuen auf N erhält (mit einem Ergebnis, das unabhängig von der gewählten Kurve γ ist). In jedem Fall ist das Differential aber linear und damit ein Vektorraum-Homomorphismus, der eine differenzierbare Abbildung in erster (und damit linearer) Ordnung approximiert. Man kann durchaus auch höhere Ordnungen betrachten, das ist das Gebiet der Jets, aber die Linearität soll hier nicht aufgegeben werden, weil sie bereits genug Informationen liefert und um die Diskussion nicht weiter zu verkomplizieren.

Beispiel 3.28: Funktionenkeim \leftrightarrow Differential

Im Fall $f : M \rightarrow N = \mathbb{R}$ identifiziert man mittels natürlicher Isomorphie $T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$. Dann entspricht aber die Abbildung $D_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R}$ auch dem Funktionenkeim/ natürlichen Kotangentialvektor $d_p f : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ als Element von $T_p^* M$! Das Differential ist damit die Verallgemeinerung des Kurvenkeims

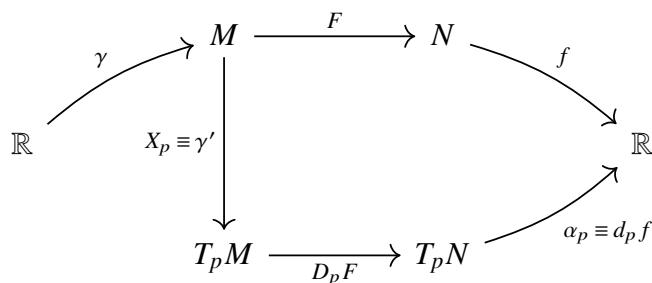
einer glatten Funktion f auf Abbildungen und es rechtfertigt auch die (vorher eigentlich ungenaue bzw. gar nicht richtig definierte) Schreibweise mit d_p als Ableitung, es handelt sich tatsächlich um ein Differential (wird bei Differentialformen wichtig).

Das bringt auch eine logische Erklärung für die in Beispiel 3.25 gefundene Äquivalenz von Funktionenkeim und Derivation. Man weiß nun nämlich, dass $d_p f(X)$ einfach der Ableitung von f in Richtung des Vektors X entspricht. Das ist aber natürlich das Gleiche, wie die Derivation X auf f anzuwenden (so war X definiert).

Die Jacobi-Matrix hat in diesem Fall dann die Dimensionen $1 \times \dim(M)$ und es handelt sich um einen Spezialfall der Richtungsableitung, bei der kein Vektor, sondern eine Zahl herauskommt. Es ist damit sofort klar, dass

$$T_p^*M = \{[f]_p : f : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ glatt}\} \cong (T_p M)^*. \quad (3.45)$$

Den Zusammenhang zwischen den ganzen inzwischen eingeführten Größen kann man sich auch sehr schön visuell klar machen:



Im Prinzip hat man inzwischen also einen Kreislauf zwischen den reellen Zahlen, der Mannigfaltigkeit und dem Tangentialraum und kann darüber hinaus noch zwischen Mannigfaltigkeiten und Tangentialräumen wechseln (ganz bewusst wurden hier auf einer Seite die Kurve und auf der anderen Seite eine Funktion gezeigt, sonst gäbe es zu viele Überschneidungen). Das ist im Prinzip alles, was man an Abbildungen konstruieren kann und das einzige Manko ist, dass man noch an einen festen Punkt gebunden ist (das ändert sich jedoch im nächsten Abschnitt).

Davor soll aber eine essentielle Eigenschaft von Differentialen übertragen werden:

Satz 3.29: Kettenregel

Für glatte Abbildungen $\Phi : M \rightarrow N$ und $\Psi : N \rightarrow O$ zwischen Mannigfaltigkeiten

ten M, N, O gilt $\forall p \in M$:

$$D_p(\Phi \circ \Psi) = D_{\Phi(p)}\Psi \circ D_p\Phi : T_p M \rightarrow T_{(\Phi \circ \Psi)(p)}O. \quad (3.46)$$

Beweis. Die Idee ist einfaches Nachrechnen in Karten x, y, z und Ausnutzen der Kettenregel dort:

$$\begin{aligned} D_p(y \circ \Phi \circ \Psi x^{-1}) &= D_p(y \circ \Phi \circ z^{-1} \circ z \circ \Psi \circ x^{-1}) \\ &= D_{(z \circ \Psi x^{-1})(p)}(y \circ \Phi \circ z^{-1}) \circ D_p(z \circ \Psi \circ x^{-1}), \end{aligned}$$

und das entspricht einfach den Kartendarstellungen der Differentiale $D_{\Phi(p)}\Psi, D_p\Phi$. \square

Die Kettenregel wird sich in vielen Fällen noch als äußerst nützliches Hilfsmittel erweisen. Man beachte aber, dass beim zweiten Gleichzeichen nur Ψ vom ersten Differential abgeleitet wird und nicht mehr der Teil danach !

Beispiel 3.30: Kurven-, Funktionenkeim

Man kann unter Ausnutzung der Kettenregel nun auch die Bedingungen für die Äquivalenzrelationen bei Kurvenkeimen und Funktionenkeimen umformulieren:

$$\gamma_1 \sim_p \gamma_2 \Leftrightarrow D_p x(\gamma'_1(0)) = D_p x(\gamma'_2(0)), \quad x : U \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (3.47)$$

$$f \sim_p g \Leftrightarrow D_p f(v) = D_p g(v), \quad \forall v = \gamma'(0) \in T_p M. \quad (3.48)$$

Bei Kurvenkeimen muss man die Gleichheit übrigens nicht für alle Karten x fordern, sondern die Wohldefiniertheit folgt bereits, wenn es in einer Karte erfüllt ist (das wurde bei der Definition geometrischer Tangentialvektoren auch gezeigt).

Wie bereits bekannt, spiegelt das Differential einer Abbildung wichtige Eigenschaften über die Abbildung selbst wider, so zum Beispiel:

Definition 3.31: Klassifikationen glatter Abbildungen

Eine glatte Abbildung $\Phi : M \rightarrow N$ heißt

1. *Immersion* (oder auch: *immersiv*), falls $D_p\Phi$ injektiv
2. *Submersion* (oder auch: *submersiv*), falls $D_p\Phi$ surjektiv
3. *lokaler Diffeomorphismus* (oder auch: *lokal diffeomorph*), falls $D_p\Phi$ bijektiv

für alle $p \in M$ ist.

Korollar 3.32

Für $\Phi : M \rightarrow N$ gilt $\dim(M) \geq \dim(N)$, falls Φ submersiv ist und $\dim(M) \leq \dim(N)$, falls Φ immersiv ist. Zudem ist Φ ein Diffeomorphismus, wenn Φ bijektiv und lokal diffeomorph ist.

Diese Aussagen folgen mit der Linearität direkt aus der Injektivität/ Surjektivität des Differentials (bildet ja zwischen Vektoren auf den Mengen M, N ab). Da ein Diffeomorphismus insbesondere ein bijektives Differential hat (injektiv und surjektiv), folgt dort das weitere Korollar $\dim(M) = \dim(N)$. Die Jacobi-Matrix muss in allen Fällen vollen Rang haben, dieser ergibt sich aus dem kleineren von $\dim(M), \dim(N)$.

Aus dem Satz vom regulären Wert 2.31 folgt dann weiter sofort, dass die Urbildmenge eines jeden Wertes im Bild von Submersionen eine Untermannigfaltigkeit bildet. Es lassen sich also im Prinzip alle Eigenschaften des Differentials vom \mathbb{R}^n auf Mannigfaltigkeiten übertragen, wieder bestätigt sich die bereits mehrfach betonte Interpretation dieser Theorie als natürliche Verallgemeinerung von Analysis auf dem \mathbb{R}^n .

Zum Ende dieses Abschnitts sollen die erworbenen Kenntnisse über Differentiale benutzt werden, um eine wichtige Eigenschaft von Matrix-Lie-Gruppen herzuleiten:

Satz 3.33: Tangentialräume von Matrix-Lie-Gruppen

Die Elemente des Tangentialraums $T_g G$ im Punkt $g \in G$ mit einer Matrix-Lie-Gruppe G sind gegeben über $g\xi$ mit $\xi \in T_e G$.

Beweis. Das Ziel ist nun, eine Abbildung $L : G \rightarrow G$ mit bijektivem Differential zu finden, weil dann $DL : T_g G \rightarrow T_{L(g)}$ ist und man so den Tangentialraum $T_{L(g)}$ erhält ($L(g)$ ist wieder ein Punkt in G). Als die passende Abbildung stellt sich die Linkstranslation L_g um ein Element $g \in G$ heraus, die wirkt als

$$L = L_g : G \rightarrow G, h \mapsto gh. \quad (3.49)$$

Das ist offenbar linear und wegen der Existenz eines Inversen $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ (weil $L_g \circ L_{g^{-1}}(h) = L_g(g^{-1}h) = gg^{-1}h = h$) auch bijektiv, also ein Isomorphismus.

Anmerkung: diese Existenz einer inversen Abbildung ist bei Matrizenräumen überhaupt nur denkbar, weil G eine Teilmenge der quadratischen, invertierbaren Matrizen ist und weil zudem beides unter Multiplikation erhalten ist !

Mit diesem Wissen lässt sich aus der Kettenregel ein Inverses von DL_g konstruieren:

$$\text{id}_{T_h G} = D_h \text{id}_G = D_h(L_{g^{-1}} \circ L_g) = D_{L_g(h)} L_{g^{-1}} \circ D_h L_g = D_{gh} L_{g^{-1}} \circ D_h L_g.$$

Somit ist $(D_h L_g)^{-1} = D_{L_g(h)} L_{g^{-1}} = D_{gh} L_{g^{-1}}$, bei L_g handelt es sich um einen Diffeomorphismus (Glattheit war direkt klar, weil es linear ist)! Deshalb ist insbesondere

$$D_e L_g : T_e G \rightarrow T_{L_g(e)} G = T_g G, \xi \mapsto D_e L_g(\xi) \quad (3.50)$$

bijektiv, jedes Element von $T_g G$ ist bereits durch ein Element von $T_e G$ bestimmt! Um zu wissen, wie diese genau aussehen, muss noch das Differential berechnet werden (man darf differenzieren, weil eine lineare Abbildung vorliegt und die sind immer glatt):

$$D_p L_g(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L_g(p + t h) - L_g(p)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(p + t h) - gp}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t gh}{t} = gh. \quad (3.51)$$

Weil das Differential wie bei linearen Abbildungen üblich nicht vom Punkt abhängt, kann oBdA $p = e$ gesetzt werden. Die Ableitung von $L_g(e)$ in Richtung $\xi \in T_e G$ ist also einfach $g\xi$ und das war zu zeigen.

Es ist dabei übrigens nicht rigoros, $g\xi = L_g(\xi)$ zu schreiben, weil L_g eine Abbildung von und nach G ist, aber $\xi \notin G$. Man darf diese Elemente überhaupt nur multiplizieren, weil es sich jeweils um Untergruppen von $\text{Mat}(n, \mathbb{R})$ handelt und daher auf beiden die gleiche Verknüpfung vorliegt, nämlich die von $\text{Mat}(n, \mathbb{R})$. \square

Anmerkung: dass $D_p L_g(h) = L_g(h)$, $\forall p$ sollte nicht überraschen, das ist bei reellen Zahlen genauso. Dort hat man aber nur die Richtungen 1 oder -1 (und daher steht dort dann nur noch der Vorfaktor), bei linearen Abbildungen auf Matrizenräumen sieht das wegen der höheren Dimension anders aus.

Dieser Satz zeigt also, dass man nur den Tangentialraum an der Identität $e \in G$ kennen muss, um den Tangentialraum $T_g G$ an jedem anderem Punkt $g \in G$ zu kennen, weil die Elemente von $T_g G$ eben bereits durch den Punkt und die Elemente von $T_e G$ bestimmbar sind! Aufgrund dieser besonderen Rolle bekommt $T_e G =: \mathfrak{g}$ auch einen eigenen Namen, die *Lie-Algebra*. Symbolisch schreibt man auch

$$T_g G = D_e L_g(\mathfrak{g}) = \{gh : h \in \mathfrak{g} = T_e G\} \equiv L_g \mathfrak{g}. \quad (3.52)$$

Wegen der Wirkung von L_g als Linkstranslation auf der Matrizengruppe kann man sich das quasi als Verschiebung des gesamten Vektorraums auf der Mannigfaltigkeit G vom Punkt e zum Punkt g vorstellen. Die Berechnung erfolgt für $G = F^{-1}(q)$ als Urbild einer Submersion (was bei Matrix-Lie-Gruppen sehr häufig der Fall ist) ganz

einfach nach der allgemeinen Formel für Tangentialräume von Untermannigfaltigkeiten:

$$\mathfrak{g} = T_e G = \text{kern}(D_e F). \quad (3.53)$$

Natürlich könnte auch $T_g G = \text{kern}(D_g F)$ über diese Formel berechnet werden, aber das ist eigentlich nur sinnvoll, wenn man $T_g G$ für nur ein $g \in G$ berechnen soll (dann nimmt sich das nichts vom Aufwand her). Für allgemeinere Rechnungen und Beweise wird sich aber die hier gezeigte Schreibweise $T_g G = g \mathfrak{g}$ als sehr nützlich erweisen.

Anmerkung: allgemeiner bezeichnet der Begriff *Lie-Algebra* einen Vektorraum \mathfrak{g} zusammen mit einer bilinearen, antisymmetrischen Verknüpfung $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, die die Jacobi-Identität erfüllt und auch *Lie-Klammer* genannt wird (bei Matrix-Lie-Gruppen ist das der Kommutator, der erst später eingeführt wird). Zu jeder Lie-Gruppe G gehört eine solche Lie-Algebra $\mathfrak{g} = T_e G$ (es gibt aber auch andere Beispiele). Auch $T_g G = D_e L_g(\mathfrak{g})$ gilt allgemein (Beweisidee genau wie bei Satz 3.33, man hat immer Linkstranslation L_g und Inverses wegen der Gruppenstruktur).

Hier noch ein weiteres Beispiel, das ebenfalls mit Matrix-Lie-Gruppen zu tun hat:

Beispiel 3.34: Hopf-Faserung

?! WTF

$$\text{SU}(2) = \left\{ g = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{C} \wedge \det(g) = x\bar{x} + y\bar{y} = 1 \right\} = S^3$$

haben dann Darstellung von $\text{SU}(2)$, die irgendwie mit der 3-Sphäre übereinstimmt. Brauchen übrigens nur zwei Einträge kennen wegen Forderung SU (die Gleichung da ist wegen $\det = 1$, das sieht mit Identifizierung von \mathbb{C}^2 mit \mathbb{R}^4 aus wie die Bedingung bei der Sphäre)

definieren dann die Hopf-Faserung als $\pi : \text{SU}(2) \rightarrow \mathbb{CP}^1$, $\begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix} \mapsto \mathbb{C} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{CP}^1$, das ist eine Submersion (als Einschränkung einer stetigen und glatten Abbildung $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^1$); dann irgendwie Berechnung des Tangentialraums, weil man daran Surjektivität sieht

heißt auch Faserung der 3-Sphäre durch Kreise

lol, *it* bzw. *ir* meint $i \cdot t$ bzw. $i \cdot r$ mit imaginärer Einheit !

4 Felder und Formen

Nachdem nun eine sinnvolle Definition von Vektoren und Kovektoren existiert, soll es in diesem Abschnitt um die Arbeit damit gehen. Dabei wird es zunächst wichtig, die Arbeit mit einzelnen Punkten p auf die gesamte Mannigfaltigkeit auszuweiten

(was intuitiv wohl besser verständlich ist, weil man vorher immer mit p einen allgemeinen, aber festen Punkt meinte, der nun aber endlich auch glatt variiert werden kann), wofür das sogenannte Tangentialbündel eingeführt wird. Statt

Vektoren wird es dann um Vektorfelder gehen und Kovektoren werden zu 1-(Differential-)Formen. Diese beiden neuen Begriffe spielen eine sehr wichtige Rolle in Anwendungen der fortgeschrittenen Mathematik und haben darüber hinaus viele Anwendungen in der (Theoretischen) Physik.

4.1 Tangentialbündel und Kotangentialbündel

Als Einstieg wird die Idee der in diesem Abschnitt zu entwickelnde Maschinerie anhand eines gut bekannten Beispiels vorgestellt:

Beispiel 4.1: Sphäre

Zunächst wird das hier verwendete Kartentupel (U, φ) der Sphäre angegeben:

$$U = \mathbb{S}^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{>0}) \subset S^2 \subset \mathbb{R}^3,$$

$$\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2, (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \mapsto \varphi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x, y).$$

Es handelt sich also im Wesentlichen um den Plattmacher der Sphäre (die ja insbesondere eine UMF ist), man wählt deswegen auch die z -Koordinate > 0 . Weil man nun auch die „Karte“ $\psi = \text{id}|_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2, p \mapsto p$ wählen kann (beachte hier, dass die Menge S^2 zweidimensional ist, es sich in diesem Sinne also quasi um eine Karte handelt), ist nach der Kartendarstellung von Tangentialvektoren

$$D_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(v) \in T_p \mathbb{S}^2. \quad (4.1)$$

Dabei lässt sich die Umkehrabbildung von φ sehr einfach aus der Bestimmungsgleichung $x^2 + y^2 + z^2 + 1$ der Sphäre bestimmen:

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2, (x, y) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}). \quad (4.2)$$

Betrachtet man nun die Abbildung

$$\begin{aligned} \sigma : U \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow T_p \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3, (p, v) = ((x, y), (v_1, v_2)) \mapsto D_{\varphi(p)}\varphi^{-1}(v) \\ &= \left(v_1, v_2, -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} v_1 - \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} v_2 \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Das ist glatt in allen Argumenten und offenbar sogar linear in v_1, v_2 .

Ganz analog kann man das für allgemeinere Untermannigfaltigkeiten M aufziehen, weil immer ein solcher Plattmacher $\hat{\Phi} : \hat{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert. Für die induzierte Karte $\Phi = \pi_k \circ \hat{\Phi} : U = \hat{U} \cap M \rightarrow \mathbb{R}^k$ ist dann die Zuordnung/ Abbildung

$$\Phi(U) \times \mathbb{R}^k \ni (q, v) \mapsto D_q \Phi^{-1}(v) \quad (4.4)$$

glatt bezüglich $p \in M$.

4.1.1 Tangentialbündel

Man mag sich nun aber weiterführend fragen, ob sich diese glatte Zuordnung zwischen Punkten $p \in M$ und dem Tangentialraum $T_p M$ an diesem Punkt (man bildet mit σ aus Gleichung (4.3) ja auf Tangentialvektoren an beliebigen Punkten ab) auch für Mannigfaltigkeiten im Allgemeinen existiert. Die Antwort lautet „Ja“:

Satz 4.2

Für eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit M bildet

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M \quad (4.5)$$

auf natürliche Art wieder eine Mannigfaltigkeit und zwar so, dass die Abbildung

$$\pi : TM \rightarrow M, v \mapsto p \quad (4.6)$$

auf den Fußpunkt p von v eine glatte Submersion ist.

Der zugehörige Atlas ist gegeben durch Karten der Form

$$(x, Dx) : TU = \bigsqcup_{p \in U} T_p U = \bigsqcup_{p \in U} T_p M \rightarrow x(U) \times \mathbb{R}^n, v \mapsto (x(p), D_p x(v)) \quad (4.7)$$

auf $TU \subset TM$, wobei $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte auf M ist.

Anmerkung: man nutzt statt $x(U) \times \mathbb{R}^n$ auch manchmal $U \times \mathbb{R}^n$, weil die beiden Mengen homöomorph (unter Umständen sogar diffeomorph) sind, das wird beim Thema Trivialisierungen weiter ausgeführt. Die ganze Zeit nutzt man aber in der zweiten Komponente, dass $T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n, \forall p \in M$.

Definition 4.3: Tangentialbündel

(TM, π) (oder auch nur TM) heißt **Tangentialbündel von M** . Ein einzelnes Element $T_p M$ beziehungsweise äquivalent $\{p\} \times T_p M$ von TM heißt auch **Faser (über p)**.

Beweis. wichtigste Eigenschaft ist eben, dass die beiden Komponenten ja unabhängig voneinander behandelt werden können (im Sinne von: erste Komponente kann geändert werden und zweite auch, wobei man bei zweiter halt Tangentialvektor an dem Punkt ändert und bei erster den Punkt und damit den Tangentialraum -; also sind die doch nicht unabhängig ?)

offenbar gilt $(x, Dx)(TU \cap T\tilde{U}) = x(U \cap \tilde{U}) \times \mathbb{R}^n$

finden ganz einfach Kartenwechsel und da stehen dann (wende einmal Kettenregel rückwärts an) einfach nur der Kartenwechsel (per Definition glatt) bzw. die Ableitung davon (natürlich auch glatt): $(y, Dy) \circ (x, Dx)^{-1}(q, v) = (y \circ x^{-1}(q), D_q(y \circ x^{-1})(v))$

die Scheiße mit Topologie folgt, weil abzählbarer Atlas und Hausdorff gilt weil der erste Teil (also die Punkte) safe in M trennbar sind (analog in den Tangentialräumen) oder sie sind eben im gleichen Kartengebiet (auch safe trennbar, schon bekannt)

Projektion auch glatt, weil einfach nur Rausnehmen der ersten n Komponenten

Heller zu Submersion: die Surjektivität des Differentials ist eine wichtige Eigenschaft, die wir aber relativ leicht zeigen können. In den Karten (x, Dx) von TM welche von Karten x von M induziert sind, ist das Differential einfach wie folgt gegeben: es gilt allgemein $\pi([U, x, v]_p) = p$, also gilt bezüglich der Karte (x, Dx) mit $(x, Dx)([U, x, v]_p) = (x(p), v)$, dass $\pi(x(p), v) = x(p)$. In diesen Koordinaten lässt man also nur die Vektorkomponente weg, und das Differential ist damit auch surjektiv: $D_{(x(p), v)}\pi(y, w) = y$.

Vektorraumstruktur wird geerbt von Tangentialräumen □

In der bei der Einführung des Tangentialraums genutzten Analogie mit Orts- und Richtungsvektoren wird beim Tangentialbündel auch die Variation des Ortsvektors möglich und die Darstellung $\{p\} \times T_p M$ entspricht OV × RV (mit gewissen Einschränkungen, Richtungsvektoren kennen nämlich ihren Fußpunkt nicht, Tangentialvektoren schon).

Jedoch wurde hier ein wahrscheinlich unbekanntes Symbol genutzt, die *disjunkte Vereinigung* \sqcup , deren Bedeutung am besten an einem expliziten Beispiel klar wird:

$$M_1 = \{1, 2, 3\} \quad M_2 = \{4, 5, 6\} \quad M_3 = \{2, 3, 4\}$$

$$M_1 \cup M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad M_1 \sqcup M_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$$

$$M_1 \cup M_3 = \{1, 2, 3, 4\} \quad M_1 \sqcup M_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

Hier wurde einmal die bereits bekannte Vereinigung \cup der Mengen gebildet und einmal die disjunkte Vereinigung \sqcup , die durch Hinzunahme des zur Menge M_j gehörigen Index' im Prinzip künstlich disjunkte Mengen erzeugt und daher eine Vereinigung schafft, bei der doppelte Elemente auch in der vereinigten Menge noch doppelt auftauchen. Das mag nun merkwürdig erscheinen, der Grund kann aber beispielsweise die Erhaltung einer gewissen Dimension unter Vereinigung sein.

Es fällt jedoch auch sofort auf, dass man zwischen den Vereinigungen der disjunkten Mengen M_1, M_2 (anders als bei M_1, M_3 , die nicht disjunkt sind) eine bijektive Zuordnung finden kann, die zusätzliche Indizierung wäre hier also eigentlich nicht nötig. Das ist aber auch der Fall, der bei TM als Vereinigung der Tangentialräume $T_p M$ auftritt und daher hier relevant ist. Weil jeder Tangentialvektor $[\gamma]_p \in T_p M \subset TM$ noch eine Information über seinen Fußpunkt p enthält (als Bild von $t = 0$, Punkt an dem abgeleitet wird o.Ä.), sind die verschiedenen Tangentialräume im Prinzip per Definition disjunkt. Schreibt man nun jeden Tangentialvektor als $v = v_p$ (wobei damit jede mögliche Darstellung gemeint ist, also geometrisch/ in Karten/ Derivation), so wird sofort klar, dass Vereinigungen der Form $\sqcup_p \{v_p\}$ und $\cup_p \{p\} \times \{v_p\}$ äquivalent sind, indem man die offenbar bijektive Zuordnung $v_p \mapsto \{p\} \times v_p$ trifft.

Anmerkung: daraus folgt, dass für $U \subset M$ offen auch $TU \subset TM$ offen ist. Zudem kann man TM als Vereinigung aller Tangentialräume oder auch als Vereinigung aller Tangentialvektoren an jedem Punkt sehen (beide sind Elemente von TM).

Man mag sich nun fragen, warum dann überhaupt diesen Umweg gehen muss und neue Begriffe einführt. Das liegt einfach daran, dass beide Notationen Vorteile in gewissen Situationen haben, z.B. wird die erste aufgrund ihrer Kürze oft in Abbildungsvorschriften verwendet (wo man dann nur v_p abbilden muss anstatt des Tupels (p, v_p)). Für die Vorstellung des Tangentialbündels und eindeutige Angaben darin ist aber die zweite Notation meist geeigneter, weil die Indizierung bei v_p in vielen Fällen nicht gemacht wird und man bei der Bezeichnung v eines Tangentialvektors nicht den Fußpunkt p erkennt, bei (p, v) ist dieser jedoch direkt dabei.

Nun wird auch die Rolle der Abbildung π klarer, die unter Verwendung der kürzeren Schreibweise in (4.6) definiert wurde. Schreibt man es jedoch in die Form

$$\pi : TM \rightarrow M, (p, v) \mapsto p, \quad (4.8)$$

so ergibt sich die Interpretation als Projektion auf die erste Komponente. Diese Abbildung ist dann ganz offenbar surjektiv (was hier heißt, dass man jeden Punkt trifft), weil man ja gerade über jeden Punkt vereinigt. Die Injektivität ist hingegen nicht gegeben, weil man die Vektorkomponente herausprojiziert, es gilt sogar

$$\pi^{-1}(p) = T_p M. \quad (4.9)$$

Damit bildet insbesondere das Urbild eines jeden Bildpunktes von π einen Vektorraum, was durchaus interessant ist. Weil es sich weiter um eine Submersion handelt, ist sogar jede Faser $T_p M$ eine Untermannigfaltigkeit von TM . Die Abbildung π verdeutlicht auch, warum $TM \neq M \times (\cup_{p \in M} T_p M)$. Dort hätte man Ausdrücke der Form $(p, q) \in M \times T_q M, p \neq q$ – das ergibt konzeptionell wenig Sinn, da Tangentialvektoren ausschließlich an ihren Fußpunkt koppeln (daher klappt Projektion).

Es soll hier noch einmal betont werden, dass das Vorhandensein dieser Struktur sehr bemerkenswert ist. Tangentialräume an verschiedenen Punkten haben nämlich an sich nichts miteinander zu tun, da sie mit der eigentlichen Mannigfaltigkeit nur in der infinitesimalen Nähe ihres Fußpunktes in Berührung kommen und es sonst keine Verbindung gibt. Dass das Ganze in expliziten Anwendungen jedoch fast wie selbstverständlich wirkt (intuitiv variiert man den Punkt fast automatisch, was nun auch mathematisch und glatt funktioniert), zeigt das Beispiel der Sphäre:

Beispiel 4.4: Sphäre

Man betrachte nun die 2-Sphäre als Menge

$$p \in \mathbb{S}^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, p \rangle = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

mit dem zugehörigen Tangentialraum

$$T_p \mathbb{S}^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle v, p \rangle = 0\}.$$

Dann ist das Tangentialbündel einfach gegeben über

$$T \mathbb{S}^2 = \{(p, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \langle p, p \rangle = 1, \langle v, p \rangle = 0\}. \quad (4.10)$$

Mithilfe der Submersion

$$F : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2, (p, v) \mapsto (\langle p, p \rangle, \langle v, p \rangle) \quad (4.11)$$

erhält man zudem, dass es sich dabei wegen $T \mathbb{S}^2 = F^{-1}((1, 0))$ um eine vierdimensionale Untermannigfaltigkeit von

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = T \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6$$

handelt. Eine alternative Möglichkeit, um auf diese Erkenntnis zu kommen ist die Konstruktion von Plättmachern von $T \mathbb{S}^2$ aus den Plättmachern von \mathbb{S}^2 . Die Idee ist dabei, dass man immer noch $\{0\}$ dazunehmen und die Nullen aus dem kartesischen Produkt nach hinten ordnen kann (das liefert bereits den Plättmacher).

Der letzte Teil klappt allgemeiner für jede Untermannigfaltigkeit, die Struktur des Tangentialbündels ist also verträglich mit der eigentlichen Untermannigfaltigkeit.

Der große Vorteil bei der Arbeit mit dem Tangentialbündel ist also, dass man bei der Auswahl von Tangentialvektoren auf der Mannigfaltigkeit nicht mehr nur an einen Punkt gebunden ist und so eine noch allgemeinere Formulierung vieler Sachverhalte möglich wird. Mit als erstes sollte dort wahrscheinlich das Differential einfallen:

Beispiel 4.5: Differential

Für eine differenzierbare Abbildung $f : M \rightarrow N$ ist das Differential

$$Df : TM \rightarrow TN, T_p M \ni v \mapsto D_p f(v) \in T_{f(p)} N \quad (4.12)$$

glatt. Man bildet hier tatsächlich zwischen den verschiedenen Tangentialbündeln ab, weil die Vektoren v ihren Fußpunkt p kennen und dieser darf nun auch variiert werden. Deshalb ist die hier verwendete Schreibweise äquivalent zu

$$Df : TM \rightarrow TN, (p, v) \mapsto (f(p), D_p f(v)).$$

In Karten (U, x) , $p \in U$ und (V, y) , $f(p) \in V$ erhält man dann die Darstellung

$$(p, v) \mapsto \left(y \circ f \circ x^{-1}(p), D_p(y \circ f \circ x^{-1})(v) \right)$$

und erkennt, dass hier im Differential mit dem Bild von p noch mehr Informationen enthalten sind als bloß die Richtungsableitung (zweite Komponente). Aus dieser Schreibweise wird zudem klar, dass für eine glatte Funktion auch das Differential glatt ist, denn dann ist auch die Kartendarstellung $y \circ f \circ x^{-1}$ glatt.

Dass dort noch mehr dahinter steckt, erkennt man auch bei der folgenden Aussage:

Satz 4.6: Bedingung für Diffeomorphismus

Eine glatte Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen Mannigfaltigkeiten M, N ist genau dann ein Diffeomorphismus, wenn Df bijektiv ist.

Beweis. Die Grundidee des Beweises ist sehr einfach, nämlich Ausnutzen der Bijektivität (aus der die Existenz eines Inversen folgt) und dann Anwenden der Kettenregel:

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_N \quad \Rightarrow \quad \text{id}_{TN} = D \text{id}_N = D(f \circ f^{-1}) = Df \circ Df^{-1}, \quad (4.13)$$

womit man ein Rechtsinverses gefunden hat. Durch analoges Vorgehen bei der Verknüpfung $f^{-1} \circ f$ erhält man ein Linksinverses und damit die Bijektivität.

Zudem berechnet man in einer Karte y leicht das Differential von

$$\text{id} : M \rightarrow M, p \mapsto p \quad \equiv \quad y \circ \text{id}_M \circ y^{-1} = \text{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, q = y(p) \mapsto q$$

und erhält dafür (hier Berechnung der Jacobi-Matrix):

$$D_{q=y(p)} \text{id}_{\mathbb{R}^n} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \Big|_q \right]_{i,j=1}^n = [\delta_{ij}]_{i,j=1}^n = \text{id}_{T_q \mathbb{R}^n}. \quad (4.14)$$

Die Rückrichtung funktioniert mit genau derselben Gleichung, nur hat man hier die Existenz des Inversen von Df gegeben und kann wegen der Identität auf die Existenz von f^{-1} schließen (Glattheit folgt aus der Existenz von Df). \square

Das kann man auch ziemlich direkt logisch aus der Darstellung von Df erklären. In der ersten Komponente steht die Funktion und in der zweiten das eigentliche Differential der Funktion, bei Bijektivität von Df sind die beiden also bijektiv und mit der vorausgesetzten Glattheit macht das f zu einem Diffeomorphismus.

Beispiel 4.7: Tangentialbündel Matrix-Lie-Gruppe

Eine spannende Beobachtung ergibt sich bei der Betrachtung von Matrix-Lie-Gruppen. In Satz 3.33 wurde gezeigt, dass die allgemeine Form von Tangentialvektoren am Punkt $g \in G$ gegeben ist als gh für Elemente $h \in \mathfrak{g} = T_e G$ der Lie-Algebra, dass also eine glatte Identifikation von \mathfrak{g} mit einem beliebigen Tangentialraum existiert. Zur Charakterisierung aller Tangentialräume $T_g G$ ist hier also offenbar nur die Information Punkt $g \in G$ und Lie-Algebra nötig, sodass für das Tangentialbündel TG (wo die Tangentialräume zu allen Punkten gesammelt werden) ebenfalls nur die Informationen Punkte (also G) und Lie-Algebra benötigt werden. Insgesamt motiviert das die Schreibweise

$$TG = G \times \mathfrak{g}, \quad (4.15)$$

wobei = hier streng genommen wieder „nur“ \cong ist, man findet nämlich den (kanonischen !) Diffeomorphismus $G \times \mathfrak{g} \rightarrow TG$, $(g, h) \mapsto gh \equiv (g, gh)$. Das Tangentialbündel lässt sich hier also sehr einfach charakterisieren/ beschreiben.

Was zunächst als Spezialfall bei Matrix-Lie-Gruppen auftritt, kann tatsächlich in ganz ähnlicher Weise auch allgemeiner sinnvoll definiert/ gefordert werden:

Definition 4.8: Globale Trivialisierung

Das Tangentialbündel TM einer Mannigfaltigkeit M heißt *trivial*, falls eine glatte Identifikation zwischen TM und $M \times \mathbb{R}^n$ existiert, die faserweise linear ist.

Genauer fordert man die Existenz eines Diffeomorphismus

$$\Phi : TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^n, \quad (4.16)$$

der bei Einschränkung auf eine Faser zu einem linearen Isomorphismus

$$\Phi_p : T_p M \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^n \quad (4.17)$$

werden soll.

Eine Mannigfaltigkeit mit trivialem Tangentialbündel heißt auch *parallelisierbar*.

Dabei trägt $\{p\} \times \mathbb{R}^n$ ($n = \dim(M) = \dim(T_p M)$) eine natürliche Vektorraumstruktur, die im Wesentlichen vom \mathbb{R}^n vererbt wird. Die Existenz einer solchen Trivialisierung Φ wird meist verkürzt mit $TM = M \times \mathbb{R}^n$ notiert, um die enge Verbindung zwischen diesen Strukturen klarzumachen. Auf den ersten Blick scheint die Definition relativ sinnlos zu sein, so wurde ja bereits $TM \neq M \times (\cup_{p \in M} T_p M)$ festgehalten. Der große Unterschied ist hier jedoch, dass jeder Tangentialraum $T_p M$ mit seinem Bild unter der Karte (x, Dx) identifiziert wird, also mit dem \mathbb{R}^n (auch wenn andere Identifizierungen der enthaltenen Vektoren vorgenommen werden, die $T_p M$ zu verschiedenen p sehen ja eigentlich ganz unterschiedlich aus) und nur deshalb funktioniert diese Schreibweise. Die Information über die Kartendarstellung v eines Vektors reicht übrigens schon, weil man mithilfe von $D_{x(p)}x^{-1}(v)$ den zugehörigen Vektor auf der Mannigfaltigkeit zurückgewinnen kann. Das werden zwar an unterschiedlichen Punkten ganz unterschiedliche Vektoren sein, aber diese sehen abgebildet unter dieser Karte eben gleich aus und das ist das Tolle an der Trivialisierung.

Die Forderung nach faserweiser Linearität ist wichtig für die Erhaltung der Vektorraumstruktur und bedeutet im Beispiel des Differentials $Df : TM \rightarrow TN$, dass die Einschränkung auf jede Faser, $(Df)_p = D_p f : T_p M \rightarrow T_p N$ für jeden Punkt $p \in M$ linear ist. Äquivalent ist die Forderung nach der Linearität der Abbildung $p \mapsto D_p f$ (beim Differential ist diese Eigenschaft natürlich klar, aber nicht immer).

Der Sinn des Ganzen ist im Wesentlichen die Vereinfachung der Arbeit und damit verbunden eine Verkürzung der Notation, wie man an folgenden Beispielen sieht:

Beispiel 4.9: Sphäre

$TS^1 = S^1 \times (i\mathbb{R})$ (komplex wegen Drehung irgendwie; ist wirklich i gemeint da ?); man kann zur Kurve $t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t + t_0) \\ \sin(t + t_0) \end{pmatrix}$ dann immer einen wohldefinierten Tangentialvektor $\frac{\partial}{\partial t} = \gamma' \in T_{(\cos(t_0), \sin(t_0))} S^1$ definieren, sodass $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$. Die gleiche Trivialisierung liefert die Identifikation $S^1 = \text{SO}(2)$, von der als Matrix-Lie-Gruppe die Trivialisierung bereits bekannt ist.

Man kann damit auch den n -Torus $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ trivialisieren. Interessanter-

weise geht das mit TS^2 nicht auf eine triviale Weise (dazu später mehr).

Beispiel 4.10: Trivialisierung einer Untermannigfaltigkeit

Sofort ist klar, dass für eine (Unter-)Mannigfaltigkeit als offene Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ wegen $T_p M = T_p \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ eine globale Trivialisierung $TM = M \times \mathbb{R}^n$ existiert.

Jedoch kann man sich etwas Analoges für jede offene Teilmenge $U \subset M$ einer allgemeineren Mannigfaltigkeit überlegen, was im Prinzip sofort aus der Karten-darstellung $[U, x, v]_p$ folgt. Eigentlich bezeichnet diese ja einen Tangentialvektor am Punkt $p \in U$, der in der Karte x gerade zu v wird, oder als Abbildung:

$$\phi : T_p U = T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n, [U, x, v]_p \mapsto v.$$

Hält man nun aber den Punkt nicht mehr fest und betrachtet damit das gesamte Bündel statt einer einzelnen Faser, so kann man eine analoge Abbildung

$$\Phi : TU \rightarrow U \times \mathbb{R}^n, [U, x, v]_p \mapsto (p, v) \quad (4.18)$$

definieren, die eine Globale Trivialisierung auf U bildet (man erinnere sich dabei, dass jede Teilmenge einer Mannigfaltigkeit wieder eine Mannigfaltigkeit ist).

Die letzte Erkenntnis ist dabei überraschend wichtig, weil die dort vorgestellte Konstruktion ziemlich einfach praktisch umzusetzen ist, schließlich werden hier Karten benutzt und es muss daher nicht global (viel allgemeiner, nicht immer gut) gearbeitet werden. Aus diesem Grund bekommt das Ganze einen Namen und wird weiter untersucht:

Definition 4.11: Lokale Trivialisierung

Für eine Karte $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt die Abbildung

$$\hat{g}_{(U,x)} : TU \rightarrow U \times \mathbb{R}^n, [U, x, v]_p \mapsto (p, v) = (p, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}) \quad (4.19)$$

Lokale Trivialisierung (von TM) oder auch *Bündelkarte*.

Diese ist glatt, bijektiv und faserweise linear, es ist also

$$\left. \hat{g}_{(U,x)} \right|_{T_p M} : T_p U = T_p M \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^n, [U, x, v]_p \mapsto (p, v)$$

eine lineare Abbildung.

Oftmals wird auch nur die zweite Komponente verwendet und damit

$$g_{(U,x)} = \pi_2 \circ \hat{g}_{(U,x)} : TU \rightarrow \mathbb{R}^n, [U, x, v]_p \mapsto v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Anmerkung: offenbar existiert dann lokal ein Diffeomorphismus, sodass

$$TU = \mathbb{R}^{2n}. \quad (4.21)$$

Man beachte, dass hier $v \in \mathbb{R}^n$ und nicht $v \in T_p M$ ist !

Man trivialisiert nun also nicht mehr auf der gesamten Mannigfaltigkeit M , sondern nur auf der Teilmenge U . Diese Trivialisierung wird dabei immer von der Karte x induziert, weil nur deswegen überhaupt diese Darstellung von Tangentialvektoren vorliegt. Zudem hat man es mit unterschiedlichen Stufen der Verkürzung zu tun: bei $\hat{g}_{(U,x)}$ wird zwar der Tangentialvektor $[U, x, v]_p$ auf (p, v) heruntergebrochen, es liegt aber noch genug Information zur Beschreibung von TU vor (zudem bleiben Definitionsbereich und Karte im Index erhalten, nur nicht im Output).

Es ist nun aber sehr interessant, dass man noch weiter gehen kann und mit $g_{(U,x)}$ auf einmal eine Abbildung hat, deren Output keine Information zum Punkt enthält ! Bis jetzt war bei der Arbeit mit Vektoren immer eine Abhängigkeit vom Fußpunkt p vorhanden, weil dieser bei Vektoren auf Mannigfaltigkeiten eben immer wichtig ist, aber nun wird mit Kartendarstellungen der Vektoren im \mathbb{R}^n gearbeitet, die nichts über p wissen. Das spiegelt sich unter Anderem in den Darstellungen für Tangentialvektoren wider, man betrachte z.B. $[U, x, v]_p$ (nur in dieser Kombination ist es ja äquivalent zu einem Element von $T_p M$) vs. v . Die einfache Erklärung für das Weglassen ist, dass der eigentliche Punkt im manchen Fällen schlichtweg unwichtig wird, beispielsweise wenn einfach nur mit Vektoren gerechnet werden soll.

Dass diese Abbildung $g_{(U,x)}$ trotzdem einen Sinn hat, soll hier kurz veranschaulicht werden. Der wesentliche Punkt ist, dass wegen der Isomorphie von $T_p M$ und $\mathcal{A}_p \times \mathbb{R}^n$ garantiert an jedem Punkt $p \in U$ irgendein Tangentialvektor $[\gamma]_p$ existiert, der bezüglich der Karte x die Darstellung v hat – der Punkt ist also nicht unbedingt nötig für eine Zuordnung des Tangentialvektors zu v . Was man hier verliert, ist die Existenz des Inversen, die Abbildung von v ins Tangentialbündel kann nicht mehr wohldefiniert sein. Das liegt gerade daran, dass an jedem Punkt p ein Tangentialvektor $[\gamma]_p$ existiert, der die Kartendarstellung v hat – die Vektoren $[\gamma]_p \sim [U, x, v]_p$ und $[\gamma]_q \sim [U, x, v]_q$ zu verschiedenen Punkten $p, q \in M$ werden aber ganz unterschiedliche Formen haben, es ist keine eindeutige Zuordnung mehr möglich.

Nun soll noch etwas mit dem neuen Instrument der Lokalen Trivialisierung gearbeitet werden. Zunächst ist dabei zu klären, wie man überhaupt auf die Koeffizienten v_j in der lokalen Trivialisierung kommt, Einsetzen von v in die Karten ist hier der falsche Ansatz (weil Karten ja ihren Definitionsbereich in M haben und nicht in $T_p M$). Hierzu muss man sich klar machen, dass man entweder eine Kurve γ gegeben hat (dann gilt ja ganz einfach $v = (x \circ \gamma)'(0)$, wie im Kapitel zu Tangentialvektoren festgehalten) oder man hat eine Derivation X gegeben (der Fall einer gegebenen Kartendarstellung $[U, x, v]_p$ dürfte selbsterklärend sein). Nun muss allerdings die Arbeit in der Praxis bedacht werden, wo man immer eine Basisdarstellung der Form

$$X = \sum_{j=1}^n \lambda_j \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \quad (4.22)$$

mit den von der Karte x induzierten Gauß'schen Basisvektoren gegeben hat. Das liegt daran, dass explizite Anwendungen eben immer in Koordinaten stattfinden und man deshalb automatisch eine Karte mit den jeweiligen Darstellungen gegeben hat. Wegen der Linearität der Tangentialvektoren lässt sich nun aber berechnen:

$$[U, x, v]_p = [U, x, \sum_{j=1}^n v_j e_j]_p = \sum_{j=1}^n v_j [U, x, e_j]_p. \quad (4.23)$$

Weil nun $X \equiv v$ und gleichzeitig $\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \equiv e_j$, folgt aus dem Koeffizientenvergleich:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p \equiv \sum_{j=1}^n v_j [U, x, e_j]_p \quad \Leftrightarrow \quad v_j = \lambda_j = X \cdot x_j, \forall j. \quad (4.24)$$

Bei einer gegebenen Derivation muss man also nur die Koeffizienten $\lambda_j \in \mathbb{R}$ in eine Spalte schreiben und hat bereits den Vektor in der Trivialisierung. Auch wenn die Darstellung in einer von der Karte y induzierten Trivialisierung gesucht ist, kann man einfach den Basiswechsel gemäß (3.33) berechnen (dazu nun mehr).

Anmerkung: das entspricht tatsächlich der zweiten Komponente der induzierten Karten des Tangentialbündels (siehe (4.7)), weil dort die Richtungsableitung $D_p x(v)$ ausgewertet wird, was aber in jeder Komponente j der Richtungsableitung $D_p x_j(v) = d_p x_j(v) = X_p \cdot x_j$ entspricht.

Beispiel 4.12: Basisvektor

Die einfachste mögliche Rechnung ist für einen Basisvektor:

$$\hat{g}_{(U,x)}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p\right) = \left(p, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \Rightarrow \quad \hat{g}_{(U,x)}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\Big|_p\right) = \left(p, e_k\right). \quad (4.25)$$

Wie bei der Arbeit mit Karten üblich, kann es an einem Punkt verschiedene lokale Trivialisierungen geben und es ist wieder eine Verträglichkeitsbedingung nötig:

Definition 4.13: Kozyklus

Für zwei Karten $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt die Abbildung

$$\hat{g}_{(V,y),(U,x)} = \hat{g}_{(V,y)} \circ \hat{g}_{(U,x)}^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^n, (p, v) \mapsto (p, w) \quad (4.26)$$

Übergangstrivialisierung. Die Menge aller $g_{(U_\alpha, x_\alpha), (U_\beta, x_\beta)}$ wird der *Kozyklus (des Tangentialbündels)* genannt. Unter Nutzung der Projektion π_2 erhält man analog

$$g_{(V,y),(U,x)} = \pi_2 \circ \hat{g}_{(V,y),(U,x)} = g_{(V,y)} \circ \hat{g}_{(U,x)}^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (p, v) \mapsto w. \quad (4.27)$$

Hier wird also nur die Darstellung des Vektors von der Karte x zu y gewechselt (Reihenfolge ist wichtig, rechtes Tupel wird ersetzt mit dem linken). Mit dem Punkt passiert dabei die ganze Zeit nichts, weil ja mit den lokalen Trivialisierungen und nicht den induzierten Karten des Tangentialbündels gearbeitet wird.

Diese Darstellung von Übergangstrivialisierungen ist jedoch nicht wirklich praktisch, besser ist ein Umschreiben von $g_{(V,y),(U,x)}$. Im ersten Schritt nimmt man dazu

$$g_{(V,y),(U,x)}(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, v \mapsto w. \quad (4.28)$$

Man lagert den Punkt also quasi aus, sodass er immer noch variabel bleibt, aber nicht mehr als Argument angesehen wird. Der Vorteil davon ist, dass $g_{(V,y),(U,x)}(p)$ nun im Wesentlichen Vektoren auf Vektoren abbildet (es handelt sich genauer sogar um einen glatten Vektorraumautomorphismus, weil man glatte und bijektive Abbildungen verknüpft), weshalb eine Darstellungsmatrix an jedem Punkt existiert.

Der zweite Schritt ist die äquivalente Interpretation des Übergangs $g_{(V,y),(U,x)}$ als

$$g_{(V,y),(U,x)} : U \cap V \rightarrow \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}), p \mapsto g_{(V,y),(U,x)}(p) = D_{x(p)} y \circ x^{-1} \quad (4.29)$$

mit der Jacobi-Matrix des Kartenwechsels $y \circ x^{-1}$! Das sollte nur auf den ersten Blick überraschen, weil im Kapitel zu Tangentialvektoren der Darstellungswechsel als

$w = D_{x(p)}(y \circ x^{-1})(v)$ definiert war. „Einsetzen“ eines Vektors (was hier Multiplikation von rechts bedeutet) in den zu dieser invertierbaren $n \times n$ -Matrix gehörigen Vektorraumautomorphismus entspricht dann dem Auswerten der Abbildung

$$g_{(V,y),(U,x)}(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, v \mapsto w = D_{x(p)}(y \circ x^{-1})(v) \quad (4.30)$$

und das war genau die erste Neuinterpretation, da Elemente von $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ auch mit einer Abbildung wie in (4.28) assoziiert werden können.

Anmerkung: man kann sich das auch aus der Karte (x, Dx) des Tangentialbündels überlegen, die ja gleich der Darstellung eines Vektors in einer Trivialisierung ist. Einen Kartenübergang macht man nach dem alten Schema $x = x \circ y^{-1} \circ y$ gemäß

$$(x, Dx) = (x, Dx) \circ (y^{-1}, Dy^{-1}) \circ (y, Dy) = (x \circ y^{-1}, D(x \circ y^{-1})) \circ (y, Dy) \quad (4.31)$$

und dort tritt in der zweiten Komponente ein Differential auf, das punktweise einer Abbildung mit der Jacobi-Matrix entspricht !

Man kann nun auch einige Eigenschaften finden, die alle Elemente eines Kozyklus erfüllen und die daher *Kozyklus-Bedingungen* genannt werden:

Satz 4.14: Kozyklus-Bedingungen

Für drei Karten $(U, x), (V, y), (W, z)$ auf einer Mannigfaltigkeit M gilt auf der Teilmenge $U \cap V \cap W$:

$$g_{(W,z),(U,x)} = g_{(W,z),(V,y)} g_{(V,y),(U,x)}. \quad (4.32)$$

Zudem existiert ein punktweise definiertes Inverses

$$g_{(V,y),(U,x)}^{-1} = g_{(U,x),(V,y)}. \quad (4.33)$$

Die Beweise sind relativ einfach und beruhen auf Benutzung der Kettenregel sowie der Darstellung als Jacobi-Matrix (daher Verkettung \equiv Matrixmultiplikation).

! er hat nices Beispiel zur Berechnung eines Kozyklus !

Diese Aussagen reichen erst einmal aus, es soll daher nun um den Sinn des ganzen Komplexes um Trivialisierungen gehen. Es stellt sich nämlich durchaus die Frage, warum man nun ein Hybrid einführt zwischen Angabe von Daten wie Punkten/Vektoren auf Mannigfaltigkeiten und in Karten (also auf dem \mathbb{R}^n). Diese Frage ist im Prinzip auch die Antwort - in vielen Fällen sind diese Trivialisierungen (man sollte vielleicht eher von einer *Koordinatisierung* sprechen) als Hybrid-Karten schlichtweg am praktischsten (nicht zuletzt wegen der deutlich verkürzten Notation).

Das Hauptproblem ist, dass man beim Rechnen auf dem Tangentialbündel natürlich so viel Struktur (dazu gehören die Mannigfaltigkeiten-Struktur, Differenzierbarkeit und die Vektorraumstruktur der einzelnen Fasern, also der Tangentialräume) wie möglich erhalten möchte, ohne dass es zu kompliziert wird. Das könnte man natürlich in den induzierten Karten machen und dort auch die Kartenwechsel berechnen - jedoch würde das Ganze sehr unübersichtlich werden. Man kann sich nämlich beispielsweise überlegen, dass beim Vergleich von Tangentialvektoren auch der Fußpunkt p wichtig ist, dieser aber in verschiedenen Karten ganz anders aussehen kann und man daher unnötig Arbeit aufwenden würde. Das ist einer der Gründe, warum man oft nur die Vektorkomponente von Elementen des Tangentialbündels trivialisiert, aber nicht die Punkte. Das wird über die Anordnung der Komponenten ihrer Kartendarstellung in einen Spaltenvektor und damit Interpretation als Element des \mathbb{R}^n realisiert, man identifiziert also $T_p M$ mit \mathbb{R}^n . Ein weiterer Vorteil dabei ist, dass man so unabhängig von festen Punkten arbeiten kann und auch der Wechsel zwischen den Darstellungen sehr einfach und sogar glatt ist. Die Berechnungen von Jacobi-Matrizen ist schließlich vergleichsweise einfach und mit den Punkten muss ebenfalls kaum etwas oder sogar gar nichts gemacht werden (nur beim Wechsel muss er eingesetzt werden).

? nicht sicher ob das hier schon rauskam: wichtig ist auf jeden Fall die Identifizierung von TM mit $M \times \mathbb{R}^n$, das ist viel besser zu handhaben (nur noch ein VR, endlich) !

für später: man hat also leider keine allgemein natürliche Identifikation eines allgemeinen Tangentialraums mit dem euklidischen Raum, die hängt immer vom Punkt ab (und damit von den gewählten Karten; meint hier, dass zwar immer möglich, aber man kann keine schön allgemeine Form der Übergangsabbildung angeben); Ableitungen in Koordinatensystemen als Grenzwerte zwischen verschiedenen Punkten machen daher gar nicht so wirklich Sinn, man will daher (später, nicht an dieser Stelle) ne allgemeinere/ sinnvollere Definitionen und Wege zum Rechnen (Levi-Civita-Zusammenhang); das Ganze muss eben auch auf Mannigfaltigkeiten Sinn machen !

4.1.2 Kotangentialbündel

Die übliche Prozedur, das Übertragen der Erkenntnisse auf den Dualraum, ist nun nicht mehr schwer, die Hauptarbeit ist bereits getan.

Satz 4.15

Für eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit M bildet

$$T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p^*M \quad (4.34)$$

auf natürliche Art wieder eine Mannigfaltigkeit, sodass

$$\pi : T^*M \rightarrow M, \alpha \mapsto p \quad (4.35)$$

eine Submersion ist und außerdem $T_p^*M \in T^*M$ auf glatte Weise der Dualraum zur Faser $T_pM \in TM$ ist.

Der zugehörige Atlas ist gegeben durch Karten der Form

$$(x, \alpha) : T^*U = \bigsqcup_{p \in U} T_p^*U \rightarrow V \times \mathbb{R}^n, \alpha \mapsto (x(p), \begin{pmatrix} \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p\right) \\ \vdots \\ \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right) \end{pmatrix}) \quad (4.36)$$

auf $T^*U \subset T^*M$, wobei $x : U \rightarrow V$ eine Karte auf M ist.

Definition 4.16: Kotangentialbündel

(T^*M, π) (oder auch nur T^*M) heißt *Kotangentialbündel von M* . Auch hier heißt ein Element $T_p^*M / \{p\} \times T_p^*M$ von T^*M *Faser (über p)*.

Beweis. nimm eine Karte (U, x) und das zugehörige Tangentialbündel T^*U

nimm (/ stelle so dar) dann Kotangentialvektor an $p \in U$ in Gauß'scher Basis quasi, also

$$\alpha \in T_p^*M \mapsto (x(p), \begin{pmatrix} \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p\right) \\ \dots \\ \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right) \end{pmatrix});$$

das ist dann äquivalent zur Basis-/ Kartendarstellung

$$\alpha = \sum_k \lambda_k d_p x_k \mapsto (x(p), \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix});$$

kriegen dann auch die Übergangsabbildungen

$$(p, v) \mapsto \left((y \circ x^{-1})(p), ((D_p(y \circ x^{-1}))^{-1})^T(v) \right)$$

□

Man erhält also ganz analoge Darstellungen mit α oder (p, α) (Kotangentialvektoren ließen sich ja als Funktionenkeime und damit Ableitungen darstellen, daher ist der Koeffizientenvektor auch analog). Nutzt man zweite Interpretation, dann lässt sich π wieder als Projektion auf die erste Komponente interpretieren (und unabhängig von den eigentlich unterschiedlichen Definitionsbereichen TM, T^*M).

Die Formulierung mit dem Dualraum bedeutet dabei einfach nur, dass die dualen Abbildungen des Tangentialbündels enthalten sind. Analog zur dualen Abbildung aus der Linearen Algebra lässt sich das auch darüber ausdrücken, dass für

$$X : M \rightarrow TM, \omega : M \rightarrow T^*M \text{ mit } \pi \circ X = \pi \circ \omega$$

die Funktion

$$\omega(X) : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \omega_p(X_p) = \omega(p)(X(p)) \quad (4.37)$$

definiert ist und hier darüber hinaus sogar glatt (als Verknüpfung glatter Objekte).

? er schreibt das im Skript mit nem N , wo soll das denn herkommen (könnte aber gewollt sein, weil im Skript vorher auch verschiedene Vektorräume V, W auftreten) ? Also auch die Vektorfelder und 1-Formen bilden von N ab, muss daher vlt überhaupt $\pi \circ X = \pi \circ \omega$ gefordert werden, bei Abbildungen von M könnte/ sollte das sogar per Definition klar sein oder ?

Wiederum ist aber so, dass die induzierten Karten eher selten genutzt werden und stattdessen häufiger die Darstellungen in Trivialisierungen:

Definition 4.17: Lokale Trivialisierung

Für eine Karte $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt die Abbildung

$$\hat{h}_{(U,x)} : T^*U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n, \alpha \mapsto (p, \lambda) = (p, \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}) \quad (4.38)$$

*Lokale Trivialisierung (von T^*M).*

Diese ist glatt, bijektiv und faserweise linear, es ist also

$$\hat{h}_{(U,x)} \Big|_{T_p M} : T_p^* U \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}, \alpha \mapsto (p, \lambda) \quad (4.39)$$

eine lineare Abbildung. Die Projektion auf die zweite Komponente ist

$$h_{(U,x)} = \pi_2 \circ \hat{h}_{(U,x)} \Big|_{T_p M} : T_p^* U \rightarrow \mathbb{R}, \alpha \mapsto \lambda. \quad (4.40)$$

Für zwei Karten $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt die Abbildung

$$\hat{h}_{(U,x),(V,y)} = \hat{h}_{(V,y)} \circ \hat{h}_{(U,x)}^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^n, (p, \lambda) \mapsto (p, \mu) \quad (4.41)$$

Übergangstrivialisierung. Die Menge aller $\hat{h}_{(U,x),(V,y)}$ wird der *Kozyklus (des Kotangentialbündels)* genannt. Mit der Projektion erhält man

$$h_{(U,x),(V,y)} = \pi_2 \circ \hat{h}_{(U,x),(V,y)} = \hat{h}_{(V,y)} \circ \hat{h}_{(U,x)}^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (p, \lambda) \mapsto \mu. \quad (4.42)$$

Tatsächlich ist nun alles analog zum Tangentialbündel definiert worden. Auch hier kann man zudem eine Darstellungsmatrix finden, die sich in der folgenden Interpretation des Übergangs wiederfindet:

$$\begin{aligned} h_{(U,x),(V,y)} : U \cap V &\rightarrow \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}), p \mapsto h_{(V,y),(U,x)}(p) = \left(\left(D_y \circ x^{-1} \right)^{-1} \right)^T \\ \Rightarrow h_{(V,y),(U,x)}(p) &= \left(g_{(V,y),(U,x)}(p)^{-1} \right)^T \end{aligned} \quad (4.43)$$

mit dem Kozyklus $g_{(V,y),(U,x)}(p)$ des Tangentialbündels. Es tritt also wiederum die Jacobi-Matrix des Kartenwechsels auf, die nun aber noch invertiert und transponiert werden muss. Eine Eselsbrücke für das Auftreten davon ist, dass man nun erst noch einen Vektor hineinstecken muss, bevor von dort abgebildet wird und man daher etwas Umgekehrtes bzw. Inverses machen muss (rechnerisch folgt es aus der Transformation der dualen Gauß'schen Basisvektoren).

Das Ganze erfüllt übrigens die analogen Kozyklus-Bedingungen, auch wenn man invertiert und transponiert. Es ist sogar nur deswegen der Fall, weil sich so gerade die Vertauschungen von ${}^T, {}^{-1}$ im Matrixprodukt ausgleichen.

Die Berechnung des Koeffizientenvektors folgt dem selben Muster wie zuvor:

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j d_p x_j \quad \Rightarrow \quad \lambda_j = \alpha_j = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right), \forall j . \quad (4.44)$$

Anmerkung: auch hier ist erkennbar, dass die zweite Komponente der induzierten Karten (siehe (4.36)) schon so definiert war.

Beispiel 4.18: Basisvektor

Wieder wird die Rechnung mit einem Basisvektor gemacht:

$$\begin{aligned} \hat{h}_{(U,x)}(d_p x_1) &= (p, \begin{pmatrix} d_p x_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p \right) \\ \vdots \\ d_p x_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p \right) \end{pmatrix}) = (p, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) \\ &\Rightarrow \quad \hat{h}_{(U,x)}(d_p x_k) = (p, e_k) . \end{aligned} \quad (4.45)$$

Hmm, sollte wegen der Interpretation von 1-Formen als Funktionenkeimen nicht sogar die Koeffizienten mit denen vom Tangentialbündel gleich sein ???

4.2 Vektorfelder und 1-Formen

Die neu geschaffenen Bündelstrukturen eröffnen nun viele Möglichkeiten. So wird es nun beispielsweise möglich, nicht mehr nur Vektoren an einem Punkt zu betrachten, sondern an beliebigen Punkten auf der Mannigfaltigkeit. Das entspricht einer Abbildung $M \rightarrow TM$ und um genau solche Konstrukte soll es nun gehen:

Definition 4.19: (Tangential-)Vektorfeld

Ein *Vektorfeld X auf M* ist eine glatte Abbildung

$$X : M \rightarrow TM, p \mapsto (p, X_p) \quad (4.46)$$

mit der Eigenschaft, dass für $\pi : TM \rightarrow M, (p, v) \mapsto p$ gilt:

$$\pi \circ X = \text{id}_M. \quad (4.47)$$

Die Menge aller Vektorfelder auf M wird mit $\mathcal{X}(M)$ bezeichnet.

Eine solche Abbildung X ordnet also jedem Punkt $p \in M$ auf glatte Art und Weise (was einfach die Glattheit von X meint) irgendeinen Tangentialvektor X_p (man sagt aber oft verkürzend nur Vektor, denn genau das ist es ja) am Punkt p zu und damit ein Element von $T_p M$. Es werden also gerade keine Vektoren aus einem anderen Tangentialraum $T_q M, p \neq q \in M$ zugeordnet (was ja prinzipiell auch denkbar wäre), dafür sorgt die Forderung mit der Projektion (man nennt X dann auch *fußpunktgetreu*). In gewisser Weise macht das Vektorfelder zu Umkehrfunktionen von π , die durch Einschränkung des Urbilds $\pi^{-1}(p) = T_p M$ zu jedem $p \in M$ nur ein Element zuordnen.

Anmerkung: offenbar handelt es sich bei Vektoren um konstante Vektorfelder. Der Großteil aller Elemente von $\mathcal{X}(M)$ ist aber nicht-konstant. Man muss nun aufpassen, weil verschiedene Objekte nun sehr ähnlich aussehen: $X \equiv$ Vektorfeld, $X_p \equiv$ Vektor, $X_p \cdot f \equiv$ Richtungsableitung von f am Punkt p entlang X_p .

Streng genommen wird zwar ein Tupel aus Punkt und Tangentialvektor zugeordnet, aber der Punkt wird meist vernachlässigt und deshalb bei der zweiten Komponente in den Index geschrieben (dann also $X(p) = X_p$), weil X in der ersten Komponente ja als Identität wirkt, die Angabe also keine zusätzliche Information bringt.

Anmerkung: man könnte auch sagen, dass man im Allgemeinen die erste Interpretation des Tangentialbündels nutzt, wo sowieso nur der Vektor vorkam. Dann würde man mit der Abbildung $\pi : TM \rightarrow M, v \mapsto p$ arbeiten statt der Projektion, was aber kein Problem wäre, die Aussagen bleiben ja alle analog gültig.

Bei $\mathcal{X}(M)$ handelt es sich übrigens nicht nur um einen Vektorraum, sondern sogar um ein Modul über den glatten Funktionen $C^\infty(M; \mathbb{R})$ mittels der Multiplikation

$$\cdot : C^\infty(M; \mathbb{R}) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M), (f, X) \mapsto f \cdot X \text{ mit } (f \cdot X)(p) = f(p) X_p. \quad (4.48)$$

Im Allgemeinen gilt dabei $\dim(\mathcal{X}(M)) = \infty \neq \dim(T_p M)$, weil es natürlich viel mehr Vektorfelder als Vektoren gibt (letztere wurden ja bereits als konstante Vektorfelder identifiziert). Das „Problem“/der Unterschied bei der Dimension ist, dass zwar jeder Vektorraum $T_p M$ endlichdimensional ist, Vektorfelder aber auf jedem Tangentialraum agieren. Man kann sich deshalb (analog zur Dimensionsbetrachtung bei $C^\infty(M; \mathbb{R})$, siehe 2.27) mithilfe von Buckelfunktionen unendlich viele linear unabhängige Vektorfelder konstruieren, indem man diese auf verschiedenen Mengen ungleich 0 werden lässt, also disjunkte Träger wählt (die sind dann nicht linear abhängig, weil im Vergleich immer $X_p = 0$ mit dem Nullvektorfeld ist und $\tilde{X}_p \neq 0$, aber weil $0 \cdot x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ kann es kein $c \in \mathbb{R}$ geben mit $cX_p = \tilde{X}_p$, was die lineare Unabhängigkeit zeigt).

Beispiel 4.20: Drehvektorfeld

Der Einfachheit halber soll ein Beispiel auf dem euklidischen Raum angegeben werden, auch wenn die Unterscheidung von Punkt und Vektor dort lediglich eine Frage der Interpretation ist. Unter Verwendung des Kreuzprodukts \times ist

$$X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, p = (x, y, z) \mapsto v = e_3 \times p = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.49)$$

das Drehvektorfeld um die z-Achse (um andere Achsen analog).

Man hat dort also nun einen Punkt stehen, der noch variiert werden kann. Im Prinzip ändert sich an den meisten Notationen nichts (es wird höchstens ein Punkt im Index weggelassen), aber man kann nun beliebige Punkte einsetzen und muss sich nicht wie vorher mit einem einzigen begnügen (auch wenn es dort wahrscheinlich gar nicht klar wurde, dass p nicht variiert werden darf, weil man es intuitiv immer schon macht). Eine etwas allgemeinere Darstellung (wenn auch immer noch in der Karte zu Standardkoordinaten) wäre

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}. \quad (4.50)$$

Interessanterweise ist die Einschränkung $X_{\mathbb{S}^2}$ auch ein Vektorfeld auf \mathbb{S}^2 . Ein Plot dieses eingeschränkten Vektorfelds findet sich in Abbildung 4.1 (in einem Würfel als Ausschnitt des \mathbb{R}^3 würde das Ganze zu unübersichtlich aussehen,

daher wird nur die Einschränkung auf \mathbb{S}^2 geplottet; die Verallgemeinerung kann man sich dann so vorstellen, dass der Radius der Kreise auch noch variabel ist). Jeder Pfeil entspricht einem Element des Tangentialraums am zugehörigen Punkt, mit dem Vektorfeld kann man also Vektoren an jedem dieser Punkte zusammenfassen.

Man schreibt kein $|_p$ mehr an die Gauß'schen Basisvektoren, weil von nun an mit einer Vektorfeld-Version selbiger gearbeitet wird, also Abbildungen der Form

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : M \rightarrow T_p M, p \mapsto \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_p . \quad (4.51)$$

Analog wird die duale Basis verallgemeinert zu

$$dx_j : M \rightarrow T_p^* M, p \mapsto d_p x_j . \quad (4.52)$$

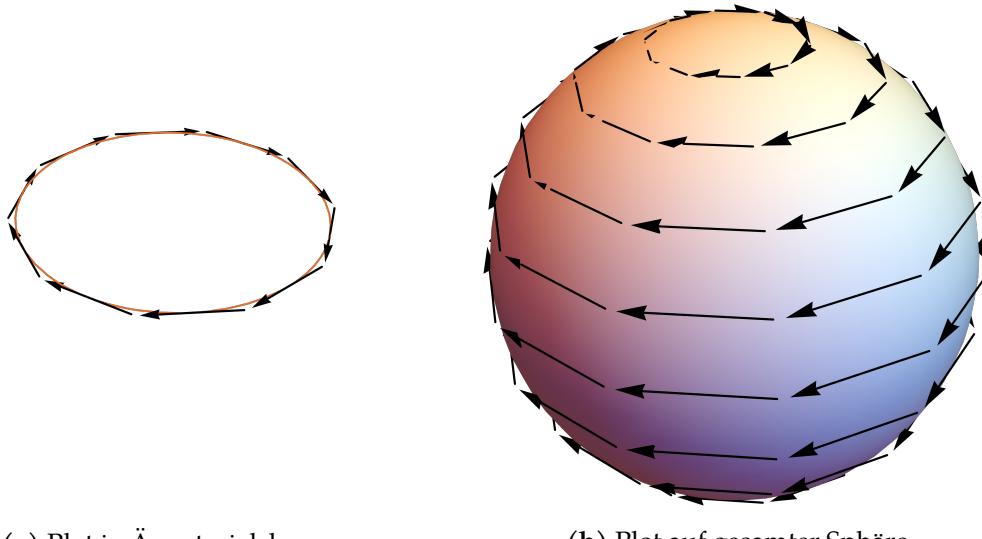


Abbildung 4.1: Veranschaulichung des Drehvektorfeldes aus Beispiel 4.20. In (a) wird zunächst nur der Schnitt der Sphäre durch die Äquatorialebene gezeigt, um den Verlauf etwas klarer zu machen, bevor (b) dann das Feld auf der gesamten Sphäre zeigt. In beiden Bildern ist gut zu erkennen, woher der Name Drehvektorfeld kommt.

Natürlich lässt sich eine zu X analoge Abbildung in den Kotangentialraum angeben:

Definition 4.21: 1-(Differential-)Form

Eine *1-Differentialform ω auf M* ist eine glatte Abbildung

$$\omega : M \rightarrow T^*M, p \mapsto \omega_p \quad (4.53)$$

mit der Eigenschaft, dass für $\pi : T^*M \rightarrow M, (p, \alpha) \mapsto p$ gilt:

$$\pi \circ \omega = \text{id}_M . \quad (4.54)$$

Die Menge aller 1-Differentialformen wird mit $\Omega^1(M)$ bezeichnet.

Analog zu Vektorfeld ordnet also eine 1-Differentialform einem Punkt p auf glatte Art und Weise ein Element des Kotangentialraums an diesem Punkt zu, also eine 1-Form. Es lässt sich mit dieser Definition sofort erkennen, dass 1-Formen konstanten 1-Differentialformen entsprechen. Auch bei nicht konstanten wird jedoch meist das Präfix Differential- weggelassen, 1-Formen bezeichnen also sowohl Linearformen $M \rightarrow \mathbb{R}$ als auch Zuordnungen $M \rightarrow T^*M$ von Punkten zu solchen Linearformen (die Begriffe verschwimmen aber ganz offenbar).

Auch $\Omega^1(M)$ bildet ein Modul über den glatten Funktionen mittels einer zu der bei Vektorfeldern analogen Multiplikation $(f\omega)(p) = f(p)\omega_p$.

Beispiel 4.22: Norm

Eine sehr einfache Linearform auf dem \mathbb{R}^n ist die Abstandsfunktion

$$r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad (4.55)$$

die den Abstand des Punktes x vom Ursprung misst.

? dafuq, das ist ja nur ne 1-Form und keine Differentialform ? evtl hier Flussform reinhauen aus MfP ?

Analog zu den Überlegungen beim Tangentialbündel, wo die allgemeinen Darstellungen bei expliziten Rechnungen nicht wirklich hilfreich waren, ist auch bei Vektorfeldern und 1-Formen eine Koordinaten- / Kartendarstellung teilweise hilfreich oder sogar unausweichlich (zu sehen beim Beispiel des Drehvektorfeldes). Dabei benutzt man natürlich die bereits zu diesem Thema geleistete Arbeit und damit lokale Trivialisierungen:

Definition 4.23: Lokale Darstellung

Für eine Karte $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ und ein Vektorfeld $X \in X(M)$ ist

$$X_U = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{mit } \lambda_k = X \cdot x_k : U \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \lambda_k(p) = X_p \cdot x_k(p) \quad (4.56)$$

die *Lokale Darstellung von X* . Oft notiert man dafür auch

$$s_{(U,x)} : U \rightarrow \mathbb{R}^n, p \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1(p) \\ \dots \\ \lambda_n(p) \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Die Interpretation der Darstellung ist, dass man Derivationen über ihre Wirkung auf die Karte x_k charakterisiert. Im Prinzip sind die dabei auftretenden Veränderungen zur lokalen Darstellung von Vektoren total logisch. Statt konstanten Koeffizienten sind die λ_j nun Funktionen des Punktes p , die Verallgemeinerung dessen war ja gerade der Kniff beim Übergang $T_p M \rightarrow TM$. Zudem steht der Punkt p nicht mehr im Index der Gauß'schen Basisvektoren, um klarzumachen, dass es sich nun auch um ein Vektorfeld handelt statt eines Vektors am festen Punkt p . Das Gebiet, auf dem trivialisiert wird, steht außerdem zusammen mit der Karte im Index.

Anmerkung: oftmals werden die Funktionen $\lambda_j : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (also die Kartendarstellungen der Koeffizienten) nicht wirklich unterschieden!

Satz 4.24: Globale Darstellung

Für ein Vektorfeld $X \in X(M)$ mit lokalen Darstellungen

$$X_U = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_k} \qquad \qquad X_V = \sum_{k=1}^n \mu_k \frac{\partial}{\partial y_k}$$

in zwei Karten $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n, y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt:

$$s_{(V,y)} = g_{(V,y),(U,x)} s_{(U,x)} \quad (4.58)$$

mit dem Kozyklus $g_{(V,y),(U,x)}$ des Tangentialbündels TM .

Umgekehrt existiert zu lokalen Darstellungen X_U, X_V genau dann ein globales Vektorfeld, wenn eben jene Gleichung erfüllt ist.

Das ist analog zur Verträglichkeitsbedingung bei lokalen Trivialisierungen, man wechselt über den Kozyklus. Das ist auch logisch, weil die lokale Darstellung von X an die durch x induzierte lokale Trivialisierung gebunden ist. Diese Aussage ist

jedoch ungemein wichtig, weil sie Bedingungen die Wohldefiniertheit lokaler Rechnungen liefert und erst das rechtfertigt das Rechnen mit solchen Darstellungen.

Dass man es dabei die ganze Zeit mit glatten Funktionen λ_j zu tun hat (nötig, weil Vektorfelder glatt sein müssen), folgt direkt aus diesem Lemma:

Lemma 4.25

Für ein Vektorfeld $X \in X(M)$ und eine Funktion $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ ist auch

$$\phi : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto X_p \cdot f \quad (4.59)$$

eine glatte Funktion.

Die Anwendung eines Vektorfeldes (\equiv Ableitung) auf eine glatte Funktion liefert also wieder eine glatte Funktion, man kann schließlich in Punkten auswerten. Der Beweis beruht auf $d_p f(X_p) = X_p \cdot f$ zusammen mit der Definition des Kotangentialbündels (Verknüpfung zu Vektorfeldern bei der dualen Abbildung).

Anmerkung: allgemeiner gilt das für $p \mapsto \omega_p(X_p)$, siehe auch Beispiel 4.30.

Nun wird zur Veranschaulichung eine lokale Trivialisierung berechnet:

Beispiel 4.26: Vektorfeld auf Sphäre

Man betrachte die Standardkarte der Sphäre, die stereographische Projektion:

$$\phi : U = S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{1+z}(x, y)$$

Nimmt man nun die in der durch ϕ induzierten Trivialisierung als $\frac{\partial}{\partial \phi_1}, \frac{\partial}{\partial \phi_2}$ gegebenen Vektorfelder, so kann man sich auch die Frage nach deren Darstellung in Standardkoordinaten stellen. Diese kann über die Transformationsformel

$$\left. \frac{\partial}{\partial \phi_j} \right|_p = \sum_k \left. \frac{\partial x_k \circ \phi^{-1}}{\partial \phi_j} \right|_{\phi(p)} \left. \frac{\partial}{\partial x_k} \right|_p$$

berechnet werden. Dazu sind also die partiellen Ableitungen der Komponenten x, y, z nach den Koordinaten ϕ_1, ϕ_2 zu bestimmen, was natürlich in der durch ϕ^{-1} gegebenen Darstellung (entspricht gerade der Parametrisierung von x, y, z durch ϕ_1, ϕ_2) gemacht werden muss. Einsetzen von $\phi(p)$ bedeutet dann einfach Ausschreiben von ϕ_1, ϕ_2 , man möchte schließlich am Ende einen Ausdruck mit

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ und deshalb auch x, y, z haben. Die inverse Karte ist bereits bekannt als:

$$\phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{S\}, (\phi_1, \phi_2) \mapsto (x, y, z) = \left(\frac{2\phi_1}{1 + \phi_1^2 + \phi_2^2}, \frac{2\phi_2}{1 + \phi_1^2 + \phi_2^2}, \frac{1 - \phi_1^2 - \phi_2^2}{1 + \phi_1^2 + \phi_2^2} \right).$$

Weil nun alle gewünschten Koeffizienten partielle Ableitungen sind, bietet sich die Berechnung der Jacobi-Matrix an:

$$D_{(\phi_1, \phi_2)} \phi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \phi_1} & \frac{\partial x}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \phi_1} & \frac{\partial y}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial z}{\partial \phi_1} & \frac{\partial z}{\partial \phi_2} \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

noch Kozyklus berechnen

Anmerkung: die Moral von der Geschicht ist: Merken über die exakten Formeln ist zu unübersichtlich, man muss einfach als Darstellung eines Vektors die partielle Ableitung der Parametrisierungen aller Koeffizienten der neuen Basis ableiten nach der zum Vektor (den man ersetzen will) gehörigen Komponente und daran noch den Vektor zur abgeleiteten Komponente multiplizieren.

Wieder werden nun Definitionen und Sätze von TM auf T^*M übertragen:

Definition 4.27: Lokale Darstellung

Für eine Karte $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine 1-Form $\omega \in \Omega^1(M)$ ist

$$\omega_U = \sum_{k=1}^n f_k dx_k \text{ mit } f_k = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) : U \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto f_k(p) = \omega_p \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p \right) \quad (4.61)$$

die *Lokale Darstellung von ω* . Oft notiert man dafür auch

$$t_{(U,x)} : U \rightarrow \mathbb{R}^n, p \mapsto \begin{pmatrix} f_1(p) \\ \dots \\ f_n(p) \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

Auch hier ist die einzige Veränderung, dass man es nun nicht mehr mit konstanten Koeffizienten, sondern Koeffizientenfunktionen zu tun hat. Analog zu Vektorfeldern untersucht man aber die Wirkung des Objekts auf die Komponenten der Karte, hier eben auf die zugehörigen Gauß'schen Basisvektoren.

Anmerkung: auch hier muss man auf die Unterscheidung von f_k und den zugehörigen Kartendarstellungen achten !

Satz 4.28: Globale Darstellung

Für eine 1-Form $\omega \in \Omega^1(M)$ mit lokalen Darstellungen

$$\omega_U = \sum_{k=1}^n f_k dx_k \quad \omega_V = \sum_{k=1}^n g_k dx_k$$

in zwei Karten $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt:

$$t_{(V,y)} = h_{(V,y),(U,x)} t_{(U,x)} \quad (4.63)$$

mit dem Kozyklus $h_{(V,y),(U,x)}$ des Kotangentialbündels T^*M .

Umgekehrt existiert zu lokalen Darstellungen ω_U, ω_V genau dann eine (globale) 1-Form $\omega \in \Omega(M)$, wenn eben jene Gleichung erfüllt ist.

Auch hier gibt es also keine Überraschungen.

Beispiel 4.29: Differential \equiv 1-Form

Für eine Funktion $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ ist das Differential am Punkt p als Funktion

$$d_p f : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto d_p f(v)$$

definiert, die f am festen Punkt $p \in M$ in Richtung von $v \in T_p M$ ableitet (daher kam auch die Darstellung $d_p f(X_p) = X_p \cdot f$ mit der zu v gehörigen Derivation X).

Durch Nutzung des Tangentialbündels kann man nun aber den Punkt ebenfalls variieren lassen und so das Differential analog als

$$df : TM \rightarrow \mathbb{R}, (p, v) \mapsto d_p f(v) \quad (4.64)$$

definieren. Daraus ergibt sich anders interpretiert das Objekt

$$df : M \rightarrow T^* M, p \mapsto d_p f, \quad (4.65)$$

wobei es sich wegen der Glattheit von f um eine 1-Form $df \in \Omega^1(M; \mathbb{R})$ handelt. Damit wird auch klar, dass die Ableitung einer Funktion f in Koordinaten nichts Anderes ist als die Kartendarstellung der zugehörigen 1-Form !

Beispiel 4.30: Allgemeine lokale Darstellung

Wie bei den Koeffizienten f_k von 1-Formen zu sehen war, definiert

$$\Theta : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \omega_p(X_p) \quad (4.66)$$

eine glatte (weil ω, X glatt sind) Funktion auf M . Sind nun ω, X als lokale Darstellungen in einer Karte $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben, so kann man auch Θ umschreiben:

$$\begin{aligned} \omega_U(X_U) &= \left(\sum_{j=1}^n f_j dx_j \right) \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \sum_{j=1}^n f_j dx_j \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^n f_j \lambda_k dx_j \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \sum_{j,k=1}^n f_j \lambda_k \delta_{jk} = \sum_{j=1}^n f_j \lambda_j. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Das ist nun sehr einfach punktweise auszuwerten.

Beispiel 4.31: 1-Form auf Sphäre

Man betrachte die 1-Form

$$\omega : T_{(x,y,z)} \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}, X \mapsto dx(X) + 2dy(X) + 3dz(X) + (x^2 + y^2 + z^2)dz(X), \quad (4.68)$$

die in der durch die Standardkoordinaten induzierten lokalen Darstellung gegeben ist (oft wird auch einfach $\omega = dx + 2dy + 4dz$ geschrieben, wobei der Term $x^2 + y^2 + z^2$ wegen der Einschränkung auf \mathbb{S}^2 natürlich wegfällt). Expliziter kann man das für ein allgemeines Vektorfeld $X = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial z}$ umschreiben zu:

$$\omega(X) = a + 2b + 4c, \quad (4.69)$$

wobei lediglich die Linearität von ω und $dx_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \delta_{ij}$ genutzt wurden.

Nun soll die Darstellung dieser 1-Form in der durch die stereographischen Projektionen ϕ, ψ induzierten Trivialisierungen berechnet werden, wobei man dazu einfach die bekannte Transformationsformel nutzen kann:

$$dx_j = \sum_k \frac{\partial x_j \circ y^{-1}}{\partial y_k} \Big|_{y(p)} dy_k.$$

Benötigt werden daher die inversen Abbildungen (weil $y \equiv \phi, \psi$)

$$\begin{aligned}\phi^{-1} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow S^2 \setminus \{S\}, (\phi_1, \phi_2) \mapsto (x, y, z) = \left(\frac{2\phi_1}{1 + \phi_1^2 + \phi_2^2}, \frac{2\phi_2}{1 + \phi_1^2 + \phi_2^2}, \frac{1 - \phi_1^2 - \phi_2^2}{1 + \phi_1^2 + \phi_2^2} \right) \\ \psi^{-1} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow S^2 \setminus \{N\}, (\psi_1, \psi_2) \mapsto (x, y, z) = \left(\frac{2\psi_1}{1 + \psi_1^2 + \psi_2^2}, \frac{2\psi_2}{1 + \psi_1^2 + \psi_2^2}, \frac{\psi_1^2 + \psi_2^2 - 1}{1 + \psi_1^2 + \psi_2^2} \right)\end{aligned}$$

Es sind nun also die jeweiligen partiellen Ableitungen der Komponenten x, y, z nach den Koordinaten ϕ_1, ϕ_2 bzw. ψ_1, ψ_2 zu berechnet. Weil die Abhängigkeiten von diesen Koordinaten aber in der Parametrisierung (also den ausgeschriebenen x, y, z) stecken, müssen die Ableitungen bereits mit eingesetzter Parametrisierung berechnet werden (dadurch spart man sich das Einsetzen von $\phi(p)$ und $\psi(p)$ in die Ergebnisse dort, weil ja $\phi(p) = (\phi_1, \phi_2)$). Wiederum ergibt es Sinn, einfach die Jacobi-Matrizen auszurechnen, weil diese ja bereits alle Koeffizienten enthalten:

$$D_{(\phi_1, \phi_2)} \phi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \phi_1} & \frac{\partial x}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \phi_1} & \frac{\partial y}{\partial \phi_2} \\ \frac{\partial z}{\partial \phi_1} & \frac{\partial z}{\partial \phi_2} \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

$$D_{(\psi_1, \psi_2)} \psi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \psi_1} & \frac{\partial x}{\partial \psi_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \psi_1} & \frac{\partial y}{\partial \psi_2} \\ \frac{\partial z}{\partial \psi_1} & \frac{\partial z}{\partial \psi_2} \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

Kozyklus noch machen

Anmerkung: auch hier gilt der Hinweis, sich weniger von den Indizes verwirren zu lassen. Man muss hier die inverse und transponierte Jacobi-Matrix betrachten (beim Kozyklus so berechnet), daher sind die Karten in Zähler und Nenner vertauscht (vom Invertieren) und man summiert über die ableitenden/ unteren Komponenten, also mit vom Transponieren vertauschten Indizes. Klarer wird das Prinzip in Beispielen, die noch folgen, siehe z.B. (5.44).

Das bereits vorher gezeichnete Diagramm lässt sich nun noch etwas allgemeiner schreiben, weil die Punkte nun eben nicht mehr fest sind (vorher brauchte man ja

streng genommen für jedes p ein eigenes X_p und analog α_p):

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{R} & \xrightarrow{\gamma} & M & \xrightarrow{F} & N & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\
 & & \downarrow X & & \uparrow \pi & & \\
 T^*M & \xrightarrow{\omega} & TM & \xrightarrow{DF} & TN & \xrightarrow{df} &
 \end{array}$$

Man kann nun also über das Differential verschiedene Tangentialbündel und -räume in Verbindung bringen. Das klappt aber auch für Vektorfelder, die ja Abbildungen aus der Mannigfaltigkeit in das Tangentialbündel sind:

Definition 4.32: Verwandtschaft

Zwei Vektorfelder $X \in \mathcal{X}(M)$ und $Y \in \mathcal{X}(N)$ auf zwei Mannigfaltigkeiten M, N heißen **Φ-verwandt**, wenn es eine glatte Abbildung $\Phi : M \rightarrow N$ gibt mit

$$D_p \Phi(X_p) = Y_{\Phi(p)}, \quad \forall p \in M \Leftrightarrow D_{\Phi^{-1}(q)} \Phi(X_{\Phi^{-1}(q)}) = Y_q, \quad \forall q = \Phi(p) \in N. \quad (4.72)$$

Das Prinzip ist also recht einfach: man wechselt die Punkte mithilfe der Abbildung Φ und die Vektorfelder mithilfe des Differentials, transportiert also X mithilfe von Φ auf eine andere Mannigfaltigkeit. Das erlaubt es dann auch, Vektorfelder auf verschiedenen Mannigfaltigkeiten zu vergleichen, weil für Φ -verwandte Vektorfelder X, Y die Änderung der Abbildung Φ entlang X an einem gewissen Punkt $p \in M$ ja gerade Y am Bildpunkt $\Phi(p)$ entspricht (über diese Wirkung sind Vektorfelder gerade festgelegt/ definiert, weil sie als Derivationen interpretierbar sind).

Anmerkung: später wird diese Wirkung bei Vektorfeldern *Push-Forward* genannt.

4.2.1 Weiterführende Aussagen

Nach der Definition und Darstellung folgen nun einige weiterführende Aussagen zu Vektorfeldern und 1-Formen, die primär auf die Arbeit mit (Matrix-)Lie-Gruppen vorbereiten (zumindest im Rahmen dieser Zusammenfassung). Im ersten Schritt soll dabei gezeigt werden, dass man auch für Vektorfelder (also im Prinzip Sammlungen von Tangentialvektoren) etwas wie allgemeine Derivationen findet.

Satz 4.33: Existenz einer Derivation

Für eine Abbildung

$$D : C^\infty(M; \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M; \mathbb{R})$$

mit

$$D(\lambda f + \mu g) = \lambda D(f) + \mu D(g) \quad D(fg) = f D(g) + g D(f)$$

existiert ein eindeutiges Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$, sodass

$$D(f)(p) = X(p) \cdot f . \quad (4.73)$$

Beweisidee. zeige Glattheit der Koeffizientenfunktionen oder so; weil aber jede Derivation an einem Punkt einer Richtungsableitung entspricht und ganz offenbar $\lambda_j = X \cdot x_j$. Weil aber die Koordinatenfunktionen x_j (also die Projektionen auf Komponenten) glatt sind, ist auch deren Ableitung glatt (und damit ihre Derivation). Die Verträglichkeit in einer anderen Karte wird dabei direkt mitgeliefert, weil man mit der Derivation einen unabhängig von der Darstellung wohldefinierten Tangentialvektor hat ! \square

Die Aussage ist im Prinzip, dass man für eine lineare Abbildung D , die die Produktregel erfüllt (wie das Differential), punktweise Derivationen X_p mit gleicher Wirkung auf beliebige f findet. Aufgrund der Wirkung auf Funktionen liefert das nach Lemma 4.25 wieder eine glatte Funktion und erklärt den Wertebereich. D ist dann nichts anderes als eine verallgemeinerte Derivation X , die punktweise (meint: setze einen festen Punkt in die entstehende Funktion ein, nicht in die abgebildete !) eine Derivation $X_p = X(p) : C^\infty(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto (Df)(p)$ definiert.

Im Prinzip ist die Aussage also auch, dass die Ableitung einer Funktion wieder eine Funktion ergibt. Es ist deshalb nicht abwegig, auf diese Funktion wieder eine Derivation bzw. ein Vektorfeld (bedenke: $\text{Der}(M) \cong \mathcal{X}(M)$) wirken zu lassen, was Abbildungen

$$\begin{aligned} XY : C^\infty(M; \mathbb{R}) &\rightarrow C^\infty(M; \mathbb{R}), f \mapsto X \cdot Y \cdot f \\ \text{mit } XY(p) : C^\infty(M; \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto X_p \cdot Y_p \cdot f = D_p(D_p f(Y))(X) \end{aligned}$$

liefert und anders als bisher gewohnt ist im Allgemeinen $XY \neq YX$! Diese Tatsache motiviert die Definition folgender wichtiger Abbildung:

Definition 4.34: Kommutator

Für eine Mannigfaltigkeit M wird die Abbildung

$$[\cdot, \cdot] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M), (X, Y) \mapsto [X, Y] \quad (4.74)$$

Kommutator genannt. Dabei bezeichnet für $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ das Vektorfeld $[X, Y] \in$

$X(M)$ den *Kommutator von X, Y* , das entspricht der Abbildung

$$[X, Y] : C^\infty(M; \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M; \mathbb{R}), f \mapsto [X, Y] \cdot f := X \cdot Y \cdot f - Y \cdot X \cdot f. \quad (4.75)$$

Der Begriff des Kommutators ist vielleicht schon aus der Linearen Algebra von Matrizen bekannt (was sinnvoll ist, der Tangentialraum einer Matrix-Lie-Gruppe besteht wiederum aus Matrizen und der ist ja die Grundlage für Vektorfelder), hier handelt es sich um die allgemeinere Version. Die Aufgabe ist jedoch genau analog, der Kommutator $[X, Y]$ soll messen, wie unterschiedlich die Vektorfelder X und Y wirken, ob die Wirkung des einen die des anderen beeinflusst. Ist der Kommutator die Nullabbildung, so sagt man, dass diese Vektorfelder *vertauschen/ kommutieren*:

$$[X, Y] = 0 \Leftrightarrow XY = YX.$$

Anmerkung: der Kommutator wird sich als Spezialfall der Wirkung der Lie-Ableitung herausstellen, die allerdings im nächsten Kapitel vorkommt.

Beispiel 4.35: Kommutator Gauß'scher Basisvektoren

Nimm Karte $x = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \cdot x_k = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} x_k - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} x_k = \frac{\partial}{\partial x_i} \delta_{jk} - \frac{\partial}{\partial x_j} \delta_{ik} = 0 \quad (4.76)$$

Damit kommutieren die Gauß'schen Basisvektoren schon, weil die Koeffizientenfunktionen x_k lokal die Mannigfaltigkeit beschreiben. Die Gauß'schen Basisvektoren kommutieren also lokal im Koordinatengebiet (das außerhalb davon zu fordern ist nach der Definition der $\frac{\partial}{\partial x_k}$ überhaupt nicht sinnvoll). Weil die Karte x aber beliebig war, folgt die allgemeine Gültigkeit dieser Aussage.

Schaut man sich diese Aussage nun genauer an, so handelt es sich im Prinzip um die Formulierung des Satzes von Schwartz auf Mannigfaltigkeiten (Richtungsableitungen kommutieren entlang der Koordinatenachsen)!

-; da steckt irgendwas Krasses hinter, dass man die x_j als Basis von $C^\infty(M; \mathbb{R})$ bzw. einem Quotienten-VR davon verwenden kann (wurde auch beim Beweis von Derivationen genutzt)

Der Kommutator hat nun einige interessante Eigenschaften:

Satz 4.36: Eigenschaften des Kommutators

Der Kommutator $[X, Y]$ erfüllt

- die Produktregel $[X, Y] \cdot (fg) = \dots = f[X, Y] \cdot g + g[X, Y] \cdot f$

- als Abbildung $[\cdot, \cdot] : X(M) \times X(M) \rightarrow X(M)$ die Bilinearität
- die Schiefsymmetrie $[X, Y] = -[Y, X]$ ($\Rightarrow [X, X] = 0, \forall X \in X(M)$)
- $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X \cdot g)Y - g(Y \cdot f)X$
- die *Jacobi-Identität*: $[X, [Y, Z]] - [[X, Y], Z] - [Y, [X, Z]] = 0$

Bilinearität heißt dabei einfach, dass man bei Festhalten des einen Eintrags eine lineare Abbildung im anderen Eintrag erhält und umgekehrt. Die Idee beim Beweisen von Eigenschaften des Kommutators ist zumeist das Anwenden auf eine Testfunktion f (der man die nötigen Eigenschaften wie Glattheit zuschreibt) und dann Nachrechnen.

Aufgrund dieser Eigenschaften ist der Kommutator das erste Beispiel einer sogenannten *Lie-Klammer*, die in der Theorie der Lie-Gruppen eine wichtige Rolle spielen. Die Jacobi-Identität ist eine charakteristische Eigenschaft von Lie-Klammern, die das Verhalten bei zyklischer Vertauschung klärt. Besser zu merken ist sie in der Form

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]],$$

so sieht das Ganze nämlich nach einer Art Leibniz-Regel aus.

Diese Rechenregeln helfen nun bei der allgemeinen Berechnung einer lokalen Darstellung des Kommutators (auch bei Derivationen waren ja nur die Werte in einer Umgebung wichtig, daher sollte das möglich sein), bisher wurde ja lediglich die einfachste Form lokaler Vektorfelder untersucht, die Gauß'schen Basisvektoren.

Beispiel 4.37: Lokale Darstellung Kommutator

Weil der Kommutator einfach gesagt nur aus zwei Vektorfeldern besteht, ist

$$[X, Y]_U = [X_U, Y_U] \tag{4.77}$$

mit den Einschränkungen der Vektorfelder auf U offen in M . Für gegebene Tri-

vialisierungen $X_U = \sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j}, Y_U = \sum_{k=1}^n \mu_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ kann weiter berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 [X_U, Y_U] &= \left[\sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \sum_{k=1}^n \mu_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right] = \sum_{j,k=1}^n \left[\lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \mu_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right] \\
 &= \sum_{j,k=1}^n \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
 &= \sum_{j,k=1}^n \lambda_j \mu_k \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) + \lambda_j \frac{\partial \mu_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} - \mu_k \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \mu_k \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \\
 &= \sum_{j,k=1}^n \lambda_j \mu_k \left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right] + \lambda_j \frac{\partial \mu_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} - \mu_k \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \\
 &= \sum_{j,k=1}^n \lambda_j \frac{\partial \mu_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} - \mu_k \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j}
 \end{aligned}$$

wobei die Linearität des Kommutators, die Produktregel sowie das Vertauschen der Gauß'schen Basisvektoren genutzt wurden. Weil die Summen über j, k nun aber genau gleich lang laufen, treten die gleichen Terme auf wie bei Vertauschung der Indizes im zweiten Term. Etwas übersichtlicher kann man daher schreiben:

$$[X_U, Y_U] = \left(\sum_{j,k=1}^n \lambda_j \frac{\partial \mu_k}{\partial x_j} - \mu_j \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (4.78)$$

Nachdem also nun einige Eigenschaften von Vektorfeldern vorgestellt wurden, wird das analoge noch mit 1-Formen gemacht. Besonders spannend wird dabei der Fakt sein, dass man den Begriff von Linearformen (die ja bis jetzt immer in die reellen Zahlen abbildeten) auch sinnvoll so erweitern kann, dass in beliebige Vektorräume abgebildet wird und daher Vektoren statt Zahlen als Werte angenommen werden:

Definition 4.38: Vektorwertige 1-Form

Für V als r -dimensionalen Vektorraum mit einer Basis $v_1, \dots, v_r \in V$ wird

$$\omega = \sum_{k=1}^r \omega_k v_k : M \rightarrow C^\infty(T_p M; V), p \mapsto \omega_p \quad (4.79)$$

mit $\omega_k \in \Omega^1(M; \mathbb{R})$ als *V-wertige 1-Form* bezeichnet, $\omega \in \Omega^1(M; V)$. Daraus ergibt

sich punktweise eine lineare Abbildung

$$\omega_p : T_p M \rightarrow V, X \mapsto \sum_{k=1}^n \omega_k(X) v_k. \quad (4.80)$$

Für eine invariante/ basisunabhängige Definition ist die Glattheit von $\omega : TM \rightarrow V$ zu fordern und dass ω faserweise linear ist, also $\omega|_{\pi^{-1}(p)} : T_p M \rightarrow V$ linear.

Die Idee ist also, einfach die bereits bekannten Linearformen in die reellen Zahlen als Koeffizienten eines Vektors in der Basis des Vektors zu schreiben. Zu jedem Tangentialvektor $X \in T_p M$ erhält man dann einen Vektor $v \in V$, der als $v = \sum_{k=1}^r \omega_k v_k$ oder $v = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ geschrieben werden kann. Weil ein Vektorraum natürlich prinzipiell mehrere Basen haben kann, ist die Wohldefiniertheit dieser Definition zu zeigen. Setzt man aber die Entwicklung $v_k = \sum_{j=1}^n \lambda_{kj} a_j$ in einer anderen Basis a_j ein, ergibt das

$$\omega = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^r \lambda_{kj} \omega_k \right) a_j =: \sum_{j=1}^n \eta_j a_j. \quad (4.81)$$

Weil das genau die gleiche Form mit nur etwas veränderten Koeffizienten hat (wie bei Basiswechseln üblich), zeigt das bereits die Wohldefiniertheit.

Es ändert sich also rein formal nicht viel, man erhält ganz analoge Aussagen, z.B. ist für $f : M \rightarrow V$ wieder $df \in \Omega^1(M; V)$. Lediglich der Wertebereich muss bei der Menge der 1-Formen nun extra angegeben werden (das wird allerdings nur gemacht, wenn nicht die reellen Zahlen gemeint sind).

Beispiel 4.39: 1-Form in Matrix-Lie-Gruppe

Insbesondere kann man $V = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ setzen (bzw. als beliebige Untergruppe G davon, die automatisch auch eine Vektorraumstruktur hat). Die einfachste denkbare Basis davon sind die Vektoren bzw. Matrizen

$$\{v_k\}_{k=1}^{n^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Statt die Basisvektoren v_k zu benutzen und dann Ausdrücke wie

$$\omega = \sum_{k=1}^{n^2} \omega_k v_k$$

zu erhalten, schreibt man das Ganze oft lieber um mit der Bezeichnung g_{ij} (die das Basiselement mit einer 1 in der ij -Komponente bezeichnet, die Basis bleibt also gleich und wird nur anders genannt!) und erhält damit

$$\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_{ij} g_{ij}.$$

Dieser Fall mit G wird noch ausführlicher in einem eigenen Abschnitt behandelt.

Dass Ableitungen von Funktionen 1-Formen sind, ist nun auch für vektorwertige 1-Formen klar. Jedoch kann man sich auch die umgekehrte Frage stellen, also: wann gehört zu einer 1-Form ω eine Funktion f , sodass $df = \omega$? Es stellt sich heraus, dass das nicht für jede 1-Form gilt, man aber eine Bedingung finden kann. Zunächst wird der Fall $V = \mathbb{R}$ gezeigt, eine Verallgemeinerung folgt aber noch.

Satz 4.40: Integrabilitätsbedingung

Falls für $\omega \in \Omega^1(M)$ eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $df = \omega$ existiert, dann gilt

$$X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) - \omega([X, Y]) = 0, \quad \forall X, Y \in X(M). \quad (4.82)$$

Erfüllt ein $\omega \in \Omega^1(M)$ andererseits diese Bedingung, dann existieren für alle Punkte $p \in M$ offene Umgebungen $U \subset M$ sowie $f_U : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\omega_U = df_U$.

Verschiedene solche Funktionen f_U, f_V unterscheiden sich dabei auf den Zusammenhangskomponenten von $U \cap V$ lediglich um eine Konstante

$$f_{U,V} = (f_U)_{U \cap V} - (f_V)_{U \cap V} \in \mathbb{R}. \quad (4.83)$$

Beweis. schöne Sache: man kann hier zeigen, dass $\frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \lambda_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \lambda_k$! mache dazu erstmal lokale Darstellung (also die lokale Trivialisierung angibt); setze dann spezielle Vektorfelder ein, nämlich zwei aus der Gauß'schen Basis! Kommutator von denen wird 0, dann steht da eben $0 = \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right) - \frac{\partial}{\partial x_l} \cdot \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \lambda_l - \frac{\partial}{\partial x_l} \cdot \lambda_k$; wenn man die λ als Richtungsableitung interpretiert (was geht, weil es ja genau da raus kommt), dann entspricht das dem Kommutieren der zweiten Ableitung und damit dem Satz von Schwarz!

der zweite Teil ist mit dem ersten recht leicht zu zeigen:

$$df_{U,V} = d((f_U)_{U \cap V} - (f_V)_{U \cap V}) = d(f_U)_{U \cap V} - d(f_V)_{U \cap V} = \omega_{U \cap V} - \omega_{U \cap V} = 0$$

□

Umschreiben von (4.82) in die äquivalente Form

$$X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) = \omega(XY - YX) = \omega(XY) - \omega(YX)$$

erlaubt die Interpretation, dass ein Vektorfeld an der 1-Form „vorbeiziehbar“ sein muss (bzw. die dabei entstehenden, zusätzlichen Terme sich gerade herauskürzen).

Das Ganze heißt *Integrabilitätsbedingung* für die Abbildung $p \mapsto \omega_p = d_p f$, weil sie gerade eine notwendige Bedingung für die Existenz einer *Stammfunktion f* liefert. Rechnet man also (4.82) nach und erhält etwas anderes als 0, dann existiert sicher keine Stammfunktion und damit liefert dieser Satz ein sehr einfaches Kriterium dafür (? vereinfacht wird das Nachrechnen dadurch, dass es für alle Vektorfelder gelten muss, können also immer passende wählen, z.B. schön einfache wie einen einzelnen Gauß'schen Basisvektor -ζ ? really, bei Widerlegen klar, aber bei Zeigen ? Vlt wegen irgendwas mit Basisdarstellung in Gauß'scher, aber so allgemein sollte das eigentlich nicht gehen...).

-ζ man kann nur lokal integrieren !!!

Findet man eine Lösung, so ist diese wegen des Auftretens der Ableitung df offenbar nur bis auf eine Konstante bestimmt und gilt auch nicht immer global, sondern nur auf einer Zusammenhangskomponente (was natürlich auch der gesamte Raum sein kann), was vorher in der Analysis nicht anders war. Hilfreich ist jedoch, dass die Lösungen auf unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten ebenfalls nicht sehr verschieden sind, sondern sich analog zur Eindeutigkeit (galt bis auf eine Konstante) nur um eine Konstante unterscheiden. Die Behandlung der Lösungen kann also ziemlich einheitlich und oBdA auf die Lösung auf einer Zusammenhangskomponente reduziert werden.

Beispiel 4.41: Gegenbeispiel

Wie bereits erwähnt, gilt diese Bedingung natürlich nicht immer. Das kann man auch konkreter anhand eines Gegenbeispiels auf $M = \mathbb{R}^2$ mit Koordinaten (x, y) zeigen. Für die 1-Form $\omega = x dy$ ist nämlich

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \omega\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y} \cdot \omega\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) - \omega(0) = \frac{\partial}{\partial x} \cdot x - \frac{\partial}{\partial y} \cdot 0 - 0 = 1 \neq 0.$$

Bei dieser Richtung ist zu beachten, dass es sich bei $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ und $\{dx, dy\}$ gerade um zueinander duale Basen handelt, weshalb man z.B. nach „Einsetzen“ von $\frac{\partial}{\partial x}$ in dx gerade die 1 erhält und sonst 0.

-ζ u see, hier reicht es weil Gegenbeispiel; aber bei Zeigen auch ?

Obwohl nun gerade gesagt wurde, dass im Allgemeinen Gegenbeispiele existieren,

gibt es dort wiederum Spezialfälle (quasi Gegenbeispiele gegen Gegenbeispiele).

Beispiel 4.42: 1D-Mannigfaltigkeit

1-Formen auf 1D-Mannigfaltigkeiten M erfüllen die Integritätsbedingung (4.82) immer. Dass dem so ist, wird erst mit der Einführung des Dachprodukts und des Äußeren Differentials ab 6.18 klar, mit dem sich die Integritätsbedingung als $d\omega = 0$ schreiben lässt. Diese Forderung ist im Falle von 1-Formen auf 1D-Mannigfaltigkeiten aber sofort erfüllt, weil 2-Formen auf eben solchen nicht existieren (nur die Nullform, die alle Vektorfelder auf 0 abbildet) und $d\omega$ gerade eine 2-Form ist.

Beispiel 4.43

hier nachrechnen des Beispiels aus HÜ 4 (1-Form wurde bereits berechnet)

4.2.2 (Matrix-)Lie-Gruppen 2 und Maurer-Cartan-Theorie

Eine ganz wichtige Anwendung vektorwertiger 1-Formen ist der Fall, bei dem Werte in allgemeinen Lie-Gruppen G angenommen werden. Deren Theorie wurde aber noch nicht wirklich entwickelt, beispielsweise muss der Begriff der Lie-Algebra noch übertragen werden. Hier wird zwar weiterhin zum Großteil mit Matrix-Lie-Gruppen weitergearbeitet, die Aussagen sind jedoch zur Verallgemeinerung geeignet, weil man im Wesentlichen nur die Verknüpfung Multiplikation auf GL / Untermannigfaltigkeiten davon durch die jeweils betrachtete Verknüpfung auf G ersetzen muss.

Für eine Matrix-Lie-Gruppe G galt ja $T_g G = D_e L_g(g)$ mit der Lie-Algebra $\mathfrak{g} = T_e G$ und der Abbildung $L_g : G \rightarrow G$, $h \mapsto gh$. Differenzieren dieser Abbildung an einer beliebigen Stelle (durchgerechnet im Beweis zu Satz 3.33) ergab $D_p L_g = D_e L_g$ und dann $D_e L_g(\xi) = g\xi$ für $\xi \in T_e G$. Man multipliziert also ein Element $g \in G$ mit einem $\xi \in T_e G$, was wegen $G, T_e G \subset GL(n, \mathbb{R})$ funktioniert (man hat die gleiche Verknüpfung Multiplikation). Dort war es dann üblich, einen festen Punkt $g \in G$ zu betrachten, weil das für verschiedene ξ den Tangentialraum $T_g G$ ergab. Es ist aber ebenfalls interessant, das Element $\xi \in T_e G$ festzuhalten und den Punkt g zu variieren, weil das einer Abbildung entspricht, die zu verschiedenen Punkten jeweils einen Tangentialvektor an diesem Punkt ergibt. Man hat damit also ein Vektorfeld

$$X^\xi : G \rightarrow T_g G, g \mapsto X^\xi(g) = X_g^\xi = g\xi = D_e L_g(\xi) \quad (4.84)$$

konstruiert (die dazu benötigte Glattheit von L_g ist klar)! Anschaulich gesagt verschiebt/ pusht X^ξ den Vektor ξ mithilfe des Differentials vom Punkt e weg zu anderen Punkten g auf der Mannigfaltigkeit G , wo er dann die Form X_g^ξ annimmt.

Weil man jedem Element $h \in T_e G = \mathfrak{g}$ ein solches Vektorfeld zuordnen kann, mag man sich die Frage stellen, ob nicht $\mathcal{X}(G) \equiv \mathfrak{g}$? Die Antwort ist im Allgemeinen nein, weil natürlich auch Vektorfelder $X \in \mathcal{X}(G)$ denkbar sind mit: $X_g = X_g^\xi = g\xi$, aber $X_{\tilde{g}} = X_{\tilde{g}}^\mu = \tilde{g}\mu$ für $g \neq \tilde{g}$. Obwohl $\mathcal{X}(G)$ als Vektorraum zusammen mit der Lie-Klammer $[X, Y] \cdot f = X \cdot Y \cdot f - Y \cdot X \cdot f$ auch eine Lie-Algebra bildet, ist das offenbar nicht die hier interessante, von G induzierte Lie-Algebra \mathfrak{g} . Damit stellt sich aber die Frage, wie man die Elemente ξ von \mathfrak{g} alternativ klassifizieren kann.

Anmerkung: dass $\mathfrak{g} \neq \mathcal{X}(M)$ sieht man meist schon an den Dimensionen. Im Allgemeinen gilt ja $\dim(\mathcal{X}(M)) = \infty$, aber wegen $\dim(G) = \dim(T_g G)$, $\forall g \in G$ ist $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(T_e G) = \dim(G)$ und das ist in den meisten Fällen endlich.

Über Vektorfelder zu gehen, stellt sich aber trotzdem als der richtige Ansatz heraus, jedoch nur solche von der Art X^ξ , weil für diese folgende Eigenschaft gilt:

Satz 4.44: Linksinvarianz

Für $X \in \mathcal{X}(G)$ mit G als Lie-Gruppe ist die Existenz eines $\xi \in \mathfrak{g}$, sodass $X = X^\xi$, äquivalent zur L_g -Verwandtheit von X zu sich selbst.

Beweis. Man zeigt hier einfach, dass eine Voraussetzung die jeweils andere impliziert. Im ersten Fall muss mit $g \in G$ beliebig das von $L_g : G \rightarrow G$, $h \mapsto gh$ induzierte Vektorfeld $X_g^\xi = D_e L_g(\xi)$ untersucht werden. Für ein anderes Element $\tilde{g} \in G$ mit der zugehörigen Linkstranslation $L_{\tilde{g}} : G \rightarrow G$, $h \mapsto \tilde{g}h$ gilt dann

$$D_g L_{\tilde{g}}(X_g^\xi) = D_g L_{\tilde{g}}(D_e L_g(\xi)) = D_e L_{\tilde{g}g}(\xi) = X_{\tilde{g}g}^\xi = X_{L_{\tilde{g}}(g)}^\xi$$

und damit ist gezeigt, dass X^ξ $L_{\tilde{g}}$ -verwandt zu X^ξ bzw. sich selbst für alle $\tilde{g} \in G$ ist.

Umgekehrt muss für $X \in \mathcal{X}(G)$ beliebig mit der Eigenschaft, dass es $L_{\tilde{g}}$ -verwandt zu sich selber am allen Punkten $\tilde{g} \in G$ ist, nur ein $\xi \in \mathfrak{g}$ gefunden werden, sodass $X_g = X_g^\xi$, $\forall g \in G$. Betrachtet man aber die Definition $\mathfrak{g} = T_e G$ genauer, so ist sofort die Wahl $\xi = X_e$ klar. Das erfüllt dann auch die gewünschte punktweise Gleichheit:

$$X_g = X_{ge} = D_e L_g(X_e) = D_e L_g(\xi) = X_g^\xi . \quad \square$$

Die Selbstverwandtheit bedeutet, dass dort die gleichen Vektorfelder vorliegen und weil sie eben von der Linkstranslation vermittelt wird, hat man damit eine Linksinvarianz aller Vektorfelder X^ξ . Das bildet dann die gesuchte definierende Eigenschaft der induzierten Lie-Algebra: für ihre Elemente ξ soll $g\xi = X_g^\xi$ linksinvariant sein.

Es wurde ja bereits erwähnt, dass der Kommutator $[\cdot, \cdot]$ die Lie-Klammer auf \mathfrak{g} bilden soll und damit eine Verknüpfung eben jener Lie-Algebra. Jedoch ist die dazu nötige

Abgeschlossenheit von \mathfrak{g} unter seiner Wirkung keineswegs direkt klar, sondern muss nachgewiesen werden. Dabei hilft folgende Aussage:

Lemma 4.45: Kommutator verwandter Vektorfelder

Für $\Phi : M \rightarrow N$ und zwei Φ -verwandte Paare von Vektorfeldern $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ und $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{X}(N)$ sind auch $[X, Y]$ und $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ Φ -verwandt.

Beweis. Nach der Kettenregel folgt zunächst (man beachte: das gilt nur für verwandte Vektorfelder mit $\tilde{X}_{\Phi(p)} = D_p \Phi(X_p)$, weil das explizit genutzt wird)

$$X_p \cdot (f \circ \Phi) = D_p(f \circ \Phi)(X_p) = D_{\Phi(p)} f \circ D_p \Phi(X_p) = D_{\Phi(p)} f(\tilde{X}_{\Phi(p)}) = \tilde{X}_{\Phi(p)} \cdot f,$$

das heißt Verwandtheit $\tilde{X}_{\Phi(p)} = D_p \Phi(X_p)$ ist äquivalent zur Wirkung als $\tilde{X}_{\Phi(p)} \cdot f = X_p \cdot (f \circ \Phi)$. Schreibt man das um zu $(\tilde{X} \cdot f)(\Phi(p)) = (X \cdot (f \circ \Phi))(p)$, so lässt sich daraus auch die Gleichheit $(\tilde{X} \cdot f) \circ \Phi = X \cdot (f \circ \Phi)$ ohne Punkt machen. Erinnert man sich nun noch, dass $\tilde{Y} \cdot f$ ebenfalls eine Funktion ist, so kann man das (mehrfach) ausnutzen und für die Kommutatoren berechnen:

$$\begin{aligned} ([\tilde{X}, \tilde{Y}] \cdot f) \circ \Phi &= (\tilde{X} \cdot \tilde{Y} \cdot f) \circ \Phi - (\tilde{Y} \cdot \tilde{X} \cdot f) \circ \Phi \\ &= X \cdot ((\tilde{Y} \cdot f) \circ \Phi) - Y \cdot ((\tilde{X} \cdot f) \circ \Phi) \\ &= X \cdot Y \cdot (f \circ \Phi) - Y \cdot X \cdot (f \circ \Phi) \\ &= [X, Y] \cdot (f \circ \Phi). \end{aligned}$$

Damit gilt nach der ersten Überlegung auch

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}]_{\Phi(p)} = D_p \Phi([X, Y]_p).$$

□

Als Korollar daraus folgt dann die gewollte Aussage:

Korollar 4.46: Kommutator von Vektorfeldern

Für zwei Vektorfelder $X^\xi, X^\mu \in \mathcal{X}(G)$ auf einer Lie-Gruppe G gilt

$$[X^\xi, X^\mu] = X^{[\xi, \mu]}.$$
(4.85)

Beweis. Mit dem vorherigen Lemma ist der Beweis recht einfach möglich und erspart lokales Nachrechnen (was im Falle einer Matrix-Lie-Gruppe mithilfe einiger Matrixmultiplikationen aber durchaus möglich wäre). Danach gilt nämlich

$$D_p \Phi([X, Y]_p) = [D_p \Phi(X), D_p \Phi(Y)]_{\Phi(p)}.$$

Setzt man nun aber $\Phi = L_g$ und $X = X^\xi, Y = X^\mu$, so gilt für die beiden Seiten bei Betrachtung der Stelle $p = e$ (ist oBdA möglich, weil $e \in G$ sein muss):

$$D_e L_g \left([X^\xi, X^\mu]_e \right) = D_e L_g \left([X_e^\xi, X_e^\mu] \right) = D_e L_g([\xi, \mu]) = X^{[\xi, \mu]}$$

$$[D_e L_g(\xi), D_e L_g(\mu)] = [X_g^\xi, X_g^\mu] = [X^\xi, X^\mu]_g$$

und daraus folgt (gilt in beliebigen und damit allen $g \in G$, also für die Abbildung)

$$[X^\xi, X^\mu]_g = [D_e L_g(\xi), D_e L_g(\mu)] = D_e L_g \left([X^\xi, X^\mu]_e \right) = X_g^{[\xi, \mu]} . \quad \square$$

Anmerkung: im Allgemeinen werden die Rechnungen dabei zunächst für die Matrix-Lie-Gruppe $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit Lie-Algebra $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ durchgeführt und dann unter Ausnutzen der Untermannigfaltigkeitenstruktur anderer Matrix-Lie-Gruppen darauf übertragen (die sind ja immer Teilmengen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$).

Diese Eigenschaft wirkt zunächst vielleicht etwas unscheinbar, ist aber sehr wichtig. Sie zeigt nämlich die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{g} = T_e G$ unter der Verknüpfung $[\cdot, \cdot]$ (aus der Existenz von $X^{[\xi, \mu]}$ folgt nach Satz 4.44 insbesondere $[\xi, \mu] \in T_e G$) und wegen $[X^\xi, X^\mu]_g = X_g^{[\xi, \mu]} \in T_g G$ sogar auch die von $T_g G$ für beliebige $g \in G$ unter $[\cdot, \cdot]!$ Ein weiterer großer Vorteil ist, dass sich wegen (4.85) alle relevanten Eigenschaften der Lie-Klammer (wie die Jacobi-Identität) automatisch von \mathfrak{g} übertragen auf allgemeine Tangentialräume, auch dort kann der Kommutator nun also sinnvoll wirken.

Diese Eigenschaft ist ein erster Hinweis auf gewisse Zusammenhänge zwischen einer Lie-Gruppe (bzw. genauer: dem Tangentialraum davon) und der induzierten Lie-Algebra. Obwohl diese Strukturen zunächst als Mannigfaltigkeit und Tangentialraum höchstens über das Anknüpfen an Fußpunkten in Verbindung stehen (man denke hier an Punkte vs. Vektoren), existiert ein sehr viel konkreterer Zusammenhang zwischen ihnen, den man über zum Beispiel über Betrachtung der zu einem solchen Vektorfeld X^ξ gehörigen Integralkurven finden kann. Die zugehörige Theorie wird zwar erst in einem späteren Abschnitt behandelt (genauer: 5.3), wurde aber bereits in Abschnitt 1.5 angefangen. Es stellt sich dort als natürliche Frage heraus, das Anfangswertproblem zu einem Vektorfeld zu betrachten, also beispielsweise:

$$\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}^\xi, \quad \forall t \in I$$

mit einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $\gamma : I \rightarrow G$. Durch die spezielle Form von X^ξ ergibt sich daraus die sehr konkrete und einfache Differentialgleichung

$$\gamma'(t) = \gamma(t) \xi . \quad (4.86)$$

Da das ξ in irgendeiner Weise als innere Ableitung aus γ herauskommen muss,

solche inneren Ableitungen aber immer links von der abzuleitenden Funktion auftauchen, wird hier die Annahme gemacht, dass $[\gamma(t), \xi] = 0, \forall t \in I$ (mögliche andere Lösungen interessieren hier nämlich nicht). Dann lässt sich die DGL sofort lösen:

$$\gamma'(t) = \gamma(t) \xi = \xi \gamma(t) \quad \Leftrightarrow \quad \gamma(t) = \text{Exp}(t\xi). \quad (4.87)$$

Diese Integralkurve γ ist dann also eine Abbildung aus den reellen Zahlen in die Lie-Gruppe G . Ebenso interessant bzw. noch interessanter ist aber das Ergebnis, das man durch Festhalten eines beliebigen t erhält (oBdA wird hier $t = 1$ gesetzt) und stattdessen $\xi \in \mathfrak{g}$ variiert. Das ergibt die bereits angedeutete konkrete Verbindung zwischen Lie-Gruppe und -Algebra, die wichtige Exponentialabbildung:

Definition 4.47: Exponentialabbildung

Die *Exponentialabbildung* ist definiert als

$$\text{Exp} : \mathfrak{g} \rightarrow G, \xi \mapsto \text{Exp}(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \xi^k. \quad (4.88)$$

mit $\xi^0 = e = \text{id}$ und $\xi^{k+1} = \xi \xi^k$.

Mit ξ^k meint man also lediglich das k -fache Produkt der Matrix ξ in der Matrix-Algebra, wobei dieses induktiv definiert ist mit „Anfangswert“ $\xi^0 = e$ (wie $x^0 = 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$). Weil es sich um eine unendliche Reihe handelt (unendliches Produkt der Matrix wird gebildet), erlaubt das die Interpretation, dass in der Lie-Algebra die infinitesimale Wirkung der Lie-Gruppe steckt. \mathfrak{g} ist damit als Erzeuger von G zu sehen, diese Interpretation spielt unter Anderem bei Symmetrien in der Physik eine große Rolle für das Verständnis der zugrundeliegenden Zusammenhänge. Die mathematische Grundlage/ Robustheit dazu wird geliefert von der Tatsache, dass die Exponentialabbildung ein Diffeomorphismus ist (das ergibt sich in späteren Abschnitten und wird in Beispiel 5.36 genauer erläutert).

Dass nun eine Abbildung mit dem Namen Exponentialabbildung auftaucht, mag zunächst sehr verwirrend klingen, da sich damit scheinbar eine Kollision mit der Exponentialfunktion $\text{Exp} = e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ mit der Eulerschen Zahl e ergibt. Es handelt sich jedoch nicht um eine Kollision, im Prinzip handelt es sich um ein und die selbe Abbildung! Das kann man daran sehen, dass ja $T_p \mathbb{R} \cong \mathbb{R}, \forall p$ gilt und dass Punkte in \mathbb{R} sich einfach als 1×1 -Matrizen interpretieren lassen. Es handelt sich bei e^x also nur um einen Spezialfall der hier definierten Exponentialabbildung (dass das Sinn ergibt sieht man auch daran, dass beide die gleiche DGL 4.87 erfüllen)! Mit Kenntnis dieser Gemeinsamkeit überrascht das folgende Lemma dann auch nicht:

Lemma 4.48: Rechenregeln der Exponentialabbildung

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\text{Exp}((a + b) \cdot \xi) = \text{Exp}(a \cdot \xi) \text{Exp}(b \cdot \xi). \quad (4.89)$$

Zudem erfüllt die Kurve $\gamma = \gamma_\xi : \mathbb{R} \rightarrow G$, $t \mapsto \text{Exp}(t\xi)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\gamma_\xi(t) = \frac{d}{dt}\text{Exp}(t\xi) = \xi \text{Exp}(t\xi) = \xi \gamma_\xi(t) = X_{\gamma_\xi(t)}^\xi \in T_{\gamma_\xi(t)}G. \quad (4.90)$$

Die zweite Gleichung ergibt wegen $\text{Exp}(\xi) \in G, \xi \in \mathfrak{g} = T_e G$ ein Element von $T_{\text{Exp}(\xi)}G$, wie es bei DGL auf Mannigfaltigkeiten schon vorher der Fall war.

Die erste Eigenschaft gibt übrigens zusätzlich wegen

$$\text{Exp}(\xi)\text{Exp}(-\xi) = \text{Exp}(0) = e \quad (4.91)$$

insbesondere das zu $\text{Exp}(\xi)$ inverse Element $\text{Exp}(-\xi)$. Bei allen Rechnungen mit der Exponentialabbildung ist zu beachten, dass zwar $\xi \text{Exp}(\xi) = \text{Exp}(\xi)\xi$ gilt, aber

$$\text{Exp}(\xi)\text{Exp}(\mu) \neq \text{Exp}(\mu)\text{Exp}(\xi), \quad (4.92)$$

weil die Matrizen ξ, μ im Allgemeinen nicht kommutieren, weshalb analog

$$\text{Exp}(\xi + \mu) \neq \text{Exp}(\mu)\text{Exp}(\xi). \quad (4.93)$$

Streng genommen galten die bisherigen Diskussionen dabei wiederum nur für $G \subset \text{GL}(n, \mathbb{R})$, aber auch hier lässt sich das ganze auf beliebige Untergruppen bzw. äquivalent Untermannigfaltigkeiten erweitern, für $\xi \in \mathfrak{g} = T_e G$ ist also $\text{Exp}(\xi) \in G$ (daher wurde nicht unterschieden). Dass das wirklich klappt und dass Exponentialabbildungen i.A. nicht jedes mal über die Reihendefinition berechnet werden, zeigt folgendes Beispiel:

Beispiel 4.49: Exponentialabbildung zu $\mathfrak{so}(2)$

Gesucht wird hier die Abbildung

$$\text{Exp} : \mathfrak{so}(2) \rightarrow \text{SO}(2), \mathfrak{g} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{g}^n}{n!}.$$

Die Aufgabe ist deshalb, die Potenzen für Elemente der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(2)$ zu berechnen. Nach Beispiel 3.5 ist bekannt, dass diese durch die schiefsymmetrischen

2×2 -Matrizen gegeben sind, deren allgemeine Form wie folgt ist:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 = d, b = -c \\ \Rightarrow \quad \mathfrak{o}(2) = \mathfrak{so}(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Dabei muss man $c \neq 0$ aufgrund der Invertierbarkeit fordern, die Nullmatrix ist schließlich nicht invertierbar (?).

Man kann nun per Induktion das n -fache Produkt berechnen, zunächst für $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix}.$$

Für gerade n (füre dazu neue Variable k mit $n = 2k$ ein) erhält man deshalb:

$$\begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}^{2k} = \left(\begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}^2 \right)^k = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 \\ 0 & -c^2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} (-1)^k c^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k c^{2k} \end{pmatrix} \quad (4.95)$$

und daraus analog für ungerade

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} &= \left(\begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}^2 \right)^k \cdot \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)^k c^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k c^{2k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+1} c^{2k+1} \\ (-1)^k c^{2k+1} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.96) \end{aligned}$$

Ein kurzer Vergleich mit den Potenzreihen der trigonometrischen Funktionen,

$$\sin(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \cos(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

ergibt dann für die Exponentialabbildung von $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(c) \in \mathfrak{so}(2)$:

$$\begin{aligned}
 \text{Exp}(\mathfrak{g}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{g}^n}{n!} = \sum_{n=0, n \text{ gerade}}^{\infty} \frac{\mathfrak{g}^n}{n!} + \sum_{n=0, n \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{\mathfrak{g}^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{g}^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{g}^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \begin{pmatrix} (-1)^k c^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k c^{2k} \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+1} c^{2k+1} \\ (-1)^k c^{2k+1} & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(c) & 0 \\ 0 & \cos(c) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sin(c) \\ \sin(c) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(c) & -\sin(c) \\ \sin(c) & \cos(c) \end{pmatrix} \quad (4.97)
 \end{aligned}$$

Wegen $\sin(c)^2 + \cos(c)^2 = 1$ erfüllt das $\det(\exp(\mathfrak{g})) = 1, \forall c$ und weil zudem aufgrund von Additionstheoremen die Orthogonalität erfüllt ist, erhält man so immer ein Element von $\text{SO}(2)$. Das Inverse ist entspricht dann wegen $-\sin(c) = \sin(-c), \cos(c) = \cos(-c)$ sehr anschaulich der Drehung um den negativen Winkel, das „rückgängig machen“ beim Invertieren ist hier sehr wörtlich zu nehmen.

Man kann zudem sehen, dass Ableiten dieses Elements der Lie-Gruppe an der Stelle $c = 0$ gerade ein Element der Lie-Algebra ergibt ? sinnvoll ?:

$$\begin{aligned}
 g : \mathbb{R} \rightarrow G, c \mapsto g(c) &= \begin{pmatrix} \cos(c) & -\sin(c) \\ \sin(c) & \cos(c) \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow D_{c=0} g(c) &= \left. \begin{pmatrix} -\sin(c) & -\cos(c) \\ \cos(c) & -\sin(c) \end{pmatrix} \right|_{c=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Anmerkung: die anderen Elemente aus $O(n)$ haben bekanntlich Determinante -1 und entsprechen daher Drehspiegelungen. Für sie ergibt sich

$$\text{Exp}(\mathfrak{g}) = \begin{pmatrix} \cos(c) & \sin(c) \\ \sin(c) & -\cos(c) \end{pmatrix},$$

man muss also einfach oBdA die rechte Spalte mit einem minus multiplizieren (was dann das minus in der Determinante bewirkt). Natürlich könnte man auch die linke Spalte mit einem minus versehen, aber das entspräche einfach nur der Drehung um den jeweiligen negativen Winkel und ist deshalb äquivalent.

Nachdem man nun mit Lie-Gruppen/-Algebren und ihren Eigenschaften besser vertraut ist, kann auch die (am Anfang des Abschnitts angekündigte) Diskussion von Funktionen mit Werten in Lie-Gruppen G sowie den zugehörigen 1-Formen begonnen werden (wobei sich hier wieder auf den Fall $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ konzentriert wird). Statt Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ soll es also um glatte Funktionen $f : M \rightarrow G$ gehen (wegen der Mannigfaltigkeitenstruktur von G wäre Abbildungen aber ebenfalls passend).

Ein interessanter Ansatz ist, solche Funktionen über damit assoziierte 1-Formen zu beschreiben. Auch wenn das zunächst merkwürdig erscheint, liegt sofort die Idee nahe, das Differential $Df = df : TM \rightarrow TG$, $(p, v) \mapsto (f(p), d_p f(v))$ zu benutzen, aber das ist noch eine Abbildung nach TG und nicht nach G . Hier hilft aber die Existenz der natürlichen Isomorphie $TG \cong G \times \mathfrak{g}$, die von

$$\Psi : G \times \mathfrak{g} \rightarrow TG, (g, \xi) \mapsto (g, g\xi)$$

vermittelt wird. Weil Matrix-Lie-Gruppen als Teilmengen von $GL(n, \mathbb{R})$ immer aus invertierbaren Matrizen bestehen, kann man diese Abbildung umkehren und erhält

$$\Psi^{-1} : TG \rightarrow G \times \mathfrak{g}, (g, v) = (g, g\xi) \mapsto (g, g^{-1}v) = (g, \xi).$$

Damit wird die Betrachtung der Abbildung

$$\Psi^{-1} \circ df : TM \rightarrow G \times \mathfrak{g}, (p, v) \mapsto \left(f(p), f(p)^{-1} d_p f(v) \right)$$

möglich, wobei mit

$$f^{-1} : M \rightarrow G, p \mapsto f^{-1}(p) = (f(p))^{-1}$$

die Abbildung auf die inverse Matrix des jeweiligen Bildpunktes gemeint ist (nicht das Inverse von f , dessen Existenz ist nicht einmal garantiert!). Das ist glatt, weil die Inversenbildung in $GL(n, \mathbb{R})$ glatt ist, und das erlaubt wiederum die Konstruktion

einer vektorwertigen 1-Form mit Werten in der Lie-Algebra \mathfrak{g} :

$$\omega_f = \pi_2 \circ \Psi^{-1} \circ df : TM \rightarrow G \times \mathfrak{g}, (p, v) \mapsto f^{-1}(p) d_p f(v). \quad (4.98)$$

Diese 1-Form $\omega_f \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ wird *Maurer-Cartan-Form* genannt und ist eindeutig (die Inversenbildung ist eindeutig, weshalb aus $f^{-1}(p) = g^{-1}(p), \forall p \in M$ bereits $f(p) = g(p), \forall p \in M$ und damit $f = g$ folgt). Für jedes $f \in C^\infty(M, G)$ existiert also eine eindeutige Maurer-Cartan-Form und das war das erklärte Ziel.

Weil jede Gruppe das inverse Element enthalten muss und Lie-Gruppen G dort keine Ausnahmen sind, kann man auch fragen, welche Maurer-Cartan-Form zu f^{-1} gehört. Der Vorfaktor ist wegen $(f^{-1})^{-1} = f$ klar, aber um das Differential $d(f^{-1})$ mit f ausdrücken zu können, muss zunächst noch eine Rechenregel gezeigt werden:

Satz 4.50: Quotientenregel

Für $f : M \rightarrow G$ glatt gilt

$$d(f^{-1}) = -f^{-1} df f^{-1}. \quad (4.99)$$

Damit folgt dann der gewünschte Ausdruck

$$\omega_{f^{-1}} = f d(f^{-1}) = -f \cdot \omega_f \cdot f^{-1}. \quad (4.100)$$

Beispiel 4.51: Reelle Zahlen

Hier soll einmal klar gemacht werden, was bei einer Abbildung in die reellen Zahlen besonders ist. Für $f = \text{Exp}(h) : M \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$ mit $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} \omega_f &= f^{-1} df = e^{-h} d(e^h) = e^{-h} e^h dh = dh \\ \omega_{f^{-1}} &= f d(f^{-1}) = e^h d(e^{-h}) = e^h e^{-h} (-dh) = -dh = -\omega_f. \end{aligned}$$

Dass hier alles eine sehr einfache Form annimmt, liegt daran, dass reelle Zahlen kommutieren, Elemente von (Matrix-)Lie-Gruppen aber im Allgemeinen nicht.

Nachdem nun mit den Maurer-Cartan-Formen eine neue Art von 1-Formen bekannt geworden ist, stellt sich die Frage, wieviele 1-Formen von dieser Art sind. Anders gesagt stellt man sich also die Frage: wann gibt es eine Funktion $f : M \rightarrow G$, sodass $\omega = \omega_f$ für ein $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ oder äquivalent wann ist das ω integrierbar? Gesucht ist damit eine Integrabilitätsbedingung wie Satz 4.40, nur für Lie-Algebra-wertige 1-Formen. Auf dem Weg dahin sind noch einige Dinge zur Vorbereitung nötig, im ersten Schritt wird dabei eine Eigenschaft von Maurer-Cartan-Formen gezeigt:

Satz 4.52: Maurer-Cartan-Gleichung

Für eine Matrix-Lie-Gruppe $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $f : M \rightarrow G$ glatt gilt

$$X \cdot \omega_f(Y) - Y \cdot \omega_f(X) - \omega_f([X, Y]) = -[\omega_f(X), \omega_f(Y)] \quad (4.101)$$

für alle $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Der zweite Kommutator wird dabei in der Matrix-Lie-Algebra gebildet. Es ist gut zu wissen, dass Maurer-Cartan-Formen diese Bedingung erfüllen, aber darin steckt noch keine Aussage, die das Ganze mit allgemeinen 1-Formen in Beziehung setzt.

Bevor das geschieht, soll die Gleichung aber noch etwas übersichtlicher gemacht und zugleich nützliche Eigenschaften der auftretenden Größen gezeigt werden:

Lemma 4.53

Für einen endlich-dimensionalen Vektorraum V , eine 1-Form $\omega \in \Omega^1(M, V)$ und zwei Vektorfelder $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ zusammen mit Tangentialvektoren $x, y \in T_p M$, sodass $X_p = x, Y_p = y$ ist die Abbildung

$$d_p \omega : T_p M \times T_p M \rightarrow V, (x, y) \mapsto X_p \cdot \omega(Y) - Y_p \omega(X) - \omega([X, Y]_p) \quad (4.102)$$

wohldefiniert. Zudem ist die Abbildung $d\omega : p \mapsto d_p \omega(X_p, Y_p)$ glatt.

Anmerkung: man trifft hier (ohne es zu wissen, weil alles erst später eingeführt) das erste mal auf die *Äußere Ableitung*, die 1-Formen ω auf 2-Formen $d\omega$ abbildet !

Diese Abbildung entspricht also punktweise einer glatten, vektorwertigen Bilinearform mit Werten im Vektorraum V , die jedoch schief ist, also bei Vertauschung der Argumente die gleiche Abbildung bis auf ein Vorzeichen ergibt (durch Ansehen klar). Es handelt sich nicht nur um eine Zusammenfassung der linken Seite der Maurer-Cartan-Gleichung, sondern es wurde als ganz wesentliche Eigenschaft die Unabhängigkeit des Funktionswerts von der gewählten Fortsetzung außerhalb des betrachteten Punktes gezeigt. Das erlaubt die Wahl besonders einfach auszuwertender Vektorfelder in expliziten Rechnungen.

Eine besondere Eigenschaft von $d\omega$ (oft das Tensorielle oder *tensorielle Eigenschaft* genannt) ist zudem, dass sich die Formel bei Einsetzen von $f \cdot Y$ statt Y im zweiten Argument nur um den konstanten Faktor $f(p)$ ändert, der davor dazukommt (man nutzt dabei C^∞ -Linearität von 1-Formen ? wait, gilt die ? und dass $X \cdot f$ wieder ein Vektorfeld ist, wodurch sich alle Zusatzterme kürzen). Das ist durchaus besonders, bei einer Derivation z.B. kam ja noch die Ableitung dazu.

Definiert man nun weiter für zwei 1-Formen $\omega, \eta \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ die Abbildung

$$[\omega \wedge \eta] : X(M) \times X(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathfrak{g}), (X, Y) \mapsto [\omega(X), \eta(Y)] - [\omega(Y), \eta(X)],$$

so nimmt die Maurer-Cartan-Gleichung offenbar folgende Form an:

$$d\omega_f + \frac{1}{2}[\omega_f \wedge \omega_f] = 0 \Leftrightarrow d_p \omega_f(X_p, Y_p) + [\omega_f(X_p), \omega_f(Y_p)]_p = 0.$$

Die Definitionen helfen, weil die Gleichung so ohne Argumente und Punkt geschrieben werden kann. Neben der Übersichtlichkeit bilden sie das Rüstzeug, um eine Integrabilitätsbedingung für Lie-Algebra-wertige 1-Formen formulieren zu können:

Satz 4.54: Maurer-Cartan-Lemma

Für eine 1-Form $\omega \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ gilt die Maurer-Cartan-Gleichung

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] = 0$$

genau dann, wenn um alle $p \in M$ eine offene Umgebung U und eine Abbildung $f_U : U \rightarrow G$ existieren mit $\omega_{f_U} = \omega_U$.

Die Notation ist an dieser Stelle etwas unglücklich, sollte aber dennoch klar sein: ω_U heißt, dass man die auf U eingeschränkte 1-Form ω betrachtet und ω_f bezeichnet die Maurer-Cartan-Form zu f . Die Aussage dieses Satzes ist sehr wichtig, weil sie eine notwendige Bedingung dafür gibt, dass eine 1-Form ω die Maurer-Cartan-Form zu einer Funktion $f : U \rightarrow G$ ist! Erfüllt ω also nicht die Maurer-Cartan-Gleichung, so ist sie insbesondere nicht integrierbar. Diese Aussage ist unheimlich wertvoll, weil die Gültigkeit der Maurer-Cartan-Gleichung vergleichsweise leicht nachzurechnen ist (z.B. wegen Unabhängigkeit von $d_p \omega(X, Y)$ von der Fortsetzung).

Man erkennt nun auch, dass sich Satz 4.40 grob vereinfacht formulieren lässt als: integrierbar $\Leftrightarrow d\omega = 0$ (das wird später als Poincaré-Lemma noch verallgemeinert gezeigt). Damit hat man nun eine noch allgemeinere, nicht-lineare Version zur Hand und für Räume, in denen alle Elemente $\omega(X), \omega(Y)$ kommutieren (wie beispielsweise die reellen Zahlen) erhält man wieder die Form von vorher, weil $[\omega \wedge \omega] = 0 - 0 = 0$.

Interessant ist, dass man eine Art Abgeschlossenheit der Integrität unter Multiplikation zeigen kann. Für das punktweise Produkt $fg : M \rightarrow G$, $p \mapsto f(p)g(p)$ erfüllt auch $\omega_{fg} = g^{-1}\omega_{fg} + \omega_g$ immer die Maurer-Cartan-Gleichung (der Beweis erfolgt über stumpfes Nachrechnen, so kommt man auch auf die Form von ω_{fg}).

Beispiel 4.55: Vektorwertige 1-Form und Maurer-Cartan-Gleichung

Das triviale Beispiel der Funktion $g = \text{id} : G \rightarrow G$ (ist offenbar glatt) liefert die Maurer-Cartan-Form $\omega_g \in \Omega^1(G, g)$. Für zwei Vektorfelder $X^g, Y^g \in T_g G$ und $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ gilt wegen $X_g^\xi = g\xi, X_g^\eta = g\eta$:

$$\omega_g(X_g^\xi) = \xi \quad \omega_g(X_g^\eta) = \eta.$$

Mit $[X^\xi, X^\eta]_g = X_g^{[\xi, \eta]}$ erhält man durch Einsetzen in die Maurer-Cartan-Gleichung

$$\begin{aligned} & \left(d\omega_f + \frac{1}{2} [\omega_f \wedge \omega_f] \right)(X^\xi, X^\eta) \\ &= X^\xi \cdot \omega_g(X^\eta) - X^\eta \cdot \omega_g(X^\xi) - \omega_g([X^\xi, X^\eta]) + [\omega_g(X^\xi), \omega_g(X^\eta)] \quad (4.103) \\ &= -[\xi, \eta] + [\xi, \eta] = 0 \end{aligned}$$

- ζ $1/2$ kürzt sich, weil da gleiche Sachen stehen (wird zu einem Term); nutze dann, dass erste beide Terme konstant, bei drittem Term $[X^\xi, X^\eta]_g = X_g^{[\xi, \eta]}$ und beim letzten einfach Einsetzen der Definition von ω

und genau das sollte herauskommen. Es wurde genutzt, dass die Ableitung verschwindet (weil das Vektorfeld an einem Punkt ja konstant ξ bzw. η ergibt) und sonst einfach nur in die 1-Form eingesetzt.

Man kann dabei einfach die bestmöglichen Vektorfelder zum Berechnen wählen, weil man ja die Wohldefiniertheit und damit Unabhängigkeit von den gewählten Vektorfeldern gezeigt hat.

5 Multilineare Abbildungen

In diesem Abschnitt folgt die nächste Abstraktionsstufe/ Verallgemeinerung bei Abbildungen. Diese betrifft den Definitionsbereich, der nun das kartesischen Produkt von Tangentialräumen ist und ganz speziell wird es um die Unterklasse der in jedem Argument linearen (Multilinearen) Abbildungen gehen. Das Standardbeispiel dafür ist die Determinante, die schon in der Linearen Algebra eine wichtige Rolle spielte.

Solche Konstrukte sind wohl besser unter dem Namen eines Tensors bekannt und spielen in weiten Teilen der Physik eine herausragende Rolle bei der invarianten (also basisunabhängigen) Formulierung von Sachverhalten und Gleichungen oder auch der Messung von Flüssen durch Flächen/ Volumina.

5.1 Tensoren

Mit zunehmender Anzahl an Argumenten, von denen Linearität gefordert wird, steigt auch die Komplexität der Mathematik (was zu großen Teilen an der Basisdarstellung liegt). Um das zu vermeiden, kann man etwas konstruieren, das diese multilinear Algebra auf lineare Algebra zurückführt, das sogenannte *Tensorprodukt* auf dem *Tensorproduktraum* (das sich auch unabhängig von Basen aufziehen lässt).

Anmerkung: hier wird immer von endlich-dimensionalen Vektorräumen ausgegangen, auch wenn es von nun an nicht mehr explizit erwähnt wird.

Bevor nun aber die neue Konstruktion eingeführt wird, muss an einen Satz aus der Linearen Algebra erinnert werden, der ungemein bei der Veranschaulichung helfen wird (und am Anfang sogar zur Definition selbiger genutzt wird):

Satz 5.1: Dualität

Für einen endlich-dimensionalen Vektorraum V gilt:

$$(V^*)^* \cong V. \quad (5.1)$$

Beweis. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass $\dim(V) = \dim(V^*)$. Daher muss nur ein injektiver Homomorphismus (lineare Abbildung) zwischen V und $(V^*)^*$ angegeben werden, weil dann aus Dimensionsgründen sofort die Bijektivität folgt und damit ein Isomorphismus gefunden wurde. Für $v \in V$ kann man aber einfach die Abbildung

$$v : V_1^* \rightarrow \mathbb{K}, \omega \mapsto \omega(v)$$

angeben, die eine Linearform auf V_1^* und damit ein Element von $(V^*)^*$ ist und in der das Argument einer beliebigen Linearform fest bleibt. Die Linearität folgt dabei aus der von ω und ganz offenbar kann jedem Vektor $v \in V$ eine solche Abbildung zugeordnet werden. Es bleibt nun noch die Injektivität zu zeigen:

$$\begin{aligned} v_1(\omega) = v_2(\omega) &\Leftrightarrow \omega(v_1) = \omega(v_2) \\ \Leftrightarrow 0 = \omega(v_1) - \omega(v_2) &= \omega(v_1 - v_2) = (v_1 - v_2)\omega(1) \end{aligned}$$

und weil das für alle Linearformen $\omega \in V^*$ gelten muss, folgt bereits $v_1 = v_2$.

Die konstruierte Abbildung v ist damit ein (sogar kanonischer) Isomorphismus. \square

Diese Interpretation als Linearform auf dem Dualraum wird dabei helfen, Vektoren in einem Zuge mit Abbildungen zu behandeln (die ja auch nur Vektoren im Dualraum sind).

Zunächst wird nun der Formalismus rund um Tensoren für zwei Vektorräume entwickelt, die Verallgemeinerung auf mehr Faktoren ist jedoch unproblematisch.

Definition 5.2: Tensorprodukt von (Ko-)Vektoren

Für endlich-dimensionale \mathbb{K} -Vektorräume V_1, V_2 ist die Menge der *Bilinearformen*

$$\text{BiLi}(V_1, V_2; \mathbb{K}) = \{\beta : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{K} : \beta(v_1, \cdot) \in V_2^* \wedge \beta(\cdot, v_2) \in V_1^*\} \quad (5.2)$$

ein ebenfalls endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum.

Das *Tensorprodukt zweier Vektoren aus V* ist dann definiert als

$$\text{BiLi}(V_1^*, V_2^*; \mathbb{K}) \ni v_1 \otimes v_2 : V_1^* \times V_2^* \rightarrow \mathbb{K}, (\omega, \eta) \mapsto \omega(v_1)\eta(v_2). \quad (5.3)$$

Übertragen der Konstruktion liefert das *Tensorprodukt zweier Kovektoren aus V^**

$$\text{BiLi}(V_1, V_2; \mathbb{K}) \ni \omega \otimes \eta : V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{K}, (v_1, v_2) \mapsto \omega(v_1)\eta(v_2). \quad (5.4)$$

Anmerkung: man beachte in Klammer hinter BiLi: alles was mit einem Komma abgetrennt wird, bezieht sich auf ein Argument und das nach dem Semikolon auf den Wertebereich. Bei z.B. Homomorphismen ist das anders, weil man dort immer nur zwei Eingänge hat (erster \equiv Definitionsbereich und zweiter \equiv Wertebereich).

Das Tensorprodukt zweier Vektoren entspricht also einer Bilinearform auf dem dualen Raum (hier wurde direkt die Dualität $V \cong (V^*)^*$ genutzt), die als Ergebnis ein Produkt im zugehörigen Körper liefert (die Definition für Kovektoren ergibt sich daraus bereits für $V_1 = \tilde{V}^*$, wurde aber noch einmal aufgeführt). Der Name Bilinearform kommt daher, dass man eine in zwei Argumenten lineare Abbildung hat und das bedeutet einfach, dass β bei Festhalten eines Arguments eine Linearform im anderen Argument bildet, also ein Element des Dualraums (je $\forall v_1 \in V_1, \forall v_2 \in V_2$).

Folgender Satz hilft beim tieferen Verständnis der Vorteile von \otimes :

Satz 5.3: Universelle Eigenschaft

Für V_1, V_2, W als endlich-dimensionale \mathbb{K} -Vektorräume und $B : V_1 \times V_2 \rightarrow W$ bilinear existiert genau eine lineare Abbildung

$$\text{Hom}(\text{BiLi}(V_1^*, V_2^*; \mathbb{K}), W) \ni \mathcal{B} : \text{BiLi}(V_1^*, V_2^*; \mathbb{K}) \rightarrow W$$

mit

$$B(v_1, v_2) = \mathcal{B}(v_1 \otimes v_2), \quad v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \quad (5.5)$$

Man sagt dann auch, dass B *faktorisiert*.

Beweis. man beobachte zunächst, dass

$$\dim(\text{BiLi}(V_1, V_2; W)) = \dim(V_1) \dim(V_2) \dim(W) = \dim(\text{Hom}(\text{BiLi}(V_1^*, V_2^*; \mathbb{K}), W)),$$

die Dimensionen passen also schonmal; nun wird noch eine injektive Abbildung von BiLi zu Hom benötigt, das klappt aber tatsächlich einfach mit $B \mapsto \mathcal{B}$ \square

Man macht hier den anfangs angedeuteten Übergang von der bilinearen Abbildung B zur linearen (ein Argument !) Abbildung \mathcal{B} , wobei der Definitionsbereich von $V_1 \times V_2$ zu $V_1 \otimes V_2 = \text{BiLi}(V_1^*, V_2^*)$ gewechselt wird. Das macht zwar die Notation bei \mathcal{B} etwas unübersichtlicher, hat jedoch die eben erläuterte und damit recht einfache Deutung. Faktorisierung kann man sich also wie folgt veranschaulichen:

$$V_1 \times V_2 \xrightarrow{\otimes} V_1 \otimes V_2 \xrightarrow{\mathcal{B}} W$$

B

Weil dieses Ersetzen von Bilinearität durch Linearität am Anfang des Abschnitts als Ziel ausgegeben wurde, ist die Wichtigkeit dieser Aussage direkt klar und daher kommt auch die Bezeichnung als „Universelle Eigenschaft“. Darüber hinaus motiviert sie eine alternative Definition des Tensorprodukts, die weniger anschaulich sein mag, aber mathematisch besser greifbar ist (und übersichtlicher):

Definition 5.4: Tensorprodukt von Vektorräumen

Das *Tensorprodukt zweier Vektorräume* V_1, V_2 ist der Vektorraum $V_1 \otimes V_2$, für den eine bilineare Abbildung

$$\otimes : V_1 \times V_2 \rightarrow V_1 \otimes V_2, (v_1, v_2) \mapsto v_1 \otimes v_2 \quad (5.6)$$

existiert, sodass jede bilineare Abbildung $B : V_1 \times V_2 \rightarrow W$ faktorisiert und damit eine eindeutige lineare Abbildung $\mathcal{B} : V_1 \otimes V_2 \rightarrow W$ existiert, sodass $B = \mathcal{B} \circ \otimes$.

Die universelle Eigenschaft wurde nun also sogar zur definierenden Eigenschaft des Tensorprodukts gemacht. Man kann dann zeigen, dass das Tensorprodukt von Vektorräumen tatsächlich auch existiert, also bilineare Abbildungen auch über Studium der zugehörigen Abbildung auf dem Tensorproduktraum untersucht werden können. Aufgrund der Bilinearität von \otimes folgen sofort nützliche Eigenschaften:

$$(av_1 + bv_2) \otimes (cw_1 + dw_2) = ac(v_1 \otimes w_1) + ad(v_1 \otimes w_2) + bc(v_2 \otimes w_1) + bd(v_2 \otimes w_2). \quad (5.7)$$

In dieser Form ist die Definition übrigens nur in endlich-dimensionalen Räumen möglich, daher wurde anfangs diese Annahme getroffen. Dort erhält man aber die

Eindeutigkeit von \otimes bis auf natürliche Isomorphie (da müsste also nicht einmal künstlich etwas konstruiert werden, folgt aus der Faktorisierung). Offenbar kann man nun auch nicht mehr die Gleichheit zum Raum der Bilinearformen schreiben, jedoch gilt noch

$$V_1 \otimes V_2 \cong \text{BiLi}(V_1^*, V_2^*; \mathbb{K}), \quad (5.8)$$

was ja mehr oder weniger äquivalent zu einer echten Gleichheit ist. Es wird sich aber als wichtiger Teil dieser formalen Definition herausstellen, dass man sich das Tensorprodukt nicht immer als Multilinearform vorstellt, sondern auch ein Verständnis für das Objekt $v_1 \otimes v_2$ entwickelt (alles andere wäre etwas umständlich).

Anmerkung: weil das Tensorprodukt zweier Vektorräume insbesondere wieder ein Vektorraum ist, lässt sich diese Definition problemlos auf Tensorprodukte mit mehreren Faktoren erweitern, die dann multilinear Abbildungen beschreiben.

Der bis jetzt gewählte Ansatz wird meist als „dualer Zugang“ zu Tensoren bezeichnet, es gibt jedoch auch andere. Einer davon soll hier noch vorgestellt werden und dieser wird motiviert von der in Gleichung (5.7) festgehaltenen Eigenschaft. Die grundlegende Idee ist in diesem Abschnitt ja, möglichst klug mit mehreren Vektorräumen zu arbeiten. Das kann man auch machen, indem man das Produkt $V \times W$ der Räume mit gewissen Relationen ausstattet, angefangen wird dabei mit dem *Freien Vektorraum*

$$F(V \times W) = \left\{ \sum_{\text{endlich}} \lambda_i (v_i, w_i) : \lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in V, w_i \in W \right\}. \quad (5.9)$$

Was ist nun der Vorteil von $F(V \times W)$ gegenüber $V \times W$ – eigentlich wird alles erst einmal komplizierter, weil nun auch Linearkombinationen von Elementen des kartesischen Produkts erlaubt sind. Interessant ist jedoch der Unterraum

$$R(V, W) = \left\{ \begin{array}{l} (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) = 0 \\ (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) = 0 \\ c(v, w) - (cv, w) \\ c(v, w) - (v, cw) = 0 \end{array} \right\} \subset F(V \times W) \quad (5.10)$$

von Elementen $v_j \in V, w_j \in W$ ($c \in \mathbb{R}$), weil der damit definierbare Quotientenvektorraum (wo dann $R(V, W) \equiv \{0\}$) genau dem Tensorprodukt entspricht:

$$V \otimes W = \frac{F(V \times W)}{R(V, W)}. \quad (5.11)$$

Jeder *Tensor* als Element von $V \otimes W$ erfüllt also

$$\begin{aligned}(v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\ v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\ c(v \otimes w) &= (cv) \otimes w = v \otimes (cw)\end{aligned}$$

und ist damit von Natur aus schon ein multilinear Objekt. Dass man hier auch Linearkombinationen zulässt, führt übrigens dazu, dass sich nicht jeder Tensor $T \in V \otimes W$ als sogenannter reiner Tensor der Form $v \otimes w$, $v \in V, w \in W$ schreiben lässt (in der Physik entstehen so verschränkte Zustände). Die Weg ist hier also

$$V \times W \xrightarrow{F} F(V \times W) \xrightarrow{1/R(V,W)} V \otimes W$$

\otimes

wobei natürlich das Inverse von R symbolisch gemeint ist und meint, dass man den Quotientenvektorraum bildet. Man erhält hier denselben Raum wie den, über dem alle bilinearen Abbildungen $B : V_1 \times V_2 \rightarrow W$ faktorisieren.

Tensoren sind ein sehr mächtiges Werkzeug, jedoch an sich sehr abstrakte Objekte und daher soll es nun an die Interpretation von ihnen gehen. Vorstellen kann man sie sich zum Einen als Elemente eines Tensorproduktraums als modifiziertes kartesisches Produkt, bei dem $(1,2) \neq 2(1,1) \neq (2,1)$ aufgehoben ist. Zum Anderen sind sie nach dem anfangs gewählten, dualen Ansatz multilinare Abbildungen auf dem zugehörigen Dualraum. Diese Deutung ist jedoch noch nicht ganz vollständig:

Satz 5.5: Duale Interpretation des Tensorprodukts

Für endlich-dimensionale Vektorräume V, W gilt:

$$(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^* \quad V^* \otimes W \cong \text{Hom}(V, W). \quad (5.12)$$

Beweis. bei Beweis wieder Trick mit: zeige injektiv, nutze dann Dimension um Bijektivität zu verargumentieren

erstes sollte dann im Wesentlichen eine Folgerung aus der universellen Eigenschaft sein; es ist ja $V_1^* \otimes V_2^* \cong \text{BiLi}(V_1, V_2; \mathbb{K})$ und nach der universellen Eigenschaft existiert dann eine eindeutige Abbildung $\mathcal{B} \in \text{Hom}(V_1 \otimes V_2, \mathbb{R}) = (V_1 \otimes V_2)^*$ (Hom statt BiLi , weil nur ein Argument in dem es linear ist), die ein Element des Dualraums ist

nutze bei Beweis: $V^* \otimes W = \text{BiLi}(V, W^*; \mathbb{K}) = \text{Hom}(V, W)$; beobachte dann, dass man für $\alpha \otimes w, V^* \otimes W \in$ auch die Abbildung $\text{Hom}(V, W) \ni \alpha \otimes w : V \rightarrow W$, $\alpha \otimes w(v) = \alpha(v) \cdot w$ betrachten kann □

Die Äquivalenz von Tensoren und Abbildungen auf dem jeweiligen Dualraum kann man sich zum Beispiel anhand eines Kovektors $\alpha \in V^*$ klarmachen. Bis jetzt wurde bei einem solchen Objekt so gut wie immer an die Abbildung/ Funktion

$$V^* \ni \alpha : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \alpha(v)$$

auf dem Dualraum V^* gedacht. An sich ist α jedoch einfach „nur“ ein Vektor als Element des Vektorraums V^* (das Duale zu V ist im Prinzip lediglich eine Zusatz Eigenschaft). Ganz analog kann man bei Vektoren $v \in V$, die man bisher ganz klar „nur“ als Vektoren aufgefasst hat, nach Satz 5.1 auch an eine Abbildung

$$(V^*)^* \ni v : V^* \rightarrow \mathbb{R}, \alpha \mapsto v(\alpha) = \alpha(v)$$

auf dem Dualraum $(V^*)^* \cong V$ denken! Satz 5.5 bildet damit einfach die Erweiterung/ Vervollständigung dieser Interpretation.

Anmerkung: wie bereits in weiten Teilen vor diesem Abschnitt wird hier Isomorphie \cong oft wie Gleichheit $=$ behandelt, weil der Unterschied lediglich Interpretationsache ist. Man macht also einen fließenden Übergang bzw. unterscheidet im Allgemeinen nicht mehr zwischen den Interpretationen.

Auch bei Tensorprodukten gibt es Spezialfälle bei Notation, die beachtet werden müssen und ein wichtiger folgt aus dieser dualen Interpretation. Diese zeigt

$$(V_1 \otimes V_2)^* \otimes W \cong V_1^* \otimes V_2^* \otimes W \cong \text{Hom}(V_1 \otimes V_2; W).$$

Setzt man nun $W = \mathbb{K}$, so wird das aber zu

$$V_1^* \otimes V_2^* \otimes \mathbb{R} \cong \text{Hom}(V_1 \otimes V_2; \mathbb{K}) \cong \text{BiLi}(V_1, V_2; \mathbb{K}) \cong V_1^* \otimes V_2^*,$$

wobei beim vorletzten \cong die Universelle Eigenschaft genutzt wurde. Damit gilt

$$V_1 \otimes V_2 \otimes \mathbb{K} \cong V_1 \otimes V_2. \quad (5.13)$$

Oftmals wird daher die zweite, kürzere Notation genutzt (man denke an $\cong \leftrightarrow =$).

Im Prinzip kann man sich für die duale Interpretation auch nur $V^* \otimes W \cong \text{Hom}(V, W)$ merken, da mit $V = V_1 \otimes V_2$, $W = \mathbb{K}$ daraus $(V_1 \otimes V_2)^* \cong \text{BiLi}(V_1, V_2; \mathbb{K})$ folgt.

Nach dieser Aussage und den zugehörigen Erläuterungen sollte endgültig der große Vorteil von Tensoren klar sein: man kann so gut wie alle Objekte auf Mannigfaltigkeiten formalisieren. Dass sich nämlich Vektoren, Multilinearformen und multilinear Abbildungen zwischen Vektorräumen gleichermaßen (in der gleichen Notation) sinnvoll beschreiben lassen, ist schon sehr außergewöhnlich. Außerdem hat das Tensorprodukt die interessante Zusatzeigenschaft der Linearität in jedem Faktor.

Anmerkung: eine weitere alternative Konstruktion des Tensorprodukts beruht auf der Frage, wie man sinnvoll das Produkt zweier Vektoren bilden kann. Natürlich ist dort das kartesische Produkt möglich, aber betrachtet man den Fall zweier Kovektoren α, β , so ist die vermutlich einfachste (und auch intuitive) Wahl $(\alpha \cdot \beta)(v, w) = \alpha(v)\beta(w)$. Diese Wirkung sei nun definierend für das Produkt $\alpha \cdot \beta$, das wegen der Linearität der einzelnen Faktoren auch linear ist. Wie man leicht durch Vergleich mit 5.2 sehen kann, entspricht diese Vorschrift genau dem Tensorprodukt und dass dabei \cdot ein \otimes ersetzt wird, ist nur eine kleine Makulatur bei der Notation, die die eigentliche Idee nicht ändert.

Mittels der dualen Interpretation von Vektoren lässt sich ein analoges Produkt $v \cdot w$ von Vektoren mittels $(v \cdot w)(\alpha, \beta) = \alpha(v)\beta(w)$ definieren und auch hier folgt sofort die Linearität. Weil beide Produkte nun genau die gleiche Form haben, bietet sich das Zusammenfassen in einer einzigen Definition an und so ergibt sich das allgemeine Tensorprodukt von vorher. Auch das gemischte Tensorprodukt ist hierbei enthalten (da Kovektoren ja auch im Wesentlichen Vektoren sind, das Produkt Vektor \cdot Kovektor ist also nur Vektor \cdot Vektor auf gewissen Räumen).

Um nach sehr langer Einführung und allgemeinen Erläuterungen die Definition etwas besser verdauen zu können, folgen nun Beispiele rund um das Thema Tensoren:

Beispiel 5.6: Basis des Tensorproduktraums, Abbildungen

Wegen der Linearität in Tensorprodukträumen (hier wird der Einfachheit halber $V \otimes W$ betrachtet) ist sofort klar, dass

$$\{v_i \otimes w_j : 1 \leq i \leq \dim(V), 1 \leq j \leq \dim(W)\} \quad (5.14)$$

mit Basen $v_i \in V, w_j \in W$ eine Basis des Tensorproduktraums bildet. Man kann nämlich einfach einen Vektor $v \in V$ darstellen in den v_i , alle Koeffizienten vorziehen (mit $w \in W$ das Gleiche machen) und das ergibt am Ende eine Linearkombination von Elementen der Form $v_i \otimes w_j$. Insbesondere gilt damit

$$\dim(V \otimes W) = \dim(V) \dim(W). \quad (5.15)$$

Bei einer solchen Darstellung in einer gewissen Basis kommen nun äquivalente Ergebnisse heraus, wenn diese Basen sich um eine orthogonale Transformation unterscheiden ($A^T = A^{-1}$). Dann bleibt nämlich beispielsweise die Norm invariant:

$$\langle Av, Av \rangle = (Av)^T (Av) = v^T A^T A v = v^T v = \langle v, v \rangle.$$

Etwas wie $\sum_{j=1}^n v_j \otimes v_j$ wäre gerade nicht basisunabhängig.

Man betrachte nun die Vektorräume V, W mit Basen v_i, w_j und α_k als Basis des Dualraums V^* . Eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ ist dann durch den folgenden Tensor darstellbar ($\dim(V) = n$):

$$V^* \otimes W \ni \sum_{j=1}^n \alpha_j \otimes f(v_j). \quad (5.16)$$

Das kann man wie folgt sehen:

$$f(a) = f\left(\sum_{j=1}^n a_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n a_j f(v_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(a) \otimes f(v_j) = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \otimes f(v_j)\right)(a),$$

man bedenke dabei wieder das Weglassen reeller Faktoren bei \otimes .

Besonders interessant ist dann, dass der Tensor

$$V^* \otimes V \ni \sum_{j=1}^n \alpha_j \otimes v_j \quad (5.17)$$

offenbar eine Darstellung der Identität $\text{id} = 1 \in \text{Hom}(V, V)$ ist!

Betrachtet man noch spezieller $n = 1$, so existiert ein kanonischer Isomorphismus

$$V^* \otimes V \cong \mathbb{K} \quad (5.18)$$

mittels $\alpha \otimes v \mapsto \alpha(v)$ (Injektivität folgt aus der Linearität des Tensorprodukts und dann dem Dimensionsargument $\dim(V^* \otimes V) = 1 \cdot 1 = 1 = \dim(\mathbb{K})$). Das lässt sich tatsächlich auch verallgemeinern auf höherdimensionale Vektorräume, dort ist der Isomorphismus gegeben durch

$$V^* \otimes V \rightarrow \mathbb{K}, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j \otimes v_j \mapsto \sum_{j=1}^n \alpha_j(v_j). \quad (5.19)$$

Bedenkt man nun noch die duale Identifikation, erhält man insgesamt

$$\text{Hom}(V, V) \cong V^* \otimes V \cong \mathbb{K}$$

und diese Abbildung von Endomorphismen ($\text{End}(V) = \text{Hom}(V, V)$, haben Darstellungsmatrizen) auf den Körper wird von der Spur vermittelt, schließlich entspricht $\alpha_j(v_j)$ am Ende dem Aufsummieren der Diagonalelemente.

Beispiel 5.7: Matrix, Skalarprodukt, Kreuzprodukt

In diesem Beispiel werden einige bekannte Objekte als Tensor umgeschrieben.

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass jede Matrix A allgemeiner als Darstellungsmatrix eines Homomorphismus von Vektorräumen

$$f_A : V \rightarrow W, v \mapsto A \cdot v \quad (5.20)$$

gedeutet werden kann (in einer gewissen Basis). Die Wirkung ist also die Matrixmultiplikation mit der Darstellungsmatrix A und man sieht, dass $A \in \mathbb{K}^{\dim(V), \dim(W)}$. Wegen $f_A \in \text{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$ ist die Matrix bzw. die dazugehörige Abbildung aber auch ein Tensor! Diesen Tensor kann man auch in einer Basis darstellen und dazu wird $V = W = \mathbb{R}^2$ zusammen mit der Standardbasis e_j und dualer Basis dx_j gewählt. Man kennt hier dann vor allem die Darstellung

$$\text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \ni A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

mit den Koeffizienten in der Standardbasis. Basisunabhängig geht das Ganze als

$$(\mathbb{R}^2)^* \otimes \mathbb{R}^2 \ni A = a dx \otimes e_1 + b dy \otimes e_1 + c dx \otimes e_2 + d dy \otimes e_2, \quad (5.22)$$

was einfach der Darstellung von A in der Basis des Tensorproduktraums $(\mathbb{R}^2)^* \otimes \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ entspricht. Hier steht die Basis aber direkt dabei und man kann auch Vektoren aus anderen Basen einsetzen, weshalb das Ganze so besser ist.

Man muss dabei Produkte der Form $dx_i \otimes e_j$ nutzen, da $\text{Hom}(V, V) = V^* \otimes V \neq V \otimes V^*$. Für das in diesem Spezialfall auch als *dyadiisches Produkt* bekannte Tensorprodukt der Standardbasisvektoren erhält man allgemeiner die Darstellung

$$dx_i \otimes e_j = (\delta_{ij})_{i,j=1}^n. \quad (5.23)$$

Der Koeffizient c gehört beispielsweise zu $dx \otimes e_2$, weil es mit der ersten/ x -Komponente des hereingesteckten Vektors multipliziert wird und in der zweiten/ y -Komponente des Ergebnisses auftaucht. Allgemeiner hat das Produkt hinter einer Komponente also die Form Spalte \otimes Zeile ($dx \equiv$ Spalte 1, $e_2 \equiv$ Zeile 2).

Das Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle \in \text{BiLi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ auf dem \mathbb{R}^n hatte ja die Form

$\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^n v_j w_j$ und als Tensor wird das zu

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \sum_{j=1}^n dx_j \otimes dx_j. \quad (5.24)$$

Allgemeine Bilinearformen haben in dieser Schreibweise die Form

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \ni B &= b_{11} dx \otimes dx + b_{12} dx \otimes dy + b_{13} dx \otimes dz \\ &= b_{21} dy \otimes dx + b_{22} dy \otimes dy + b_{23} dy \otimes dz \\ &= b_{31} dz \otimes dx + b_{32} dz \otimes dy + b_{33} dz \otimes dz \end{aligned} \quad (5.25)$$

und die Wirkung in einer Basis kann geschrieben werden als $\langle B \cdot, \cdot \rangle \in \text{BiLi}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ mit der Darstellungsmatrix $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n = (B(e_i, e_j))_{i,j=1}^n$. Für das Standardskalarprodukt ist also offenbar $B = 1$ (bei symmetrischen Bilinearformen muss B immer symmetrisch sein), bei einer Lorentz-Metrik mit anderer Signatur hingegen liegt teilweise noch ein anderes Vorzeichen auf der Diagonalen vor.

Ein Tensor mit mehr als drei Faktoren ist dann das Kreuzprodukt:

$$\begin{aligned} \text{BiLi}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}) \ni \times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (a, b) \mapsto a \times b \\ (\mathbb{R}^3)^* \otimes (\mathbb{R}^3)^* \otimes \mathbb{R} \ni \times = dy \otimes dz \otimes e_1 - dz \otimes dy \otimes e_1 + dz \otimes dx \otimes e_2 \\ - dx \otimes dz \otimes e_2 + dx \otimes dy \otimes e_3 - dy \otimes dx \otimes e_3 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Eigentlich würden hier sogar 27 Summanden vorkommen, aber weil $v \times w = -w \times v$ gilt, sind viele Koeffizienten null. Nach Einsetzen zweier Vektoren erhält man dann wiederum einen Vektor, weil das reelle Zahlen gibt und daher z.B. $dx(v) \otimes dy(w) \otimes e_1 = dx(v)dy(w)e_1 = v_1 w_2 e_1$.

Es wurde nun bereits festgehalten, dass sich Tensorprodukte mit mehreren Faktoren problemlos bilden lassen (Universelle Eigenschaft auch da). Dort gilt Assoziativität, es ist also $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 = V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ und deshalb lässt man die Klammern meist weg. Die Reihenfolge der Faktoren ist hingegen sehr wichtig, da im Allgemeinen

$$V \otimes W \neq W \otimes V \quad (5.27)$$

gilt. Als einfaches Gegenbeispiel taugt

$$1 = (dx_1 \otimes dx_2)(e_1, e_2) \neq (dx_2 \otimes dx_1)(e_1, e_2) = 0.$$

Auch wenn die Vertauschung von Räumen nicht funktioniert, gibt es Unterräume, deren Elemente ein spezielles Verhalten unter der Vertauschung von Faktoren haben:

Definition 5.8: Symmetrie, Schiefsymmetrie

Ein Tensor $T \in V \otimes V$ heißt *symmetrisch*, falls

$$T = \sum_{j=1}^n v_j \otimes v_j, \quad v_j \in V \quad \Leftrightarrow \quad F(T) = T. \quad (5.28)$$

unter Verwendung des Vertauschungsoperators $F : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$, $v \otimes w \mapsto w \otimes v$.

Ein *schiefsymmetrischer/ alternierender* Tensor liegt vor, wenn

$$F(T) = -T. \quad (5.29)$$

Das ist wohldefiniert (basisunabhängig) wegen der Formulierung mit dem sehr allgemeinen Vertauschungsoperator F (bei mehr Faktoren gibt es mehrere davon, die jeweils paarweise Vertauschungen durchführen). Dass dabei in der Basisdarstellung keine Koeffizienten auftreten liegt daran, dass die v_j keine Basisvektoren sind und die Koeffizienten damit quasi schon in ihnen enthalten sind.

F bringt einige interessante Eigenschaften mit sich. Da offenbar

$$F(F(v \otimes w)) = F(w \otimes v) = v \otimes w \quad \Leftrightarrow \quad F^2 = \mathbb{1} \quad (5.30)$$

gilt, kann F nur Eigenwerte ± 1 haben (bei reellen Vektorräumen, sonst zuzüglich einer komplexen Phase der Form $e^{i\varphi}$). Die Eigenvektoren sind also gerade die symmetrischen und alternierenden Tensoren (beide bilden jeweils gesammelt als Menge einen Unterraum im Tensorprodukt, dieser Unterraum ist offenbar der Eigenraum zum jeweiligen Eigenwert). Diese etwas formalere Klassifizierung von symmetrischen und alternierenden Tensoren ist jedoch nicht die interessanteste Folgerung aus $F^2 = \mathbb{1}$. Jeder Operator mit Eigenwerten induziert auch eine Basis, die zugehörige Eigenbasis, in der alle Vektoren des Raums, auf dem er wirkt, darstellbar sind. Weil es hier nur zwei Eigenwerte gibt, folgt sofort, dass sich jeder Tensor in einen symmetrischen und einen alternierenden Anteil zerlegen lässt,

$$A = \text{Sym}(A) + \text{Alt}(A). \quad (5.31)$$

Anmerkung: es folgt daraus nicht, dass $\dim(V \otimes W) = 2$, weil die Eigenräume jeweils stark entartet sind und insbesondere Dimension > 1 haben (z.B. gibt es $n = \dim(V)$ viele linear unabhängige Tensoren der Form $v_j \otimes v_j$). Die Basisdarstellung erfolgt also nicht immer mit den gleichen Eigenvektoren aus dem symmetrischen/ schiefsymmetrischen Unterraum, es reicht aber immer jeweils einer.

Beispiel 5.9: Symmetrische, alternierende Tensoren

Das einfachste Beispiel für symmetrische Tensoren sind natürlich symmetrische Matrizen. Die Wirkung des Vertauschungsoperators ist dort die Transposition und für A symmetrisch muss dann folgendes gelten:

$$A^T = A \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}, \quad (5.32)$$

weil die Vertauschung der zugehörigen Basiselemente A nicht ändern darf. Da schiefsymmetrische Matrizen gerade $A^T = -A$ erfüllen, kann man hier sogar den symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteil einer Matrix direkt angeben als

$$\text{Sym}(A) = \frac{A + A^T}{2} \quad \text{Alt}(A) = \frac{A - A^T}{2}. \quad (5.33)$$

Bei symmetrischen Matrizen ist dann gerade $\text{Sym}(A) = A$ und analog $\text{Alt}(A) = 0$ bei alternierenden. Das reproduziert

$$A = \text{Sym}(A) + \text{Alt}(A).$$

Ein anderes Beispiel wäre ein Skalarprodukt als symmetrische Bilinearform

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \in V^* \otimes V^*. \quad (5.34)$$

Ein in den ersten beiden Faktoren alternierender Tensor ist das Kreuzprodukt.

nun: Tensorprodukt von linearen Abbildungen; nimm dazu $f : V \rightarrow \tilde{V}, g : W \rightarrow \tilde{W}$, nun ist die Existenz von $f \otimes g : V \otimes W \rightarrow \tilde{V} \otimes \tilde{W}$ zu zeigen und dazu kann man einfach die Zuordnung $(v, w) \mapsto f(v) \otimes g(w)$ wählen, die eine bilineare Abbildung ist, weil dann mit der Faktorisierung die eindeutige Existenz einer Abbildung $f \otimes g : V \otimes W \rightarrow \tilde{V} \otimes \tilde{W}, v \otimes w \mapsto f(v) \otimes g(w)$ folgt

können auch Verknüpfung von solchen Tensorprodukten von Funktionen angeben, nehme dazu $\tilde{f} : \tilde{V} \rightarrow \hat{V}$ und $\tilde{g} : \tilde{W} \rightarrow \hat{W}$; dann gilt $(\tilde{f} \otimes \tilde{g}) \circ (f \otimes g) = (\tilde{f} \circ f) \otimes (\tilde{g} \circ g)$, was man wieder über Existenz der Abbildung $V \times W \rightarrow \hat{V} \otimes \hat{W}, (v, w) \mapsto \tilde{f}(f(v)) \otimes \tilde{g}(g(w))$ und dann der Überlegung $(\tilde{f} \circ f) \otimes (\tilde{g} \circ g)(v \otimes w) = \tilde{f}(f(v)) \otimes \tilde{g}(g(w))$ zeigt

5.2 Vektorbündel

Nachdem man mit Tensoren nun neue Objekte kennengelernt hat, stellt sich die Frage nach konkreten Anwendungen. Als spannend wird sich das Tensorprodukt von Tangentialbündeln herausstellen, aber die zugehörige Theorie kann noch etwas allgemeiner gehalten werden. Man kann nämlich statt Tangentialräumen bei TM auch allgemeine Vektorräume an die Mannigfaltigkeit „anheften“, solange dies unter gewissen Regularitätsbedingungen wie Glattheit der Zuordnung geschieht:

Definition 5.10: Vektorbündel

Gilt für eine glatte Abbildung $\pi : E \rightarrow M$ zwischen Mannigfaltigkeiten E, M

1. das Urbild $E_p = \pi^{-1}(p)$ ist ein reeller, r -dimensionaler Vektorraum, $\forall p \in M$
2. $\forall p \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subset M$ und ein Diffeomorphismus

$$\Psi : E_U = \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r \quad (5.35)$$

mit

$$\Psi(E_p) = \{p\} \times \mathbb{R}^r \quad (5.36)$$

und Ψ ist linear auf dieser Menge E_p

dann heißt das Tripel (E, M, π) *Vektorbündel vom Rang r über M* (manchmal wird auch nur $\pi : E \rightarrow M$ oder nur E als Vektorbündel bezeichnet).

Anmerkung: man könnte problemlos \mathbb{R}^r durch \mathbb{K}^r ersetzen.

Die Idee ist hier also bildlich gesprochen, an jeden Punkt $p \in M$ einen Vektorraum anzukleben (das macht π , dort sind also bereits alle Informationen zur Charakterisierung des Vektorbündels enthalten) und das noch auf glatte Art und Weise. π ist jedoch nicht nur glatt, sondern sogar eine Submersion ? really?, was jede Faser $E_p = \pi^{-1}(p)$ zu einer Untermannigfaltigkeit von E macht. Man muss hier keine Injektivität fordern, es wird also nicht unbedingt jedes Element aus E angehängt (Surjektivität ist klar, weil man immer die Eigenschaften $\forall p \in M$ fordert) !

Zusätzlich zu diesen Vektorraum-Eigenschaften fordert man die Existenz einer Art lokaler Trivialisierung Ψ für das Vektorbündel, es gibt also wiederum die Möglichkeit, den euklidischen Raum zu benutzen (beispielsweise für explizite Rechnungen). Die Zusammenhänge von Ψ zu den anderen Größen zeigt das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} E_U & \xrightarrow{\pi} & U & \xleftarrow{\pi_1} & U \times \mathbb{R}^r \\ & \searrow \Psi & & \swarrow & \\ & & & & \end{array}$$

Man kann hier erkennen, dass $\pi_1 \circ \Psi = \pi$. Das ist so zu deuten, dass Ψ in der ersten Komponente die Information speichert, zu welchem Punkt π das jeweilige Element von E zuordnet, und in der zweiten, wie das Element im \mathbb{R}^r dargestellt wird.

Bisher wurde bei so gut wie allen neuen Objekten das zugehörige Duale untersucht, man muss sich also überlegen: was ist das Duale zu einem Vektorbündel?

Satz 5.11: Duales Vektorbündel

Für ein Vektorbündel $\pi : E \rightarrow M$ vom Rang r ist

$$E^* := \{(p, \alpha) : p \in M \text{ und } \alpha : E_p \rightarrow \mathbb{R} \text{ linear}\} \quad (5.37)$$

zusammen mit

$$\pi : E^* \rightarrow M, (p, \alpha) \mapsto p \quad (5.38)$$

ebenfalls ein Vektorbündel vom Rang r über M , das *duale Vektorbündel*.

Man definiert die Bündelstruktur also etwas expliziter und analoger zu einer Trivialisierung des Vektorbündels (Tupel aus und angehängtem Objekt), weshalb π hier wieder der Projektion π_1 auf die erste Komponente entspricht. Das erste und einfachste Beispiel ist nun sofort klar (von dort aus wurde ja verallgemeinert):

Beispiel 5.12: Tangentialbündel

Das Tangentialbündel TM einer Mannigfaltigkeit M liefert ein Vektorbündel vom Rang $r = \dim(T_p M) = \dim(M)$. Das ist sofort klar, weil man dort ja eine analoge Abbildung $\pi : TM \rightarrow M$ sowie Trivialisierungen genutzt hat.

Auf analoge Weise ist das Kotangentialbündel ein Vektorbündel vom Rang $r = \dim(T_p^* M) = \dim(T_p M) = \dim(M)$ und weil ja $T_p^* M = (T_p M)^*$ galt, handelt es sich hierbei direkt um das erste Beispiel eines dualen Vektorbündels!

Nach dem dualen Vektorbündel stehen nun Abbildungen rund um Vektorbündel an. Die wohl wichtigsten (und zudem nach π einfachsten) nehmen einen Punkt aus M und bilden ihn auf ein Element von E ab.

Definition 5.13: Schnitt

Für ein Vektorbündel $\pi : E \rightarrow M$ heißt die glatte Abbildung $s : M \rightarrow E$ mit

$$\pi \circ s = \text{id}_M \quad (5.39)$$

Schnitt von/ in E. Die Menge aller Schnitte wird mit $\Gamma(M; E)$ bezeichnet.

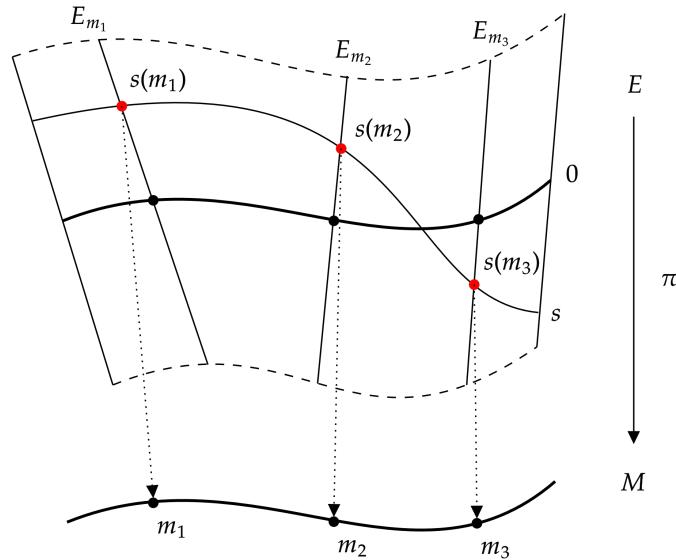


Abbildung 5.1: Veranschaulichung eines Schnittes $s \in \Gamma(M; E)$, der Punkten $m_i \in M$ eindeutig Elemente $E_{m_i} \in E$ zuordnet. Dieses Bild stammt von Wikipedia, [https://en.wikipedia.org/wiki/Section_\(fiber_bundle\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Section_(fiber_bundle)).

Schnitte sind also etwas wie Inverse von π (es gibt mehrere, da π nicht bijektiv ist), die jedem Punkt $p \in M$ ein eindeutiges Element aus E_p (nicht einfach E) zuordnen. Auch hier handelt es sich um eine Verallgemeinerung bereits behandelter Objekte:

Beispiel 5.14: Bekannte Schnitte

Auch Schnitte wurden bei der Diskussion des (Ko-)Tangentialbündels bereits behandelt, dort nannte man sie Vektorfelder und 1-Differentialformen. Es gilt also:

$$\Gamma(M; TM) = X(M) \quad \Gamma(M; T^*M) = \Omega^1(M). \quad (5.40)$$

Diese ordneten jedem Punkt $p \in M$ einen Tangentialvektor bzw. Kotangentialvektor (\equiv 1-Form) an diesem Punkt zu, geben also punktweise genau ein Element der zugehörigen Faser $T_p M = \pi^{-1}(p)$ bzw. $T_p^* M = \pi^{-1}(p)$ aus.

Analog dazu, dass für $\pi \circ \omega = \pi \circ X$ die Funktion

$$\omega(X) : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \omega_p(X_p) \quad (5.41)$$

glatt war, kann man nun sagen: eine Abbildung $\alpha : M \rightarrow E^*$ (noch kein Schnitt

$\Gamma(M; E^*)$) mit $\pi \circ \alpha = \text{id}_M$ ist genau dann glatt, wenn

$$\alpha_p : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \alpha_p(s_p) \quad (5.42)$$

glatt ist $\forall s \in \Gamma(M; E)$. Es stellt sich sogar heraus, dass durch diese Aussage die differenzierbare Struktur des Kotangentialbündels bereits bestimmt ist.

Die Definition des Schnitt-Begriffs ist jedoch noch nicht vollständig. Es wurde schließlich bereits klar, dass man nur selten auf der gesamten Mannigfaltigkeit arbeitet und stattdessen meist nur lokal (siehe auch Ψ). Die Erweiterung der Definition eines Schnitts ist glücklicherweise unproblematisch, man kann daraus $\pi|_U \circ s_U = \text{id}_U$ machen und erhält so Anforderungen an lokale Schnitte $s_U \in \Gamma(U; E)$.

Beispiel 5.15: Lokaler Schnitt

Für eine Trivialisierung $\Psi : E_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ und einen festen Vektor $v \in \mathbb{R}^r$ ist

$$s_v : U \rightarrow E, p \mapsto s_v(p) = \Psi^{-1}(p, v)$$

eine Art lokaler Schnitt. Man sucht sich dabei zu jedem Punkt $p \in U$ den Vektor aus E_U heraus, den Ψ an diesem Punkt auf $v \in \mathbb{R}^r$ abbildet.

Allgemeiner ist für eine glatte Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^r$ die Abbildung mit Vorschrift $s(p) = \Psi^{-1}(p, f(p))$ ein Schnitt.

Sowohl $\Gamma(M; E)$ als auch $\Gamma(U; E)$ können mittels der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation zu Vektorräumen gemacht werden. Auch die Multiplikation mit glatten Funktionen ist jedoch wohldefiniert, sodass die Menge der Schnitte sogar ein Modul über $C^\infty(M; \mathbb{R})$ bildet. Die Operationen sind genauer:

$$(fs + \lambda t)(p) = f(p)s_p + \lambda t_p, \quad s, t \in \Gamma(M; E), f \in C^\infty(M; \mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R} \quad (5.43)$$

und damit gleichermaßen für globale und lokale Schnitte definiert.

5.2.1 Tensorbündel und -felder

Der Grund warum dieser Abschnitt erst nach Tensoren kommt ist der, dass man auch das Tensorprodukt von Vektorbündeln betrachten kann. Diese Konstruktion wird die Grundlage für die Behandlung multilinearer Objekte auf Mannigfaltigkeiten bilden, das Thema, das den restlichen Teil dieser Zusammenfassung ausmacht.

Welche grundlegenden Eigenschaften dieses Produkt hat, zeigt der folgende Satz:

Satz 5.16

Für zwei Vektorbündel $\pi^E : E \rightarrow M$ vom Rang r über M und $\pi^V : V \rightarrow M$ vom Rang k über M ist

$$E \otimes V := \{(p, T) : p \in M, T \in E_p \otimes V_p\} \quad (5.44)$$

zusammen mit der Projektion $\pi : E \otimes V \rightarrow M$, $(p, T) \mapsto p$ auf die erste Komponente ein Vektorbündel über M vom Rang $r \cdot k$.

Für $s \in \Gamma(M; E), t \in \Gamma(M; V)$ ist zudem $s \otimes t \in \Gamma(M; E \otimes V)$.

Beweis. nimm Trivialisierungen $\Psi^E : E_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ von E und $\Psi^V : V_U \rightarrow V \times \mathbb{R}^k$ von V , dann ist $\Psi(p, \sum_{i=1}^N s_i \otimes t_i) = (p, \sum_i (\pi_2 \circ \Psi^E(p, s_i)) \otimes (\pi_2 \circ \Psi^V(p, t_i)))$, was in der zweiten Komponente ein Element von $\mathbb{R}^r \otimes \mathbb{R}^k$ gibt, aber das ist mittels $e_i \otimes e_j \mapsto e_{k(i-1)+j}$ isomorph zu \mathbb{R}^{rk} ; ist wohl alles Atlas (wenn man erste Komponente noch mit Karten von M auf den \mathbb{R}^n abbildet), weil glatte Abhängigkeit, Linearität

Projektion ist natürlich glatt und die Fasern sind $(E \otimes V)_p = E_p \otimes V_p$, also insbesondere auch Vektorräume (das passt also auch)

falls $s \in \Gamma(M; E), t \in \Gamma(M; V)$, so entsprechen die Einschränkungen s_U, t_U wegen der Existenz der Trivialisierungen Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}^r, g : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ und daher ist $s \otimes t$ (? hier ohne Index U ?) eine Funktion $f \otimes g : U \rightarrow \mathbb{R}^r \otimes \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^{rk}$ (was wegen der Einträge der Form $f_i g_j$ glatt ist) \square

Um das Tensorprodukt von Vektorbündeln zu definieren, nutzt man hier also, dass Tensorprodukte von Vektorräumen bereits möglich sind, und definiert daher die Fasern als $(E \otimes V)_p = E_p \otimes V_p$. Weil das insbesondere wieder ein Vektorraum über jedem Punkt p ist (nur Terme wie $E_p \otimes V_q$ würde Probleme machen bei π^{-1} , für $q = p$ nicht), muss man sich „nur“ noch die zugehörigen Trivialisierungen konstruieren und das wurde im Beweis getan. Bei Schnitten macht man exakt das Gleiche und definiert das Tensorprodukt punktweise über $(s \otimes t)(p) = (s \otimes t)_p = s_p \otimes t_p$.

Weil diese Objekte eine große Rolle spielen (die gesamte Allgemeine Relativitätstheorie ist in der Sprache von Tensorprodukten formuliert !), bekommen sie eigene Namen:

Definition 5.17: Tensorbündel, -feld

Für Vektorbündel E, V heißt $E \otimes V$ **Tensorbündel** und $s \in \Gamma(M; E \otimes V)$ **Tensorfeld**.

Weil Tensorbündel ja insbesondere Vektorbündel sind, kann man auf diese Weise sind rekursiv auch Tensorprodukte mit mehr Faktoren definieren. Teilweise kommen dabei im interessanten Fall mit den Bündeln TM, T^*M sehr viele Faktoren vor, weshalb folgende Notation für Tensorbündel eingeführt wird:

$$T^{(r,s)}M := TM \otimes \cdots \otimes TM \otimes T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M, \quad (5.45)$$

der erste Faktor TM taucht also r -mal auf und der zweite T^*M s -mal. Offenbar gilt

$$T^{(1,0)}M = TM, \quad T^{(0,1)}M = T^*M, \quad T^{(1,1)}M = TM \otimes T^*M \cong \text{Hom}(TM, TM)$$

und weil man Faktoren $\otimes \mathbb{R}$ ja nicht mitschreibt, ist zudem $T^{(0,0)}M = \mathbb{R}$ sinnvoll.

Nach dieser Definition folgt nun der vielleicht wichtigste Satz der Tensorrechnung, der viele Objekte auf die gleiche Weise formalisiert (wie Tensoren es bereits tun) und daher eine ungemein allgemeine Arbeit ermöglicht:

Satz 5.18: Tensorielle Eigenschaft

Für zwei Vektorbündel $\pi^E : E \rightarrow M$ vom Rang r über M und $\pi^V : V \rightarrow M$ vom Rang k über M und eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$\Phi : \Gamma(M; E) \rightarrow \Gamma(M; V),$$

die zudem C^∞ -linear ist und damit

$$\Phi(fs) = f\Phi(s), \quad \forall f \in C^\infty(M; \mathbb{R}), s \in \Gamma(M; E) \quad (5.46)$$

erfüllt, existiert ein eindeutiger Schnitt $\hat{\Phi} \in \Gamma(M; E^* \otimes V)$ mit

$$(\Phi(s))(p) = \hat{\Phi}_p(s_p), \quad \forall s \in \Gamma(M; E). \quad (5.47)$$

Die erst einmal gar nicht so wichtig erscheinende Aussage ist also, dass man Abbildungen zwischen Schnitträumen in verschiedene Vektorbündel wiederum durch einen Schnitt beschreibbar sind (diesmal im Tensorbündel), wenn sie C^∞ -linear sind (was zuvor auch *tensorielle Eigenschaft* genannt wurde, nun ist klar warum).

Die Beweisidee kann man sich dabei darüber merken, dass Φ punktweise die Form $\Phi_p : E \rightarrow V$ annimmt (bei äquivalenter Deutung als $\Phi : p \mapsto \Phi_p$) und daher $\Phi_p \in \text{Hom}(E, V) \cong E^* \otimes V$ gilt. Deshalb kann man es auch mit Elementen von $\Gamma(M; E^* \otimes V)$ identifizieren und zwar eindeutig, wenn Φ tensoriell ist.

Anmerkung: dass eine Abbildung ein Schnitt ist, heißt jedoch nicht automatisch, dass sie tensoriell ist! Ein Gegenbeispiel sind Vektorfelder.

Die Wichtigkeit dieser Aussage wird sich im Rest dieses Abschnitts zeigen und angefangen wird wie immer mit Beispielen dazu:

Beispiel 5.19: Vektorwertige 1-Differentialform, Kommutator

Ein sehr gutes Beispiel, wo dieser Satz enorm hilft, sind vektorwertige 1-Formen $\omega \in \Omega^1(M; V)$. Diese wurden eingeführt als $\omega = \sum_k \omega_k v_k$ mit $\omega_k \in \Omega^1(M) = \Gamma(M; T^*M)$ und $v \in V$. Da das punktweise eine Abbildung auf TM bildet, die Werte in V annimmt, erhält man schnell die äquivalente Form

$$\omega \in \Gamma(M; T^*M \otimes V), \quad (5.48)$$

was für $V = \mathbb{R}$ wegen $T^*M \otimes \mathbb{R} = T^*M$ in (5.40) übergeht.

Man kann nun auch den Kommutator als Abbildung $[\cdot, \cdot] : X(M) \times X(M) \rightarrow X(M)$ betrachten. Dieser ist jedoch nicht durch einen Schnitt aus $\Gamma(M; X(M)^* \otimes X(M)^* \otimes X(M))$ gegeben, da er nicht tensoriell ist (wurde als Eigenschaft gezeigt):

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X \cdot g)Y - g(Y \cdot f)X.$$

Schon bei wenigen Faktoren erkennt man also den großen Vorteil dieses Satzes und der Schreibweise mit Schnitten allgemein. Statt basisabhängigen Definitionen wie $\omega = \sum_{i=1}^r \omega_i v_i$ bei vektorwertigen 1-Formen schreibt man einfach $\omega \in \Gamma(M; T^*M \otimes V)$. Die Wohldefiniertheit war auch vorher klar, aber genau so wie die Glattheit der Zuordnung $p \mapsto \omega_p$ (\equiv glatte Abhängigkeit vom Punkt) musste diese Äquivalenz der Ergebnisse in verschiedenen Basen erst noch gesondert gezeigt werden - hier sind sie bereits mit der Definition klar und das spart natürlich enorm Arbeit (daher lohnt sich das Gewöhnen an diese abstrakte Definition)!

Auch diese Eigenschaft lässt sich jedoch problemlos auf mehrere Faktoren übertragen, im Beispiel von 2 Argumenten gehört zu $\Phi : \Gamma(M; E_1) \times \Gamma(M; E_2) \rightarrow \Gamma(M; V)$ \mathbb{R} - und C^∞ -linear ein eindeutiger Tensor $\hat{\Phi} \in \Gamma(M; E_1^* \otimes E_2^* \otimes V)$. Betrachtet man dabei wieder die in den meisten Fällen relevanten Bündel TM, T^*M , so ist also die Untersuchung von Tensorfeldern als Schnitte im Tensorbündel $T^{(r,s)}M$ relevant und genau darum soll es nun gehen. Punktweise ergeben diese immer einen Tensor, der lokal (auf offenen Mengen $U \subset M$) immer eine Linearkombination zerlegbarer Tensoren ist:

$$T_U = \sum X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_s, \quad X_j \in X(M), \omega_j \in \Omega^1(M). \quad (5.49)$$

Es ist direkt klar, dass jeder der vorkommenden Faktoren als Schnitt wiederum Punkte abbilden kann. Auch wenn es anfangs zu Verwirrungen führen mag, werden zudem Tensoren und Tensorfelder im Allgemeinen nicht mehr unterschieden, da die Auswertung in den Punkten so offensichtlich möglich ist und man so eine etwas übersichtlichere Notation erhält (in (5.49) müsste sonst auch überall $_p$ dabei stehen, was ein relativ unnötiger Aufwand wäre und zudem nur verwirren würde).

Anmerkung: weil ein Faktor $\otimes \mathbb{R}$ ja immer wegfällt, gilt $C^\infty(M; \mathbb{R}) = \Gamma(M, T^{(0,0)}M)$.

Eine erste und sehr wichtige Operation auf/ mit Tensorfeldern ist dann die verallgemeinerte Operation zur Spurbildung bei Matrizen.

Definition 5.20: Kontraktion/ Verjüngung

Für ein Tensorfeld $T \in \Gamma(M, T^{(r,s)}M)$ in der lokalen Darstellung T_U heißt die tensorielle, lineare Abbildung

$$\text{tr}_{k,l} : T^{(r,s)}M \rightarrow T^{(r-1,s-1)}M, T \mapsto \text{tr}_{k,l}(T) = \sum \omega_l(X_k) \cdot \\ X_1 \otimes \cdots \otimes X_{k-1} \otimes X_{k+1} \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_{l-1} \otimes \omega_{l+1} \otimes \cdots \otimes \omega_s . \quad (5.50)$$

mit $1 \leq k \leq r, 1 \leq l \leq s$ *Kontraktion* oder *Verjüngung*.

Die Wohldefiniertheit folgt aus der punktweisen Betrachtung, da $\text{tr}_{k,l}$ streng genommen auf Tensorfelder und nicht Tensoren wirkt (auch wenn die Begriffe ja verschwimmen, ist das für die Sinnhaftigkeit einiger Gleichungen wichtig).

Anmerkung: ergibt es nicht total Sinn, dass diese Operation den Tensorrang um jeweils genau eins verringert? Und auch, dass ein Tensorprodukt mit \mathbb{R} einfach weggelassen werden kann? Weil man das Tensorprodukt ja im Endeffekt genau so definiert, dass es das Produkt reeller Zahlen ist (wenn man also fest einsetzt einmal, dann bleibt die Wirkung der restlichen tensoriellen Elemente trotzdem genau gleich)

Beispiel 5.21: Spur

Punktweise ergibt ein Tensorfeld $T \in \Gamma(M, T^{(1,1)}M) = \Gamma(M, T^*M \otimes TM)$ offenbar einen Endomorphismus $T_p \in \text{End}(T_p M) = \text{Hom}(T_p M, T_p M)$ und daher gilt

$$\text{tr}_{1,1}(T)_p = \text{tr}(T_p) \quad (5.51)$$

mit der Spur des Endomorphismus, die über die zugehörige Darstellungsma- trix in einer gewissen Basis berechnet werden kann. Hier zeigt sich, was mit Verallgemeinerung der Spurbildung gemeint war und außerdem wird hier klar, warum die Spur von Matrizen basisunabhängig ist: eine Matrix ist ein Tensor.

Dieses Beispiel ist der Grund, warum die Kontraktion eines allgemeinen Tensors oft ebenfalls als *Spur des Tensors* bezeichnet wird.

5.2.2 *Distributionen und der Satz von Frobenius*

statt Vektorräumen in einem Punkt anzuhängen (was man bei Vektorbündeln gemacht hat), kann man auch ganze MF anhängen (ist laut Balazs die Idee bei Distributionen)

Wdh.: Für den Tangentialraum $T_p N$ von k -dimensionalen Untermannigfaltigkeiten N in Mannigfaltigkeiten M galt ja die Aussage, dass $T_p N \subset T_p M$ ein k -dimensionaler Untervektorraum ist.

Frage: wann Umkehrung der letzten Aussage, nimm also Untervektorraum von $T_p M$ (oder mehrere) und gucke, für welche glatte Familie von solchen UVR eine UMF existiert, die an den ganzen jeweiligen Punkten genau diesen Tangentialraum hat (diese UMF heißt dann *Integralmannigfaltigkeit von \mathcal{D} durch p* ; nochmal Bedingungen dafür: $p \in N$ und $\mathcal{D}_q = T_q N, \forall q \in N$); wird eben beantwortet von Satz von Frobenius

Beispiel: ein VF ohne Nullstellen auf einer Menge U gibt Linien vor (also 1D-UVR) und dann sind die Integralkurven genau solche UMF (also Integralmannigfaltigkeiten); machen da lokal Vektoren ungleich 0 durch Forderung $X_p \neq 0$; haben Plattmacherkarten (die induziert ist von einem Plattmacher) für Integralkurven aus diesem Satz mit Vektorfeld als erster Gauß'scher Basisvektor

Definition 5.22: Distribution

Eine glatte Zuordnung $p \mapsto \mathcal{D}_p \subset T_p M$ auf k -dimensionale Untervektorräume \mathcal{D}_p , sodass für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$ und Vektorfelder $X_1, \dots, X_k \in X(U)$ existieren mit

$$\text{span}(X_1(q), \dots, X_k(q)) = T_q M, \quad \forall q \in N, \quad (5.52)$$

heißt *k -dimensionale Distribution auf M* .

ok, das ist glaub ich so Bullshit

glattes Untervektorbündel des Tangentialbündels, $\mathcal{D} \subset TM$ (logisch oder ? Fassen ja das Ding zu verschiedenen Punkten zusammen)

Hmm also ist das die Analogie zu einem Vektorfeld?

trivialisieren die Vektorkomponente also

im Skript hat er es anders definiert, da wurde Äquivalenz dazu nur gezeigt (übernehme dann Definition aus Skript und schreibe danach, dass das viel anschaulicher wird mit diesem Satz)

Definition 5.23: Integrabilität einer Distribution

Eine Distribution \mathcal{D} auf einer Mannigfaltigkeit M heißt *integrabel/involutiv*, falls

$$[X, Y] \in \Gamma(M, \mathcal{D}) = \mathcal{X}(\mathcal{D}) \quad (5.53)$$

für die Vektorfelder aus $\Gamma(M, \mathcal{D})$, also die Elemente $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ mit $X_q, Y_q \in \mathcal{D}_q, \forall q \in M$.

wollen also, dass Kommutator immer auch wieder Vektorfeld gibt; dabei reicht es aus, diese Bedingung für Vektorfelder $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(U, \mathcal{D})$ zu zeigen, die die Distribution punktweise aufspannen, die also $\text{span}(X_1(q), \dots, X_k(q)) = T_q M, \forall q \in U$ erfüllen (weil anderer Shit ja Linearkombi davon ist; muss auf offener Umgebung U jedes Punktes $p \in M$ gezeigt werden, da reicht wegen Eigenschaften Lie-Klammer)

Satz 5.24: Satz von Frobenius

Eine k -dimensionale Distribution \mathcal{D} aus M ist genau dann integrabel, wenn für jeden Punkt $p \in M$ eine Integralmannigfaltigkeit N von \mathcal{D} durch p existiert.

nutzen hier gefühlt alles: Flüsse, eindeutige Vektorfelder mit den Gauß'schen; eine Richtung easy, andere ist Ziel das mit dem Span zu zeigen

Beispiel 5.25: Maurer-Cartan-Gleichungen

definiere $\dim(M)$ -dimensionale Distribution

$$\mathcal{D}^\omega := \{(X_p, g \cdot \omega(X_p)) \in T_p M \times T_g G : (p, g) \in M \times G, X_p \in T_p M\} \quad (5.54)$$

für $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ sind $\hat{X}, \hat{Y} \in \Gamma(M \times G, \mathcal{D}^\omega)$ mit $\hat{X}_{(p,g)} = (X_p, g\omega(X_p))$ und \hat{Y} analog

Kommutator kennen wir (auf HÜ gezeigt), ist ...; daher muss Maurer-Cartan-Gleichung erfüllt sein, damit Distribution integrabel; wollen ja Vektorfeld aus \mathcal{D} haben und nur der erste Term ist iwie da drin (weil beim zweiten in erster Komponente 0 steht; wollen aber Isomorphismus bei Projektion darauf, daher muss dann zweite auch immer 0 sein, sonst halt Probleme damit)

anders rum kann man bei Annahme der Integrabilität von \mathcal{D}^ω zeigen, dass das da was rauskommt, was Maurer-Cartan erfüllt (habe also anderen Weg, Maurer-Cartan-Gleichungen zu lösen)

das zeigt: Frobenius ist Maurer-Cartan in nicht-linear (oder iwie so)

Ergänzungen aus Übung (schau dazu Notizen von Balazs noch an !): Ziel bei diesem Abschnitt zu Frobenius etc ist Verallgemeinern von VF; können k Richtungen angeben, die glatt voneinander abhängen oder sowas (Beispiel zu Rang 1 sind zwei Vektoren in einem Punkt wohl iwie; geben also nicht nur einen Vektor an sondern mehrere, also wie VF); Integrabilität bedeutet dann, dass ein F existiert, das die UMF in die MF immergiert (das heißt wir wollen immergiert UMF N, deren Tangentialraum durch die Distribution gegeben ist, den wir eben über Push-Forward berechnen können, wobei wir aber eigentlich in M bleiben und uns vorher nur eingeschränkt haben auf N; N heißt dann Integral-MF und für $\dim(N) = 1$ ist das einfach nur Integralkurve !); kann man für jeden Punkt eine Integralmannigfaltigkeit finden kann, heißt die Distribution integabel; haben also zwei Eigenschaften von Distributionen, nämlich involutiv (eher algebraisch) und integabel (geometrisch); sick für Frobenius: können Integrabilität nun einfach über Berechnung von Lie-Klammern überprüfen ! Hier kommt dann auch Blätterung rein iwie, siehe sein Beispiel da. ? Können dann wie bei Bild von Integralkurven nicht safe wissen von welchem das kommt ?

5.3 Differentialgleichungen und Flüsse

In diesem Abschnitt soll es um die Einführung von *Gewöhnlichen Differentialgleichungen (GDGL)* sowie *Anfangswertprobleme (AWP)* gehen und wie man mit diesen auf Mannigfaltigkeiten umgeht. Eine Wiederholung von GDGL auf dem \mathbb{R}^n , wie sie aus Kursen zu Analysis bekannt sein sollten, ist in Abschnitt 1.5 nachzulesen.

Das Setting ist ziemlich analog zum Fall $M = \mathbb{R}^n$, man hat ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ und sucht dazu Kurven $\gamma : I \rightarrow M$ auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ wie z.B. $(-\epsilon, \epsilon)$ mit

$$X_{\gamma(t)} = \gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M, \quad \forall t \in I.$$

In Worten bedeutet das, dass die Ableitung $\gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt}$ ein Repräsentant des Tangentialvektors sein soll, den $X_{\gamma(t)} = X_p = X(p)$ ergibt und das für alle Zeiten $t \in I$ (man beachte dabei, dass $\gamma(t) \in M$, aber $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M$). Die Kurve soll sich also anschaulich gesprochen entlang des Vektorfelds X bewegen.

Definition 5.26: Integralkurve

Eine glatte Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ mit

$$X_{\gamma(t)} = \gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}M, \quad \forall t \in I. \quad (5.55)$$

heißt *Integralkurve von X* , falls das Intervall I mindestens zwei Punkte enthält.

Für $0 \in I$ und $p = \gamma(0) \in M$ heißt $\gamma = \gamma_p$ auch *Integralkurve von X durch p* .

Man nennt γ *maximale Integralkurve*, falls der Definitionsbereich maximal ist.

Die Lösungen von GDGL und AWP werden also auch auf Mannigfaltigkeiten durch Integralkurven beschrieben. Zudem kann man sich den Zusammenhang hier auch sehr anschaulich vorstellen: die Lösungskurve gibt zwar immer Punkte aus M , schickt einen aber gerade auf so einem Weg zu diesen Punkten, dass man sich dabei immer in die Richtung des Vektorfeldes bewegt und damit die Ableitung der Kurve (entspricht hier Richtungsableitung wegen Definitionsbereich \mathbb{R}) in Richtung des Vektorfelds zeigt. Das zeigt auch folgendes Beispiel einer in den \mathbb{R}^n eingebetteten Mannigfaltigkeit:

Beispiel 5.27: AWP auf der Sphäre

Für $M = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(\mathbb{S}^2)$, $X_p = e_3 \times p$ (\times bezeichnet hier das Kreuzprodukt, nicht das kartesische !) bzw. die Darstellung $X_{(x,y,z)} = (-y, x, 0)$ in Standardkoordinaten (dort ist $e_3 = (0, 0, 1)$) ist eine Integralkurve von X durch

$p = (x, y, z)$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (5.56)$$

wobei die Darstellungsmatrix ein Element von $\text{SO}(3)$ ist (orthogonal und Determinante 1). Diese beschreiben bekannterweise Drehungen und in der Definition des Vektorfelds trat ja auch das Kreuzprodukt auf, das ja einen zu beiden Argumenten (hier e_3, p) orthogonalen Vektor ergibt. Weil zudem e_3 ein Einheitsvektor ist, kann die Wirkung als Drehung (keine Drehstreckung) interpretiert werden, damit ist das Ergebnis auch logisch nachvollziehbar.

Natürlich wäre es nun interessant zu wissen, wann das zu einer Differentialgleichung gehörige AWP für jeden Punkt auf der Mannigfaltigkeit eine Lösung hat, deshalb sollen nun Bedingungen dafür gefunden werden.

Definition 5.28: Vollständiges Vektorfeld

Ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ heißt *vollständig*, falls durch jeden Punkt $p \in M$ eine Integralkurve von X geht, die auf $I = \mathbb{R}$ definiert ist.

Der Knackpunkt bei dieser Definition ist nun nicht, dass X auf ganz M definiert sein soll (das könnte man für lokal definierte Vektorfelder beispielsweise durch Buckelfunktionen erreichen, die glatt mit dem Nullvektor fortsetzen), sondern dass man für jeden Punkt $p \in M$ eine Integralkurve γ mit $\gamma(0) = p$ findet und dass diese zusätzlich auf ganz \mathbb{R} definiert sind. Das ist keineswegs eine leichte Aufgabe, weil die Kurve ja für beliebige Anfangswerte $p \in M$ und zu jeder Zeit t tangential am Vektorfeld X liegen soll (man muss also beim Entlanggehen der Feldlinien von X nie abbrechen, egal wo man startet) und zusätzlich noch glatt sein muss (ohne „Knicke“).

Beispiel 5.29: (Gegen-)Beispiel für ein vollständiges Vektorfeld

Das in Beispiel 5.27 vorgestellte Vektorfeld auf der 2-Sphäre ist vollständig.

Für $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$, $X_x = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ hingegen wurde ja bereits die Integralkurve $\gamma(t) = \frac{1}{1-t}$ durch den Punkt $x = 1$ gefunden, die sich aber nicht beliebig weit fortsetzen lässt ($t = 1$ ist problematisch) und daher nicht vollständig ist.

Beispiel 5.30: Verkleben von Integralkurven

Eine Möglichkeit, den Definitionsbereich einer Integralkurve zu vergrößern (z.B. auf dem Weg zu einer maximalen Integralkurve) ist das „Zusammenbas-

teln“ bzw. Verkleben zweier Integralkurven mit geeigneten Definitionsbereichen. Geeignet heißt, dass Endpunkt der einen Kurve und Startpunkt der anderen gleich sein müssen, das Ganze soll anhand der Integralkurven $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, $\hat{\gamma} : [1, 2] \rightarrow M$ zu $X \in \mathcal{X}(M)$ erläutert werden. Gilt nämlich $\gamma(1) = \hat{\gamma}(1)$, so bildet

$$\tilde{\gamma} : [0, 2] \rightarrow M, \quad \tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t), & t < 1 \\ \hat{\gamma}(t), & t \geq 1 \end{cases} \quad (5.57)$$

auch eine Integralkurve von X , wie man sich leicht überlegen kann: die Stetigkeit des Übergangs wird von der Bedingung $\gamma(1) = \hat{\gamma}(1)$ garantiert und die Differenzierbarkeit $\gamma'(1) = \hat{\gamma}'(1)$ folgt daraus, dass es sich jeweils um Integralkurven an diesem Punkt handelt. Das bedeutet, dass sie denselben Tangentialvektor an diesem Punkt repräsentieren und daher folgt mit $\gamma(1) = \hat{\gamma}(1)$:

$$\gamma'(1) = X_{\gamma(1)} = X_{\hat{\gamma}(1)} = \hat{\gamma}'(1). \quad (5.58)$$

Sind die beiden zu verklebenden Kurven auf $[0, 1]$ definiert, so muss man tricksen und das „Produkt“ der Kurven anders definieren, erhält jedoch letztendlich:

$$\tilde{\gamma} : [0, 2] \rightarrow M, \quad \tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & t < 1/2 \\ \hat{\gamma}(2t - 1), & t \geq 1/2 \end{cases}$$

Offenbar liefert jedes Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ eine GDGL auf M . Die logische Frage ist dann, wie es mit der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung dafür aussieht.

Satz 5.31: Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung

Für eine Mannigfaltigkeit M und $X \in \mathcal{X}(M)$ existiert ein $\delta = \delta_p \in \mathbb{R}^{>0}$ und ein $U \subset M$ offen, sodass durch jeden Punkt $p \in U$ eine eindeutige Integralkurve $\gamma : I \rightarrow U$ von X durch p auf dem Intervall $(-\delta, \delta)$ existiert.

Falls $\text{supp}(X) = \overline{\{p \in M : X_p \neq 0\}}$ kompakt ist, ist X zudem vollständig.

Anmerkung: der Träger supp (von englisch „support“) sollte dabei bereits bekannt sein. Es handelt sich dabei um den Abschluss \overline{N} der Nicht-Nullstellen-Menge N einer Abbildung, also die kleinste abgeschlossene Menge, die N enthält oder formal: $\overline{N} = \bigcap_{N \subset A, A \text{ abgeschlossen}} A$ (offenbar ist für N abgeschlossen $\overline{N} = N$).

Beweis. Idee ist letztendlich wieder einmal das Zurückführen auf den \mathbb{R}^n und dort Ausnutzen der Existenz einer Lösung; schreibe also die Gleichung in Koordinaten

auf, die durch eine Karte (U, φ) gegeben sind (die ist dann auf einer offenen Menge definiert, nämlich dem Koordinatengebiet der Karte); dabei kommt dann die äquivalente Gleichung $\hat{\gamma}'(t) = \hat{X}(\hat{\gamma}(t))$ heraus, wobei

$$\hat{\gamma} := \varphi \circ \gamma : I \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \quad (5.59)$$

und

$$\hat{X} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n, q \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1(q) \\ \vdots \\ \lambda_n(q) \end{pmatrix}, \quad \lambda_k := (X \cdot \varphi_k) \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.60)$$

das kann eben nach dem Satz aus dem vorherigen Abschnitt gelöst werden, womit durch Rücktransformation auf M mithilfe von φ auch die ursprüngliche Gleichung eine Lösung hat

danach hilft Kompaktheit, weil das endliche Teilüberdeckung impliziert und daher nur endlich viele $\delta_p > 0$ existieren; daraus folgt Existenz auf Intervall $(-\delta, \delta)$ und die Kurven kann man dann zusammenbasteln, sodass man letztendlich die Existenz der Integralkurve für alle Zeiten erhält \square

Offenbar handelt es sich um die „Mannigfaltigkeiten-Version“ des Satzes 1.32 zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer GDGL ! Zumindest lokal auf offenen Mengen $U \subset M$ findet man also durch alle $p \in M$ eine Integralkurve γ von X .

Das hat wichtige Folgen für eine gewisse Klasse von Mannigfaltigkeiten:

Korollar 5.32: Vollständigkeit auf kompakten Mannigfaltigkeiten

Für eine kompakte Mannigfaltigkeit M ist jedes Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ vollständig.

Beweis. Das folgt sofort daraus, dass der Träger per Definition eine abgeschlossene Menge ist und abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen wieder kompakt sind (weil die endliche Überdeckung für M existiert, gibt es sie natürlich auch für jede Teilmenge von M). Damit hat jedes Vektorfeld kompakten Träger. \square

Die besonderen Eigenschaften kompakter Mannigfaltigkeiten treten noch öfter auf.

Weil nun die Lösung nur für gewisse Zeiten, aber alle Punkte garantiert werden kann, ist die Betrachtung von Integralkurven $\gamma(t)$ nicht mehr wirklich praktisch und die Suche nach einem Objekt, das Punkt und Zeit enthält, ist angebracht. Das führt zu der Idee von Flüssen auf Mannigfaltigkeiten, die den Transport von Punkten entlang der Lösung einer GDGL und damit entlang eines gewissen Vektorfelds beschreiben.

Satz 5.33: Fluss eines Vektorfelds

Für ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ existiert eine offene Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times M$ mit $\{0\} \times M \subset \mathcal{U}$ und eine glatte Funktion

$$\Phi = \Phi^X : \mathcal{U} \rightarrow M, (t, p) \mapsto \Phi_t(p), \quad (5.61)$$

sodass gilt:

1. $\forall p \in M$ ist $\mathcal{U}_p := \{t \in \mathbb{R} : (t, p) \in \mathcal{U}\}$ ist ein Intervall, das die 0 enthält
2. $\forall p \in M$ ist die Abbildung

$$\Phi(p) : \mathcal{U}_p \rightarrow M, \mathbb{R} \ni t \mapsto \Phi_t(p) = \gamma_p(t) \quad (5.62)$$

eine maximale Integralkurve von X durch p , sodass auch $(s, \Phi_0(p)) = (s, p)$

3. $(s, p), (t, \Phi_s(p)) \in \mathcal{U} \Rightarrow (t + s, p) \in \mathcal{U}$ und $\Phi_t \circ \Phi_s(p) = \Phi_{t+s}(p)$.

Die Abbildung Φ heißt *Fluss von X* .

Beweis. kriegen Offenheit von \mathcal{U} sofort aus Existenz + Eindeutigkeit der Lösung GDGL, weil dann immer eine Integralkurve in einer kleinen Umgebung existiert; Glattheit der Abbildung in 2 folgt direkt daraus die Lösung einer glatten DGL glatt vom Anfangswert abhängt (betrachte auch die Abbildung dort beim Existenzbeweis, das ist quasi schon Fluss und der wurde dort als glatt gezeigt); das dritte folgt, weil die Integralkurven $t \mapsto \Phi_{s+t}(p)$, $t \mapsto \Phi_t(\Phi_s(p))$ beide nach 2 maximal sind und durch $\Phi_s(p)$ gehen, aber ja offenbar den gleichen Definitionsbereich haben (daher folgt aus der Maximalität die Gleichheit der Abbildungen, weil die Lösung eines AWP eindeutig durch den Anfangswert vorgegeben ist) \square

Weil das alles am Anfang sehr verwirrend ist, hier noch einmal in kompakt: Φ selber gibt einen Punkt in M , das zugehörige Vektorfeld erhält man punktweise durch

$$X_{\Phi_s(p)} = \left. \frac{d}{dt} \Phi_t(p) \right|_{t=s}, \quad \forall s \in \mathcal{U}_p, \quad (5.63)$$

die Bewegung entlang X kann nun also von beliebigen $p \in M$ gestartet werden.

Diese „Definition“ ist sehr lang, aber die Grundidee ist sehr logisch nachvollziehbar (dass man so allgemein wie möglich bleiben will, macht es am Ende so kompliziert): wie bereits davor angedeutet möchte man die Integralkurven $\gamma(t)$ durch jeden Punkt p in einer Abbildung zusammenfassen. Genau das wurde in Φ (manchmal wird Φ^X geschrieben, um die Zugehörigkeit zum Vektorfeld X zu kennzeichnen) gemacht, dort ändert Variation des ersten Parameters die Zeit, die man die Integralkurve bereits entlang geht, und Variation des zweiten Parameters ändert die Integralkurve,

die man entlang geht (durch Änderung des Anfangswerts p). Es ist also ganz natürlich, dass Tupel $(t, p) \in \mathcal{U}$ auftreten und man könnte das symbolisch so erklären, dass \mathcal{U} die Vereinigung von $I_p \times \{p\}$ mit dem zur Integralkurve durch p gehörigen Definitionsintervall $I_p \subset \mathbb{R}$ ist, das immer die Form $(-\delta, \delta)$ für ein $\delta \in \mathbb{R}$ hat und bei Eigenschaft 1 als \mathcal{U}_p bezeichnet wird (daher ist das Tupel $(0, p)$ für alle $p \in M$ in \mathcal{U} enthalten, $\{0\} \times M \subset \mathcal{U}$). Das wird aus Satz 5.31 klar und von dort kommt auch, dass man für alle $p \in M$ lösen kann und nicht nur auf einer offenen Teilmenge $U \subset M$.

-; ah, man kann wahrscheinlich nicht im Allgemeinen die DGL lösen (nur auf offener Teilmenge garantiert), aber bei $t = 0$ wirkt der Fluss als Identität, von daher kann man den Fluss immer zur Zeit 0 definieren !!! Wenn AWP für den Punkt DGL nicht lösbar, dann ist halt $\delta_p = 0$ bzw. $\mathcal{U}_p = \{(0, p)\}$, aber 0 ist immer noch enthalten

Eigenschaft 2 drückt also die bereits logisch gegebene Motivation hinter der Definition des Flusses aus, nur 3 ist nicht direkt offensichtlich. Dort steht aber einfach, dass man statt separatem Durchlaufen der Integralkurve durch $p \in M$ für die Zeit $s \in \mathbb{R}$ und Durchlaufen der Integralkurve durch $\Phi_s(p) \in M$ für die Zeit $t \in \mathbb{R}$ (bei Existenz der beiden, was durch $(s, p), (t, \Phi_s(p)) \in \mathcal{U}$ gesichert ist) auch einfach die Integralkurve durch p für die Zeit $s + t$ durchlaufen kann (entspricht der Verklebung, die hier aber direkt mit in Φ drin steckt, weil es nur maximale Integralkurven enthält).

Anmerkung: die in 3 genutzte Verknüpfung liefert eine Art Gruppenstruktur und sofort ist beispielsweise klar, dass $(\Phi_t(p))^{-1} = \Phi_{-t}(p)$.

Veranschaulichen kann man sich die ganze Konstruktion anhand eines früheren Beispiels (Drehvektorfeld auf der Sphäre), denn weil in (5.56) bereits Punkt und Zeit beliebig waren, hat man dort bereits die Flussabbildung berechnet (Eigenschaft 3 kann man unter Ausnutzen von Additionstheoremen nachrechnen).

Ein weiteres, anschauliches Beispiel liefern die Gauß'schen Basisfelder:

Beispiel 5.34: Fluss Gauß'scher Basisfelder

Für ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ mit der Darstellung

$$X_U = \frac{\partial}{\partial \varphi_1}$$

in der durch eine Karte (U, φ) induzierten lokalen Trivialisierung ist der Fluss von X_U für Punkte $x = (x_1, \dots, x_n) \in \varphi(U)$ gegeben durch

$$\Phi_t^X(\varphi^{-1}(x)) = \varphi^{-1}(x_1 + t, x_2, \dots, x_n). \quad (5.64)$$

Das ist anschaulich so zu verstehen, dass man in der Karte einfach in x_1 -Richtung

geht und den so entstehenden Punkt wieder nach M abbilden muss. Das funktioniert natürlich nur für Zeiten $t \in (-\delta, \delta)$ mit einer vom Punkt abhängigen Intervalllänge δ .

Allgemeiner könnte man die Existenz des Flusses für kleine Zeiten auch so beschreiben, dass für jeden Punkt $p \in U$ eine Umgebung $V_p \subset U$ und eine Zahl $\delta > 0$ existieren, sodass die Integralkurve durch jedes beliebige $q \in V_p$ auf dem Intervall $(-\delta, \delta)$ existiert und damit auch der Fluss

$$\Phi_t^X(q) = \varphi^{-1}(\varphi(q) + t e_1) \quad (5.65)$$

von X auf dieser offenen Menge $U \subset M$ existiert.

Anmerkung: das ist natürlich analog für alle anderen e_k möglich.

Speziell für vollständige Vektorfelder folgt nun nach Satz 5.31, dass alle Integralkurven auf ganz \mathbb{R} definiert sind, sodass für das Definitionsgebiet des Flusses Φ^X

$$\mathcal{U} = \mathbb{R} \times M \text{ und } \mathcal{U}_p = \mathbb{R}, \quad \forall p \in M \quad (5.66)$$

gilt. Weil Vektorfelder $X \in \mathcal{X}(M)$ in jedem Punkt p auf M eine Richtung X_p vorgeben (eindeutig!), folgt in diesem Fall außerdem, dass die Zuordnung $\Phi_{t_0} : M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus ist, der sehr anschaulich für die Dauer t_0 die gesamte Mannigfaltigkeit entlang der Feldlinien des Vektorfelds X verschiebt (die Glattheit folgt aus der Glattheit von X und aller Integralkurven, sodass nur die Bijektivität zu verargumentieren ist).

Mit diesen Erkenntnissen ergibt sich sofort folgendes Korollar:

Korollar 5.35: Flussabbildung

Für ein vollständiges Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ ist die Abbildung

$$\hat{\Phi} : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M), \quad t \mapsto \Phi_t \quad (5.67)$$

ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\text{Diff}(M), \circ)$.

Beweis. Dass der Zielbereich die Menge der Diffeomorphismen $\text{Diff}(M)$ ist, wurde bereits vor dem Korollar festgehalten.

Für das Vorliegen eines Gruppenhomomorphismus ist nun noch die Erhaltung der Gruppenstruktur unter $\hat{\Phi}$ zu zeigen (Linearität ist wegen der Linearität von Diffeomorphismen klar). Auf \mathbb{R} hat man dort die Addition gegeben, also die Verknüpfung $s \circ t = s + t$ (ganz offenbar erfüllt das z.B. $s, t \in \mathbb{R} \Rightarrow s + t \in \mathbb{R}$) und auf der Menge der Diffeomorphismen nimmt man einfach die Verknüpfung von Abbildungen, bei der

sich wegen des Erhalts von Bijektivität und Glattheit unter Verknüpfung nichts an den wichtigen Eigenschaften ändert und die rein rechnerisch aus der Linearität des Differentials sowie der Kettenregel folgt (für das Inverse gibt es dann beispielsweise Rechenregeln wie der Invertierung von Matrizen). Dann berechnet man einfach:

$$\hat{\Phi}(s) \circ \hat{\Phi}(t) = \Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t} = \hat{\Phi}(s+t)$$

und damit bleibt die Gruppenstruktur unter $\hat{\Phi}$ erhalten. \square

Im Prinzip hat man hier die unmittelbar vor dem Satz erkannte Struktur genutzt, dass für vollständige Vektorfelder zu jeder beliebigen Zeit t_0 die Abbildung $\Phi_{t_0} : M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus ist. Weil die festgelegte Zeit t_0 einfach einem Parameter entspricht, kann man sich so die Abbildung $\hat{\Phi}$ bauen (kann leider nicht mit der Vorschrift von Φ ausgedrückt werden, daher die leichte Abwandlung $\hat{\Phi}$).

Natürlich kann man dabei nur für den Fall vollständiger Vektorfelder ganz \mathbb{R} als Definitionsbereich annehmen, weil dort jede Integralkurve für alle Zeiten existiert. Im allgemeineren Fall nicht vollständiger Vektorfelder kann man den Wertebereich gleich lassen, muss aber den Definitionsbereich stark einschränken, genauer auf das Intervall $(-\delta, \delta)$, wobei das δ aus der Integralkurve mit dem kleinsten Definitionsbereich stammt. Es ist nämlich ganz klar, dass eine Integralkurve außerhalb ihres Definitionsbereichs nicht wirken kann und daher nicht an der Verschiebung von Punkten teilnimmt (dann würde kein Diffeomorphismus mehr vorliegen, weil die Bijektivität kaputt geht). -; ahhhh, wahrscheinlich geht das echt nur bei vollständigen und sonst oft nicht, weil nicht für jeden Punkt lösbar

Möchte man jedoch am Definitionsbereich \mathbb{R} festhalten, so kann man das tun, allerdings bildet man dann nicht mehr auf globale Diffeomorphismen ab, sondern lokale auf der Menge der Punkte, durch die eine Integralkurve läuft, die zur gewählten Zeit t_0 noch existiert (nur diese Menge wird dann ja bis zu dieser Zeit t_0 verschoben).

Anmerkung: man beachte, dass ein Gruppenhomomorphismus nichts über die Bijektivität o.Ä. aussagt! Diese ist sogar explizit nicht gegeben, weil die einparametrische Gruppe der Diffeomorphismen sehr groß ist (man kann immer Buckelfunktionen z.B. zum Abschneiden nutzen, um den Träger kompakt zu kriegen).

Die gerade herausgefundenen Eigenschaften sollten einem jetzt nicht völlig unbekannt sein, tatsächlich kamen sie bereits vor (auch wenn dort noch nicht von Flüssen o.Ä. die Rede war), wie dieses Beispiel zeigt:

Beispiel 5.36: Exponentialabbildung

Als wichtiges Beispiel eines Flusses stellt sich die Exponentialabbildung bei

Lie-Gruppen heraus. Sie ergab sich als Integralkurve zur DGL

$$\gamma'(t) = \xi \gamma(t).$$

Dass γ auf ganz \mathbb{R} definiert ist und damit das Vektorfeld X^ξ vollständig, ist sowohl wegen der einfachen Wirkung als Multiplikation als auch wegen der Lösung $\text{Exp}(t\xi)$ (dort können keine Probleme mit undefinierten Stellen auftreten). Wie aber bereits vor Definition 4.47 begründet wurde, kann man genau so einfach das ξ variieren und erhält trotzdem die analoge Lösung. Damit ist klar, dass es sich bei der Exponentialabbildung um den Fluss zu X^ξ handelt (das ist sogar die allgemeinere Definition, die Produktform ergibt sich dann für $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$).

Nach dem eben gezeigten Korollar 5.35 zusammen mit den Ausführungen davor folgt dann auch direkt, dass es sich bei Exp um einen Diffeomorphismus handelt (dass die Bijektivität möglich ist, zeigt $\dim(G) = \dim(T_g G) = \dim(\mathfrak{g})$). Außerdem entspricht die Rechenregel 4.89 genau der 3. Eigenschaft von Flüssen, die einer Gruppeneigenschaft entsprach.

Beispiel 5.37: Fluss Gauß'scher Basisfelder V2

? wirklich Beispiel ?

Beispiel von eben wird hier nochmal anders aufgezogen; hier wird gezeigt, dass es eine Karte gibt, in der der Fluss von der einfachen Form eines Gauß'schen Basisvektors ist (auch wenn das Finden dieser Karte in der Praxis sehr schwer sein kann, hier geht es ein wenig ums Prinzip für Beweise z.B.)

Sei $X \in \mathcal{X}$ und $p \in M$, sodass $X_p \neq 0$ (der Tangentialvektor an diesem Punkt soll also nicht 0 sein)

Dann existiert eine um p zentrierte Karte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$X_U = \frac{\partial}{\partial \varphi_1}. \quad (5.68)$$

Dort ist der Fluss also leicht zu handhaben (wollen natürlich U so groß wie möglich machen, aber global geht meist nicht leider).

Stelle z.B. Kreisscheibe $\subset \mathbb{R}^2$ vor und Vektorfeld $X = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$

Flüsse spielen unter Anderem in der Differentialgeometrie und Theoretischen Physik eine wichtige Rolle (z.B. Stichwort Hamilton'scher Fluss), weil man mit ihnen das Fließen in optimale Zustände oder Symmetrien eines gewissen Problems untersuchen kann (zugehörige Symmetrietransformationen sind Diffeomorphismen).

5.4 Push-Forward, Pullback und Lie-Ableitung

Auch wenn Flüsse im Allgemeinen nicht explizit hingeschrieben werden können, sind sie für theoretische Untersuchung trotzdem oft gut geeignet, was hier am Beispiel der Lie-Ableitung klar werden wird. Diese soll hier kurz motiviert werden, danach ist aber noch einige Vorarbeit bis zur eigentlichen Definition nötig.

Für ein Vektorfeld $X \in X(M)$ mit Fluss $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow M$ kann man nun die Abbildung

$$\Phi_t^*(f) := f \circ \Phi_t : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$$

betrachten (die später Pullback der Funktion f heißen wird). So bewirkt man, dass f anschaulich entlang des Flusses $\Phi_t(p)$ durch den Punkt p zur Zeit t ausgewertet wird, man setzt also nicht mehr beliebige Punkte aus M ein.

Obwohl der Fluss Φ im Allgemeinen nur ein lokaler Diffeomorphismus ist, weil er nicht für jede Zeit t existieren muss, so existiert er dennoch sicher an jedem Punkt in einer kleinen Umgebung $(-\delta, \delta)$ um $t = 0$ (wurde in der Definition gefordert). Diese Tatsache liefert dann die Wohldefiniertheit der Ableitung von $\Phi^* f$

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t^* f)(p) \Big|_{t=0}$$

und die explizite Berechnung ergibt (vielleicht etwas überraschend):

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t^* f)(p) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f \circ \Phi_t(p) \Big|_{t=0} = \frac{d}{d\Phi_t(p)} f \Big|_{\Phi_0(p)} \circ \frac{d}{dt} \Phi_t \Big|_{t=0}(p) = D_p f(X_p) = X_p \cdot f,$$

wobei $\Phi_0(p) = p$ und die Differentialgleichung ausgenutzt wurden. Diese Abbildung wird später Lie-Ableitung heißen und erlaubt wegen der expliziten Wirkung die Berechnung der Richtungsableitung entlang X über Benutzung des zu X gehörigen Flusses. Das spielt beispielsweise eine wichtige Rolle bei der Beschreibung von Symmetrien.

Anmerkung: die ungewohnte Schreibweise bei der Ableitung von f kommt daher, dass man eigentlich $f(p)$ hat und daher $\frac{d}{dp} f$. Da aber nur Punkte $\phi_t(p)$ eingesetzt werden, wird mit dieser Schreibweise lediglich der Punkt variiert (nur daher erhält man dann übrigens auch $D_p f$, das entspricht nicht $\frac{d}{dt} f$!).

Weil man eine allgemeinere Wirkung als die auf Funktionen haben möchte, erfolgt jetzt die Abstraktion der beiden hier kurz vorgestellten Definitionen.

Definition 5.38: Push-Forward

Für einen Diffeomorphismus $\Psi : M \rightarrow N$ und ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ definiert

$$\Psi_* X : N \rightarrow T_q N, q \mapsto (\Psi_* X)_q := D_{\Psi^{-1}(q)} \Psi(X_{\Psi^{-1}(q)}) \quad (5.69)$$

ein glattes Vektorfeld auf N , den *Push-Forward von X (mittels Ψ)*.

Obwohl das Differential eigentlich eine Abbildung

$$D\Psi : TM \rightarrow TN = T(\Psi(M)), X_p \equiv (p, X_p) \mapsto D_p \Psi(X_p) \equiv (\Psi(p), D_p \Psi(X_p))$$

definiert, kann man durch Festhalten der zweiten Komponente (weil man ja ein festes Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ pusht) eine Abbildung auf M konstruieren. Wegen der Forderung, dass Ψ ein Diffeomorphismus sein soll und daher insbesondere bijektiv, betrachtet man einfach statt $p \in M$ äquivalent das Bild $q = \Psi(p)$, das ja auch den Fußpunkt des Tangentialvektors vorgibt (Auswertung in p wird dann zu Auswertung in $\Psi^{-1}(q) = p$). Weil nun der Punkt noch variabel ist, an dem das feste Vektorfeld X (und dann natürlich auch das Differential) ausgewertet wird, erhält man so zwar immer noch eine Abbildung in den Tangentialraum $T_q N$ (nicht TN wegen Festhalten des Punktes und damit der Faser), aber nicht mehr aus TM , sondern aus N .

Diese lange Erklärung ist interessanterweise deshalb nötig, weil hier nichts künstlich neu konstruiert wurde (was dann oft gut abzugrenzen ist von bereits bekanntem), sondern es sich nur um einen alternativen Weg der Benutzung des Differentials handelt. Das bedarf einer klaren Abgrenzung vom allgemeinen Differential, weil es ja schon vorher dessen Aufgabe war, Tangentialvektoren von einem Raum auf den anderen zu schieben bzw. auf englisch zu pushen (diese Tatsache wurde hier gezielter ausgenutzt).

Dieser Push-Forward erfüllt für jede glatte Funktion $f : N \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\Psi_* X)_q \cdot f = (\Psi_* X \cdot f)(q) = (X \cdot (f \circ \Psi))(\Psi^{-1}(q)) = X_p \cdot (f \circ \Psi), \quad (5.70)$$

es handelt sich damit um das (eindeutige) Ψ -verwandte Vektorfeld zu X (siehe 4.32). Das gepushte Vektorfeld wirkt also einfach wie das alte, nur auf die mit Ψ verknüpfte Funktion f (unter Ausnutzen der Definition vom Anfang).

Beispiel 5.39: Push-Forward eines Vektorfelds auf der Sphäre

Sei nun $M = \mathbb{S}^2 = N, \mathcal{X}(\mathbb{S}^2) \ni X : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (es gilt also $X_p \perp p$, wenn man einen Punkt auf der Sphäre mit seinem Ortsvektor im \mathbb{R}^3 identifiziert) und A

eine Drehmatrix $A \in \text{SO}(3)$. Weil diese insbesondere Längen erhalten (man sieht das wegen $\langle Ax, Ax \rangle = (Ax)^T Ax = x^T A^T Ax = x^T x$), bildet die Matrix eine lineare Abbildung $A : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, $p \mapsto Ap$ auf der Sphäre (wo Länge 1 ja die definierende Eigenschaft ist) und sogar einen Diffeomorphismus $\Psi_A = A$ (weil wegen $\text{SO}(3) \subset \text{GL}(3)$ invertierbar und nur Multiplikation, also auch glatt).

Für das beliebige Vektorfeld X ist der Push-Forward dann wieder ein Vektorfeld

$$(\Psi_A)_* X : \mathbb{S}^2 \rightarrow T_p \mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^3, p \mapsto ((\Psi_A)_* X)_p = AX_{A^{-1}p}, \quad (5.71)$$

weil Anwendung der zu A gehörigen linearen Abbildung einfach der Multiplikation mit A ist. Es ist jedoch noch zu zeigen, dass man wirklich im Tangentialraum landet, wozu das Bild $\perp p$ stehen muss:

$$\langle ((\Psi_A)_* X)_p, p \rangle = \langle AX_{A^{-1}p}, p \rangle = \langle X_{A^{-1}p}, A^T p \rangle = \langle X_{A^{-1}p}, A^{-1}p \rangle = 0,$$

wobei die Orthogonalität $A^T = A^{-1}$ von Drehmatrizen genutzt wurde. Das letzte Gleichzeichen folgt dann wegen $X_q \perp q$ mit $q = A^{-1}p$.

Beispiel 5.40: Push-Forward mit Fluss

Sei $X \in \mathcal{X}(M)$ und $t \mapsto \Phi_t$ der Fluss von X . Nimmt man nun ein $t \in \mathbb{R}$ bei dem $\Phi_t : M \rightarrow M$ an jedem Punkt $p \in M$ existiert (gilt $\forall t$, wenn X vollständig und sonst zumindest in einer Umgebung um $t = 0$), so gilt

$$(\Phi_t)_* X = X. \quad (5.72)$$

Das kann man durch direktes Nachrechnen zeigen, indem man die Beobachtung $\Phi_0 = \text{id}$ nutzt und dann $\frac{d}{ds}(((\Phi_s)_* X) \cdot f)(p) = 0$ verifiziert.

In diesem Beispiel ist klarerweise der Fluss Φ zu X auch der Fluss zum gepuschten Feld $(\Phi_t)_* X$ (weil das ja wieder X ist), allgemeiner gilt der folgende Satz:

Satz 5.41: Fluss eines gepushten Vektorfelds

Für einen Diffeomorphismus $\Psi : M \rightarrow M$ und ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ mit Fluss $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow M$, $(t, p) \mapsto \Phi_t(p)$ ist

$$\Psi \circ \Phi \circ \Psi^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow M, (t, p) \mapsto \Psi \circ \Phi_t \circ \Psi^{-1}(p) \quad (5.73)$$

der Fluss von $\Psi_* X$.

Es müssen hier lediglich die definierenden Eigenschaften $(0, p) \mapsto p$ und maximale Integralkurve für jedem Punkt gezeigt werden (also, dass die DGL erfüllt ist).

Das geschieht durch Nachrechnen (wichtig dabei: durch geschicktes Verknüpfen $\text{id} = \Phi_t \circ \Phi_{-t}$ ergänzen). Für $\Psi = \Phi$ erhält man das Ergebnis aus dem Beispiel davor.

Will man diese Definition, wie es in den Abschnitten vorher üblich war, auf 1-Formen übertragen, so stellt sich heraus, dass man nicht „pusht“, sondern „pullt“:

Definition 5.42: Pullback

Für eine 1-Form $\omega \in \Omega^1(N; \mathbb{R})$ und die glatte Abbildung $\phi : M \rightarrow N$ definiert

$$(\phi^* \omega)_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}, X = X_p \mapsto (\phi^* \omega)_p(X_p) := \omega_{\phi(p)}(D_p \phi(X_p)) = \omega_{\phi(p)}(X_p \cdot \phi) \quad (5.74)$$

eine 1-Form $\phi^* \omega \in \Omega^1(M; \mathbb{R})$, den *Pullback von ω / Zurückholung von ω* .

Die Idee ist einfach, ein Vektorfeld auf M zu nehmen, das nach N zu pushen und dort in ω einzusetzen, wodurch man effektiv eine 1-Form auf M erhält (der Pullback stellt sich als Abbildung des Push-Forward als duales Konzept zu eben jenem heraus). Als Verknüpfung glatter Abbildungen ist das natürlich wieder glatt und daher definiert diese Angabe einer Vorschrift überhaupt eine 1-Form. Interessant beim Pullback gegenüber dem Push-Forward ist, dass er nicht nur für Diffeomorphismen definiert ist, in gewisser Weise ist der Pullback von 1-Formen also etwas flexibler.

Dass man nun im Prinzip das Umgekehrte (Duale !) zum Push-Forward macht, ist eigentlich klar, wenn man sich beispielsweise an die Rolle von $(f \circ \gamma)'$ als Derivation, aber auch Funktionenkeim erinnert (je nach Interpretation). Bei einem Vektorfeld ersetzt man schließlich den Wertebereich, bei 1-Formen hingegen den Definitionsbereich.

Die Glattheit des Pullbacks kann aber auch in Koordinaten gezeigt werden:

Beispiel 5.43: Lokale Darstellung Pullback

Sei $x = (x_1, \dots, x_m)$ eine Karte um $p \in U \subset M$ offen und $y = (y_1, \dots, y_n)$ eine Karte um $f(p) \in V \subset N$ offen mit $f(U) \subset V$ (kann oBdA angenommen werden, weil so eine im Maximalen Atlas drin ist), dann gilt

$$\begin{aligned} \omega_V &= \sum_{j=1}^n \alpha_j dy_j, \quad \alpha_j : V \rightarrow \mathbb{R} \\ f^* \omega_U &= \sum_{j=1}^m \beta_j df_j, \quad \beta_j = \alpha_j \circ y_k \circ f : U \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5.75)$$

und das ist ebenfalls offenbar glatt. Man holt also Koordinatenfunktionen mit f

zurück und verknüpft das dann noch mit den vorherigen Koeffizienten.

nein, keine Fehler hier bei den Indizes, das zweite kann man sich durch Anwenden auf Tangentialvektoren dann eben überlegen (beachte df_j !!!)

? Beispiel ist Differential einer Abbildung ? - siehe Bemerkung hinten - lol, zeigt doch sogar nächstes Beispiel (die Abschlussbemerkung weist ja auf genau das hin)

Beispiel 5.44: Berechnung Pullback

Hier soll noch eine ganz explizite Rechnung gemacht werden, die beim Verständnis des Pullbacks helfen sollte. Betrachte dazu die 1-Form

$$\omega = y \, dx - x \, dy \text{ mit } \omega_p(X_p) = \omega_p(v_1, v_2) = x(p) \, d_p y(v_1) - y(p) \, d_p x(v_2) \quad (5.76)$$

und die Parametrisierung

$$\phi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2, \theta \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad (5.77)$$

die einfach Polarkoordinaten mit dem festen Radius $r = 1$ entspricht (damit ist der Einheitskreis ja offenbar zu beschreiben). Dann kann man aus ω auch eine 1-Form auf \mathbb{S}^1 gewinnen, nämlich den Pullback, der allgemein definiert ist über

$$f(p) \, d\theta = (\phi^* \omega)_p(v_1, v_2) = \omega_{\phi(p)}(D_p \phi(v_1), D_p \phi(v_2)).$$

Dafür erhält man unter Benutzung der Kettenregel den folgenden, länglichen Ausdruck, der noch umgeformt wird:

$$\begin{aligned} & x(\phi(p)) \, d_{\phi(p)} y(D_p \phi(v_1)) - y(\phi(p)) \, d_{\phi(p)} x(D_p \phi(v_2)) \\ &= (x \circ \phi)(p) \, D_{\phi(p)} y(D_p \phi(v_1)) - (y \circ \phi)(p) \, D_{\phi(p)} x(D_p \phi(v_2)) \\ &= (x \circ \phi)(p) \, D_p(y \circ \phi)(v_1) - (y \circ \phi)(p) \, D_p(x \circ \phi)(v_2) \\ &= (x \circ \phi)(p) \, d_p(y \circ \phi)(v_1) - (y \circ \phi)(p) \, d_p(x \circ \phi)(v_2). \end{aligned} \quad (5.78)$$

Man sieht also, dass der Pullback einer 1-Form einfach dem Einsetzen der neuen Komponentenfunktionen aus der Parametrisierung statt der alten Komponenten entspricht (allgemeingültige Aussage)! Speziell für das betrachtete ω ergibt das (die Vektorargumente spielen hier keine Rolle):

$$\begin{aligned} \eta_\theta := (\phi^* \omega)_\theta &= \omega_{(x(\theta), y(\theta))} = \cos(\theta) \, \cos(\theta) \, d\theta - \sin(\theta) \, (-\sin(\theta)) \, d\theta \\ &= (\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2) \, d\theta = d\theta. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Dabei erhält man die Terme für dx, dy nach der Form

$$d_\theta(x \circ \phi) = d_\theta \cos(\theta) = -\sin(\theta) d\theta,$$

also: „leite die Funktion ab nach ihren Parametern und schreibe diese Parameter mit einem d dahinter (das sind die zur Koordinate gehörigen Funktionenkerne)“. Das entspricht auch genau dem Wechsel der Darstellung der dualen Gauß'schen Basis festgehalten hat (siehe (3.42)), ist aber deutlich einfacher zu merken (weniger Indizes bei gleichem Ergebnis). Das erweist sich nun als sehr nützlich, weil man ja insbesondere Basiswechsel so berechnen kann, wähle einfach $\omega = dx$ etc. !

Obwohl der Pullback für allgemeinere Abbildungen definiert ist, kann man natürlich den Fall eines Diffeomorphismus $\phi = \Psi : M \rightarrow M$ untersuchen. Sehr spannend wird das Ganze dann bei Betrachtung der glatten Funktion $p \mapsto \omega_p(X_p)$, weil

$$(\Psi^* \omega)(\Psi_*^{-1} X) = \omega(X) \circ \Psi : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto (\omega(X) \circ \Psi)(p) = \omega_{\Psi(p)}(X_{\Psi(p)}). \quad (5.80)$$

Anmerkung: hier wird $N = M$ gewählt, um Verwirrungen mit Definitions- und Wertebereichen vorzubeugen, die nur vom Wesentlichen ablenken würden.

Das folgt leicht mithilfe der Kettenregel (sei dazu $q = \Psi^{-1}(p)$):

$$\begin{aligned} \Psi^* \omega(\Psi_*^{-1} X)(p) &= \omega_{\Psi(p)}\left(\left(\Psi_*^{-1} X\right)_p \cdot \Psi\right) = \omega_{\Psi(p)}\left(D_p \Psi\left(\left(\Psi_*^{-1} X\right)_p\right)\right) \\ &= \omega_{\Psi(p)}\left(D_p \Psi\left(D_{\Psi(p)} \Psi^{-1}(X_{\Psi(p)})\right)\right) \\ &= \omega_{\Psi(p)}\left(D_{\Psi(p)}\left(\Psi \circ \Psi^{-1}\right)(X_{\Psi(p)})\right) = \omega_{\Psi(p)}(X_{\Psi(p)}) \end{aligned}$$

Dabei meint $\Psi_*^{-1} = (\Psi^{-1})_*$. Man erhält also eine natürliche Verträglichkeit von Pullback und Push-Forward, die mit folgender Definition noch natürlicher aussieht:

Definition 5.45: Übertragung Pullback

Für einen Diffeomorphismus $\Psi : M \rightarrow M$ heißt die Funktion

$$\Psi^* f := f \circ \Psi, \quad f \in C^\infty(M; \mathbb{R}) \quad (5.81)$$

Pullback von f und das Vektorfeld

$$\Psi^* X := \left(\Psi^{-1}\right)_* X = \Psi_*^{-1} X \quad (5.82)$$

Pullback von X .

Statt nur von gepushten Vektorfeldern und gepullten 1-Formen, kann man nun auch von gepullten Funktionen und gepullten Vektorfeldern sprechen (wenn ein Diffeomorphismus vorliegt). Das ist beides sinnvoll, weil das Ziel ja letztendlich immer das Ändern des Definitionsbereichs war und für Funktionen kann man das sehr einfach über Verknüpfung machen. Bei Vektorfeldern hingegen muss die „Richtung“ des Push-Forwards geändert werden (hier nicht ganz klar wegen $N = M$, aber anhand des Push-Forwards mit Ψ^{-1} erahnbar).

Die natürliche Verträglichkeit der verschiedenen Definitionen von Pullbacks erhält man nun sehr schön durch Umschreiben von (5.80) in folgende Form:

$$\Psi^*(\omega(X)) = (\Psi^*\omega)(\Psi^*X), \quad \forall \omega \in \Omega^1(M), X \in \mathcal{X}(M). \quad (5.83)$$

Man drückt hier also den Pullback der Funktion $p \mapsto \omega_p(X_p)$ aus über den Pullback der 1-Form und den Pullback des Vektorfelds. Das ist so wichtig, weil sie wegen der äquivalenten Interpretation als Bilinearformen (\equiv Funktionen) die Definition eines Pullbacks ganz allgemeiner Tensoren/Tensorfelder erlaubt. Diese lassen sich nämlich lokal (wo $T = T_U$) schreiben als endliche Summe aus Tensoren der Form

$$X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_s, \quad X_j \in \mathcal{X}(M), \omega_j \in \Omega^1(M)$$

und daher ist folgende Definition nur sinnvoll:

Definition 5.46: Pullback eines Tensors

Für einen Diffeomorphismus $\Psi : M \rightarrow M$, $X_j \in \mathcal{X}(M)$ und $\omega_j \in \Omega^1(M)$ heißt

$$\Psi^*T_U := \sum \Psi^*X_1 \otimes \cdots \otimes \Psi^*X_r \otimes \Psi^*\omega_1 \otimes \cdots \otimes \Psi^*\omega_s \quad (5.84)$$

Pullback des Tensors T .

Der nötige Beweis der Wohldefiniertheit folgt sofort, weil der Pullback punktweise linear ist und das Tensorprodukt linearer Abbildungen wieder linear ist. Man beachte jedoch, dass die gezeigte Darstellung im Allgemeinen nur lokal möglich ist.

Einige wichtige Eigenschaften neben der Linearität sind dann:

Satz 5.47: Eigenschaften des Pullbacks

Für einen Diffeomorphismus $\Psi : M \rightarrow M$ gilt

1. $\Psi^*(T \otimes S) = \Psi^*T \otimes \Psi^*S, \quad \forall T \in \Gamma(M, T^{(r,s)}M), S \in \Gamma(M, T^{(k,l)}M)$
2. $(\psi \circ \Psi)^*T = \Psi^*(\psi^*T), \quad \psi : M \rightarrow M$ Diffeomorphismus

$$3. \Psi^* \circ \text{tr}_{k,l} = \text{tr}_{k,l} \circ \Psi^* : T^{(r,s)}M \rightarrow T^{(r-1,s-1)}M \text{ mit } k \leq r, l \leq s$$

Beweis. 1. folgt wegen $T \otimes S \in \Gamma(M, T^{(r+k,s+l)}M)$ (zumindest nach Umordnen) und dann aus der Definition des Pullbacks

2. folgt aus der Kettenregel

3. folgt aus dem Beweis vorher zur Verträglichkeitsbedingung, indem man die Definition auf zerlegbare Tensoren anwendet \square

Das definiert also die Wirkung auf Tensorprodukte (1.), was bei Verknüpfungen passiert (2.) und die Verträglichkeit mit Kontraktion (3.), die Bedingung (5.83) verallgemeinert (Fall vorher für $k = 1 = l$ und Anwendung auf $\omega \otimes X$).

Nach dieser langen Vorarbeit kann nun (endlich) die Lie-Ableitung definiert werden:

Definition 5.48: Lie-Ableitung

Für ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ mit zugehörigem Fluss $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow M$ und ein Tensorfeld $T \in \Gamma(M; T^{(r,s)}M)$ ist

$$\mathcal{L}_X T : M \rightarrow T^{(r,s)}M, p \mapsto (\mathcal{L}_X T)_p := \left. \frac{d}{dt} (\Phi_t^* T)_p \right|_{t=0} \quad (5.85)$$

die *Lie-Ableitung entlang X* mit $\mathcal{L}_X T \in \Gamma(M; T^{(r,s)}M)$.

Weil der Fluss per Definition auf einer offenen Umgebung von $\{0\} \times M$ existiert, ist Ψ_t jeweils ein lokaler Diffeomorphismus. Deshalb ist der Pullback in dieser Umgebung berechenbar und die Lie-Ableitung auch für nicht vollständige Vektorfelder wohldefiniert (es ist ja bloß die Ableitung bei $t = 0$ relevant). Die Zuordnung $p \mapsto (\mathcal{L}_X T)_p$ definiert dann eine Abbildung nach $T^{(r,s)}M$, die wegen der Glattheit des Flusses und der Ableitung ebenfalls glatt ist (insgesamt liegt damit ein Tensorfeld vor).

Anschaulich gesagt misst die Lie-Ableitung die Änderung des Tensorfeldes T bei Verschiebung entlang des Flusses Φ von X , indem die infinitesimale Änderung und damit Ableitung berechnet wird (wie üblich betrachtet man dabei infinitesimale Änderungen, also die Ableitung).

Auch für diese gibt es natürlich wichtige Eigenschaften:

Satz 5.49: Eigenschaften der Lie-Ableitung

Für die Lie-Ableitung \mathcal{L}_X entlang eines Vektorfeldes $X \in \mathcal{X}(M)$ gilt:

$$1. \mathcal{L}_X \cdot f = X \cdot f, \quad \forall f \in C^\infty(M; \mathbb{R}) = \Gamma(M, T^{(0,0)})$$

2. $\mathcal{L}_X Y = [X, Y], \quad \forall Y \in \mathcal{X}(M)$
3. $\mathcal{L}_X(T \otimes S) = (\mathcal{L}_X T) \otimes S + T \otimes (\mathcal{L}_X S), \quad \forall T \in \Gamma(M, T^{(r,s)} M), S \in \Gamma(M, T^{(k,l)} M)$
4. $\mathcal{L}_X(\text{tr}_{k,l}(T)) = \text{tr}_{k,l}(\mathcal{L}_X T), \quad \forall T \in \Gamma(M, T^{(r,s)} M), k \leq r, l \leq s$

Beweis. nutzen wiederum, dass wir nur wissen müssen, wie eine Derivation auf eine allgemeine Funktion wirkt, um die Derivation zu kennen; müssen uns dann überlegen, was überhaupt der Push-Forward macht, nämlich $(\Psi_* Y)_q = D_{\Psi^{-1}(q)} \Psi(Y_{\Psi^{-1}(q)})$ und dann ist $(\Psi_* Y) \cdot f(p) = (Y \cdot (f \circ \Psi))(\Psi^{-1}(q))$, woraus direkt die Gleichung folgen sollte; zudem gilt $\left. \left(\frac{d}{dt} (\Phi_{-t})_* Y \cdot f \right) \right|_{t=0}(p) = \left. \frac{d}{dt} Y_{\Phi_t(p)} \cdot (f \circ \Phi_{-t}) \right|_{t=0}$

es helfen die Eigenschaften des Pullbacks, dort ist ja auch Vertauschung drin z.B. \square

Damit ist die Wirkung auf Funktionen (1.) sowie Vektorfelder (2.) definiert (deshalb heißt der Kommutator oft auch Lie-Ableitung) und man erhält allgemein für Tensoren (Funktionen und Vektorfelder sind ja nur spezielle Beispiele dafür) eine Produktregel (3.) sowie Verträglichkeit \equiv Vertauschung mit der Kontraktion (4.). Damit lässt sich im Prinzip alles ableiten, was an Objekten auf Mannigfaltigkeiten existiert (die Wirkung auf 1-Formen bzw. allgemeiner Tensoren aus $T^{(r,s)} M$ mit $s > 0$ ist noch nicht allgemeiner schreibbar, hier muss die Definition verwendet werden).

Darüber hinaus zeigt sich, dass die Lie-Ableitung durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt ist. Das heißt dass jede Abbildung auf Tensorfelder, die das erfüllt, bereits die Lie-Ableitung ist (daher auch Satz am Anfang, dass man mit Flüssen gut die Lie-Ableitung beschreiben kann, obwohl sie ja zunächst darüber definiert war; jetzt hat man mit diesen drei Eigenschaften eine davon unabhängige, wenn auch natürlich implizite und daher sehr abstrakte). Das ist sehr angenehm, weil so eine alternative Definition hat, die zwar auf den ersten Blick weniger anschaulich wirkt (man hat ja keine Funktion oder so vorliegen), aber eben unter Umständen für das praktische Rechnen damit deutlich besser zu handhaben ist, weil die Wirkung direkt klar ist.

Anmerkung: allgemein handelt es sich wegen der vielen Indizes und Details in den Definitionen um ein eher schwieriges Thema, man merkt sich daher meist nur die wichtigsten Aussagen, wie beispielsweise Satz 5.49.

Beispiel 5.50: Jacobi-Identität

Dass man die Lie-Klammer bereits kennengelernt hat, zeigt sich an der Wirkung auf Vektorfelder. Man erhält damit auch eine Herleitung (und Merkregel) für die

Jacobi-Identität, die einfach nur Linearität und Produktregel von \mathcal{L}_X ausnutzt:

$$\begin{aligned}
 [X, [Y, Z]] &= \mathcal{L}_X[Y, Z] = \mathcal{L}_X(YZ) - \mathcal{L}_X(ZY) \\
 &= \mathcal{L}_X(Y)Z + Y\mathcal{L}_X(Z) - \mathcal{L}_X(Z)Y - Z\mathcal{L}_X(Y) \\
 &= \mathcal{L}_X(Y)Z - \mathcal{L}_X(Z)Y + Y\mathcal{L}_X(Z) - Z\mathcal{L}_X(Y) \\
 &= [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z] \\
 &= [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]].
 \end{aligned} \tag{5.86}$$

Anmerkung: nimmt man es ganz genau, ist diese Schreibweise etwas verkürzt. Man kann die Produktregel lediglich auf Tensoren anwenden, nutzt jedoch das Vertauschen von \mathcal{L}_X mit der Spur. Stringenter, aber äquivalent, wäre also:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_X(YZ) &= \mathcal{L}_X \operatorname{tr}_{1,1}(Y \otimes Z) = \operatorname{tr}_{1,1} \mathcal{L}_X(Y \otimes Z) \\
 &= \operatorname{tr}_{1,1} ((\mathcal{L}_X Y) \otimes Z + Y \otimes (\mathcal{L}_X Z)) \\
 &= \mathcal{L}_X(Y)Z + Y\mathcal{L}_X(Z).
 \end{aligned}$$

? müsste ja so sein oder, Produktregel an sich wurde nirgendwo festgehalten; Problem: das Ding ist doch kein $(1, 1)$ -Tensor oder ?

als Beispiel vlt (auf jeden Fall aufnehmen, inspiriert von https://de.wikipedia.org/wiki/Lie-Ableitung#Eigenschaften_und_Lie-Algebra): die Lie-Ableitung wirkt als Derivation auf Funktionen (evtl auch nur punktweise -; ah ne, daher kommt wieder Funktion raus, weil man auch punktweise betrachten kann), erfüllt also \mathbb{R} -Linearität und Leibniz-Regel (Linearität aus Definition mit Ableitung und Pullback wahrscheinlich, anderes sollte aus Eigenschaft 3 folgen, weil das Tensorprodukt von $(0, 0)$ -Tensoren wieder einen $(0, 0)$ -Tensor ergibt und man daher einfach multiplizieren kann wahrscheinlich); das zeigt aber, dass \mathcal{L} die tensorielle Eigenschaft nicht erfüllt und daher nicht durch einen Schnitt gegeben ist

man kann wohl jede Lie-Klammer als Lie-Ableitung schreiben -; joooo, nur im Spezialfall von Vektorfeldern wirkt das Ding als Kommutator

man kann wohl vieles bereits mit dieser Darstellung durch erste Koordinatenfunktion sehen, dazu sehr nützlich ! Siehe Screenshot dazu

Beispiel 5.51: Lie-Ableitung einer Funktion

Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und G eine Matrix-Lie-Gruppe, die auf M wirkt (es gibt also Abbildungen $G \times M \rightarrow M$) und für $\xi \in \mathfrak{g} = T_e G$ sei $X = X^\xi$. Nimmt man nun an, dass f invariant unter G ist, also $f(p) = f(g p)$, $\forall g \in G, p \in M$ erfüllt ist (gutes Beispiel ist $f(p) = f(x, y, z)$ auf der Sphäre, die ist invariant unter Drehung um die z-Achse). Dann gilt natürlich $\mathcal{L}_X \cdot f = X \cdot f = 0$, weil X die infinitesimale

Gruppenwirkung darstellt (f ändert sich nicht bei Gruppenwirkung und daher ist Ableitung gleich 0), unter der f aber invariant ist.

Weiter gilt aber auch $\mathcal{L}_X df = 0$, auch das Differential der Funktion (eine 1-Form) ist dann invariant unter G (? nachvollziehbar, da ja f es schon war?). Das kann man auch nachrechnen: $(\mathcal{L}_X df)(Y) = \text{tr}_{1,1}((\mathcal{L}_X df) \otimes Y) = \text{tr}_{1,1} \mathcal{L}_X(df \otimes Y) - \text{tr}_{1,1}(df \otimes \mathcal{L}_X Y) = \mathcal{L}_X \text{tr}_{1,1}(df \otimes Y) - [X, Y] \cdot f = \mathcal{L}_X(Y \cdot f) - [X, Y] \cdot f = Y \cdot X \cdot f = 0$, wobei im Wesentlichen die Rechenregeln der Lie-Ableitung verwendet wurden und das letzte Gleichzeichen aus der Invarianz von f unter X folgt (die Ableitung dort ist also 0).

Korollar 5.52: Kommutator von Lie-Ableitungen

Für $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ gilt

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X, Y]}. \quad (5.87)$$

Dabei gilt für ein allgemeines Tensorfeld T wie zuvor auch $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]T = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y T) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X T)$. Der Nachweis geschieht schlicht über Nachrechnen der Eigenschaften für $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$, bei deren Gültigkeit aus der eindeutigen Bestimmung von $\mathcal{L}_{[X, Y]}$ bereits Gleichheit folgt.

Die anschauliche Aussage ist, dass der „Unterschied“ bei Tausch der Reihenfolge bei Ableitung in die Richtungen X, Y gerade der Ableitung in Richtung des „Unterschieds“ von X, Y ist (das ist ja im Prinzip im Kommutator erfasst). Eine wichtige Folgerung daraus ist, dass die Lie-Ableitungen in Richtung von X, Y genau dann kommutieren, wenn X und Y bereits kommutieren. Das entspricht nach Definition der Lie-Ableitung der Aussage, dass die Flüsse infinitesimal kommutieren. Man mag sich nun fragen, ob sich auch allgemeinere Schlüsse auf das Kommutieren der Flüsse ziehen lassen.

ähnliche Aussage galt doch bei Lie-Algebren oder ?

können Aussage mit VF auch aufintegrieren, also von den VF auf die Flüsse schließen

Beispiel 5.53: Cartans Formel

Für $\omega \in \Omega^1(M)$ und $X \in \mathcal{X}(M)$ gilt *Cartans Formel*:

$$\mathcal{L}_X(Y) = d(\omega(X))(Y) + d\omega(X, Y). \quad (5.88)$$

Man beachte dabei, dass im ersten Summanden das Differential der Funktion $\omega(X) : M \rightarrow \mathbb{R}$ steht und im zweiten die Abbildung $d\omega$ aus 4.53 benutzt wurde !

mach Nachrechnen safe auch für Cartans Formel, weil da sooo geil das mit

Vertauschung von Spur und Tensorprodukt; ist Beispiel im Skript (hier halt nur für 1-Formen bis jetzt)

Lemma 5.54: Pullback des Kommutators

Für Vektorfelder $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ mit $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow M$ als Fluss von X gilt

$$(\Phi_{t_0})^*[X, Y] = \frac{d}{dt} \Phi_t^* Y \Big|_{t=t_0}. \quad (5.89)$$

Beweis. Definiere die Φ_{-t_0} -verwandten Vektorfelder $\tilde{X} = (\Phi_{-t_0})_* X = (\Phi_{t_0})^* X$ (nach Definition des Pullbacks von Vektorfelder) und $\tilde{Y} = (\Phi_{-t_0})_* Y$ zu X, Y und nutze dann das Übertragen der Verwandschaft auf den Kommutator (siehe 4.45):

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = (\Phi_{-t_0})_* [X, Y] = \Phi_{t_0}^* [X, Y].$$

Weil gleichzeitig wegen $\tilde{X} = (\Phi_{t_0})^* X = X$ (siehe Aussage aus Beispiel 5.40) aber

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X, \tilde{Y}] = \mathcal{L}_X \tilde{Y} = \frac{d}{dt} \Phi_t^* (\Phi_{t_0}^* Y) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \Phi_{t+t_0}^* Y \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \Phi_t^* Y \Big|_{t=t_0}$$

gilt, ist man nun schon fertig (haben Verknüpfung von Flüssen genutzt und dann Translation, was natürlich die Ableitung nicht ändert bei geeigneter Anpassung der Stelle der Auswertung; man könnte auch sagen iwie kleine Umdefinition). \square

Nun kann man die Aussage über den Kommutator der Flüsse machen:

Satz 5.55: Kommutator von Flüssen

Für $X \in \mathcal{X}(M)$ mit Fluss $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow M$ und $Y \in \mathcal{X}(M)$ mit Fluss $\Psi : \mathcal{V} \rightarrow M$ gilt

$$(\Phi_t \circ \Psi_s)(p) = (\Psi_s \circ \Phi_t)(p), \quad \forall p \in M, (s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (5.90)$$

mit $(t, \Psi_s(p)), (t, p) \in \mathcal{U}$ und $(s, \Phi_t(p)), (s, p) \in \mathcal{V}$ genau dann, wenn $[X, Y] = 0$.

Die Gleichheit $\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$ ist hier einfach nur punktweise notiert und die Forderungen danach besagen im Wesentlichen, dass diese Gleichheit nur auf den Definitionsbereichen der Flüsse gilt (wegen der Verknüpfung der Flüsse muss das daher auch jeweils für das Bild des einen Flusses gefordert werden). Im Fall vollständiger Vektorfelder lautet die Aussage einfach: zwei Flüsse kommutieren genau dann, wenn die zugehörigen Vektorfelder kommutieren.

Nun noch eine nützliche Aussage:

Korollar 5.56

Für $U \subset M$ offen sowie $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{X}(U)$ mit $[X_i, X_j] = 0, \forall i, j = 1, \dots, n$ und $X_1(p), \dots, X_n(p)$ als Basis von $T_p U = T_p M$ für alle $p \in U$ existiert für alle Punkte $p \in U$ eine offene Umgebung $V \subset U$ und eine in p zentrierte Karte $x = (x_1, \dots, x_n) : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$(X_k)_V = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \forall k = 1, \dots, n. \quad (5.91)$$

Die Rückrichtung war bereits vorher klar (Kommutieren wurde bereits gezeigt und die Basis steckt bereits im Namen der Gauß'schen Basisfelder/-vektoren). Man erhält nun aber (analog zu einer Aussage vorher) dass auch die Umkehrung gilt und man daher für eine Familie von Vektorfeldern mit diesen speziellen Eigenschaften immer eine zentrierte Karte findet, in denen die Vektorfelder eine sehr einfache Form annehmen.

Satz 5.57

Für $W \subset \mathbb{R}^2$ offen mit $0 \in W, p \in M, X \in \mathcal{X}(M)$ mit Fluss $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow M$ und $Y \in \mathcal{X}(M)$ mit Fluss $\Psi : \mathcal{V} \rightarrow M$ sei

$$\mathcal{H}(p) : W \rightarrow M, (s, t) \mapsto \mathcal{H}_{(s,t)}(p) = \Phi_s \circ \Psi_t \circ \Phi_{-s} \circ \Psi_{-t}(p). \quad (5.92)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} \right|_{(0,0)} &= \left. \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial s^2} \right|_{(0,0)} = 0 = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} \right|_{(0,0)} = \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right|_{(0,0)} \\ \left. \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial s \partial t} \right|_{(0,0)} &= -[X, Y]_p. \end{aligned} \quad (5.93)$$

bilden mit \mathcal{H} also auf Kommutator ab; erste Zeile ist easy, weil $\mathcal{H}(s, 0) = p = \mathcal{H}(t, 0)$ (offensichtlich weil Fluss zur Zeit 0 einfach die Identität ist)

Beispiel 5.58: Einparken

bestes Beispiel ever übrigens

besagt also, dass man durch Vorwärts-/ Rückwärtsfahren zusammen mit Lenken in die Parklücke reinkommt (bzw. mit Kommutieren davon, also hintereinander ausführen)

Beispiel 5.59: Katzen

hätte nicht gedacht, dass es noch besser geht, aber here we go

Zitat: fallende Katzen benutzen nicht-kommutierende Vektorfelder, um sich um die eigene Achse drehen zu können und dann auf ihren vier Pfoten zu landen

kann man wohl im Internet so wie das vorher ausgearbeitet finden; bei Drehungen ist aber klar, dass sie z.B. nicht kommutieren (einfach einmal vorstellen; denke zudem an QM, wo Drehimpulsoperatoren nicht kommutieren), von daher hört sich das sogar sinnvoll an

6 Differentialformen

Die Theorie von Tensoren ist zwar auch allgemein sehr ertragreich, hier soll sich von nun an aber auf eine ganz bestimmte Klasse selbiger konzentriert werden, die alternierenden Tensoren. Es wird sich nämlich herausstellen, dass sich mit diesen im Rahmen des Cartan'schen Differentialformenkalküls die Integrationstheorie vom \mathbb{R}^n verallgemeinern lässt auf Mannigfaltigkeiten. Im Zuge dessen lernt man nach der Lie-Ableitung eine zweite Art kennen, wie Formen abgeleitet werden können.

Zum Ende wird die Theorie dann noch genutzt, um einige (recht fortgeschrittene) Anwendungen zu zeigen, insbesondere bei der Klassifizierung von Mannigfaltigkeiten. Eine etwas einfachere Anwendung ist, dass man mit dieser Theorie ein mathematisches Objekt angeben kann, das an einem gewissen Punkt p den Fluss eines Feldes o.Ä. durch die von zwei Vektoren aufgespannte Fläche (bzw. allgemeiner durch das Volumen) messen kann.

6.1 Alternierende multilinear Abbildungen

Wie bereits angekündigt, wird sich von nun an im Allgemeinen auf die besondere Klasse der alternierenden bzw. schiefsymmetrischen Tensoren konzentriert. Bevor das basisunabhängig in der neuen Sprache von Tensoren und Schnitten formuliert wird, soll das Ganze für multilinare Abbildungen diskutiert werden (nach der bekannten Isomorphie ist der Übergang nicht allzu schwer).

Die Symmetrie bezieht sich dabei auf das Verhalten beim Tausch zweier Argumente, einer sogenannten *Transposition*. Mathematisch handelt es sich um Abbildungen

$$\sigma_{i,j}(l) = \begin{cases} l, & \text{falls } l \neq i, j \\ j, & \text{falls } l = i \\ i, & \text{falls } l = j \end{cases}, \quad (6.1)$$

mit deren Hilfe man die Indizes von Vektoren v_l tauschen kann. Führt man viele Transpositionen hintereinander aus, so handelt es sich um eine *Permutation*

$$\sigma \in S_k = \{g : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\} \text{ bijektiv}\} \quad (6.2)$$

und damit ein Element der *Symmetrischen Gruppe S_n* . Dabei handelt es sich tatsächlich um eine Gruppe, die Verknüpfung wird gebildet von der Komposition mehrerer Abbildungen und das Einzelement ist mit $g = \text{id}$ direkt klar.

Auch wenn sich jede Permutation als endliches Produkt aus Transpositionen/ Vertauschungen schreiben lässt, so ist die Zusammensetzung nicht eindeutig. Als geeignetes Mittel zur Klassifizierung stellt sich aber die Parität der Vertauschungen heraus, man erhält den wohldefinierten und surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\text{sign} : S_k \rightarrow \{-1, 1\}, \sigma \mapsto (-1)^{\# \text{ der Transpositionen in } \sigma}, \quad (6.3)$$

das *Signum* der Permutation σ . Eine alternative Art der Berechnung ist, die Determinante der zu σ gehörigen Permutationsmatrix zu bestimmen.

Anmerkung: man kann das Signum auch mit Wertebereich \mathbb{Z}_2 definieren, dann besteht sein Kern aus den gerade Permutationen. - ; aus Skript, checke es aber nicht

Diese Möglichkeit zur Klassifizierung des Verhaltens beim Tauschen von Argumenten ermöglicht nun die formale Definitionen gewisser Symmetrien von multilinearer Abbildungen, wie eben beispielsweise der Schiefheit. Es sei dabei jedoch angemerkt, dass sich Abbildungen hierbei auch auf nicht allgemein beschreibbare Weise verhalten können oder sich einfach nicht in allen Argumenten gleich verhalten, solche Symmetrien sind also eher die Ausnahme (wenn auch eine sehr interessante) !

Definition 6.1: Alternierende Form

Eine k -fach multilinear Abbildung $\omega \in \text{Mult}(V; k) = V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ mit

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = \text{sign}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}), \quad \forall v_1, \dots, v_k \in V, \sigma \in S_k \quad (6.4)$$

heißt *alternierend/schief(symmetrisch)*. Die Menge aller alternierenden Multilinearformen/ k -Linearformen $\omega \in \text{Mult}(V; k)$ wird mit $\Lambda^k V^*$ bezeichnet.

Für Gleichheit ohne sign heißt ω *symmetrische Abbildung*.

Das bedeutet einfach, dass bei jedem Argumenttausch ein Vorzeichenwechsel passt (deutlich praktischeres Kriterium zur Überprüfung als das aus der eigentlichen Definition), was wegen der Zusammensetzung der Elemente von S_k klar ist.

Eine sehr interessante Eigenschaft, die sofort daraus folgt, erkennt man für den Fall $v_i = v_j, \exists i, j$: nach der Definition einer alternierenden Form gilt dann nämlich

$$\begin{aligned} \omega(v_1, v_1, \dots, v_k) &= \omega(v_1, v_2, \dots, v_k) = -\omega(v_2, v_1, \dots, v_k) = -\omega(v_1, v_1, \dots, v_k) \\ \Leftrightarrow \quad \omega(v_1, v_1, \dots, v_k) &= 0. \end{aligned}$$

Wegen der Linearität in jedem Argument kann man allgemeiner folgern, dass alternierende Formen für linear abhängige Vektoren $v_2 = \lambda v_1, \exists \lambda \in \mathbb{R}$ verschwinden:

$$\omega(v_1, v_2, \dots, v_k) = \omega(v_1, \lambda v_1, \dots, v_k) = \lambda \omega(v_1, v_1, \dots, v_k) = 0.$$

Das hat unter Anderem weitreichende physikalische Folgen, z.B. können deswegen gewisse Teilchen nicht den gleichen Zustand besetzen (Zustände werden durch Tensoren beschrieben, hängt mit dem Pauli-Prinzip zusammen).

Beispiel 6.2: Determinante

Als Standardbeispiel einer alternierenden Multilinearform wird sich die Determinante herausstellen, die aus der Linearen Algebra als Abbildung

$$\det : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n, (v_1, \dots, v_n) \mapsto \det(A) = \det(v_1, \dots, v_n), \quad (6.5)$$

bekannt ist, wobei die Spaltenvektoren nebeneinander gestellt werden und so eine Matrix A bilden (man könnte aber genau so gut Zeilenvektoren übereinander schreiben, weil Transposition die Determinante invariant lässt). Nach den bekannten Rechenregeln ist diese alternierend (Spalten- oder Zeilentausch bringt Vorzeichenwechsel) und multilinear (in jeder Spalte und Zeile linear, also in jedem Argument). Insgesamt bedeutet das gerade $\det \in \Lambda^n V^*$.

Beispiel 6.3: Pullback

Für eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ und $\omega \in \Lambda^k W^*$ ist $f^* \omega \in \Lambda^k V^*$ mit

$$f^* \omega(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(v_1), \dots, f(v_k)), \quad v_j \in V, \forall j. \quad (6.6)$$

Die k -fache Linearität folgt dabei sofort aus der von f und ω . Der Pullback wirkt hier also auf den ersten Blick etwas anders als zuvor, nämlich ohne Ableitung. Das liegt einfach daran, dass die Ableitung zuvor ja nur dazu da war, um Tangentialvektoren zu „bauen“, aber hier sind V, W bereits Vektorräume und daher kann man durch einfache Verknüpfung Elemente davon erhalten.

Weil alternierende Multilinearformen aber insbesondere Multilinearformen sind, verhält sich der Pullback ansonsten wie gewohnt.

Alternierende Multilinearformen werden sich als sehr nützlich herausstellen, aber es wurde ja bereits festgehalten, dass nur ein kleiner Teil aller Multilinearformen diese Eigenschaft hat. Weil man den gleich entwickelten Formalismus aber gerne auch für allgemeine Formen anwenden würde, muss man diese alternierend machen:

Definition 6.4: Alternierungsoperator

Die Abbildung/ der Operator

$$\begin{aligned} \text{Alt} &= \text{Alt}_k : \text{Mult}(V; k) \rightarrow \Lambda^k V^*, \quad \omega \mapsto \text{Alt}(\omega) \\ \text{mit } \text{Alt}(\omega)(v_1, \dots, v_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sign}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \end{aligned} \quad (6.7)$$

heißt *Alternierungsoperator*.

Das ist wohldefiniert und linear, weil nur Summen von linearen Abbildungen auftreten. Formal gesprochen handelt es sich um den Projektionsoperator auf den vollständig antisymmetrischen Unterraum $\Lambda^k V^* \subset \text{Mult}(V; k)$. Der Normierungsfaktor $\frac{1}{k!} = \frac{1}{\dim(S_k)}$ ist dabei nicht nötig, sondern aus Konvention so gewählt, dass

$$\text{Alt}(\omega) = \omega, \quad \forall \omega \in \Lambda^k V^*. \quad (6.8)$$

Dieser Operator ermöglicht nun auch die Einführung eines Produkts auf den alternierenden Multilinearformen. Das war vorher nicht möglich/ wohldefiniert, weil das Produkt zweier alternierender Multilinearformen ja nicht zwingend wieder alternierend ist (was nun aber gerade erzwungen werden kann).

Definition 6.5: Dachprodukt

Die Abbildung

$$\bigwedge : \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \rightarrow \Lambda^{k+l} V^*, (\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k! l!} \text{Alt}_{k+l}(\omega \otimes \eta) \quad (6.9)$$

heißt *Dach- / wedge-Produkt* und $\Lambda^k V^*$ *Dachproduktraum*. Andere gebräuchliche Bezeichnungen sind *Äußeres Produkt* für \wedge und *k-te Äußere Potenz* für $\Lambda^k V$.

Dass der Alternierungsoperator überhaupt sinnvoll auf Tensoren wirken kann, kommt von der Identifikation mit der Abbildung

$$\omega \otimes \eta : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}, (v_1, \dots, v_{k+l}) \mapsto \omega(v_1, \dots, v_k) \eta(v_1, \dots, v_l)$$

Folgende Regeln können bei \wedge genutzt werden:

Satz 6.6: Rechenregeln Dachprodukt

Für Multilinearformen $\omega \in \Lambda^k V^*, \eta \in \Lambda^l V^*, \nu \in \Lambda^m V^*$ gilt

1. $\omega \wedge (\eta \wedge \nu) = (\omega \wedge \eta) \wedge \nu$
2. $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$
3. $\omega \wedge (\eta + \nu) = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \nu, (\eta + \nu) \wedge \omega = \eta \wedge \omega + \nu \wedge \omega$, wenn $l = m$
4. $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$

Beweis. Der Beweis ist im Prinzip einfach nur Nachrechnen, wobei man dann die Rechenregeln des Alternierungsoperators nutzen muss. Bei 3. ist dabei $l = m$ nötig, damit die Addition überhaupt Sinn macht und 4. folgt sofort aus der Verträglichkeit des Pullbacks mit dem Tensorprodukt. \square

Eine direkte Folgerung aus der 2. Eigenschaft ist für ungerade Dimension $\omega \wedge \omega = 0$, weil in diesem Fall ganz allgemein $(-1)^{k^2} = -1$ gilt. Insbesondere ist also ein k -faches Dachprodukt null, wenn eine Linearform ($k = 1$, ungerade) doppelt vorkommt. Diese erst einmal unscheinbare Folgerung wird noch sehr oft ausgenutzt werden.

Aufgrund der ersten Eigenschaft werden zudem meist die Klammern weggelassen bei mehr als zwei Faktoren, aber streng genommen kombiniert das Dachprodukt nur zwei Differentialformen. Dennoch lassen sich so sinnvoll Produkte mit mehr Faktoren definieren, das geschieht induktiv und nimmt eine bekannte Form an:

Satz 6.7: Berechnung des Dachprodukts

Für Linearformen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Lambda^1 V^* = V^*$ und $v_1, \dots, v_k \in V$ gilt:

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)(v_1, \dots, v_k) = \det \left((\alpha_i(v_j))_{i,j=1}^k \right). \quad (6.10)$$

Beweis. Beweisidee ist Entwicklung der Determinante auf der rechten Seite und links Abspalten des letzten Dachprodukts immer sowie Ausschreiben der linearen Abbildung davon wahrscheinlich, wo eben die Multiplikation reinkommt (dann Induktion) \square

Das Gleichzeichen meint hier auch wirklich Gleichheit des Ergebnisses und nicht nur Isomorphie, man setzt schließlich Vektoren in Linearformen ein und erhält daher das Produkt reeller Zahlen (die Determinante bildet ebenfalls nach \mathbb{R} ab). Notationell ist es noch wichtig zu erwähnen, dass meist die Klammern um die α_i weggelassen werden, weil es sich beim Dachprodukt ja um ein einziges Objekt handelt.

Dieser Satz ist sehr interessant, weil er die etwas direktere Berechnung des Dachprodukts mithilfe der etwas vertrauteren Determinante anstatt des recht komplizierten Alternierungsoperators ermöglicht. Man beachte zudem, dass Linearformen eingesetzt werden und damit nicht auf irgendeine Alternierung achten muss.

Anmerkung: in der Viel-Teilchen-Physik ist ein ähnliches Objekt weit verbreitet, das dort Slater-Determinante genannt wird.

Beispiel 6.8: Explizite Berechnung eines Dachprodukts

Ausschreiben von Dachprodukten wird im Allgemeinen sehr lang und übersichtlich. Im Falle einer 2-Form geht es jedoch noch, dort gilt explizit:

$$dx_1 \wedge dx_2 = dx_1 \otimes dx_2 - dx_2 \otimes dx_1 \quad (6.11)$$

und die Auswertung ist nach der Äquivalenz zu multilinear Abbildungen:

$$(dx_1 \wedge dx_2)(v_1, v_2) = dx_1(v_1)dx_2(v_2) - dx_2(v_1)dx_1(v_2) = \det \begin{pmatrix} dx_1(v_1) & dx_1(v_2) \\ dx_2(v_1) & dx_2(v_2) \end{pmatrix},$$

die Determinante kommt also tatsächlich heraus.

Bis jetzt konnten Dachprodukte ganz allgemein aufgestellt und auch ausgewertet werden. Zum Vergleich verschiedener Elemente und viele andere Zwecke ist aber auch die lokale Darstellung einer Multilinearform $\omega \in \Lambda^k V^*$ nötig. Dazu muss im ersten Schritt eine Basis gefunden werden:

Satz 6.9: Basis des Dachproduktraums

Für eine Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ von V^* mit $n = \dim(V) = \dim(V^*)$ ist

$$\{\alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k} : 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n\} \quad (6.12)$$

eine Basis von $\Lambda^k V^*$. Insbesondere ist also

$$\dim(\Lambda^k V^*) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (6.13)$$

Beweis. beruht halt auf Basisdarstellung der einzelnen Elemente und dann Bilden des Produkts davon mit allen möglichen Kombis (die kann man abzählen mit Binomialkoeffizienten und daraus folgt dann auch Dimension; ist ja Antwort auf die Frage: „wie oft passen k Vektoren auf verschiedene Weise in n unterschiedliche Einträge“); haben da aber wohl noch keine Sortierung und daher muss man noch Umordnen, alles ist bis auf VZ richtig und daher muss jeder Faktor 0 sein (das zeigt dann Gleichheit) \square

Offenbar können also alternierende k -Linearformen als k -faches Produkt aus Linear-/1-Formen dargestellt werden und diese Erkenntnis motiviert die Schreibweise

$$\Lambda^k V^* \equiv V^* \wedge \cdots \wedge V^*. \quad (6.14)$$

Man kann sich nun die Frage stellen, ob sich auch der Fall $k = 0$ behandeln lässt. Dort hat man dann lineare Abbildungen ohne Argumente aus dem Vektorraum V , die in die reellen Zahlen abbilden, und zudem wird $\binom{\dim(V)}{0} = 1$ (beachte: man teilt nicht durch 0, sondern durch $0! = 1$). Die erste Antwort auf die Frage wäre also: nein ! Diese Forderungen lassen sich erfüllen durch die Wahl $V = \mathbb{R} = V^*$. Eine reelle Zahl kann nämlich auch als konstante Abbildung $c : V = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto c$ gedeutet werden und weil diese immer gleich abbilden, werden dafür im Prinzip auch keine Argumente benötigt. Außerdem ist sofort klar, dass verschiedene konstante Abbildungen linear abhängig sind, weil die zugehörigen reellen Zahlen sich in jedem Punkt nur um eine feste Konstante unterscheiden. Damit sind die Forderungen erfüllt und die Identifikation/ Definition $\Lambda^0 V^* := \mathbb{R}$ erweist sich als sinnvoll.

Anmerkung: das Dachprodukt kann eigentlich nur auf Multilinearformen wirken und nicht auf Vektorräume, aber weil jedes Element sich in solche Produkte zerlegen lässt, schreibt man das trotzdem so auf (eher symbolisch zu verstehen).

- ζ hmm, evtl eher $\text{Alt}(V^* \otimes \cdots \otimes V^*)$ schreiben mit Vorfaktoren oder so ? Weil ja nicht jedes Element ein direktes Produkt ist, sondern wie bei Tensorprodukten üblich auch Linearkombinationen auftreten können; sieht man auch an Dimensionen, das Dachprodukt der beiden Räume $\Lambda^1 V^*, \Lambda^2 V^*$ kann nicht $\Lambda^3 V^*$ sein

Die nun bekannte Formel für die Dimension erlaubt ebenfalls einige allgemeine und sehr interessante Aussagen: so ist wegen $\binom{k}{k} = 1, \forall k \in \mathbb{N}$ im Fall $k = \dim(V)$ klar, dass nur ein einziges Basiselement existiert und daher alle k -Linearformen linear abhängig sind. Denkt man nun zurück an Beispiel 6.2, so stellt sich dieses Basiselement als die Determinante heraus, dort ist also jede alternierende Multilinearform bis auf einen Faktor (im Allgemeinen ist dieser eine Funktion) gleich der Determinante! Punktweise unterscheiden sich diese Formen also sogar nur um eine reelle Zahl.

Außerdem folgt für $k > \dim(V)$ nach den Eigenschaften des Binomialkoeffizienten sofort $\Lambda^k V^* = \{0\} \Leftrightarrow \omega = 0, \forall \omega \in \Lambda^k V^*$. Das ist auch sofort klar, weil in diesem Fall nicht genug linear unabhängige Basiselemente aus V^* zum Einsetzen existieren, in einem k -fachen Dachprodukt also immer mindestens ein Faktor doppelt vorkommt und daher immer eine 0 auftaucht (man denke dann an die Folgerung aus Satz 6.6).

Nachdem man die Basiselemente gefunden hat, ergibt sich die Basisdarstellung einer alternierenden Multilinearform $\omega \in \Lambda^k V^*$ (V habe Dimension n) zu

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k} \alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k} \\ \text{mit } \omega(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k} (\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k})(v_1, \dots, v_k).\end{aligned}$$

Es fehlt jedoch noch ein Ausdruck für die Koeffizienten ω_{i_1, \dots, i_k} . Weil dafür die hinteren Terme $\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k}(v_1, \dots, v_k) = 1$ oder 0 werden müssen, liegt nach Definition der dualen Basis die Wahl $v_i = e_i$ (\equiv Duales zu α_i) nahe und tatsächlich zeigt sich:

$$\begin{aligned}\omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k} (\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_k})(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k} \alpha_{i_1}(e_{j_1}) \dots \alpha_{i_k}(e_{j_k}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k} \delta_{i_1, j_1} \dots \delta_{i_k, j_k} = \omega_{j_1, \dots, j_k}.\end{aligned}\tag{6.15}$$

Diese Koeffizienten entsprechen denen für 1-Formen bei Darstellung in einer Trivialisierung, nur eben verallgemeinert auf Multilinearformen.

Nachdem nun mit lokalen Darstellungen angefangen wurde, müssen wiederum Basiswechsel untersucht werden. Dazu nehme man zwei Basen a_1, \dots, a_n und b_1, \dots, b_n

6.1.1 ÄUSSERE ALGEBRA

von V sowie die zugehörigen dualen Basen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und β_1, \dots, β_n auf V^* . Ein allgemeiner Basiswechsel hat immer die Form, dann gibt es (weil es sich jeweils um Basen handelt), Skalare $\lambda_{j_1 \dots j_k}^{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{R}$ sodass

$$\alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k} = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \lambda_{j_1 \dots j_k}^{i_1, \dots, i_k} \beta_{j_1} \wedge \cdots \wedge \beta_{j_k},$$

wobei $\lambda_{j_1 \dots j_k}^{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{R}$, und wieder erhält man wegen $\beta_i(b_j) = \delta_{ij}$ gerade

$$\lambda_{j_1 \dots j_k}^{i_1, \dots, i_k} = \alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k}(b_{j_1}, \dots, b_{j_k}) = \det \left((\alpha_{i_s}(b_{j_t}))_{s,t=1}^k \right). \quad (6.16)$$

Zusammenfassend lässt sich somit schreiben:

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k} \alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \omega(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \omega(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \left(\sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \lambda_{j_1 \dots j_k}^{i_1, \dots, i_k} \beta_{j_1} \wedge \cdots \wedge \beta_{j_k} \right) \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{j_1 \dots j_k}^{i_1, \dots, i_k} \omega(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \right) \beta_{j_1} \wedge \cdots \wedge \beta_{j_k} \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \omega(b_{j_1}, \dots, b_{j_k}) \beta_{j_1} \wedge \cdots \wedge \beta_{j_k} \\ \Leftrightarrow \quad \omega(b_{j_1}, \dots, b_{j_k}) &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \det \left((\alpha_{i_s}(b_{j_t}))_{s,t=1}^k \right) \omega(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}). \end{aligned}$$

6.1.1 Äußere Algebra

Jeder der Dachprodukträume $\Lambda^k V^*$ hat offenbar eine Vektorraumstruktur, man betrachtet schließlich in jedem Argument lineare Abbildungen und kann daher sinnvoll addieren sowie mit Skalaren multiplizieren. Mit dem Dachprodukt \wedge hat man zudem eine Möglichkeit gefunden, das Produkt zweier multilinearer Abbildungen zu bilden, jedoch ist $\Lambda^k V^*$ nicht abgeschlossen unter diesem Produkt (die Ordnung erhöht sich ja gerade), weshalb der Dachproduktraum keine Algebra bildet.

6.1.1 ÄUSSERE ALGEBRA

Betrachtet man jedoch die Vektorraumsumme

$$\bigoplus_k \Lambda^k V^*,$$

die offenbar direkt ist (eine 1-Form liegt nur in $\Lambda^1 V^* = V^*$ und nicht in $\Lambda^2 V^*$ o.Ä.), so ist diese abgeschlossen unter der Multiplikation mit \wedge ! Weil die anderen Eigenschaften durch Summieren nicht verloren gehen, erhält man somit eine Algebra.

Definition 6.10: Äußere Algebra

Die Vektorraumsumme

$$\Lambda V^* = \bigoplus_k \Lambda^k V^* \quad (6.17)$$

heißt *Äußere Algebra* (manchmal auch *Graßmann-Algebra*).

Aufgrund der Art, wie sich ΛV^* zusammensetzt (direkte Summe), sagt man auch, dass sie eine *natürliche Graduierung* hat. Offenbar lässt sich die Äußere Algebra analog für allgemeine Vektorräume V definieren und nicht nur für Dualräume V^* .

Eine alternative Definition geht etwas allgemeiner von der direkten Summe

$$T(V) = \bigoplus_k V^{\otimes k} = \mathbb{K} \oplus V \oplus V \otimes V \oplus \dots$$

mit einem \mathbb{K} -Vektorraum V aus. Weil sich jeder Tensor in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen/ alternierenden Anteil zerlegen lässt, ergibt sich damit

$$\Lambda V = T(V)/\mathcal{I} \quad (6.18)$$

mit $\mathcal{I} \subset T(V)$ als Bezeichnung für den symmetrischen Unterraum (das ein sogenanntes Ideal bildet, Details hier unwichtig). In diesem Quotientenvektorraum identifiziert man beliebige Tensoren $T = \text{Sym}(T) + \text{Alt}(T)$ mit $\tilde{T} = \text{Alt}(T)$, also ihren antisymmetrischen Anteilen und erhält damit ebenso die Äußere Algebra.

Eine Art Mischung aus den beiden Ansätzen ist es, $\Lambda^k V = T^k(V)/\mathcal{I}$ zu definieren, dann ist nämlich wiederum $\Lambda V^* = \bigoplus_k \Lambda^k V^*$.

Anmerkung: eine Verallgemeinerung der Äußenen Algebra sind sogenannte Clifford-Algebren, die nach dem gleichen Prinzip konstruiert werden können.

6.2 Differentialformen und Äußeres Differential

Bis jetzt wurden allgemeine und alternierende k -Formen auf beliebigen Vektorräumen V betrachtet. Hier geht es ja aber eigentlich um Mathematik auf Mannigfaltigkeiten, wo kein beliebiger Vektorraum vorliegt, sondern erst einmal nur $V = T_p M$. Von nun an wird also $\Lambda^k T_p^* M$ untersucht und weil die Arbeit an einem festen Punkt bereits im letzten Abschnitt ausführlich untersucht wurde, ist es jetzt interessant, auch den Punkt zu variieren. Das geht, indem man das *Bündel der alternierenden k -Formen*

$$\Lambda^k T^* M = \bigcup_{p \in M} \Lambda^k T_p^* M \quad (6.19)$$

definiert, das ein Vektorbündel vom Rang $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ bildet ($n = \dim(M)$). Genau wie alternierende Tensoren einen Unterraum von Tensoren bilden, handelt es sich bei $\Lambda^k T^* M$ ein Unterbündel des Bündels der k -Formen

$$(T^* M)^{\otimes k} = T^* M \otimes \cdots \otimes T^* M,$$

schließlich ist jede alternierende multilinear Abbildung insbesondere eine multilinear Abbildung (ganz explizit erhält man die nötigen Übergangsabbildungen durch Einschränkung der von $T^* M$ auf den alternierenden Unterraum).

Die geeigneten Abbildungen zur Untersuchung dieses Bündels sind Schnitte darin:

Definition 6.11: Differentialform

Ein Schnitt $\omega \in \Gamma(M; \Lambda^k T^* M) =: \Omega^k(M)$ heißt *k -Differentialform*.

Die Benennung folgt dabei der beim Übergang von 1-Formen (auf $T_p M$) auf 1-Differentialformen (auf $T M$) und genau so sagt man oft auch verkürzend k -Formen zu ihnen. Aufgrund der Definition über Schnitte ist sofort klar, dass Differentialformen jedem Punkt auf glatte Weise eine alternierende k -Form $\omega_p : T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ zuordnen und letztere stellen sich als konstante Differentialformen heraus (die nur eine k -Form zuordnen, weshalb nur die sich ergebende Form interessant ist).

Da Multilinearformen auf $T_p M$ aber insbesondere auch Tensoren $\in T_p^* M \otimes \cdots \otimes T_p^* M$ sind, ergibt sich die äquivalente Interpretation einer Differentialform als Tensorfeld im Unterbündel der alternierenden Tensoren ! Formal heißt das:

Lemma 6.12: Universelle Eigenschaft

Für eine Mannigfaltigkeit M und eine Abbildung

$$\Omega : \mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

die k -fach multilinear, alternierend und tensoriell ist, existiert ein $\omega \in \Omega^k(M)$ mit

$$\Omega(X_1, \dots, X_k) = \omega_p(X_1, \dots, X_k), \quad \forall X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M). \quad (6.20)$$

Diese Universelle Eigenschaft für alternierende Tensoren folgt sofort aus der für allgemeine Tensoren, weil Differentialformen gerade Schnitte im Unterbündel alternierenden Tensoren sind. Dieses Lemma sagt also, was beim Einsetzen fester Vektorfelder in eine Differentialform passiert, bei der aber der Punkt variabel bleibt (daher erhält man jeweils eine Funktion und die sollen gleich sein).

Auch wenn diese Definition nun sehr formalisiert ist und recht fremd scheint, sind Differentialformen eigentlich nichts Neues:

Beispiel 6.13: Bekannte Beispiele von Differentialformen

Bis jetzt wurde bereits öfter mit solchen Objekten gearbeitet, dort war aber die gemeinsame Herkunft noch nicht klar. Bei

$$\Omega^0(M) = C^\infty(M; \mathbb{R}) \quad (6.21)$$

$$\Omega^1(M) = \Gamma(M; \Lambda^1 T^* M) = \Gamma(M; T^* M) \quad (6.22)$$

handelt es sich offenbar einfach um die glatten Funktionen bzw. 1-Formen (dort kann noch nichts alternieren, daher musste das vorher nicht gefordert werden).

Bevor gleich die großen Vorteile von Differentialformen klar werden, sei erwähnt, dass der Pullback bei Differentialform eine etwas andere Form annimmt als für k -Formen (gezeigt in Beispiel 6.3). Da ein $\omega \in \Omega^k(N)$ gewissermaßen als Funktion und k -Form wirkt (verwertet ja Punkte und bildet ab auf Formen, kann also so gesehen auch Vektoren verwertern), ergibt sich der Pullback mittels einer glatten Abbildung $f : M \rightarrow N$ als $\Omega^k(M) \ni f^* \omega : M \rightarrow \Lambda^k T_p^* M$ und punktweise gilt

$$(f^* \omega)_p(X_1, \dots, X_k) = \omega_{f(p)}(D_p f(X_1), \dots, D_p f(X_k)). \quad (6.23)$$

Es handelt sich also lediglich um eine Anwendung des Pullbacks von Tensoren und dabei taucht ein Differential auf, weil man ja Vektorfelder X_j auf M hat welche auf N benötigt, sie also pushen muss. Für eine weitere Abbildung $g : O \rightarrow M$ erfüllt der Pullback von Differentialformen übrigens analog $(f \circ g)^* \omega = g^*(f^* \omega)$.

Anmerkung: dass der Pullback einer Differentialform wieder eine solche ergibt, ist dabei nicht klar (weil man sich dabei auf dem alternierenden Unterbündel bewegt, dessen Abgeschlossenheit unter dem Pullback nicht selbstverständlich ist!).

Wie auf Mannigfaltigkeiten üblich, lassen sich Differentialformen auch lokal darstellen, sei dazu $x = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte auf der offenen Menge $U \subset M$. Für $\omega \in \Omega^k(M)$ existiert dann wie bei k -Formen eine Darstellung in einer dualen Basis, die hier als dx_j gewählt wird (daher nur lokal möglich):

$$\begin{aligned} \Omega^k(U) \ni \omega_U &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ \text{mit } f_{i_1, \dots, i_k} &= \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right) : U \rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Aus der Definition als glatter Schnitt folgt dann sofort auch die Glattheit der Koeffizienten, $f_{i_1, \dots, i_k} \in C^\infty(U; \mathbb{R})$. Der Basiswechsel zu einer Karte $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ erfolgt dann über Ersetzen der dx_j mit den dy_j und Einsetzen anderer Koeffizienten g_{j_1, \dots, j_k} , deren Zusammenhang zu den f_{i_1, \dots, i_k} gerade gegeben ist über

$$\begin{aligned} g_{j_1, \dots, j_k} &= g_{j_1, \dots, j_k} dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_n} \left(\frac{\partial}{\partial y_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{j_n}} \right) \\ &= \omega_{U \cap V} \left(\frac{\partial}{\partial y_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{j_n}} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial y_{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{j_n}} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1, \dots, i_k} \det \left(\left(dx_{i_s} \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_t}} \right) \right)_{s,t=1}^k \right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1, \dots, i_k} \left(\det \left(\left(\frac{\partial x_{i_s}}{\partial x_{j_t}} \right)_{s,t=1}^k \right) \circ y \right) \end{aligned} \quad (6.25)$$

Das folgt durch Einsetzen der Formel für das Wechseln zwischen verschiedenen Gauß'schen Basen (3.42) mit permutieren, zusammenfassen oder kürzer aus dem Basiswechsel des vorherigen Abschnitts mit Ausschreiben der Wirkung $dx_{i_s} \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_t}} \right)$.

Anmerkung: die Verknüpfung der Determinanten mit y kommt am besten aus 3.42 heraus: $d_p x_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_j \circ y^{-1}}{\partial y_k}(y(p)) d_p y_k$. Lässt man wie hier das Einsetzen von p weg, so muss man das Auswerten an $y(p)$ beachten und daher kommt die Verknüpfung.

Ebenfalls interessant auf Mannigfaltigkeiten sind auch die Kartendarstellungen der behandelten Objekte. Im Falle einer Differentialform $\omega_U \in \Omega^k(U)$ erhält man

$$\left(x^{-1}\right)^*\omega : U \rightarrow \Lambda^k \mathbb{R}^n, p \mapsto \left(x^{-1}\right)^*\omega_U \Big|_{x(p)} .$$

Der Pullback berechnet sich dabei für $\omega_U = f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ explizit zu

$$\begin{aligned} \left(x^{-1}\right)^*\omega_U \Big|_{x(p)} &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \left(f_{i_1, \dots, i_k} \circ x^{-1}\right) \left(\left(x^{-1}\right)^* dx_{i_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\left(x^{-1}\right)^* dx_{i_k}\right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \left(f_{i_1, \dots, i_k} \circ x^{-1}\right) \alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k} \end{aligned} \quad (6.26)$$

mit dem Kovektor $\alpha_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zum Standardbasiselement e_j . Dabei wurde

$$\begin{aligned} \left(\left(x^{-1}\right)^* dx_j\right)_p (X) &= d_{x^{-1}(p)} x_j (D_p x^{-1}(X)) = D_{x^{-1}(p)} x_j (D_p x^{-1}(X)) \\ &= D_{x^{-1}(p)} x_j \circ D_p x^{-1}(X) = D_p (x_j \circ x^{-1})(X) \\ &= D_p (\pi_j \circ x \circ x^{-1})(X) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\pi_j(p + tX) - \pi_j(p)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_j + tX_j - p_j}{t} = X_j = \alpha_j(X) \end{aligned} \quad (6.27)$$

mit der Projektion π_j auf die j -te Komponente genutzt. Somit gilt

$$\left(x^{-1}\right)^* dx_j = \alpha_j = \left(x^{-1} \circ x\right)^* \alpha_j \quad \Leftrightarrow \quad dx_j = x^* \alpha_j . \quad (6.28)$$

Beispiel 6.14: Determinante

Die Determinante als Standardbeispiel einer Multilinearform existiert auch auf Mannigfaltigkeiten und spielt dort auch eine herausragende Rolle (z.B. in der Integrationstheorie). Weil das Bündel der n -Formen auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit nach $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$ eindimensional ist, gilt

$$\Omega^k(U) \ni \omega_U = h \det \quad (6.29)$$

für eine glatte Funktion $h \in C^\infty(U; \mathbb{R})$.

Weil aus der Linearen Algebra die „Normierung“ der Determinante bekannt ist (sie erfüllt $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$), erhält man als lokale Darstellung

$$\det_U = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n : T_p U \times \cdots \times T_p U \rightarrow \mathbb{R} . \quad (6.30)$$

Beispiel 6.15: n -Formen

Eine sehr wichtige Rolle z.B. bei der Integration werden die n -Formen spielen. Deren lokale Darstellung ist nun deutlich übersichtlicher als die für allgemeine k -Formen, weil es nur eine Kombination der i_1, \dots, i_k geben kann:

$$\omega_U = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \quad f = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

für eine Karte $x = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Das Schöne hieran ist, dass Operationen wie Basiswechsel sich deutlich übersichtlicher schreiben lassen, unter Anderem weil viel weniger Indizes benötigt werden. Explizit berechnet man nämlich für eine andere Karte $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\omega\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right) = g$ auf der Menge $U \cap V$:

$$\begin{aligned} g &= \omega\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right) = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right) \\ &= f \det \left(\left(dx_i \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right) \right)_{i,j=1}^{n,n} \right) = f \det \left(D(x \circ y^{-1}) \right) \circ y \end{aligned} \quad (6.31)$$

oder analog

$$f = g \det \left(D(y \circ x^{-1}) \right) \circ x = \frac{g}{\det \left(D(x \circ y^{-1}) \right) \circ x}. \quad (6.32)$$

Anmerkung: man beachte hier wieder, dass nur die Determinante und nicht die Funktionen mit den Karten verknüpft werden! Etwas besser kann man das erkennen in folgender Schreibweise:

$$g(p) = f(p) \det \left(D(x \circ y^{-1}) \right) \Big|_{y(p)} \quad f(p) = g(p) \det \left(D(y \circ x^{-1}) \right) \Big|_{x(p)}$$

Interessant wird auch, wie man die Darstellung in Karten wechselt, wo die Funktionen $\tilde{f} = f \circ x^{-1}$, $\tilde{g} = g \circ y^{-1}$ vorliegen. Hier berechnet man

$$\begin{aligned} g \circ y^{-1}(p) &= f(y^{-1}(p)) \det \left(D(x \circ y^{-1}) \right) \Big|_{y(y^{-1}(p))} \\ &= f \circ x^{-1} \circ x \circ y^{-1}(p) \det \left(D(x \circ y^{-1}) \right) \Big|_p \end{aligned}$$

6.2.1 ÄUSSERES DIFFERENTIAL

oder mit der Definition $\varphi = x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \rightarrow x(U \cap V)$:

$$\tilde{g} = \tilde{f} \circ \varphi \det(D\varphi) \quad \tilde{f} = \tilde{g} \circ \varphi^{-1} \det(D\varphi^{-1}). \quad (6.33)$$

Der bereits mehrfach angesprochene große Vorteil an Differentialformen ist also, dass die Definition sehr schön invariant/ basisunabhängig geht, man aber gleichzeitig sehr gut und schnell lokale Rechnungen damit durchführen kann (vor allem mit n -Formen).

6.2.1 Äußeres Differential

Nun soll noch ein sehr wichtiger Operator eingeführt werden, der für viele Aussagen über Differentialformen essentiell ist und beispielsweise eine verallgemeinerte Formulierung der Integrabilitätsbedingung aus 4.40 für 1-Formen ermöglicht (jedoch erst in einem späteren Abschnitt, siehe 6.56)! Dazu braucht man eine Abbildung zwischen $\Omega^k(M)$ und $\Omega^{k+1}(M)$, also die Verallgemeinerung des Differentials D als Abbildung von Funktionen ($\equiv 0$ -Formen aus $\Omega^0(M)$) auf Linearformen (1-Formen aus $\Omega^1(M)$) und das ist eben dieser Operator (der in Anlehnung an D Äußeres Differential heißt).

Um am Ende Schreibarbeit zu sparen, definiert man zwei Notationen:

Definition 6.16: Hilfsnotationen

Für $X, X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathcal{X}(M)$, $\omega \in \Omega^k(M)$ sei zum Einen

$$i_X : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M), \omega \mapsto i_X \omega \in \Omega^{k-1}(M) \quad (6.34)$$

über $i_X \omega(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1})$

und zum Anderen

$$\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{k+1}) = \omega(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{k+1}). \quad (6.35)$$

Mit i_X kann man also den Grad einer Differentialform verringern, indem man immer ein festes Vektorfeld X einsetzt und dieses nicht mehr als Argument betrachtet (welches, wird im Index aufgeführt). Damit entspricht i_X einem inneren Produkt auf $\Omega^k(M)$. Andererseits kann man den Grad auch erhöhen, indem man eines der Argumente einfach nicht einsetzt (welches, wird mit einem $\hat{\cdot}$ gekennzeichnet). Natürlich ist jeweils eine Verallgemeinerung auf mehrfaches Einsetzen/ Auslassen unproblematisch, man nehme einfach mehr Indizes oder Hüte dazu.

Beispiel 6.17: Lie-Ableitung

Als erste Veranschaulichung/ Anwendung der Definition bietet sich die Wirkung der Lie-Ableitung auf Funktionen an, die sich dann schreibt als

$$\mathcal{L}_X f = X \cdot f = df(X) = i_X df,$$

was aus der 1-Form df eine Funktion/ 0-Form $i_X df : M \rightarrow \mathbb{R}$ macht.

Diese Notationen reichen aber bereits, um zu „definieren“:

Satz 6.18: Äußere Ableitung

Es existiert genau eine lineare Abbildung

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M), \quad \forall k = 0, \dots, \dim(M)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. d ist das Differential für $k = 0$
2. $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta, \quad \forall \omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M), \forall k, l$
3. $d^2\omega = (d \circ d)(\omega) = d(d\omega) = 0, \quad \forall \omega \in \Omega^k(M), \forall k$

Wichtige Eigenschaften sind (mit $\phi : N \rightarrow M$ glatt)

$$d(\phi^* \omega) = \phi^*(d\omega) \quad \mathcal{L}_X \omega = i_X(d\omega) + d(i_X \omega) \quad \mathcal{L}_X d = d \mathcal{L}_X. \quad (6.36)$$

Definition 6.19: Äußeres Differential

Diese wohldefinierte Abbildung d heißt *Äußeres Differential/ Äußere Ableitung*.

Beweis. man nimmt als Ansatz eine multilinear Abbildung Ω (Form in (6.37)), zeigt dafür die Eigenschaften und definiert dann darüber die Wirkung von d als $\Omega = d\omega$ (funktioniert nach Existenz tensorieller Abbildung, vorher gezeigt); hieraus erhält man auch direkt die Linearität

1. für $k = 0$ ($\omega = f$) ergibt Einsetzen $df(X) = X \cdot f$ und das ist eben die normale Richtungsableitung

Eigenschaft 2 ist lokal, wie man aus der definierenden Gleichung sieht, das heißt $\omega_U = \eta_U \Rightarrow (d\omega)_U = (d\eta)_U$ (logische Erklärung ist, dass Ableitungen die lokale Änderung messen) und daher reicht auch lokale Rechnung, die man recht einfach machen kann

3. folgt ebenfalls einfach durch Anwenden der Leibniz-Regel auf die lokale Darstellung und dann Ausnutzen, dass zweite Ableitung von $f_{i_1 \dots i_k}$ und auch von dx_i verschwindet

weil diese drei Eigenschaften von der Abbildung $d\omega$ erfüllt werden, ist die Existenz gezeigt und die Eindeutigkeit ist klar, weil 2. die Lokalität vorgibt und man dann durch die 3 Eigenschaften den induzierten Operator herleiten kann, der aber genau die gleiche Form hat wie der vorher definierte

die anderen Formeln kann man dann einfach nachrechnen; die erste hilft dabei bereits sehr, weil man damit z.B. Flüsse einfach betrachten kann

coole Rechnung (wohl nicht im Skript) zum Nachweis von Cartans Formel (nehmen hier $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ ohne Nullstellen): $\mathcal{L}_X \omega = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ und analog für $i_1 < \dots < i_k$ mit $i_1 > 1$ (Fall mit $i_1 = 1$ geht analog): $i \frac{\partial}{\partial x_1} d\omega + di \frac{\partial}{\partial x_1} \omega = i \frac{\partial}{\partial x_1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \mathcal{L}_X \omega$

zu $d(dx_j) = 0$: haben ja $x_j = f$, also $dx_i =: \omega \in \Omega(U)$, dann folgt das schon aus Integrabilitätsgleichung (4.40) $X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) - \omega([X, Y]) = 0$, weil so ja genau $d\omega = d(dx_j)$ definiert ist! Können auch ausschreiben und dann Satz von Schwarz sowie $dx_i \wedge dx_i = 0$ nutzen; anderer Weg: können das auch hinschreiben die doppelte Ableitung und dann sehen, dass dort zweite Ableitung steht (symmetrisch nach Satz von Schwartz) und noch was schiefes dahinter mit dem Wedge-Produkt

Wie sieht man Vertauschen von Pullback und Äußerem Differential: schreibe den Shit für 1-Formen lokal hin (folgt dann nach Kettenregel) und dann folgt das weil man k -Formen als Produkt von 1-Formen hat \square

Die Existenz von d ist damit gezeigt, aber es liegt hat noch nichts Handfestes zur Wirkung auf eine Differentialform vor! Aus dem Beweis ergibt sich jedoch dafür:

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i \cdot \left(\omega\left(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k\right) \right) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j} \omega\left([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k\right). \end{aligned} \tag{6.37}$$

Man hätte auch den Operator auf diese Weise definieren können und dann alle Eigenschaften inklusive Eindeutigkeit zeigen können, aber das hätte vom Wesentlichen abgelenkt: der Operator mit den gewünschten Eigenschaften nimmt genau diese Form an und es nicht so, dass diese Form das einfach zufälligerweise erfüllt. Die zweite Summe dient dabei im Wesentlichen dazu, d tensoriell zu machen, es gilt also

$$d\omega(X_0, \dots, fX_j, \dots, X_k) = f d\omega(X_0, \dots, X_j, \dots, X_k), \quad \forall j = 0, \dots, k.$$

6.2.1 ÄUSSERES DIFFERENTIAL

Damit lässt sich die Äußere Ableitung

$$d : \Omega^k(M) = \Gamma(M; \Lambda^k T^* M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M) = \Gamma(M; \Lambda^{k+1} T^* M)$$

nach Satz 5.18 als Schnitt im Unterbündel der alternierenden Tensoren auffassen,

$$d \in \Gamma(M; (\Lambda^k T^* M)^*) \otimes \Lambda^{k+1} T^* M = \Gamma(M; \Lambda^k TM \otimes \Lambda^{k+1} T^* M). \quad (6.38)$$

Für Rechnungen ist neben dieser allgemeinen Darstellung des Operators aber auch die lokale Darstellung relevant. Für eine Karte $x = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ und

$$\omega_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

kann man berechnen, dass die Äußere Ableitung wie folgt wirkt:

$$(d\omega)_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} df_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \quad (6.39)$$

Dabei hat das Differential der Koeffizienten $f_{i_1, \dots, i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ die allgemeine Form

$$df_{i_1, \dots, i_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_j} dx_j.$$

Hier hilft es natürlich sehr, dass man lokal die Gauß'schen Basisvektoren einsetzt, weil diese kommutieren, wodurch die zweite Summe in (6.37) komplett wegfällt. Zudem wird in dieser Darstellung zwar nicht die Basisunabhängigkeit der Wirkung/ des Operators an sich klar, aber zum expliziten Rechnen ist sie natürlich sehr viel praktischer, weil man so einfach nur das Differential einer Funktion bestimmen muss.

Nun sollen aber die Eigenschaften etwas erläutert werden, angefangen wird mit den geforderten, die für die Eindeutigkeit verantwortlich sind: die erste ist relativ klar, man möchte ein verallgemeinertes Differential haben. Aus ihr wird aber im Ansatz (richtig dann bei der Wirkung) klar, warum die Wirkung von d den Grad der Formen erhöht: man leitet die Form bzw. lokal ihre Koeffizientenfunktion ja ab, das heißt jeder Summand wird in jede mögliche Richtung x_j abgeleitet und diese Richtung geht mit einem zusätzlichen Vektorfeld einher (man hat übrigens ein \wedge zwischen df_{i_1, \dots, i_k} und $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ stehen, weil die entstehende Form wieder alternierend sein soll).

Die zweite Eigenschaft ist das Analogon zur Produktregel für sogenannte Antiderivationen, wie d eine ist (anderes Beispiel ist $i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_X \beta)$).

6.2.1 ÄUSSERES DIFFERENTIAL

Die dritte und letzte Eigenschaft tritt wahrscheinlich zum ersten mal in dieser Form auf und vereinfacht das Rechnen mit der Äußenen Ableitung ganz massiv (beispielsweise wird nur deshalb $d(dx_j) = 0$ und daher die Wirkung lokal so kurz, nach der zweiten Eigenschaft sind eigentlich viel mehr Terme zu erwarten!).

Die Eigenschaften, die sich daraus ergeben, sind jedoch ebenso spannend, so hat man eine natürliche Verträglichkeit des Äußenen Differentials mit Pullback und Lie-Ableitung (eine mit dem Dachprodukt wurde zudem schon gefordert). Aber auch die zweite Formel in (6.36) ist von großem Wert, weil sie die vorher nicht allgemein bekannte Wirkung der Lie-Ableitung auf Differentialformen liefert! Sie trägt den Namen *Cartan-Formel* (engl. *Cartan's magic formula*) nach ihrem Entdecker Élie Cartan (die Äußere Ableitung heißt manchmal auch Cartan'sche Ableitung).

Anmerkung: dass die Maurer-Cartan-Gleichung (4.101) ebenfalls diesen Namen trägt, ist dabei kein Zufall, dort wurde die Äußere Ableitung bereits genutzt (siehe Lemma 4.53) und mit ihr lässt sie sich zu $d\omega(X, Y) = -[\omega(X), \omega(Y)]$ umformulieren.

d liefert nun auch neue Möglichkeiten zur Klassifizierung von Differentialformen:

Definition 6.20: Geschlossenheit, Exaktheit

Eine Differentialform $\omega \in \Omega^k(M)$ heißt *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$ und *exakt*, wenn $\exists \eta \in \Omega^{k-1}(M) : d\eta = \omega$. Diese Differentialform η heißt dann auch *Potential*.

Man kann nun sofort festhalten, dass für $n = \dim(M)$ jede n -Form geschlossen ist, weil dann $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ und daher tritt entweder der (triviale) Fall $df = 0$ ein oder es kommt ein doppelter Term $dx_j \wedge dx_j$ vor.

Auch wenn es sich bei d eigentlich um nichts wirklich Neues handelt (man denke nur an die Bezeichnung des Differentials bei Funktionenkeimen, wo abweichend von jeglicher bis dahin genutzter Konvention d statt D genutzt wurde!), sieht es als Verallgemeinerung trotzdem zunächst etwas anders und ungewohnt aus. Abhilfe schafft dabei wie immer ein Rechenbeispiel, bei dem auch das Verhalten im Zusammenhang mit Dachprodukt und Pullback deutlich werden:

Beispiel 6.21: Pullback und Äußere Ableitung einer 2-Form

Hier soll es um die 2-Form

$$\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3) \quad (6.40)$$

gehen. Mithilfe der Standard-Parametrisierung der Sphäre,

$$\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\theta, \varphi) \\ y(\theta, \varphi) \\ z(\theta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (6.41)$$

die im Wesentlichen Kugelkoordinaten mit festem Radius 1 entspricht, kann man daraus aber auch eine 2-Form auf der Sphäre machen, nämlich:

$$\begin{aligned} \phi^* \omega &= \phi^*(x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy) \\ &= \phi^*(x) \phi^*(dy \wedge dz) + \phi^*(y) \phi^*(dz \wedge dx) + \phi^*(z) \phi^*(dx \wedge dy) \end{aligned}$$

Diese Rechnung funktioniert also genau wie für 1-Formen (siehe z.B. in 5.44), nur dass man hier noch Dachprodukte hat. Wegen der Verträglichkeit davon, $\phi^*(\omega \wedge \eta) = (\phi^*\omega) \wedge (\phi^*\eta)$, ist das aber unproblematisch und man erhält:

$$\begin{aligned} \phi^* \omega &= \phi^* x (\phi^* dy) \wedge (\phi^* dz) + \phi^* y (\phi^* dz) \wedge (\phi^* dx) + \phi^* z (\phi^* dx) \wedge (\phi^* dy) \\ &= \phi^* x d(\phi^* y) \wedge d(\phi^* z) + \phi^* y d(\phi^* z) \wedge d(\phi^* x) + \phi^* z d(\phi^* x) \wedge d(\phi^* y) \end{aligned}$$

wegen der zusätzlichen Verträglichkeit von Pullback und Äußerer Ableitung (vorher musste man das von Hand berechnen mithilfe der Kettenregel). Man wählt nun den pragmatischen Weg der Berechnung der Pullbacks (statt den aufwendigen Basiswechsel), genau wie in 5.44. Das ergibt zusammen mit $\phi^* x \equiv x(\theta, \varphi)$ (man drückt alte die Koordinate in den neuen aus) für die einzelnen Komponenten:

$$\begin{aligned} dx &= d(\sin(\theta) \cos(\varphi)) = \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = \cos(\theta) \cos(\varphi) d\theta - \sin(\theta) \sin(\varphi) d\varphi \\ dy &= d(\sin(\theta) \sin(\varphi)) = \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = \cos(\theta) \sin(\varphi) d\theta + \sin(\theta) \cos(\varphi) d\varphi \\ dz &= d(\cos(\theta)) = \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi = -\sin(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Für die einzelnen Terme des Pullback folgt damit:

$$\begin{aligned} \phi^* x d(\phi^* y) \wedge d(\phi^* z) &= \sin(\theta) \cos(\varphi) d(\sin(\theta) \sin(\varphi)) \wedge d(\cos(\theta)) \\ &= \sin(\theta) \cos(\varphi) (\cos(\theta) \sin(\varphi) d\theta + \sin(\theta) \cos(\varphi) d\varphi) \\ &\quad \wedge (-\sin(\theta) d\theta) \\ &= \sin(\theta)^3 \cos(\varphi)^2 d\theta \wedge d\varphi \end{aligned}$$

6.2.1 ÄUSSERES DIFFERENTIAL

$$\begin{aligned}
\phi^* y \, d(\phi^* z) \wedge d(\phi^* x) &= \sin(\theta) \sin(\varphi) \, d(\cos(\theta)) \wedge d(\sin(\theta) \cos(\varphi)) \\
&= \sin(\theta) \sin(\varphi) (-\sin(\theta) \, d\theta) \\
&\quad \wedge (\cos(\theta) \cos(\varphi) \, d\theta - \sin(\theta) \sin(\varphi) \, d\varphi) \\
&= \sin(\theta)^3 \sin(\varphi)^2 \, d\theta \wedge d\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^* z \, d(\phi^* x) \wedge d(\phi^* y) &= \cos(\theta) \, d(\sin(\theta) \cos(\varphi)) \wedge d(\sin(\theta) \sin(\varphi)) \\
&= \cos(\theta) (\cos(\theta) \cos(\varphi) \, d\theta - \sin(\theta) \sin(\varphi) \, d\varphi) \\
&\quad \wedge d(\cos(\theta) \sin(\varphi) \, d\theta + \sin(\theta) \cos(\varphi) \, d\varphi) \\
&= \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \, d\theta \wedge d\varphi
\end{aligned}$$

und durch Summieren darüber ergibt sich schlussendlich:

$$\begin{aligned}
\phi^* \omega &= \sin(\theta)^3 \cos(\varphi)^2 \, d\theta \wedge d\varphi + \sin(\theta)^3 \sin(\varphi)^2 \, d\theta \wedge d\varphi + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \, d\theta \wedge d\varphi \\
&= \sin(\theta)^3 \, d\theta \wedge d\varphi + \cos(\theta)^2 \sin(\theta) \, d\theta \wedge d\varphi \\
&= \sin(\theta) \, d\theta \wedge d\varphi.
\end{aligned} \tag{6.42}$$

Hier wurden schon Eigenschaften der Äußenen Ableitung ausgenutzt, aber noch nicht richtig damit gerechnet. Als 2-Form kann man ω aber auch ableiten:

$$\begin{aligned}
d\omega &= (1 \, dx) \wedge dy \wedge dz + (1 \, dy) \wedge dz \wedge dx + (1 \, dz) \wedge dx \wedge dy \\
&= dx \wedge dy \wedge dz - dy \wedge dx \wedge dz - dx \wedge dz \wedge dy \\
&= 3 \, dx \wedge dy \wedge dz.
\end{aligned} \tag{6.43}$$

Den Pullback davon kann man nun auf zwei Arten berechnen, „konventionell“ (einfach Durchrechnen) oder kürzer unter Ausnutzen der Vertauschung mit d :

$$\begin{aligned}
\phi^* d\omega &= (\cos(\theta) \cos(\varphi) \, d\theta - \sin(\theta) \sin(\varphi) \, d\varphi) \\
&\quad \wedge (\cos(\theta) \sin(\varphi) \, d\theta + \sin(\theta) \cos(\varphi) \, d\varphi) \wedge (-\sin(\theta) \, d\theta) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.44}$$

$$\phi^* d\omega = d(\phi^* \omega) = d(\sin(\theta) \, d\theta \wedge d\varphi) = (\cos(\theta) \, d\theta) \wedge d\theta \wedge d\varphi = 0. \tag{6.45}$$

Dieses Ergebnis war durchaus erwartbar, weil $d\omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$, aber $\dim(\mathbb{S}^2) = 2$ und damit gibt es keine nicht-trivialen 3-Formen auf der 2-Sphäre.

Dass das Äußere Differential zudem schon in Vorlesungen zur Analysis o.Ä. vorkam und vor allem Physikern bekannt sein sollte, zeigt das folgende Beispiel:

Beispiel 6.22: Gradient, Rotation, Divergenz

Für eine Funktion $f(x, y, z)$ ist ja vom „normalen“ Differential bekannt, dass

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \langle \nabla f, ds \rangle \equiv \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \text{grad } f.$$

Dort wirkt die Äußere Ableitung wie das Differential und hat die Darstellung als Gradient in der zur Karte (x, y, z) gehörigen Trivialisierung (notiert hinter \equiv).

Nimmt man nun die allgemeine Darstellung einer 1-Form

$$\omega = f dx + g dy + h dz \equiv \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix},$$

so wirkt das Äußere Differential auf diese 1-Form wie

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz \right) \wedge dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= \langle \nabla \times \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}, dA \rangle \equiv \nabla \times \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \text{rot} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.46}$$

Man erhält also die bekannte Rotation des Vektors (f, g, h) .

Die Wirkung auf eine 2-Form (Bezeichnung so, dass f die x-Komponente in der Basis bzw. Reihenfolge von der Rotation ist)

$$\eta = f dy \wedge dz + g dx \wedge dz + h dx \wedge dy \equiv \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

6.2.1 ÄUSSERES DIFFERENTIAL

berechnet sich dann zu

$$\begin{aligned}
 d\eta &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dz \\
 &\quad + \left(\frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy \\
 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \langle \nabla, \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \rangle dV = \operatorname{div} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} dV
 \end{aligned} \tag{6.47}$$

und entspricht damit der Divergenz des Vektors (f, g, h) !

Außerdem folgen sofort Aussagen, die sonst enorm viel Rechenarbeit benötigen:

$$0 = (d \circ d)f = d(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \operatorname{rot} \operatorname{grad} f \tag{6.48}$$

$$0 = (d \circ d)\omega = d(\nabla \times \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}) = \nabla \cdot (\nabla \times \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}) = \operatorname{div} \operatorname{rot} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}. \tag{6.49}$$

Dabei wurden die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$ds = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \quad dA = \begin{pmatrix} dy \wedge dz \\ dz \wedge dx \\ dx \wedge dy \end{pmatrix}, \quad dV = dx \wedge dy \wedge dz, \tag{6.50}$$

das allgemeine Linien-, Flächen- und Volumenelement der Koordinaten (x, y, z) .

Anmerkung: die Bezeichnung (x, y, z) suggeriert zwar, dass es sich um kartesische Koordinaten handelt, hier bezeichnet das aber lediglich die Koordinatenfunktionen einer allgemeinen Karte !

Das Äußere Differential wird sich in den folgenden Abschnitten als sehr nützlicher Operator erweisen, der quasi eine andere Art der Ableitung darstellt als die Lie-Ableitung. Wichtige Eigenschaften sind dabei neben der Wohldefiniertheit auch, dass man für die Definition und Anwendung keine Zusatzstruktur braucht, man kann also einfach Ableiten (beim Integrieren wird das z.B. nicht der Fall sein). Letztendlich spielt d eine große Rolle dabei, dass das *Cartan'sche Differentialformenkalkül* eine so reichhaltige Theorie ist, die beispielsweise das Integrieren oder die Berechnung von topologischen Invarianten ermöglicht (bei letzterem wird $d^2 = 0$ wichtig) und das nun in Teilen vorgestellt werden soll.

Anmerkung: ein Kalkül ist einfach ein formales System von Regeln, bei dem sich aus gegebenen (Rechen-)Regeln weitere Regeln/ Aussagen ableiten lassen.

6.3 Integration von Differentialformen

Zum Ende des letzten Abschnitts wurde gezeigt, wie Differentialformen abzuleiten sind und daher kann man sich fragen, ob sie auch integrierbar sind. Was dazu nötig ist, soll nun untersucht werden, zunächst braucht man ein wichtiges Hilfswerkzeug:

Definition 6.23: Zerlegung der 1

Eine Familie von Funktionen $h_\alpha \in C^\infty(M)$, $\alpha \in I$ mit

1. $h_\alpha(x) \geq 0$, $\forall x \in M, \alpha \in I$
2. $\text{supp } h_\alpha = \overline{\{x \in M : h_\alpha(x) \neq 0\}} \subset U_\alpha$, $\forall \alpha \in I$
3. Für jeden Punkt $x \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subset M$, sodass $\text{supp } h_\alpha \cap U \neq \emptyset$ nur für endlich viele $\alpha \in I$ gilt.
4. $\sum_{\alpha \in I} h_\alpha(x) = 1$, $\forall x \in M$

für Elemente U_α einer offenen Überdeckung $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$ heißt *Zerlegung der 1*.

Die Summe in Eigenschaft 4 läuft ja über eine beliebige Indexmenge I , die Konvergenz ist daher nicht unbedingt klar. Sie wird aber von Eigenschaft 3 garantiert, weil deshalb nur endlich viele Summanden ungleich null sind, man hat eine Art lokale Endlichkeit (wichtig, weil dadurch die Existenz in jedem Punkt aus M und damit die Wohldefiniertheit gesichert sind). Man macht also im Endeffekt die Zerlegung der konstanten Funktion $1 : M \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto 1$, indem sie in Indikatorfunktionen der Form $h_\alpha(p) = \begin{cases} c, & p \in U_\alpha \\ 0, & p \notin U_\alpha \end{cases}$ aufgeteilt wird (wähle hier $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Summe eins wird). Das wird vor allem beim Vereinfachen von Ausdrücken helfen.

Satz 6.24: Existenz einer Zerlegung der 1

Für jede offene Überdeckung $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$ existiert eine Zerlegung der 1.

Beweis. Hier spielt die Existenz der Buckelfunktionen b^p eine wichtige Rolle, auf kompakten Mannigfaltigkeiten ist das Ergebnis eine Zerlegung mithilfe von

$$h_\alpha = \frac{1}{\sum_{l=1}^n b^{p_l}} \sum_{\{l \in \{1, \dots, k\} : \alpha = \alpha_{p_l}\}} b^{p_l}.$$

Der allgemeine Beweis ist sehr topologisch und hier nicht wirklich relevant. □

Man kann also sagen, dass man sich hier alles so zusammenbastelt, wie man es gerne hätte und dann tatsächlich (durch cleveres Hinzunehmen gewisser Eigenschaften) die Existenz zeigen kann. Jedoch sind noch weitere Begriffe nötig (bzw. es ist üblich, diese zu nutzen), bevor Integrationstheorie aufgezogen werden kann.

Ein weiterer wichtiger Begriff wird dazu jedoch noch benötigt:

Definition 6.25: Orientierbarkeit

Eine Mannigfaltigkeit M der Dimension n heißt *orientierbar*, wenn eine n -Form $\omega \in \Omega^n(M)$ ohne Nullstellen existiert, also $0 \neq \omega_p \in \Lambda^n T_p^* M$, $\forall p \in M$. Eine n -Form ω mit dieser Eigenschaft heißt *Volumenform*.

Eine *Orientierung o* von M ist eine Äquivalenzklasse solcher n -Formen, wobei

$$\omega \sim \eta \Leftrightarrow \omega = f \eta \text{ mit } f : M \rightarrow \mathbb{R}^{>0}, f \in C^\infty(M). \quad (6.51)$$

Eine *orientierte Mannigfaltigkeit* ist dann ein Tupel $(M, [\omega])$.

Jede n -Form kann man wegen $\dim(\Lambda^n T_p^* M) = 1$ ja lokal schreiben als $\omega_U = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ mit einer einzigen Funktion $f \in C^\infty(U)$ und mit dem Begriff der Orientierung kann man dieses f für Volumenformen noch weiter einschränken. Weil ja $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \det$ ist (also $\omega = f \det$), erhält man für $\omega \sim \det$, dass $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$ und sonst $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{<0}$. Man erkennt damit direkt, dass auf einer orientierbaren Mannigfaltigkeit genau zwei Orientierungen o_1, o_2 existieren und dass man für einen Repräsentanten $\omega \in o_1$ sofort auch Repräsentanten von o_2 findet, z.B. $-\omega \in o_2$.

Punktweise sind die Elemente einer Orientierung also Vielfache voneinander, aber um welchen Faktor sie sich unterscheiden, kann von Punkt zu Punkt variieren.

Anmerkung: man fordert dabei > 0 , weil sonst die Nullform herauskommen könnte und die kann wegen $0 \cdot x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nicht äquivalent zu einer Volumenform sein (Ziel/ Idee dabei ist also Vermeiden eines Widerspruchs).

Beispiel 6.26: Orientierung einer Untermannigfaltigkeit

Für eine 2D-Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^3$ und ein nicht-verschwindendes Normalenfeld $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($0 \neq N(p) \notin T_p M$, $\forall p \in M$) ist M orientierbar mittels

$$\omega = \det(N, \cdot, \cdot), \quad (6.52)$$

weil N senkrecht auf M steht und die Determinante nicht-degeneriert ist.

Beispiel 6.27: Flussform

Volumenformen erlauben nun die im Ausblick angesprochene Messung von Flüssen gewisser (Vektor-)Felder

$$F : M \rightarrow T_p M, p \mapsto F(p)$$

durch Hyperflächen einer n -dimensionalen, orientierten Mannigfaltigkeit M . Das geschieht mit einer Volumenform $\mu \in \Omega^n(M)$ durch die *Flussform*

$$\begin{aligned} \Omega^{n-1}(M) &\ni \mu^F : T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow C^\infty(M; \mathbb{R}), \\ &(X_1, \dots, X_{n-1}) \mapsto \mu(F, X_1, \dots, X_{n-1}). \end{aligned} \quad (6.53)$$

Man erhält am Ende eine Funktion $\mu(F, X_1, \dots, X_{n-1})$, die punktweise den Fluss von F durch die von X_1, \dots, X_{n-1} aufgespannte Hyperfläche misst. Diese Messung hat beispielsweise in der Physik und dort ganz konkret der Elektrodynamik Relevanz, wo man Ladungsströme als Flüsse elektrischer Ladung untersucht.

Es gibt aber auch eine anschaulichere bzw. explizitere Sichtweise auf Orientierbarkeit:

Satz 6.28: Orientierbarkeit V2

Eine Mannigfaltigkeit M ist genau dann orientierbar, wenn ein Atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, x_i) : i \in I\}$ existiert mit

$$\det(D(x_1 \circ x_2^{-1})) : x_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \mathbb{R}^{>0} \quad (6.54)$$

und eine Orientierung ist durch die Wahl eines solchen Atlas eindeutig bestimmt.

Beweis. erste Richtung: konstruieren uns aus Atlas einfach einen mit den gewünschten Eigenschaften (geht, weil halt maximal)

zweite Richtung: betrachte mit h_i als Zerlegung der 1 die Form $\omega = \sum_{i \in I} h_i dx_{i,1} \wedge \dots \wedge dx_{i,n} - \zeta$ die verschwindet nirgendwo und glatt, weil wir einfach endlich viele glatte Formen aufsummieren; zudem haben die Formen $dx_{i,j}$ überall das gleiche Vorzeichen (Voraussetzung an den Atlas, aus dem sie kommen) und daher addiert man nur nicht-negative Elemente; zudem ist nach Konstruktion gesichert, dass nicht alle h_i verschwinden und man hat eine Volumenform \square

Man fordert also, dass die Funktionaldeterminante des Basiswechsels positiv ist (ungleich 0 ist sie immer, weil es ein Diffeomorphismus ist). Man kann sich dann aber aus dem Wechsel der lokalen Darstellung in Gleichung (6.31) vorstellen,

dass das äquivalent zur Gleichheit zweier Formen bis auf die positive Funktion $\det(D(x_1 \circ x_2^{-1}))$ ist.

Eine (vermutlich mathematisch vielleicht nicht ganz korrekte) Merkregel dafür ist, dass hier das Differential (mit dem man ja Richtungen in verschiedenen Räumen in Beziehung setzen kann) mithilfe der Determinante „gemessen“, also auf eine reelle Zahl heruntergebrochen wird. Diese Zahl repräsentiert dann quasi die Matrix und damit, wie die Richtungen zusammenhängen. Weil die Richtungsänderung nicht zu stark sein soll (man möchte ja bildlich gesprochen kein Spiegeln, weil das die Orientierung im Raum ändern würde), muss diese Zahl eben größer als 0 sein.

Weitere Notationen in diesem Zusammenhang sind:

Definition 6.29: Übertragung Orientierung

Eine Karte $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf $(M, [\omega])$ heißt *orientiert*, wenn

$$\exists f : U \rightarrow \mathbb{R}^{>0} : \quad \omega_U = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \quad (6.55)$$

Eine Abbildung $f : (M, [\omega]) \rightarrow (N, [\eta])$ heißt für $\dim(M) = \dim(N)$ *orientierungs-erhaltend*, wenn $f^*\eta \in [\omega]$, also $f^*\eta = h\omega$ für ein $h : U \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$.

Dabei ist es klar, dass man beim Pullback das Vielfache einer beliebigen Form erhält, weil in der lokalen Darstellung ohnehin nur ein Summand vorkommt:

$$\omega = g_1 dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, f^*\eta = g_2 dx_1 \wedge dx_n \quad \Rightarrow \quad f^*\eta = h \omega \text{ mit } h = \frac{g_2}{g_1}. \quad (6.56)$$

Das kann noch 0 sein, wird aber nicht singulär, weil $\omega \neq 0 \Rightarrow g_1(p) \neq 0, \forall p$. Jedoch kann hier noch nichts über die Positivität von h ausgesagt werden (ist deshalb immer zu prüfen), für lineare Abbildungen erhält man aber immerhin $h(p) \neq 0, \forall p$, weil es sich bei η um eine nicht-verschwindende n -Form handelt und lineare Abbildungen Kern auf Kern abbilden (Ergebnis kann nicht Nullform sein).

Beispiel 6.30: Einige Beispiele und Gegenbeispiele

Sphäre ist immer orientierbar

jedes Tangentialbündel ist orientierbar (tatsächlich kann man dann durch Schreiben einer Menge als Tangentialbündel dann die Orientierbarkeit zeigen; Beispiel Zylinder = $T\mathbb{S}^1$ und sofort folgt Orientierbarkeit davon)

Möbiusband (verklebe Rechteck quasi gedreht) ist nicht orientierbar

M ist immer orientierbar, wenn es ein triviales Tangentialbündel hat (? weil der

\mathbb{R}^n es ja ist ?), also insbesondere Lie-Gruppen

Ausblick: können deRham-Kohomologie nutzen, um Orientierbarkeit zu zeigen

Mit diesen Begriffen ist man nun in der Lage, Differentialformen $\omega \in \Omega^n(U)$ der Ordnung $n = \dim(M)$ auf einer Mannigfaltigkeit M bzw. offenen Teilmengen U davon zu integrieren. Das *Integral einer n-Form* ω ist dann definiert als

$$\int_U \omega = \int_U f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n := \int_U f dx_1 \dots dx_n = \int_U f d\lambda^n, \quad (6.57)$$

man integriert einfach die Funktion f mithilfe des Lebesgue-Maßes $d\lambda^n$. Diese muss natürlich integrabel sein, was bei glatten Funktionen mit kompaktem Träger automatisch erfüllt ist (dieser Fall ist im Folgenden auch von der größten Relevanz).

Rein logisch gesehen ergibt es dabei sehr viel Sinn, Differentialformen zu integrieren. Die grundlegende Idee bei der Integration ist ja so etwas wie das Zusammenzählen aller Punkte in einem Volumen und dafür muss man sich in einer gewissen Richtung durch dieses Volumen bewegen. Genau diese beiden Dinge sind aber die Argumente von Differentialformen und zusammen mit ihrer Basisinvarianz macht sie zu den richtigen Objekten für die Integration. Unter Anderem deswegen wurde auch die Notation/ das „Interface“ beim neuen Hilfsmittel Differentialformen so gewählt, dass sie bestmöglich zur bereits vorher bestehenden Integrationstheorie passt (zumindest handelte es sich dabei um eine Teilmotivation, die duale Basis dx_j ist ja tatsächlich als Richtungsableitung der Koordinatenfunktionen zu deuten).

Anmerkung: man wird nun oft die Kompaktheit des Trägers fordern und da kommt natürlich die Frage auf, warum nicht einfach die Kompaktheit von M gefordert wird? Das liegt daran, dass es viele Situationen gibt, in denen man über nicht-kompakten Mannigfaltigkeiten integrieren möchte, das beste Beispiel ist der \mathbb{R}^n (der Träger bildet als kompakte Teilmenge von M aber eine kompakte Mannigfaltigkeit).

Beispiel 6.31: Integral einer Volumenform

Wie man anhand der Determinante in der Darstellung

$$\det = 1 dx_1 \wedge \dots dx_n$$

sehen kann, heißt eine Volumenform so, weil

$$\int_M \det = \int_M 1 d\lambda^n = \text{vol}(M). \quad (6.58)$$

Das Transformationsverhalten von Differentialformen ist nun schon bekannt und daher liegt das Übertragen der Transformationsformel vom \mathbb{R}^n auf allgemeine n -dimensionale Mannigfaltigkeiten nahe:

Satz 6.32: Transformationsformel

Für einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $\varphi : V \rightarrow U$ zwischen offenen Mengen $V \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ und $\omega \in \Omega^n(U)$ gilt:

$$\int_U \omega = \int_V \varphi^* \omega. \quad (6.59)$$

Beweis. Das folgt im Wesentlichen aus der Transformationsformel auf dem \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} \varphi^* \omega &= f \circ \varphi d(x_1 \circ \varphi) \wedge \cdots \wedge d(x_n \circ \varphi) = f \circ \varphi \det(D\varphi) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \\ \Rightarrow \int_U \omega &= \int_U f d\lambda^n = \int_{\varphi(V)} f d\lambda^n = \int_V f \circ \varphi |\det(D\varphi)| d\lambda^n = \int_V \varphi^* \omega. \end{aligned}$$

mit den Standardkoordinaten y_1, \dots, y_n auf V . □

Man weiß nun also, was bei einem Wechsel der Definitionsbereiche/ Kartengebiete passiert. Interessant ist dabei, wie man im Beweis sieht, dass das Ganze nur wegen der festgelegten Orientierung so klappt. Nur dann ist nämlich $|\det(D\varphi)| = \det(D\varphi)$ nach Forderung bei gleichorientierten Karten (man hat $y = \varphi \circ x \Rightarrow y \circ x^{-1} = \varphi$). Tatsächlich ist es so, dass man die Orientierbarkeit fordert, damit man in der Transformationsformel nicht mit den Vorzeichen aufpassen muss, die bei einem Koordinatenwechsel auftreten. Das ist sinnvoll, weil so das Wechseln von Koordinaten deutlich einfacher ist und das erleichtert beispielsweise die Überprüfung der Koordinatenunabhängigkeit (dass man die schöne Form mit dem Pullback bekommt, ist lediglich ein netter Nebeneffekt). Wäre dies nicht der Fall, würde man manche Beiträge addieren und andere subtrahieren (obwohl nach der Idee des Riemann-Integrals eigentlich alle addiert werden müssten), man hätte also bei der Definition eines Maßes das Problem, eine feste Richtung beizubehalten oder anders gesagt, die Orientierung zu behalten (daher da $|\det(D\varphi)|$).

Schaut man sich nun an, dass bei einem Basiswechsel mittels $\varphi : V \rightarrow U$ ja

$$\int_U f(x_1, \dots, x_n) d\lambda^n = \int_U \omega = \int_V \varphi^* \omega = \int_V g(y_1, \dots, y_n) d\lambda^n$$

gilt, so kann man als Merkregel Folgendes festhalten: für die Integration einer Differentialform ω über ein gewisses Gebiet U muss man einfach nur das Gebiet mit geeigneten Koordinaten x_j parametrisieren, die Form lokal in diesen x_j ausdrücken und dann die Koeffizientenfunktion f aus diesem Ausdruck $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ integrieren. In anderen Koordinaten y_j hat das dann die Form $\omega = g dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$, aber dort kann man eigentlich genau das Gleiche machen, nämlich g integrieren (lediglich das Integrationsgebiet U muss an die Parametrisierung angepasst werden).

Es wird also nur der Teil von ω vor den Dachprodukten über das parametrisierte Gebiet integriert. Man mag sich nun fragen, wo überhaupt der Unterschied zur Integration von Funktionen ist, man nimmt hier doch schließlich auch Funktionen?! Das ist relativ einfach erklärt, es ist nämlich im Allgemeinen

$$\int_U f(x_1, \dots, x_n) d\lambda^n \neq \int_{\varphi^{-1}(U)} (f \circ \varphi)(y_1, \dots, y_n) d\lambda^n = \int_V \tilde{f}(y_1, \dots, y_n) d\lambda^n, \quad (6.60)$$

das Integral ändert sich bei Koordinatenwechseln und ist daher keine wohldefinierte Größe (woher sollte man denn wissen, welche Basis die „richtige“ ist, welches Ergebnis also stimmt?). Bei Differentialformen hat man den Vorteil, dass nach Kartentausch die Koeffizientenfunktion nicht nur die unparametrisierte Funktion $f \circ \varphi$ ist, sondern $\tilde{f} = \det(D\varphi)f \circ \varphi$ gilt - man kriegt die Jacobi-Determinante herein, deren Notwendigkeit die Transformationsformel bereits zeigte. Diese korrigiert die Verzerrung des Volumenelements beim Basiswechsel von x_j zu y_j und ist daher ein notwendiger Faktor, der mit auf integriert werden muss, damit die Ergebnisse in den beiden Koordinaten übereinstimmen.

Anmerkung: zuvor wurde dieser Zusatzterm bei Substitutionen darüber erklärt, dass er aus den d -Termen hinter der Funktion kommt, was sich beim Vergleich mit $dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n = \det(D(x \circ y^{-1})) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ sogar als richtige Erklärung herausstellt! Im Prinzip ist es also Interpretationssache, ob man die Koeffizientenfunktion vor das allgemeine Lebesgue-Maß $d\lambda^n$ des jeweiligen Gebiets (das ist nicht immer gleich, auf U gilt $d\lambda^n = dx_1 \dots dx_n$ und auf V gilt $d\lambda^n = dy_1 \dots dy_n$) schreibt oder einfach den Korrekturfaktor $\det(D(x \circ y^{-1}))$ aus dem Maß berücksichtigt.

Es ist dann üblich, eine Orientierung vorzugeben, im \mathbb{R}^n meist die durch die Standardbasis e_1, \dots, e_n induzierte *Standardorientierung*. Diese wird gegeben durch $[\det] = [dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n]$ und ist eindeutig, weil man hier ja nur die zu e_1, \dots, e_n duale Basis benutzt. Repräsentanten dieser Äquivalenzklasse heißen auch *positiv orientiert* und wenn man durch Basen induzierte Formen betrachtet, so nennt man diese Basen auch positiv orientiert (zum Beispiel ist für $n = 3$ die Basis e_3, e_1, e_2 positiv orientiert, aber e_1, e_3, e_2 nicht, weil $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = -e_1 \wedge e_3 \wedge e_2 = e_3 \wedge e_1 \wedge e_2$). Eine nützliche Eigenschaft für jede positiv orientierte Volumenformen vol ist $\int_M \text{vol} > 0$.

Für eine einfachere Rechnung konstruiert man nun eine besondere Zerlegung der 1 und nutzt dazu $M = (M \setminus K) \cup \left(\bigcup_{l=1}^k U_l \right)$ für $K \subset M$ kompakt mit endlicher Überdeckung $K \subset \bigcup_{l=1}^k U_l$ (existiert nach Definition von Kompaktheit). Dann kann man $1 = h_0 + \sum_{l=1}^k h_l$ schreiben, wobei h_0 kompakten Träger in $M \setminus K$ hat und die h_l kompakten Träger in U_l , sodass das Produkt Träger $\text{supp}(h_l \omega) \subset U_l \cap K$ hat (nur dort sind beide gleichzeitig ungleich null und damit das Produkt). Das wird nun spannend, wenn man den Träger einer Differentialform $\omega \in \Omega^n(M)$ für dieses K und die U_l als Kartengebiete orientierungserhaltender Karten $x_l : U_l \rightarrow \mathbb{R}^n$ einsetzt:

Korollar 6.33: Berechnung eines Integrals

Für $\omega \in \Omega^n(M)$ mit kompaktem Träger und positiv orientierte Karten $x_l : U_l \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit der zugehörigen Zerlegung der 1, $h_0 + \sum_{l=1}^k h_l$, ist

$$\int_M \omega = \sum_{l=1}^k \int_{x_l(U_l)} \left(\left(x^l \right)^{-1} \right)^* (h_l \omega) \quad (6.61)$$

wohldefiniert.

Die Wohldefiniertheit folgt aus Linearität zusammen mit der Transformationsformel und bedeutet hier Unabhängigkeit von den Karten x_l und Kartengebieten U_l . Sie kann jedoch nicht auf die Orientierung übertragen werden (die Karten müssen ja sogar extra orientationserhaltend gewählt werden, daher auch nicht erwartbar).

Das Ganze kann sogar als alternative Definition des Integrals einer Differentialform gesehen werden, zu der hier dann die Äquivalenz mit der ersten gezeigt wurde. Diese ist sehr praktisch, weil sie das lokale Rechnen auf dem \mathbb{R}^n erlaubt (\equiv Riemann-Integral), wird möglich wegen des Pullbacks mit den inversen Karten $(x_l)^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_l$), aber tatsächlich ist sogar noch eine weiter Vereinfachung möglich. Dazu muss aber erst ein wichtiger Begriff aus der Maßtheorie übertragen werden:

Definition 6.34: Nullmenge

Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt **Nullmenge**, wenn für alle Karten $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ das Koordinatengebiet $x(U \cap A) \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge im Sinne der Maßtheorie ist.

Anmerkung: es übertragen sich damit wichtige Erkenntnisse aus der Maßtheorie, beispielsweise sind offene Teilmengen keine Nullmengen, Untervektorräume N mit $\dim(N) < \dim(M)$ hingegen immer (insbesondere Untermannigfaltigkeiten!).

Wieder nutzt man hier also, dass im \mathbb{R}^n mit der Maßtheorie ein solcher Begriff existiert (dort geht es um das Verschwinden des Integrals allgemeiner stetiger Funktionen) und überträgt das einfach, indem man es für alle Karten fordert (so vermeidet man sofort Probleme mit der Wohldefiniertheit). Natürlich müssen aber letztendlich nicht wirklich alle Karten betrachtet werden (das wäre schwierig), sondern nur so viele, dass man die zugehörigen Kartengebiete ganz M überdecken (der Rest folgt dann mit Kartenwechseln und weil Diffeomorphismen nach der Transformationsformel Nullmengen auf Nullmengen abbilden). Damit kann man nun zeigen:

Korollar 6.35: Berechnung eines Integrals V2

Für eine orientierte Karte $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $M \setminus U$ als Nullmenge sowie $\omega \in \Omega^n(M)$ mit kompaktem Träger gilt:

$$\int_M \omega = \int_{x(U)} (x^{-1})^* \omega. \quad (6.62)$$

Anschaulich gesagt muss das Kartengebiet also einfach groß genug sein, um die Mannigfaltigkeit bis auf Nullmengen zu überdecken. Die Idee ist dabei einfach, dass bei geeigneter Zerteilung von M die Integralterme über die Nullmengen verschwinden (per Definition dieser). Im Endeffekt kann man deshalb bei gut gewählten Karten den Aufwand zur Berechnung des Integrals über M verringern auf Integration über die Menge $x(U) \subset \mathbb{R}^n$ und man benötigt auch nur diese eine Karte (deren Existenz auch für jede Mannigfaltigkeit gezeigt werden kann).

Letztendlich ist das Ergebnis sogar sehr intuitiv und besagt einfach, dass man für das Integral einer Differentialform über eine Mannigfaltigkeit auch einfach das Integral über die gepullte Differentialform in Koordinaten berechnen kann. Das war bereits die Aussage von Korollar 6.33, nur dass sie dort noch nicht so gut erkennbar war (man brauchte dort ja noch mehrere Mengen U_l zur Überdeckung von M , deshalb mehrere Karten x_l und es musste jeweils $h_l \omega$ integriert werden, um doppelte Beiträge durch Überschneiden von Definitionsbereichen zu vermeiden).

Dieses Lemma wird noch an einem Beispiel erläutert:

Beispiel 6.36: Integration auf der Sphäre

Man betrachte nun die 2-Form $\omega = \frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \in \Omega^1(S^1)$ auf der zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit $S^1 \subset M$ und dazu die Karte $x : S^1 \setminus \{(-1, 0)\} \rightarrow]-\pi, \pi[$ mit $x^{-1}(\varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ (man wählt diese ungewöhnlichen Bereiche aus mehreren Gründen: wegen der Periodizität nimmt man statt $[-\pi, \pi]$ zunächst $[-\pi, \pi]$ und dann geht man auf $(-\pi, \pi) =]-\pi, \pi[$, weil die Sphäre kompakt ist und man offene Mengen braucht). Für diese kann man berechnen:

$$\begin{aligned} (x^{-1})^* \omega &= -\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2} d(\cos(\varphi)) + \frac{\cos(\varphi)}{\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2} d(\sin(\varphi)) \\ &= -\sin(\varphi)(-\sin(\varphi) d\varphi) + \cos(\varphi)(\cos(\varphi) d\varphi) \\ &= d\varphi \end{aligned} \quad (6.63)$$

auf dem Intervall $]-\pi, \pi[$ mit der Koordinate φ auf S^1 . Daraus folgt direkt

$$\int_{S^1} \omega = \int_{]-\pi, \pi[} d\varphi = 2\pi . \quad (6.64)$$

Man nutzt einfach (6.62) und dass Herausnehmen des Punkts $-\pi$ bzw. $(-1, 0)$ nichts am Integral ändert.

6.4 Satz von Stokes

Die Integration von Differentialformen ist unter Anderem so beliebt, weil dafür auf Mannigfaltigkeiten der fundamentale Satz von Stokes existiert. Um diesen verstehen und beweisen zu können, sind noch einige Definitionen und Erweiterungen nötig.

Zuerst muss man Mannigfaltigkeiten eine gewisse (optionale) Zusatzstruktur geben, die in Analogie zu topologischen Begriffen als Rand bezeichnet wird. Bisher wurde ja in Definitionen fast ausschließlich mit offenen Mengen gearbeitet, nun werden auch abgeschlossene zugelassen. Man wird dann auch auf abgeschlossene/ berandete Mengen im \mathbb{R}^n abbilden und ein wichtiges Modell dafür sind die *Halbräume*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq 0\}. \quad (6.65)$$

Das \leq erzeugt hier einen Rand, weil man bei „Weitergehen“ in gewisse Rechnungen direkt aus der Menge herausgeht (nicht wie bei offenen Mengen, wo eine kleine Umgebung immer noch in der Menge liegt). Auf dieser Basis definiert man:

Definition 6.37: Mannigfaltigkeit mit Rand

Ein topologischer Raum M , der hausdorffsch und zweitabzählbar ist, heißt *berandete Mannigfaltigkeit*, wenn ein $\partial M \subset M$ abgeschlossen existiert mit:

- die offene Menge $\overset{\circ}{M} = M \setminus \partial M$ ist eine Mannigfaltigkeit
- für alle $p \in \partial M$ existieren $U_p \subset M, V_p \subset \mathbb{H}^n$ offen und Homöomorphismen $x : U_p \rightarrow V_p$ (die *Randkarten*), sodass die Übergänge zwischen zwei beliebigen Randkarten genau wie der Übergang einer Randkarte zu einer Karte von M Diffeomorphismen sind und weiter gilt:

$$x(p) \in \partial \mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\} \Leftrightarrow p \in \partial M. \quad (6.66)$$

Man nennt ∂M *Rand von M*, Punkte $p \in \partial M$ *Randpunkte*, $\overset{\circ}{M}$ *Inneres von M*.

Man kann also sagen, dass man hier eine ganz „normale“ Mannigfaltigkeit $\overset{\circ}{M}$ nimmt (erste Forderung) und diese dann noch etwas fortsetzt. Dieses Fortsetzen kann man sich wie ein Herankleben von etwas mehr Mannigfaltigkeit vorstellen und wird bei der Betrachtung in Karten noch etwas klarer: dort nimmt man zum Koordinatengebiet $\mathbb{R}^{>0} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$ der Mannigfaltigkeit $\overset{\circ}{M}$ noch die Hyperfläche $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$ dazu (diese Vorstellung taugt aber auch im Kartengebiet auf der Mannigfaltigkeit, weil $\mathbb{R}^{>0}$ als offene Teilmenge des \mathbb{R}^n selber eine ist).

Anmerkung: ? natürlich sind Randmengen offen bezüglich der Teilraumtopologie von \mathbb{H}^n , das abgeschlossen bezieht sich auf die Standardtopologie des \mathbb{R}^n . ?

Die anderen Forderungen entsprechen dann eigentlich genau dem, was man bei Mannigfaltigkeiten vorher auch hatte (weil man insgesamt eine Mannigfaltigkeit haben möchte, müssen sich halt auch Randkarten mit normalen vertragen), bis auf (6.66). Dort steht aber einfach nur, dass Randpunkte auf Randpunkte abgebildet werden sollen und das ist auch sehr sinnvoll, weil die Karten als Homöomorphismen ja die topologischen Eigenschaften übertragen und der Rand eben besondere Eigenschaften hat (ist abgeschlossen im \mathbb{R}^n , Unterschied zu offen bereits beschrieben).

Anmerkung: beim Übergang zwischen Randkarten und normalen bildet man in offene Mengen des \mathbb{R}^n ab und nicht aus \mathbb{H}^n , weil durch das Schneiden der Definitionsbereiche alle Randpunkte herausfallen.

Ein anderes, wichtiges Beispiel, das bei der Vorstellung helfen sollte, sind „normale“ Mannigfaltigkeiten, von denen ein Stück abgeschnitten wurde:

Beispiel 6.38: Untermannigfaltigkeit mit Rand

Für eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit N und eine abgeschlossene (bezüglich der induzierten Topologie, also definiert über offenes Komplement), $n - 1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit $A \subset N$ sollen nun folgende Annahmen gelten: N sei zusammenhängend und $N \setminus A$ habe genau zwei Zusammenhangskomponenten N_1, N_2 .

Dann ist $M = A \cup N_1$ eine berandete Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial M = A$ und Innerem $\overset{\circ}{M} = N_1$ (damit ist $N_2 = N \setminus M$). Die topologischen Eigenschaften sind sofort klar (folgen daraus, wie man die Mengen wählt) und das Innere ist als offene Teilmenge von N sofort eine Mannigfaltigkeit. Wichtig sind nun die Randkarten, die erhält man aus der Untermannigfaltigkeitenstruktur, die die Existenz von Plattmachern $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($U \subset N$ offen) garantiert und diese erfüllen:

$$\Phi(A \cap U) = \Phi(U) \cap \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}, \quad (6.67)$$

weil A ja gerade eine Hyperfläche ist und daher nur eine Koordinate 0 wird beim Plattmachen (die zweite Menge ist offensichtlich $\partial \mathbb{H}^n$). Dann erhält man oBdA (im anderen Fall kann einfach mit -1 multipliziert, quasi gespiegelt werden)

$$\Phi(N_1 \cap U) = \Phi(U) \cap \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 < 0\} \quad (6.68)$$

und weil man um jeden Punkt $p \in A$ solche Plattmacher findet, taugen diese bereits als Randkarten und man ist fertig.

Der Rand trägt auch allgemeiner eine natürliche Untermannigfaltigkeitenstruktur

(also insbesondere eine Mannigfaltigkeit, aber ohne Rand, $\partial(\partial M) = \emptyset$), wie man sich sehr leicht überlegen kann: nimmt man eine Randkarte $x : U_p \rightarrow \mathbb{H}^n$ und schränkt diese auf den Rand zu $x_{\partial M} : U_p \cap (\partial M) \rightarrow \partial \mathbb{H}^n$ ein, dann hat man bereits einen Plattmacher gefunden, weil ja $x_1(p) = 0, \forall p \in \partial \mathbb{H}^n$. Durch Herausprojizieren der ersten Komponente erhält man dann die induzierten Karten für den Rand, der damit eine $n - 1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M (Hyperfläche) bildet.

Weil nun alles so analog formuliert wurde, übertragen sich wichtige Begriffe wie Maximaler Atlas, glatte Abbildungen, Tangentialvektoren, Bündel, Tensoren, Integral, Orientierung zusammen mit den dazu relevanten Sätzen genau auf berandete Mannigfaltigkeiten und man kann hier direkt mit neuer Theorie weitermachen.

Beim Satz von Stokes wird im Endeffekt auch über den Rand integriert werden, aber dazu braucht dieser noch eine Orientierung ! Bequem wäre es dabei, wenn diese direkt von der Orientierung der zugrunde liegenden Mannigfaltigkeit induziert werden würde (der Rand ist ja eine Hyperfläche davon), weil man sich dann Arbeit sparen könnte. Das ist tatsächlich möglich, erfordert aber die folgende Definition:

Definition 6.39: Normalenfeld

Ein Vektorfeld $N \in X(M)$ heißt *Normalenfeld längs des Randes*, wenn

$$N_p \notin T_p \partial M, \quad \forall p \in \partial M. \quad (6.69)$$

Ein Normalenvektorfeld N heißt

$$\begin{cases} \text{nach außen gerichtet, wenn} & D_p x_1(N_p) > 0 \\ \text{nach innen gerichtet, wenn} & D_p x_1(N_p) < 0 \end{cases} \quad (6.70)$$

für jede Randkarte $x = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{H}^n$ sowie alle Punkte $p \in \partial M \cap U$.

? müssen vlt zusammenhängend fordern ?

Man kann sich nun leicht vorstellen, dass auf dem Rand ja $x_1 = 0$ galt und daher für ein Normalenfeld (das eben nicht tangential am Rand liegen soll) $x_1 \neq 0$ gelten muss (dann bleibt nur größer oder kleiner als 0). - ; hää, x_1 soll ja null sein da auf dem Rand, aber die Ableitung zeigt halt entweder nach außen oder nach innen (weil tangential ausgeschlossen); geht dann darum, dass man schaut, wohin das Vektorfeld am Rand zeigt (indem man die Richtung in einem Randpunkt untersucht) und diese Vorstellung stimmt, weil der Rand ja mit der Hyperebene des \mathbb{H}^n identifiziert wird, wo $x_1 = 0$ und dann schaut man sich an, wohin das Vektorfeld in x_1 -Richtung zeigt (in 2D wäre diese Hyperebene gleich der $x_2 = y$ -Achse und das Normalenfeld hat

dann entweder eine Komponente, die in positive x-Richtung zeigt oder in negative; anschauliche Deutung passt also wegen Kartendarstellung, in der das echt so ist)

Die dann geforderte Bedingung kann lokal noch weiter ausformuliert werden, indem die Darstellung $N_p = \sum_{i=1}^n \lambda_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ des Normalenfelds in der Randkarte $x = (x_1, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{H}^n$ genutzt wird:

$$D_p x_1(N_p) = d_p x_1(N_p) = N_p \cdot x_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i(p) \frac{\partial x_1}{\partial x_i} \Big|_p = \sum_{i=1}^n \lambda_i(p) \delta_{1i} = \lambda_1(p) \quad (6.71)$$

und damit heißt N_p $\begin{cases} \text{nach außen gerichtet, wenn } \lambda_1(p) > 0 \\ \text{nach innen gerichtet, wenn } \lambda_1(p) < 0 \end{cases}$.

Im Allgemeinen muss man jedoch sagen, dass der Begriff eines Normalenfelds auf einer Mannigfaltigkeit schwer zu fassen ist, weil (zumindest noch) keine Metrik/ Skalarprodukt vorliegt (und weil die Mannigfaltigkeit am Rand ja eigentlich „aufhört“). Trotzdem kann man sich das Ganze recht anschaulich vorstellen:

Beispiel 6.40: Untermannigfaltigkeit mit Rand 2

In Beispiel 6.38 kann man sich das noch plastischer/ geometrischer vorstellen, sei dazu $X \in X(M)$ ein Normalenfeld (also $X_p \notin T_p \partial A, \forall p \in \partial A$). Betrachtet man dann die zu X gehörigen Integralkurven γ_p durch $p \in A$, so kann man folgende Klassifizierung treffen: X ist nach außen gerichtet, wenn $\gamma_p(t) \in N \setminus M$ (mach erinnere dich: die Kurve gibt einem Punkte in der Mannigfaltigkeit für jedes t !) und nach innen gerichtet, wenn $\gamma_p(t) \in N_1$, wobei man jeweils kleine Zeiten $t > 0$ betrachtet (kann beliebig klein werden, weil man aus dem Rand als abgeschlossene Menge ja sofort wieder herauskommt; es gibt dort keine Umgebungen, die noch drin liegen, wie es bei offenen Mengen der Fall war).

Anschaulich bedeutet das: die nach außen gerichtete Kurve läuft aus der Mannigfaltigkeit heraus, die nach innen gerichtete geht in das Innere hinein (von diesem Startpunkt p auf dem Rand aus gesehen). Es ist hier übrigens sogar klar/ definiert, was „Herauslaufen“ bedeutet, die Kurve geht dann in die umliegende Mannigfaltigkeit N hinein, in der M ja liegt.

In diesem Beispiel ist also klar, was der Begriff „nach außen gerichtet“ auf dem Rand einer Mannigfaltigkeit bedeutet (wegen der Einbettung), aber das ist natürlich nicht allgemeingültig. Dort ist die Idee, die spezielle Form der Randkarten zu nutzen, die ja in den oberen Halbraum \mathbb{H}^n abbilden und der ist ja nicht „zu Ende“ bei $x_1 = 0$. Deshalb kann man Koordinatengebiete o.Ä. dort mittels Verkleben durch Diffeomorphismen immer ein kleines Stück fortsetzen (bei kompaktem Rand, wieder ist natürlich die Endlichkeit wichtig) und analog für einen Fluss. Das betrachtete

Normalenfeld N besitzt ja ebenfalls einen solchen und dieser ermöglicht eine recht einfache Klassifizierung der fraglichen Begriffe: existiert er für ϵ klein im Intervall $[0, \epsilon)$, so ist N nach außen gerichtet, und bei Existenz im Intervall $(-\epsilon, 0]$ ist es nach innen gerichtet. Man schaut sich also an, wohin das Normalenfeld sich bewegt, wohin es fließt und daher ist innen/außen hier auch tatsächlich sehr geometrisch zu verstehen!

Das Ganze ist eine gute/ sinnvolle und nützliche Definition, weil man zeigen kann:

Lemma 6.41: Existenz eines Normalenfelds

Für jede berandete Mannigfaltigkeit M existiert ein nach außen gerichtetes Normalenvektorfeld $N \in X(M)$.

Beweis. Überdecke zunächst $\partial M = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_0 = M \setminus \partial M$ (offen, weil Rand abgeschlossen) und für die restlichen i mit U_i als Kartengebiet der Randkarte $x_i : U_i \rightarrow \mathbb{H}^n$. Dazu gehört dann eine Zerlegung der 1, $1 = h_0 + \sum_i h_i$ und damit kann man das Vektorfeld $N = \sum_i h_i \frac{\partial}{\partial x_{i,1}}$ konstruieren, das immer nach außen zeigt (man nimmt ja nur die Gauß'schen Vektorfelder der ersten Komponenten aller Karten, die das per Definition erfüllen) und zudem nirgendwo verschwindet, weil die Summe über die Koeffizienten 1 ergibt. \square

Anmerkung: allgemeiner sind kompakte Hyperflächen im \mathbb{R}^n immer orientierbar (man kann da oft einen Normalenvektor konstruieren durch Ausnutzen des Skalarprodukts auf dem \mathbb{R}^n , indem man an jedem Punkt den Tangentialraum betrachtet); können dann iwie immer schreiben $\omega = i_N \det_{\mathbb{R}^{n+1}}$ mit Determinantenform \det (lol, das wurde für 2D-UMF bereits in einem Beispiel gemacht) und das gibt für $N \notin T_p \partial M, \forall p \in \partial M$ immer einen Repräsentanten der Orientierung (N muss aber nicht senkrecht stehen, soll halt einfach nur nicht tangential sein)

Diese Definition, die einem ja im Prinzip einen mit dem Rand verbundenen Richtungsbegriff gibt, ermöglicht nun das Finden einer natürlichen Orientierung:

Definition 6.42: Randorientierung

Für eine orientierbare, berandete Mannigfaltigkeit $(M, [\omega])$ trägt der Rand ∂M eine natürliche, induzierte **Randorientierung**, nämlich

$$(i_N \omega)_{\partial M} \in \Omega^{n-1}(\partial M) \quad (6.72)$$

mit $N \in X(M)$ als nach außen gerichtetem Normalenfeld.

Dass das nicht verschwindet, ist nun klar, weil N nach außen gerichtet ist (hier ist die Existenz und daher das vorherige Lemma wichtig) und ω ja selber nicht verschwindet (man schränkt im Prinzip ω ein auf den Rand und weil dieser Dimension $n - 1 < n$ hat, muss man dazu ein festes, geeignetes Vektorfeld $\in T_p \partial M$ einsetzen, damit $\omega \neq 0$).

Mit dieser Vorbereitung kann man nun den wesentlichen Satz zur Integration von Differentialformen zeigen, den berühmten Satz von Stokes. Dieser verbindet mathematische Eleganz und Schönheit mit großem Nutzen und wird sehr häufig in verschiedensten Gebieten der Mathematik und Physik verwendet.

Satz 6.43: Stokes

Für eine n -dimensionale, orientierte Mannigfaltigkeit M mit Rand ∂M und $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$ mit kompaktem Träger gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega. \quad (6.73)$$

Beweis. Nach der langen Vorbereitung ist der Beweis nicht mehr so schwer, wie es eigentlich für einen so wichtigen und großen Satz üblich wäre.

Man betrachte die Überdeckung $M = \bigcup_i U_i$ mithilfe von Karten- und Randkartengebieten U_i sowie eine Zerlegung der 1 als $1 = \sum_i h_i$ durch Funktionen mit $\text{supp}(h_i) \subset U_i$. Wegen der Linearität des Äußeren Differentials gilt dann

$$d\omega = d\left(\sum_i h_i \omega\right) = \sum_i d(h_i \omega) = \sum_i h_i d\omega. \quad (6.74)$$

Deshalb reicht es, die Aussage für Formen mit $\text{supp}(\omega) \subset U_i$ zu zeigen (das h_i schaltet sich ja nur dort ein). Man hat dann oBdA noch zwei Fälle: $U_i = \mathbb{R}^n$ (ohne Rand, also $U_i \cap \partial M = \emptyset$) und $U_i = \mathbb{H}^n$ (mit Rand, also $U_i \cap \partial M \neq \emptyset$). Das funktioniert so, weil man zentrierte Karten hat und einen Diffeomorphismus zwischen diesem Ball und dem \mathbb{R}^n angeben kann und analog kann man das mit der Halbkugel und dem \mathbb{H}^n machen (oder: setze außerhalb des Bildes des Trägers fort mit 0).

dürfen Summe und Integral vertauschen, weil man bei dem ω ne endliche Summe hat wegen kompakter Träger (genutzt bei der Zerlegung der 1), also lokal endlich dann Lust verloren, Idee aber jeweils Nachrechnen (dauert bisschen) □

Anmerkung: für M kompakt ist der Träger automatisch kompakt (als Abschluss definiert und wegen der Endlichkeit von M auch endlich).

Man kann hier also die Integrale von ω und $d\omega$ in Beziehung setzen. Wichtig ist aber, dass damit nicht etwas wie Aufleiten gemeint ist (man bekommt keine Stammfunktion/-form heraus), sondern tatsächlich die Berechnung von Flächen bzw. Volumina – man integriert immer über einer Mannigfaltigkeit M und ∂M (bei der zweiten Integration schränkt man sich einfach auf die Teilmenge ∂M von M ein) und nicht unbestimmt. Die Kompaktheit des Trägers ist dabei so wichtig, weil sie die Endlichkeit etwaiger auftretenden Summen (siehe alternative Definition in Korollar 6.33) garantiert.

Das erlaubt nun oft eine sehr einfache Auswertung von Integralen, z.B.:

Korollar 6.44: Spezialfälle

Für eine orientierte, nicht-berandete Mannigfaltigkeit M gilt

$$\int_M d\omega = 0. \quad (6.75)$$

Für eine orientierte, berandete, n -dimensionale Mannigfaltigkeit M und eine $n - 1$ -Form $\omega = d\eta \in \Omega^{n-1}(M)$ mit $\eta \in \Omega^{n-2}(M)$ gilt

$$\int_{\partial M} \omega = 0. \quad (6.76)$$

Die Beweise folgen sofort nach dem Satz von Stokes (beachte: $d^2\eta = 0$). Nach diesen allgemeineren Formeln soll nun noch ein konkretes Beispiel gerechnet werden:

Beispiel 6.45: Integral auf der Kreisscheibe

Betrachte $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ mit $\partial M = \mathbb{S}^1$. Dann ist die Karte $x : \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\} \rightarrow]-\pi, \pi[$ mit $x^{-1}(\varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ positiv orientiert bezüglich der Randorientierung (weil $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}$ im gesamten \mathbb{R}^2 positiv orientiert sind).

Nun kann man wegen der Kompaktheit von M auch den Satz von Stokes anwenden, beispielsweise auf die Differentialform $\omega = x dy$. Das eine Integral ergibt

$$\int_M d\omega = \int_M 1 dx \wedge dy = \pi \quad (6.77)$$

und genau so kann man berechnen:

$$\int_{\mathbb{S}^1} \omega = \int_{]-\pi, \pi[} x^* \omega = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(\varphi))^2 d\varphi = \pi, \quad (6.78)$$

wie nach dem Satz von Stokes erwartet (das Integral über \mathbb{S}^1 lässt sich so um-

schreiben, weil man nur einen Punkt \equiv Nullmenge herausnehmen muss).

seine Zeichnungen/ Erklärungen zu orientiert (auf dem Rand) !!! er malt da einfach Pfeile tangential zum Kreis (also senkrecht auf Normalenfeld und dabei nach links zeigen statt nach rechts), super Veranschaulichung ! - ζ haben wohl sogar spezieller Normalenfeld $\frac{\partial}{\partial r}$ und Tangentialfeld $\frac{\partial}{\partial \varphi}$

Beispiel 6.46: Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

Eine sehr interessante Folgerung kann man für die kompakte Mannigfaltigkeit $M = [0, 1]$ mithilfe der ursprünglichen Definition des Integrals von Differentialformen ziehen (Annahme: es existiert eine Stammfunktion/ -form zu $\eta = d\omega = f dx$):

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_{[0,1]} f d\lambda^1 = \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega = \int_{\{0,1\}} F(x) = F(1) - F(0)$$

und das ist der Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung !

Man benutzt dabei, dass Funktionen wie $F(x)$ Nullformen sind, deren Äußere Ableitung einfach wie das normale Differential $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx = \frac{dF}{dx} dx$ wirkt (partielle und totale Ableitung sind gleich, weil x der einzige Parameter ist). Die Auswertung des Integrals über einer diskreten Menge wird dann nach der Maßtheorie schlichtweg zur Summierung über die einzelnen Funktionswerte. Es tritt hierbei ein minus bei der 0 auf, weil man auf dem Intervall $[0, 1]$ die Orientierung +1 gewählt hat und deshalb zeigt das am Randpunkt 0 nach außen gerichtete Vektorfeld eigentlich in die „falsche“, negative Richtung und das minus davor ist zum Ausgleichen dessen nötig (bei Wahl der anderen Orientierung würde man über das Intervall $[1, 0]$ integrieren und $F(0) - F(1)$ erhalten).

Beispiel 6.47: Gauß- und Stokes-Satz

Zwei vor allem in der Physik bekannte Sätze sind Korollare dieses großen Satzes von Stokes, der Satz von Gauß und der Satz von Stokes (der kleine quasi). Aus Beispiel 6.22 sind die allgemeinen Äußenen Ableitungen von 0-, 1-, 2-Formen bekannt, sodass mit V als 3D-Gebiet, $S = \partial V$ als Fläche und $C = \partial S$ als Kurve

$$\begin{aligned} & \int_C f dx + \int_C g dy + \int_C h dz = \int_C (f, g, h) \cdot ds = \int_C \omega \\ &= \int_S d\omega = \int_S (\nabla \times (f, g, h)) \cdot dA \\ &= \int_S \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dy dz + \int_S \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dz dx + \int_S \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \tag{6.79}$$

und

$$\begin{aligned} \int_S f \, dy \, dz + \int_S g \, dz \, dx + \int_S h \, dx \, dy &= \int_S (f, g, h) \cdot dA = \int_S \omega \\ &= \int_V d\omega = \int_V \nabla \cdot (f, g, h) \, dV = \int_V \frac{\partial f}{\partial x} \, dV + \int_V \frac{\partial g}{\partial y} \, dV + \int_V \frac{\partial h}{\partial z} \, dV \end{aligned} \quad (6.80)$$

folgen (das erste heißt ebenfalls Satz von Stokes und das zweite Satz von Gauß).

Dass dabei fließend zwischen $dA = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$, $dV = dx \wedge dy \wedge dz$ und $d\lambda^2 = dA = (dydz, dzdx, dxdy)$, $d\lambda^3 = dV = dx dy dz$ gewechselt wird, liegt an der Definition des Integrals von ω , bei der man die Differentialform ja quasi in lokaler Darstellung einsetzt und dann die Dachprodukte weglässt. Eine Erklärung warum das zwar missverständlich, aber nicht ganz falsch ist, wäre, dass das Dachprodukt beim Einsetzen von Vektoren zur Multiplikation der Ergebnisse wird (und man setzt ja so oder so immer die zugehörige duale Basis ein, sonst würde man transformieren und das sogar quasi automatisch, weil man die Auswertung nicht-dualer Basisvektoren im Allgemeinen erst nach einem Basiswechsel macht).

Beispiel 6.48: Integral auf Ellipsoid

Nun soll ein etwas fortgeschritteneres Beispiel behandelt werden, das die Stärke des Satzes von Stokes zeigt. Es soll um die Berechnung von $\int_M \omega$ gehen, wobei diese in Standardkoordinaten durch

$$\Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \ni \omega = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x \, dy \wedge dz - y \, dx \wedge dz + z \, dx \wedge dy) \quad (6.81)$$

gegeben ist, sodass die Integration davon aufgrund der Kettenregel schwierig werden könnte. Ein weiteres Problem ist aber, dass man hier die kompakte 2D-Untermannigfaltigkeit $M = F^{-1}(1)$ betrachtet, die nur implizit als Urbild von

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 \quad (6.82)$$

zum regulären Wert 1 gegeben ist (man kann sehr leicht die Glattheit und Surjektivität des Differentials prüfen). Eigentlich wäre die Auswertung des Integrals nun sehr aufwendig, aber aus der Definitionsgleichung

$$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$$

für M kann man sofort sehen, dass es sich um ein Ellipsoid (verformte Sphäre) mit Halbachsenlängen $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ handelt (siehe auch Abbildung ??). Weil zudem die Kompaktheit(abgeschlossen !) gegeben ist, kann man zusätzlich

zur geometrisch anschaulichen Interpretation als Rand auch mathematisch von einem solchen sprechen. Weil das Innere des Ellipsoids (das Urbild unter F zu allen Werten im offenen Intervall $(0, 1)$) ist als offene Teilmenge des $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ eine Mannigfaltigkeit und M ist per Definition eine Untermannigfaltigkeit, also insbesondere eine Mannigfaltigkeit. Daher ist es gerechtfertigt, für

$$N := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : 0 < 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 \leq 1\}$$

als Mannigfaltigkeit mit Rand M den Satz von Stokes anzuwenden:

$$\int_M \omega = \int_N d\omega .$$

Man berechnet nun aber nach der Produktregel:

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx + \frac{-3}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} x dx \right) \wedge dy \wedge dz \\ &\quad - \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dy + \frac{-3}{2} \frac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} y dy \right) \wedge dx \wedge dz \\ &\quad + \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dz + \frac{-3}{2} \frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} z dz \right) \wedge dx \wedge dy \\ &= \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx \wedge dy \wedge dz - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx \wedge dy \wedge dz - \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx \wedge dy \wedge dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

Damit gilt einfach

$$\int_M \omega = \int_N d\omega = \int_N 0 = 0 \tag{6.83}$$

und man hat sich sehr viel Arbeit erspart.

-; oof, kommt wohl 4π raus :D

Mitschrift dazu aus Fragestunde: okö, dürfen da nicht einfach 0 sagen, weil noch mehr Rand da ist (machen nicht ≤ 0 .. ooof; aber sonst hier halt dazu umändern, null Bock auf mehr Rand)! sollten 4π rauskriegen, weil dort dann iwie eingebettet in ner Sphäre und daher darf man Randintegrale gleichsetzen (erhalten dann halt einmal das Integral was wir wollen und einmal das ober

die Sphäre); haben ja Loch da innen drin oder ist das am Ende nicht mal das Problem ?

Einsetzoperator hat geometrische Bedeutung, durch Einsetzen Normalenfeld kann man Fluss rein oder raus berechnen

6.5 De-Rham-Kohomologie

In diesem Abschnitt sollen nun die topologischen Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten untersucht werden, also ein erster Schritt in die Richtung der Klassifizierung von Mannigfaltigkeiten (anhand dieser Eigenschaften) gemacht werden.

Insbesondere wird dazu das Äußere Differential $d^k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ nützlich sein, das von nun an (bei Benutzung als Abbildung) mit einem k indiziert wird, weil die Ordnung der jeweiligen Differentialform wichtig wird (bei Anwendung auf eine Differentialform benutzt man aber weiterhin nur d). Eine definierende Eigenschaft dieser Äußeren Ableitung war ja $d \circ d = 0$ bzw. mit Index $d^{k+1} \circ d^k = d^{k+1}d^k = 0 = d^k \circ d^{k-1}$. Betrachtet man d aber nun als klassische Abbildung, so bedeutet das einfach

$$\text{Bild}(d^{k-1}) \subset \text{Kern}(d^k) \subset \Omega^k(M), \quad (6.84)$$

weil aus der Menge $\Omega^k(M)$ aller Differentialformen nur manche geschlossen sind (und damit wegen $d\omega = 0$ im Kern von $d = d^k$ liegen) und von diesen geschlossenen wiederum nur manche noch zusätzlich exakt sind (also eine Stammform $\eta \in \Omega^{k-1}$ haben und daher wegen $\omega = d\eta$ im Bild von $d = d^{k-1}$ liegen).

Weil exakte Differentialformen wegen $d^{k-1} \circ d^k = 0$ jedoch immer im Kern von d^k liegen, ist es eine interessante Frage, welche Differentialformen geschlossen sind, aber nicht exakt. Um das zu beantworten, muss man den Raum betrachten, der die exakten Differentialformen aus dem Kern herausnimmt. Das reicht jedoch meist nicht aus, weil die Räume $\Omega^k(M)$, $\text{Kern}(d^k)$, $\text{Bild}(d^{k-1})$ im Allgemeinen alle unendlich-dimensional sind. Daher betrachtet man einen Quotientenvektorraum, der dann wegen der darauf existierenden Äquivalenzrelation auch endlich-dimensional werden kann:

Definition 6.49: De-Rham-Kohomologiegruppe

Der Quotientenvektorraum

$$H_{dR}^k(M) = \frac{\text{Kern}(d^k)}{\text{Bild}(d^{k-1})} \quad (6.85)$$

heißt *k-te De-Rham-Kohomologiegruppe von M*, die Elemente bezeichnet man als *Kohomologieklassen*.

Jede Kohomologiekasse nun die für Quotientenvektorräume typische Form

$$[\omega] = \{\omega + d\alpha : \alpha \in \Omega^{k-1}(M)\} \quad (6.86)$$

und damit gilt insbesondere $\omega \sim 0$ für alle ω mit Stammform ($0 \equiv$ Nullform). Die Äquivalenzklasse $[\omega]$ einer Form $\omega \in \Omega^k(M)$ misst also allgemein, wie viel dieser

Form zur Exaktheit fehlt (die Form $\hat{\omega} = \omega - d\alpha$, bei der die exakten Anteile abgezogen sind, liegt nämlich offenbar in der gleichen Kohomologieklassse, $\hat{\omega} \in [\omega]$).

Anmerkung: in der Mathematik treten häufiger solche Operatoren auf, deren doppelte Anwendung die Nullform ergibt, und dafür kann man immer die zugehörigen Kohomologiegruppen untersuchen.

Interessant ist nun, dass das Integral einer Kohomologieklassse auf kompakten, orientierten Mannigfaltigkeiten wohldefiniert ist, was eine direkte Folge aus dem Satz von Stokes ist. Für eine Form $\tilde{\omega} \in [\omega] \in \Omega^k(M)$ hat man nämlich per Definition die Existenz eines $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ mit $\tilde{\omega} = \omega + d\eta$. Deshalb ist:

$$\int_M \tilde{\omega} = \int_M \omega + d\eta = \int_M \omega + \int_M d\eta = \int_M \omega =: \int_M \omega. \quad (6.87)$$

Die Kompaktheit ist dabei nötig, weil M hierfür als Rand einer „größeren“ Mannigfaltigkeit gesehen wird und die Orientierung für das Integrieren allgemein.

Noch handelt es sich um einen neuen und zudem relativ unanschaulichen Begriff, deshalb sind Beispiele ein geeignetes Mittel, um ein besseres Gefühl dafür zu bekommen:

Beispiel 6.50: $H_{dR}^0(M)$ für M zusammenhängend

Für eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit M ist es im Fall $k = 0$ klar, dass $k - 1 = -1$ -Formen nicht existieren und daher $\text{Bild}(d^{-1}) = \{0\}$ einfach nur den Nullvektorraum gibt. Den Kern (und damit die De-Rham-Kohomologie) kann man mit $\Omega^0(M) = C^\infty(M; \mathbb{R})$ aber explizit angeben als

$$\begin{aligned} H_{dR}^0(M) &= \text{Kern}(d^0)/\text{Bild}(d^{-1}) = \text{Kern}(d^0) = \{f \in C^\infty(M; \mathbb{R}) : df = 0\} \\ &= \{f : \exists c \in \mathbb{R} \text{ mit } f(p) = c, \forall p \in M\} \cong \mathbb{R} \end{aligned} \quad (6.88)$$

und damit einfach die Menge der konstanten Funktionen (das ist natürlich kanonisch isomorph zu \mathbb{R} , daher auch $\dim(H_{dR}^0(M)) = 1$). Man kann dabei von lokal konstant ($df = 0$) auf global konstant schließen, weil M eben zusammenhängend ist. Daher existiert zwischen jedem Paar von Punkten ein Weg, der diese verbindet und entlang dessen f konstant ist (dann muss es aber schon global konstant sein).

Anmerkung: die ersten Folgerungen zum Bild gelten auch für nicht zusammenhängende Mannigfaltigkeiten, erst danach braucht man diese Eigenschaft.

Beispiel 6.51: $H_{dR}^n(M)$ für M kompakt, orientiert

Für eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit M der Dimension n gilt nach dem Satz von Stokes $\int_M d\eta = 0$ für $\eta \in \Omega^{n-1}(M)$ (setze dafür $\omega = d\eta$ und dann ist es einfach $d(d\eta) = 0$). Andererseits gilt für eine Volumenform $\omega \in \Omega^n(M)$ (existiert, weil M orientierbar) immer $\int_M \omega \neq 0$ (weil M nicht leer und das ω nur positive oder negative Beiträge geben kann, nicht beides, sonst müsste es eine Nullstelle haben). Nach Stokes folgt damit aber $\int_{\partial M} d\omega \neq 0$, also existiert mindestens eine Form $\mu = d\omega \in \text{Bild}(d^{n-1})$ ungleich 0 (woraus $\text{Bild}(d^{k-1}) \neq \{0\}$ folgt) und damit ist nach $\text{Bild}(d^{k-1}) \subset \text{Kern}(d^k)$ auch $\text{Kern}(d^n) \neq \{0\}$, sodass insgesamt folgt:

$$H_{dR}^n(M) \neq \{0\}. \quad (6.89)$$

-; das passt von den d 's nicht auf dem Rand ! Merke einfach: haben integrierbare, deren Integral verschwindet und aber auch ne Volumenform, die das nicht tut; wegen Wohldefiniertheit Integral in einer Kohomologiekasse muss es daher verschiedene geben und damit mehr als die der 0 !

Wie immer ist dann die erste Anwendungen bei neuen Objekten die Betrachtung von Abbildungen zwischen diesen. Die Abbildung zwischen De-Rham-Kohomologien verschiedener Mannigfaltigkeiten erscheint zunächst nur schwer untersuchbar, vereinfacht sich aber deutlich mit der Kenntnis von $d \circ \phi^* = \phi^* \circ d$ für eine beliebige glatte Abbildung $\phi : M \rightarrow N$. Dann gilt nämlich folgendes Lemma:

Lemma 6.52: Induzierte Abbildung

Eine glatte Abbildung $\phi : M \rightarrow N$ induziert eine wohldefinierte, lineare Abbildung

$$\phi^* : H_{dR}^k(N) \rightarrow H_{dR}^k(M), [\eta] \mapsto [\phi^*\eta] \quad (6.90)$$

zwischen den De-Rham-Kohomologien $H_{dR}^k(N), H_{dR}^k(M)$.

Beweis. Die Linearität folgt sofort aus der Linearität des Pullbacks. Die Wohldefiniertheit kann man sich wie folgt überlegen: für ein $\omega \in \text{Kern}(d^k) \subset \Omega^k(N)$ gilt

$$0 = d\omega \Rightarrow 0 = \phi^*d\omega = d(\phi^*\omega) \Rightarrow \phi^*\omega \in \text{Kern}(d^k) \subset \Omega^k(M),$$

der Kern in N wird also auf den Kern in M abgebildet, $\phi^*(\text{Kern}_N(d^k)) = \text{Kern}_M(d^k)$.

Andererseits gilt für ein $\eta = d\alpha \in \text{Bild}(d^{k-1}) \subset \Omega^k(N)$ auch

$$\phi^*\eta = \phi^*d\alpha = d(\phi^*\alpha) \in \text{Bild}(d^{k-1}) \subset \Omega^k(M),$$

das heißt das Bild in N wird abgebildet auf das Bild in M , $\phi^*(\text{Bild}_N(d^{k-1})) = \text{Bild}_M(d^{k-1})$. Deshalb bildet ϕ^* auch die Äquivalenzklassen gleich ab. \square

Es handelt sich hier also fast um die Einschränkung des Pullbacks $\phi^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ auf die Menge $\text{Kern}(d^k)$, nur dass man noch eine Äquivalenzrelation auf dieser Menge einführt und daher eine Abbildung auf dem Quotientenraum erhält.

Sofort erhält man damit dieses interessante Korollar:

Korollar 6.53

Existiert ein Diffeomorphismus $\Psi : M \rightarrow N$, so gilt

$$H_{dR}^k(M) = H_{dR}^k(N), \quad \forall k. \quad (6.91)$$

Beweis. Für Diffeomorphismen $\Psi, \Phi : M \rightarrow N$ gilt auf der de-Rham-Kohomologie $(\Psi \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Psi^*$ und daher hat man mit der Beobachtung $\text{id}^* = \text{id}_{H_{dR}^k(M)}$ (hier muss also nur eingeschränkt werden auf $H_{dR}^k(M)$) sofort $(\Psi^*)^{-1} = (\Psi^{-1})^*$. Aus der Existenz eines Inversen folgt dann, dass ein Isomorphismus vorliegt.

dürfen da vertauschen, weil Pullback und d vertauschen !! daher folgt aus Vertauschen auf k-Formen auch Vertauschen auf De-Rham-Kohomologie; für id das ist auch klar, weil Bedingung ja nur ist, die Form nicht zu ändern \square

Man erhält damit ein erstes Mittel zur Unterscheidung von Mannigfaltigkeiten, weil für $\dim(H_{dR}^k(M)) \neq \dim(H_{dR}^k(N))$ kein Diffeomorphismus zwischen M, N existieren kann (also keine topologische Äquivalenz der differenzierbaren Strukturen).

Für die nächsten Verallgemeinerungen ist noch ein wichtiger Begriff nötig:

Definition 6.54: Homotopie

Zwei Abbildungen $f, g : M \rightarrow N$ heißen *homotop*, wenn eine glatte Abbildung

$$F : [0, 1] \times M \rightarrow N \text{ mit } F(0, \cdot) = f \text{ und } F(1, \cdot) = g. \quad (6.92)$$

Bei F handelt es sich auch um eine Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, weil das Intervall $[0, 1]$ ja insbesondere eine kompakte, berandete Mannigfaltigkeit ist. Man kann sich das anschaulich vorstellen, dass sich die Bilder der beiden Abbildungen durch Verformen ineinander überführen lassen (am besten mit Kurven vorstellbar, dort spielt aber auch die Orientierung/ Umlaufrichtung eine Rolle).

Anmerkung: Homotopie definiert sogar eine Äquivalenzrelation, wie man durch geeignetes Verkleben sieht. Explizit wendet man dazu das „Produkt“ zweier Kurven

$$\gamma * \tilde{\gamma} := \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \tilde{\gamma}(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (6.93)$$

in der ersten Komponente von F an (das wird nötig wegen der festgesetzten Endpunkte 0 und 1, daher müssen die Kurven im Produkt schneller durchlaufen werden). Für einen stetigen Übergang muss dabei natürlich $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(0)$ sein und für einen differenzierbaren braucht man sogar $\gamma'(1) = \tilde{\gamma}'(0)$.

Homotopie hat nun interessante Auswirkungen auf die induzierten Abbildungen f^*, g^* :

Satz 6.55: Homotopieinvarianz der De-Rham-Kohomologie

Falls $f, g : M \rightarrow N$ homotop sind, so gilt

$$f^* = g^* : H_{dR}^k(N) \rightarrow H_{dR}^k(M). \quad (6.94)$$

- ζ nehmen hier wohl nur geschlossene Repräsentanten und daher verschwindet da was

Dieser Satz wurde von George De-Rham bewiesen, nach dem dann auch die Kohomologie benannt wurde. Das hat eine sehr spannende und wichtige Folgerung:

Korollar 6.56: Poincare-Lemma

Jedes sternförmige Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ hat für $k > 0$ triviale k -te De-Rham- Kohomologiegruppen, das bedeutet:

$$H_{dR}^k(G) = \{0\}, \quad \forall k. \quad (6.95)$$

Anmerkung: in einer *sternförmige Menge G* gibt es einen Punkt $x_0 \in G$, das Sternzentrum, sodass von dort aus eine gerade Verbindungsstrecke zu jedem Punkt $x \in M \subset \mathbb{R}^n$ existiert, die komplett in M liegt, also

$$\{x_0 + t(x - x_0) : t \in [0, 1]\} \subset M, \quad \forall x \in M$$

Beweis. Aufgrund der Sternförmigkeit existiert für alle $q \in G$ die Homotopie

$$F : [0, 1] \times G \rightarrow G, \quad q \mapsto p + t(q - p)$$

6.5.1 *MAYER-VIETORIES-SEQUENZ*

für alle Zeiten $t \in [0, 1]$ und diese erfüllt offenbar

$$\begin{aligned} F(0, \cdot) = p = \text{const.} &\Rightarrow F(0, \cdot)^* = 0 : H_{dR}^k(G) \rightarrow H_{dR}^k(G) \\ F(1, \cdot) = \text{id} &\Rightarrow F(1, \cdot)^* = \text{id} : H_{dR}^k(G) \rightarrow H_{dR}^k(G) \end{aligned}$$

und dann gilt nach dem Korollar $0 = F(0, \cdot)^* = F(1, \cdot)^* = \text{id}$. Wenn die Nullabbildung aber die Identität ist, muss bereits $H_{dR}^k(D) = \{0\}$ gelten. \square

Die Bedeutung dieses Lemmas ist enorm, wie man sich klar machen sollte: für alle

$$\omega \in \text{Kern}(d^k) \subset \Omega^k(G) \Rightarrow d\omega = 0$$

existieren dann Elemente (mehrere möglich, je nach Anzahl der Elemente in $[\omega]$)

$$\alpha \in \text{Bild}(d^{k-1}) \subset \Omega^k(G) \Rightarrow \exists \eta \in \Omega^{k-1}(G) : d\eta = \alpha$$

$$\text{mit } 0 = [\omega] = \omega + \alpha \Leftrightarrow \omega = -d\eta = d(-\eta),$$

man findet also die Stammform(-en) $-\eta$ zu ω (das Ganze ist nicht eindeutig wegen der auftretenden Ableitung). Anders gesagt bedeutet das

$$\omega \text{ geschlossen} \Leftrightarrow \omega \text{ exakt} \tag{6.96}$$

oder in Worten: für jede Differentialform $\omega \in \Omega^k(G)$, $k > 0$ mit $d\omega = 0$ findet man eine Stammform $\eta \in \Omega^{k-1}(G)$ mit $d\eta = \omega$. Daher ist insbesondere jede n -Form auf einer sternförmigen Menge exakt, die waren ja immer geschlossen !

Auf sternförmigen Gebieten kann das Äußere Differential $d\omega$ also auch als Abbildung interpretiert werden, die misst, ob man eine Stammform findet. Man hat damit ein sehr einfaches Kriterium zur Überprüfung der Integrierbarkeit einer Differentialform gefunden (es handelt sich damit um eine Verallgemeinerung der Integrierbarkeitsbedingung (4.82) bzw. sogar der Maurer-Cartan-Gleichung (4.101) für einen Wertebereich $\neq \mathbb{R}$) !

6.5.1 *Mayer-Vietories-Sequenz*

um dann besser damit rechnen zu können, überlegt man sich, was bei einer MF als Vereinigung $M = U \cup V$ zweier offener Teilmengen $U, V \subset M$ passiert; haben kommutierendes Diagramm, also $\gamma_U \circ i_U = \gamma_V \circ i_V$

bei γ wird einfach mit den beiden zurückgezogen (auf verschiedene Mengen dann) - ; bei den ersten beiden Pfeilen heißt das, dass nur die 0 im Kern von γ^* liegt (die 0 an erster Stelle wird von jeder beliebigen Abbildung nur auf die 0 abgebildet, solange diese linear ist - ; siehe Argument im ersten Kapitel; deshalb steht da auch

6.5.1 *MAYER-VIETORIES-SEQUENZ*

keine Abbildung, wie wir dahin kommen ist eigentlich egal für die Eigenschaft der Exaktheit hier); der letzte Pfeil heißt dann, dass das Bild von ∂i^* der gesamte Raum sein muss, weil die Nullabbildung eben nur auf die Null abbildet (alles geht in den Kern) ! der davor heißt, dass der das Bild von γ^* gleich dem Kern von ∂i^* ist

man hat da Inklusionen (sogar noch natürliche)

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & \nearrow i_U & & \searrow \gamma_U & \\ U \cap V & & & & M \\ & \searrow i_V & & \nearrow \gamma_V & \\ & & V & & \end{array}$$

Lemma 6.57

Für $\gamma^* \omega = (\gamma_U^* \omega, \gamma_V^* \omega)$ und $\partial i^*(\alpha, \beta) = i_U^* \alpha - i_V^* \beta$ wird die Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{\gamma^*} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{\partial i^*} \Omega^k(U \cap V) \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis. exakt heißt, dass Bild der einen Abbildung Kern der nächsten ist; also müssen jetzt alle Abbildungen so konstruiert werden, dass das erfüllt ist

Exaktheit an erster Stelle folgt wegen γ^* injektiv

$\alpha, \beta \in \text{Kern}(\partial i^*)$ heißt, dass $\alpha_{U \cap V} = \beta_{U \cap V}$

ω ist glatt, weil U, V offene Teilmengen sind und wohldefiniert, weil man an jedem Punkt halt nen Wert zuordnen kann (nutzen hier $M = U \cup V$)

damit folgt Exaktheit an zweiter Stelle wegen $\gamma^* \omega = (\alpha, \beta)$

für beliebige Form $\eta \in \Omega^k(U \cap V) = \text{Kern}(0)$ (Nullabbildung haut halt alles in den Kern rein)

finden/ definieren dann Zerlegung der 1 mit $1 = h_U + h_V$ (sodass also $\text{supp}(h_U) \subset U, \text{supp}(h_V) \subset V$) und dann kann man η auf U fortsetzen durch Multiplikation mit h_V (außerhalb des Schnitts nimmt diese fortgesetzte Form dann halt 0 an, aber auf glatte Art und Weise, also alles gut) sowie analog auf V durch Multiplikation mit h_U (sowie Vorzeichen, wegen Definition ∂i^*), die Fortsetzungen nennt man dann α, β und dann ist das Tupel daraus wohldefiniert auf der direkten Summe $\Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$

es ist dann eben auch $\partial i^*(\alpha, \beta) = (h_U + h_V)\eta = \eta$ und das war zu zeigen (weil es aus Kern gewählt wurde und als Bild angenommen wird) \square

6.5.1 *MAYER-VIETORIES-SEQUENZ*

Mit dieser Kenntnis kann man nun die *Mayer-Vietoris-Sequenz*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_{dR}^{k+1}(M) & & \dots & & \\
 & & \swarrow d^* & & & & \\
 H_{dR}^{k+1}(M) & \xrightarrow{\gamma^*} & H_{dR}^{k+2}(U) \oplus H_{dR}^{k+2}(V) & \xrightarrow{\partial i^*} & H_{dR}^{k+2}(U \cap V) & & \\
 & \swarrow d^* & & & & & \\
 H_{dR}^k(M) & \xrightarrow{\gamma^*} & H_{dR}^{k+1}(U) \oplus H_{dR}^{k+1}(V) & \xrightarrow{\partial i^*} & H_{dR}^{k+1}(U \cap V) & & \\
 & \swarrow d^* & & & & & \\
 & & & & \dots & &
 \end{array}$$

untersuchen. Die Frage ist, ob die sogenannten *connecting-Homomorphismen* d^* existieren und zudem ist wichtig, ob diese die Sequenz exakt machen.

Satz 6.58

Es existieren lineare Abbildungen $d^* : H_{dR}^k(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^{k+1}(M)$, sodass die Mayer-Vietoris-Sequenz exakt wird.

Bei Betrachtung der Definitionsbereiche wird klar, dass diese connecting-Homomorphismen als eine Art Fortsetzung der jeweiligen k -ten De-Rham-Kohomologie gesehen werden können.

Beweis. Zur Definition von d^* nehme man eine Differentialform $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$ mit $d\omega = 0$ und nehme dann $(\alpha, \beta) \in \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V)$ mit $\partial i^*(\alpha, \beta) = \omega$; dann ist $(d\alpha, d\beta) \in \Omega^{k+1}(U) \oplus \Omega^{k+1}(V)$ und es gilt $\partial i^*(d\alpha, d\beta) = d\alpha - d\beta = d\omega - d\omega = 0$, sodass $\exists \eta \in \Omega^{k+1}(M)$ mit $i^*\eta = (d\alpha, d\beta)$ und das erfüllt auch $d\eta = 0$

damit setzt man (Kenntnis der Wirkung auf Elemente ist ja nötig) $d^*[\omega] = [\eta]$

nun zu zeigen: Wohldefiniertheit d^* (? ähnliche Argumentation wie bei Beweis Existenz, benutze dann Lemma nochmal ?), weil Linearität dann klar (weil alle Abbildungen halt linear sind); dann muss nur noch Exaktheit gezeigt werden (siehe Skript), Idee ist Verwendung des Lemmas und dann auch Äquivalenz Bild zu Kern zeigen durch Konstruktion geeigneter Formen \square

Warum ist der Satz cool ? Naja, man kann die Berechnung höherer (und damit im Allgemeinen komplizierterer) Kohomologigruppen reduzieren auf die Berechnung niedrigerer

6.5.1 *MAYER-VIETORIES-SEQUENZ*

Das soll direkt ausgenutzt werden zur Berechnung einer expliziten De-Rham-Kohomologie und zwar natürlich des Standardbeispiels, der n -Sphäre:

Beispiel 6.60: De-Rham-Kohomologie der Sphäre

Der Fall $k = 0$ ist natürlich schon bekannt (wurde allgemein bei zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten bestimmt)

beispielhaft dann Fall $n = 1$ machen ? Schien ganz ok

bei Induktion nutzt man dann die Mayer-Vietoris-Sequenz, dazu setzt man als offene Mengen, deren Vereinigung M überdecken soll, $U = \mathbb{S}^n \setminus \{(1, 0, 0)\}, V = \mathbb{S}^n \setminus \{(-1, 0, 0)\}$ (die sind mittels stereographischer Projektionen diffeomorph zum \mathbb{R}^n -; braucht man das oder hat er das einfach nur so gedropt ?)

Mayer-Vietoris sagt für $k = 1$ (schreibe also nur den Anfang hin): $0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) \rightarrow H_{dR}^0(U \cap V) \rightarrow H_{dR}^1(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) \rightarrow H_{dR}^1(U \cap V) \rightarrow \dots$

man nutzt nun, dass man direkt folgende Aussagen treffen kann (weil Fall $k = 0$ bekannt): $\dim(H_{dR}^0(\mathbb{S}^n)) = 1, \dim(H_{dR}^0(U)) = 1 = \dim(H_{dR}^0(V)) \Rightarrow \dim(H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V)) = 2$, aber weil der Durchschnitt $U \cap V$ wieder zusammenhängt, ist $\dim(H_{dR}^0(U \cap V)) = 1$; zudem ist nach dem Lemma von Poincare klar (anwendbar, weil U, V jeweils diffeomorph zum \mathbb{R}^n), dass $\dim(H_{dR}^1(U)) = 0 = \dim(H_{dR}^1(V)) \Rightarrow \dim(H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V)) = 0$; nun muss noch die Exaktheit der Sequenz genutzt werden und dann ist aus Dimensionsgründen der gesamte Raum $H_{dR}^0(U \cap V)$ im Kern der Abbildung dahin enthalten, sodass das Bild mit der nächsten Abbildung (die zu $H_{dR}^1(\mathbb{S}^n)$ geht) nulldimensional ist; weil aber der nächste Raum $H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V)$ wieder nulldimensional ist, muss der Kern der nächsten Abbildung das auch sein, sodass im Endeffekt $\dim(H_{dR}^1(\mathbb{S}^n)) = 0$ folgt (das war der Induktionsanfang)

im Induktionsschritt arbeitet man für $1 < k < n$ dann aber eigentlich nur mit Nullvektorräumen, dann folgt das mit Exaktheit im Wesentlichen (er hat aber noch bisschen mehr gemacht)

für den Fall $k = n$ tritt dann $H_{dR}^{n-1}(U \cap V) \cong H_{dR}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ auf und das ist eindimensional, daher muss (für Exaktheit der Sequenz, dahinter steht nämlich der Nullvektorraum), auch $H_{dR}^n(\mathbb{S}^n)$ Dimension 1 haben

Ergebnis wird sein (wirklich so erwähnen ?): $H_{dR}^k(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, n \\ 0, & k \neq 0, n \end{cases}$

erhalten halt bei $k = n$ dann die reellen Zahlen bis auf Orientierung oder so, bei Wahl dieser dann isomorph zu \mathbb{R} , in jedem Fall aber eindimensional !

Korollar 6.60

Für $\omega \in \Omega^n(\mathbb{S}^n)$ gilt

$$\int_{\mathbb{S}^n} \omega = 0 \Leftrightarrow \exists \eta \in \Omega^{n-1}(\mathbb{S}^n) : d\eta = \omega. \quad (6.97)$$

Beweis. Bekannt ist, dass $\dim(H_{dR}^n(\mathbb{S}^n)) = 1$. Außerdem ist nach Stokes klar, dass für $\omega = d\eta$ gilt: $\int_{\mathbb{S}^n} \omega = 0$.

Die Abbildung $\int : H_{dR}^n(\mathbb{S}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, $[\omega] \mapsto \int_{\mathbb{S}^n} \omega$ ist wohldefiniert (weil sich zwei Repräsentanten nur um $d\alpha$ unterscheiden, was nach Stokes aber keinen Beitrag zum Integral gibt) und nach der Beobachtung (? welche meint er ?) auch surjektiv. Damit folgt aber aus Dimensionsgründen die Bijektivität, \int ist also ein Isomorphismus.

-ζ geht es darum, dass man dann (bis auf Vielfache) nur eine Äquivalenzklasse hat und dass wegen der Wohldefiniertheit des Integrals dann jede Form ω , die Integral 0 hat, auch in der Äquivalenzklasse von 0 liegt (also ein α existiert, sodass $\omega + d\alpha = 0$, woraus aber Integrierbarkeit folgt) ??? □

Fragestunde erläutert diesen Satz noch bisschen

Eine weitere Anwendung der Mayer-Vietoris-Sequenz ist die natürliche Definition einer sehr wichtigen Größe bei der Klassifizierung von Mannigfaltigkeiten:

Definition 6.61: Euler-Charakteristik

Für eine Mannigfaltigkeit M mit für alle k endlich-dimensionalen $H_{dR}^k(M)$ heißt

$$\chi(M) := \sum_{k=0}^{\dim(M)} (-1)^k \dim(H_{dR}^k(M)) \quad (6.98)$$

die *Euler-Charakteristik von M* .

Die Bedingung endlicher Dimension aller $H_{dR}^k(M)$ ist zum Beispiel bei kompakten Mannigfaltigkeiten erfüllt (hier nicht gezeigt, ist aber z.B. mit Hodge-Theorie möglich).

Weil Definition so random wirkt, hier Antwort auf Frage, woher die Definition von χ kommt: Homologie ist nicht-trivial bei Königsberger Brückenproblem (Euler hat daraus ein topologisches Problem gemacht, aber hat noch nicht die allgemeine

Theorie aufgebaut dazu; ist nicht geometrisch, weil genaue Lage der Brücken egal, nur Anzahl und welche die verbinden); bei Flächen mit simplizialer Zerlegung, also Zerlegung in Dreiecke, dabei tritt immer gewisse Anzahl an Ecken E , Anzahl an Kanten K und Anzahl an Flächen F auf, diese Zahl kann man dann zusammenfassen und diese ist dann unabhängig von der expliziten Wahl der Zerlegung; können dann rekursiv Dreiecke verfeinern und $\chi(G) = E - K + F$ bleibt invariant; bei kompakten Flächen ist De-Rham-Isomorphismus für Dualität von Homologie und Kohomologie verantwortlich und daher kommen die Identifizierungen von E mit $\dim(H_{dR}^1(G))$ etc, daher ist $\chi(G)$ dann auch gleich diesen Dimensionen; können diese Größe über ein Integral berechnen, Gauß-Bonnet (Gauß war wohl der erste, der den Shit da so richtig in Zusammenhang gebracht hat); Chern-Klassen sind iwie Verallgemeinerung davon (daher tritt das bei Topologie dann auch auf); in String-Theorie kompaktifiziert man Raumzeit durch Ran-x-en anderer MF, das ranmultiplizierte muss Calabi-Yau-MF sein und gewisse Invarianten entsprechen dann Anzahl an Teilchen bzw. Zustandsräumen

-; merke also: eigentlich ist das ne topologische Größe (sogar Invariante, also unter Homöos/ Diffeos erhalten) und die hat eigentlich mit Homologien zu tun, aber man kommt dann äquivalent zu Kohomologien

Lemma 6.62

Für eine Mannigfaltigkeit $M = U \cup V$ mit $U, V \subset M$ offen mit endlich-dimensionalen $H_{dR}^k(M), H_{dR}^k(U), H_{dR}^k(V), H_{dR}^k(U \cap V)$ gilt

$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V). \quad (6.99)$$

Man kann also die Berechnung der Euler-Charakteristik aufteilen auf die Berechnung selbiger für Teilmengen aus M , die eine Überdeckung bilden, und das sogar direkt, wenn diese disjunkt sind (sonst muss man den Beitrag des Schnitts abziehen).

folgt direkt mit Mayer-Vietoris bei Anwendung eines Lemmas über allgemeine exakte Sequenzen (das den Rand-Satz $\dim(V) = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f))$ benutzt)

Mayer-Vietoris bzw die davor (5.20) ist noch nicht mit Äußerem Differential verträglich, erhalten nu 5.21 (iwie abgeleitete Frequenz) -; brauchen Zerlegung der 1 einmal und das ist nicht verträglich mit Äußerem Differential (iwie nicht automatisch geschlossen); daher bildet man so komisch ab da !

bei disjunkten Mengen kann man direkte Summe der De-Rhams nehmen (De-Rham von Schnitt dann null, daher volle dim in Bild oder so)

6.5.2 Grad von Abbildungen

Die Kenntnis der (Ko-)Homologiegruppen der n -Sphäre kann nun für das Herausfinden vieler weiterer Eigenschaften von kompakten, orientierten Mannigfaltigkeiten benutzt werden, wie immer benötigt das aber ein wenig Vorbereitung.

Man nennt dann analog zu Definitionen bei Untermannigfaltigkeiten einen Punkt $q \in S^n$ regulären Wert, falls $\forall p \in f^{-1}(q)$ im Urbild dieses Wertes unter der glatten Abbildung $f : M \rightarrow S^n$ das Differential $D_p F$ surjektiv ist (wegen der $\dim(M) = n = \dim(S^n)$ folgt dann sogar Bijektivität). Dann ist f in Umgebungen regulärer Werte automatisch ein lokaler Diffeomorphismus (eine interessante Eigenschaft auf kompakten Mengen ist, dass reguläre Werte nur endlich viele Urbilder besitzen) !

Wichtig ist nun noch die Orientierung. Für $\omega \in \Omega^n(S^n)$ als Repräsentant der Orientierung der n -Sphäre und $\eta \in \Omega^n(M)$ als Repräsentant der Orientierung auf M gilt dann nach früheren Ausführungen $f^*\omega = \lambda \eta$ mit einer Funktion $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (zumindest in der Umgebung von Punkten $p \in f^{-1}(p)$, weil f dort ein lokaler Diffeomorphismus und damit insbesondere linear ist). Man definiert nun

$$\text{sign}(f(p)) := \begin{cases} 1, & \lambda(p) > 0 \\ -1, & \lambda(p) < 0 \end{cases} \quad (6.100)$$

und das ist offenbar wohldefiniert, weil andere Repräsentanten $\tilde{\omega}, \tilde{\eta}$ der Äquivalenzklasse/Orientierung sich nur um positive Funktionen von ω, η unterscheiden und diese ändern das Vorzeichen von λ natürlich nicht. Etwas geometrischer kann man das Ganze ausdrücken mithilfe einer positiv orientierten Basis $X_1(p), \dots, X_n(p)$ des $T_p M$ (die also auf einer gewissen Volumenform positive Werte annimmt), dann ist nämlich $(f(p), D_p f(X_1(p)), \dots, D_p f(X_n(p)))$ eine positiv orientierte Basis des \mathbb{R}^{n+1} .

Zu regulären Werten spielt im Zusammenhang mit Integralen folgender Satz aus der Maß- und Integrationstheorie eine wichtige Rolle:

Lemma 6.63: Sard

Die Menge der nicht-regulären Werte einer Abbildung $f : M \rightarrow S^n$ mit $\dim(M) = n$ ist eine Nullmenge. Insbesondere existieren also reguläre Werte $q \in S^n$.

Der Beweis wird hier nicht explizit angegeben, aber die Idee ist, Umgebungen um die nicht-regulären Werte zu nehmen und dann über die Endlichkeit der Überdeckung wegen der Kompaktheit zu argumentieren (endlich viele Punkte haben Maß 0).

zu Lemma von Sard: haben entweder kritischen oder regulären Wert natürlich und dann kann man aber Urbilder zählen; weil der Grad aber ungleich null ist, muss aus der Definition des Grads bei regulären Werten der Wert angenommen wird;

bei nicht-regulärem Wert braucht man gar keine weitere Info, da muss ja schon ein Punkt vorliegen mit $d_p f$ ist nicht surjektiv, das heißt aber insbesondere wird p angenommen (Umkehrung gilt natürlich nicht)

Man beachte dabei aber, dass ein Punkt $q \in \mathbb{S}^n$, der nicht im Bild von f liegt, auch als regulärer Wert zählt, das Urbild kann also durchaus leer sein. Mit der Kenntnis dieses Lemmas/ Satzes ergibt nun folgender Satz Sinn:

Satz 6.64: Grad einer Abbildung

Für eine n -dimensionale, kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit M , eine glatte Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ und $\omega \in \Omega^n(\mathbb{S}^n)$ mit $\int_{\mathbb{S}^n} \omega \neq 0$ existiert ein $k \in \mathbb{R}$ mit

$$\int_M f^* \omega = k \int_{\mathbb{S}^n} \omega. \quad (6.101)$$

Weiter gilt für jeden regulären Wert $q \in \mathbb{S}^n$ von f mit paarweise verschiedenen Urbildern p_1, \dots, p_l folgende Formel für den *Grad von f* :

$$\deg(f) = k = \sum_{j=1}^l \text{sign}(f(p_j)). \quad (6.102)$$

Man beachte, dass ω nicht aus der Orientierung stammen muss, nur das Integral muss ungleich 0 sein (darf also sogar auf offener Teilmenge den Wert 0 annehmen).

Beweis. Zunächst ist die Wohldefiniertheit des Grades zu zeigen, sei dazu $\tilde{\omega} \in \Omega^n(\mathbb{S}^n)$ mit $\int_{\mathbb{S}^n} \tilde{\omega} \neq 0$. Dann gilt nach einer Reskalierung der Form, die oBdA möglich ist, $\int_{\mathbb{S}^n} \omega = \int_{\mathbb{S}^n} \tilde{\omega}$ und daher existiert nach Korollar 6.60 ein $\beta \in \Omega^{n-1}(\mathbb{S}^n)$ mit $\tilde{\omega} - \omega = d\beta$. Mit Stokes folgt dann aber $\int_M d\beta = 0$ (M ist eine kompakte Mannigfaltigkeit, kann also ein Rand sein) bzw. analog $\int_M f^*(d\beta) = \int_M d(f^*\beta) = 0$ und daher

$$\int_M f^* \tilde{\omega} = \int_M f^*(\omega + d\beta) = \int_M f^* \omega + \int_M d(f^*\beta) = \int_M f^* \omega.$$

Man betrachte nun offene Umgebungen U_j der Punkte p_j und bedenke, dass f eingeschränkt auf U_l ein Diffeomorphismus ist (bildet diffeomorph auf $f(U_l)$ ab). Damit kann man nun die als Durchschnitt offener Mengen offene Menge $V = \bigcap_{j=1}^l U_j$ definieren (nicht-leer, weil auf jeden Fall $q \in V$, allerdings muss auch zusammenhängend gefordert werden), mit der man Diffeomorphismen $f_j : U_j \cap f^{-1}(V) \rightarrow V$ erhält. Betrachtet man nun ein $\omega \in \Omega^n(\mathbb{S}^n)$ mit $\int_{\mathbb{S}^n} \omega \neq 0$ und $\text{supp}(\omega) \subset V \subset \mathbb{S}^n$ (z.B. durch

Buckelfunktionen zu erreichen). Nun kann man einfach nachrechnen:

$$\int_M f^* \omega = \sum_{j=1}^l \int_{U_j \cap f^{-1}(V)} f^* \omega = \sum_{j=1}^l \int_V \text{sign}(f(p_j)) \omega = \left(\sum_{j=1}^l \text{sign} f(p_j) \right) \int_V \omega,$$

wobei man die Transformationsformel nutzt (dort ist ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus gefordert, sodass immer noch das signum heranmultipliziert werden muss, weil $1 \cdot 1 = (-1) \cdot (-1) = 1$). Das ist als Summe ganzer Zahlen wieder in \mathbb{Z} . \square

? wenn Abbildung also keine kritischen Werte (also keine kritischen Punkte) hat, dann wird der Grad 0 und das Integral da verschwindet ?

-z die Folgerung mit surjektiv wenn Grad nicht 0 checke ich iwie nicht

Dieser Abbildungsgrad wird tatsächlich sehr nützlich beim Beweis eines wichtigen Satzes (dem Brouwer'schen Fixpunktsatz). Damit dort nicht zu viele Beweise in einem vorkommen, werden noch einzelne Rechenregeln für $\deg(f)$ gezeigt.

Lemma 6.65: Rechenregel Grad

Für eine kompakte, berandete, $(n+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit X mit Rand $M = \partial X$ und eine glatte Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ gilt

$$\deg(f_M) = \deg(f_{\partial X}) = 0. \quad (6.103)$$

Beweis. Für $\omega \in \Omega^n(\mathbb{S}^n)$ gilt $d\omega \in \Omega^{n+1}(\mathbb{S}^n) \Rightarrow d\omega = 0$. Weil der Rand M als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Mannigfaltigkeit X wieder kompakt ist, darf man insbesondere darauf integrieren und es folgt mit Stokes:

$$\deg(f_M) \int_{\mathbb{S}^n} \omega = \int_M f_M^* \omega = \int_M f^* \omega = \int_{\partial X} f^* \omega = \int_X d(f^* \omega) = \int_X f^*(d\omega) = 0.$$

Weil aber gerade $\int_{\mathbb{S}^n} \omega \neq 0$ war (man konnte das oBdA wählen, weil der Grad wohldefiniert und damit unabhängig von der Wahl von ω ist), muss damit $\deg(f_M) = 0$ sein. \square

Das hat nun insbesondere für homotope Abbildungen interessante Folgen:

Korollar 6.66: Homotopieinvarianz des Grades

Für zwei homotope Abbildungen $f, g : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ auf einer kompakten, orientier-

ten, n -dimensionalen Mannigfaltigkeit gilt

$$\deg(f) = \deg(g). \quad (6.104)$$

Beweis. Die Idee ist, den Grad der Homotopie $F : X = [0,1] \times M \rightarrow \mathbb{S}^n$ zwischen $f = F(0, \cdot)$ und $g = F(1, \cdot)$ zu berechnen. Bilden $[dt], [\eta]$ (t als Parameter im Intervall $[0,1]$) Orientierungen auf $[0,1], M$, so bildet $[dt \wedge \eta]$ eine auf X und die induzierte Randorientierung ist gegeben durch $[-\eta]$ bei $t = 0$ (weil es dort nach außen zeigt, man also die Richtung -1 hat und daher $dt = -1$ wird sowie das \wedge mit einer skalaren Funktion nur einer Multiplikation entspricht) und $[\eta]$ bei $t = 1$. Die Homotopie erfüllt nun alle Voraussetzungen des vorherigen Lemmas, daher berechnet man mit Fubini

$$\begin{aligned} 0 = \deg(F_{\partial X}) &= \frac{\int_{\partial X} F^* \omega}{\int_{\mathbb{S}^n} \omega} = \frac{\int_X d(F^* \omega)}{\int_{\mathbb{S}^n} \omega} = \frac{\int_{[0,1] \times M} d(F^* \omega)}{\int_{\mathbb{S}^n} \omega} = \frac{\int_M \left(\int_{[0,1]} d(F^* \omega) \right)}{\int_{\mathbb{S}^n} \omega} \\ &= \frac{\int_M \left(\int_{\{0,1\}} F^* \omega \right)}{\int_{\mathbb{S}^n} \omega} = \frac{\int_M (F^* \omega(1) - F^* \omega(0))}{\int_{\mathbb{S}^n} \omega} = \frac{\int_M g^* \omega}{\int_{\mathbb{S}^n} \omega} - \frac{\int_M f^* \omega}{\int_{\mathbb{S}^n} \omega} = \deg(g) - \deg(f). \end{aligned}$$

Wichtig ist das Beachten der Randorientierung (deshalb zieht man den Term mit der 0 ab) und dass nur F in Punkten aus dem Intervall $[0,1]$ ausgewertet werden kann. \square

Damit kann nun vergleichsweise einfach die folgende Aussage gezeigt werden:

Satz 6.67: Brouwer'scher Fixpunktsatz

Eine glatte Abbildung $f : X \rightarrow X$ auf dem abgeschlossenen Einheitsball

$$X = \overline{B(0; 1)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 \leq 1 \right\}$$

besitzt einen Fixpunkt, also einen Punkt $p \in X$ mit $f(p) = p$.

Beweis. Der hier vorgestellte Beweis ist ein Widerspruchsbeweis, man nimmt also zunächst an, dass kein Fixpunkt existiert. Dann ist die Abbildung

$$F : X \rightarrow \partial X = \mathbb{S}^{n-1}, p \mapsto \frac{p - F(p)}{\|p - F(p)\|}$$

wohldefiniert (keine Singularität, weil kein Fixpunkt) und glatt. Deshalb gilt nach dem vorherigen Lemma $\deg(G_{\partial X}) = \deg(G_{\mathbb{S}^{n-1}}) = 0$. Betrachtet man nun die Homo-

topie

$$H : [0,1] \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}, (t,p) \mapsto \frac{p - tF(p)}{\|p - tF(p)\|},$$

so gilt $H(1, \cdot) = G_{\mathbb{S}^{n-1}}$, aber $H(0, \cdot) \frac{p}{\|p\|} = \text{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Dann müsste aber gelten:

$$0 = \deg(G_{\mathbb{S}^{n-1}}) = \deg(\text{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}) = 1$$

und das ist der gewünschte Widerspruch. □

6.6 Hodge-Dualität

hier dann auch Dachprodukt von Vektoren aufnehmen, das ja dann Flächen/ Volumina aufspannt

eine Volumenform zeigt Zusammenhang zwischen p -Formen und $(n-p)$ -Vektoren
zumindest steht sowas bei Penrose und das sollte genau Hodge sein

7 Riemannsche Geometrie

Die nun erworbenen Hilfsmitteln erlauben es sogar, Geometrie auf Mannigfaltigkeiten zu betreiben, also Längen, Abstände und Winkel zu messen.

Dazu benötigt man ein Skalarprodukt bzw. eine Metrik (z.B. die vom Skalarprodukt induzierte) als Messinstrument. Skalarprodukte werden hier auch Riemannsche Metrik genannt und die sich daraus ableitende Geometrie dann auch Riemannsche Geometrie.

Basierend darauf lassen sich dann Begriffe wie die Krümmung einer Mannigfaltigkeit sinnvoll definieren, also Differentialgeometrie betreiben.

7.1 Längen und Abstände

7.1.1 Auf Untermannigfaltigkeiten

Im vertrauten \mathbb{R}^n ist es intuitiv, wie man die Länge zwischen zwei Punkten p, q misst. Man nimmt die Verbindungsgerade $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto p + t(q - p)$ und misst den Abstand zwischen Anfangs- und Endpunkt:

$$d(p, q) = \|\gamma(1) - \gamma(0)\| = \|p + (q - p) - p\| = \|q - p\|. \quad (7.1)$$

Statt einer Geraden könnte man auch andere (glatte) Verbindungskurven nehmen, diese hätten jedoch immer eine größere Länge $L(\gamma)$ (folgt aus Anwenden der Dreiecksungleichung $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$ auf (7.3)). Äquivalent ist also:

$$d(p, q) = \inf_{\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ glatt mit } \gamma(0)=p, \gamma(1)=q} L(\gamma). \quad (7.2)$$

Daher ist es lohnenswert, sich die Längenmessung für Kurven genauer anzusehen. Zunächst gilt es, die Länge einer allgemeinen Kurve $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sinnvoll zu definieren. Eine sehr einfache Idee wäre, sich Punkte auf der Kurve zu nehmen, durch Geraden zu verbinden und dann die Länge dieser Geraden aufzuaddieren (Abb. 7.1). Verfeinert man diese Aufteilung des Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ weiter, führt dies zu einer immer besseren Approximation und im Grenzfall unendlich vieler Punkte erhält man so:

Satz 7.1: Länge einer Kurve

Für eine glatte Kurve $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und eine Unterteilung $T_k = \{t_i\}_{i=0}^k$ mit $t_0 = a < t_1 < \dots < t_k = b$ sei

$$L(\gamma, T_k) = \sum_{j=1}^k \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|. \quad (7.3)$$

Dann gilt für jede Folge T_k mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{j=1, \dots, k} |t_j - t_{j-1}| = 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L(\gamma, T_k) = \int_I \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt =: L(\gamma) \quad (7.4)$$

mit dem euklidischen/ Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ des \mathbb{R}^n .

Dieser Satz ist auf stetige Kurven mit $\sup_T L(\gamma, T) < \infty$ (*rektifizierbar*) erweiterbar.

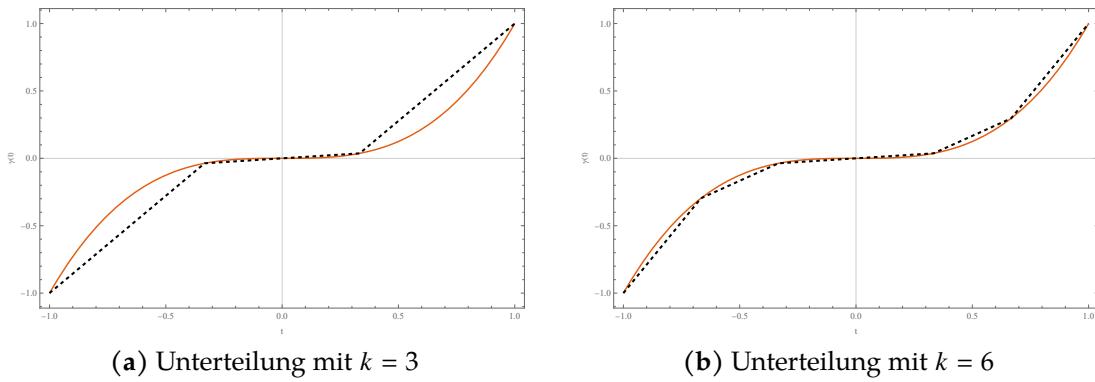


Abbildung 7.1: Hier wird die Idee der Unterteilung anhand der Kurve $\gamma(t) = t^3$ gezeigt, die für $n = 6$ bereits sehr gut approximiert wird.

7.1.2 Skalarprodukte und Riemannsche Metriken

Um die vorgestellte Idee eines Abstandsbegriffes umsetzen zu können, benötigt man also ein Skalarprodukt. Weil dies eine Abbildung von Vektoren auf reelle Zahlen ist und Vektoren auf Mannigfaltigkeiten über den Tangentialraum $T_p M$ punktweise definiert sind, muss auch das Skalarprodukt an jedem Punkt definiert werden. Auf Untermannigfaltigkeiten kann man dazu wegen $T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ einfach an jedem Punkt das Skalarprodukt des unterliegenden \mathbb{R}^n verwenden, allgemeiner fordert man:

Definition 7.2: Riemannsche Metrik

Ein Tensorfeld $g \in \Gamma(M, T^{(0,2)}M)$ über einer Mannigfaltigkeit M , für das

$$g_p \in T_p^* M \otimes T_p^* M = \text{BiLi}(T_p M, T_p M; \mathbb{R}) \quad (7.5)$$

an jedem Punkt $p \in M$ die Eigenschaften eines Skalarprodukts erfüllt, heißt *Riemannsche Metrik auf M (Metrischer Tensor)* oder *Erste Fundamentalform auf M* und das Tupel (M, g) *Riemannsche Mannigfaltigkeit*.

Die Länge einer glatten Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ auf $I \subset \mathbb{R}$ ist

$$L(\gamma) = \int_I \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt = \int_I \|\gamma'(t)\| dt =: \int_I d\gamma \quad (7.6)$$

wobei $\|\cdot\|$ die von g induzierte Norm und $d\gamma$ das Linienelement der Kurve ist.

Anmerkung: auch wenn sich hier auf glatte Kurven beschränkt wird, gelten analoge Aussagen für stückweise glatte Kurven (auch für noch folgende Eigenschaften). Außerdem ist die Riemannsche Metrik keine Metrik im mathematischen Sinne, sondern ein Skalarprodukt (etwas unglückliche Doppelbenennung)!

Bevor gleich weiter auf den Längenbegriff eingegangen wird, soll der Metrische Tensor ein wenig näher betrachtet werden. Dieser ist das zentrale Objekt der Geometrie auf Mannigfaltigkeiten, da er als Abbildung $g : TM \otimes TM \rightarrow \mathbb{R}$ das Skalarprodukt bildet. Eine andere wichtige, nach dem Tensorkalkül äquivalente, Interpretation ist $g : TM \rightarrow T^*M$ – die Metrik bildet einen Isomorphismus zwischen Vektoren und Kovektoren, der explizit gegeben ist durch

$$g = g_X = g(X, \cdot) : TM \rightarrow T^*M, Y \mapsto g_X(Y). \quad (7.7)$$

Das heißt auch, dass für jede 1-Form ω ein eindeutiges Vektorfeld Y existiert mit¹

$$\omega(X) = g(Y, X). \quad (7.8)$$

Die lokale Darstellung auf einer offenen Menge $U \subset M$ ist

$$\begin{aligned} g_U(X, Y) &= g_U\left(\sum_i \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j \mu_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j g_U\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \\ &= \sum_{i,j} g_U\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) dx_i(X) dx_j(Y) \\ \Leftrightarrow g_U &= \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j, \end{aligned} \quad (7.9)$$

weshalb Metriken oft über die g_{ij} als Matrizen dargestellt werden (in Karten).

Dass der so definierte Längenbegriff nicht nur im \mathbb{R}^n , sondern auch auf Mannigfaltigkeiten Sinn ergibt (wohldefiniert ist), zeigt folgende Eigenschaft:

Satz 7.3: Invarianz von $L(\gamma)$ unter Diffeomorphismen

Für eine glatte Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) und einen Diffeomorphismus $\varphi : J \rightarrow I$ gilt

$$L(\gamma) = L(\gamma \circ \varphi). \quad (7.10)$$

Da Kartenwechsel auf glatten Mannigfaltigkeiten Diffeomorphismen sind, folgt dass $L(\gamma)$ unabhängig von der gewählten Parametrisierung (wohldefiniert) ist.

Satz 7.4: Bogenlänge

Für eine glatte, immersierte Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit

¹Ist das der Satz von Riesz?

tigkeit (M, g) existiert ein Diffeomorphismus $\varphi : J \rightarrow I$, sodass für $\tilde{\gamma} = \varphi \circ \gamma$

$$g_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{\gamma}'(t), \tilde{\gamma}'(t)) = 1, \quad \forall t \in J. \quad (7.11)$$

Man sagt $\tilde{\gamma}$ hat *Einheitsgeschwindigkeit*/ist *auf Bogenlänge parametrisiert*.

Dieser Satz ist ein Korollar aus dem vorherigen Satz, hat aber eine wichtige Bedeutung. Er vereinfacht Rechnungen (explizit oder symbolisch, wie oft in Beweisen), da man nun die Länge einer Kurve einfach berechnen kann als

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_J dt = \int_c^d dt = d - c.$$

Dabei kann es natürlich schwierig sein, den expliziten Diffeomorphismus zu finden, aber in Beweisen kann man nun oBdA Kurven nutzen, die auf Bogenlänge parametrisiert sind. Man muss dabei annehmen, dass γ immersiert ist, weil das $\gamma' \neq 0$ und damit auch $\tilde{\gamma}' \neq 0$ garantiert. Nur dann ist sicher, dass die Reskalierung zu 1 in jedem $t \in [c, d]$ funktioniert.

Beispiel 7.5: Untermannigfaltigkeit

Für eine UMF $M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Riemannsche Metrik punktweise definierbar als (hierbei behalte man $T_p M = T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ im Kopf)

$$p \mapsto g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (7.12)$$

man schränkt also einfach das euklidische Skalarprodukt auf M ein und nutzt das unabhängig vom Punkt p . Analog ist es für UMF $N \subset M$.

Beispiel 7.6: Sphäre

Die Metrik auf \mathbb{S}^2 bezüglich der stereographischen Projektion ist

$$g = \frac{4}{(1 + x^2 + y^2)^2} \langle \cdot, \cdot \rangle. \quad (7.13)$$

Mithilfe dieses Skalarprodukts lässt sich nun auch eine „richtige“ Metrik definieren:

Satz 7.7: Abstand

Für eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) definiert

$$d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}, (p, q) \mapsto d(p, q) = \inf_{\gamma : [0,1] \rightarrow M \text{ glatt mit } \gamma(0)=p, \gamma(1)=q} L(\gamma) \quad (7.14)$$

eine Metrik.

Zudem ist die durch d induzierte Topologie die Mannigfaltigkeitentopologie.

Diese Definition verallgemeinert (7.2) und ermöglicht nun das Betreiben von Geometrie auf Mannigfaltigkeiten. Hierbei wurde angenommen, dass M zusammenhängend ist, weil M dann insbesondere wegzusammenhängend ist und damit die Existenz einer Verbindungskurve zwischen beliebigen Punkten $p, q \in M$ garantiert ist.

Die zweite Aussage zeigt, dass die Definition der Metrik d und damit auch des metrischen Tensors g auf sehr natürliche Weise geschehen ist, die verträglich ist mit der ganz allgemeinen topologischen Struktur der Mannigfaltigkeit. Diese Eigenschaft zeigt auch, welche Riemannsche Metrik zu Koordinatengebieten gehört. Dort wird mit der Standardtopologie des \mathbb{R}^n gearbeitet und die ist vom Standardskalarprodukt induziert (die offenen Bälle sind ja sogar mithilfe der induzierten Norm definiert).

Im Allgemeinen sind Metriken nicht konstant. Ist das jedoch der Fall, sei es lokal oder global, ist das eine besondere Eigenschaft.

Definition 7.8: Isometrie

Eine (*lokale*) *Isometrie* ist ein (lokaler) Diffeomorphismus $\phi : U \rightarrow V$, $U \subset M, V \subset N$ offen, zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten $(M, g), (N, \tilde{g})$, sodass

$$\phi^* \tilde{g} = g . \quad (7.15)$$

Bei Existenz einer Isometrie zwischen Mannigfaltigkeiten kennt man also die Metrik \tilde{g} bereits, wenn g und der Diffeomorphismus zwischen M, N bekannt sind – im gewissen Sinne messen die Metriken also analoge/voraussagbare Ergebnisse.

Insbesondere erlaubt das Aussagen für den Fall $(N, \tilde{g}) = (M, g)$, wo es um Änderungen der Metrik auf der Mannigfaltigkeit selbst geht. So lässt sich das Verhalten der Metrik auf M untersuchen, beispielsweise entlang eines Vektorfelds. Der passende Diffeomorphismus um das zu tun ist der zugehörige Fluss.

Definition 7.9: Killing-Vektor

Ein Vektorfeld X mit Fluss Φ heißt *Killing-Vektorfeld* falls

$$\Phi^*g = g \quad \Leftrightarrow \quad \left. \frac{d\Phi_t^*g}{dt} \right|_{t=0} = \mathcal{L}_X g = 0. \quad (7.16)$$

Killing-Vektoren sind also besonders, weil sie einem Kurven vorgeben, entlang denen die Metrik konstant ist.

Zum Abschluss der Behandlung von Metriken soll zudem die Definition von Winkeln gegeben werden.

Definition 7.10: Winkel

Der *Schnittwinkel* zwischen zwei Tangentialvektoren X_p, Y_p ist

$$\theta = \arccos \left(\frac{g_p(X_p, Y_p)}{\sqrt{g_p(X_p, X_p)g_p(Y_p, Y_p)}} \right). \quad (7.17)$$

Diese Definition ist analog zum \mathbb{R}^n .

7.1.3 Notizen

also zuerst wieder als Spezialfall UMF machen (dort erste Fundamentalform) und dann abstrahieren (zweite Fundamentalform) - ζ wobei, die gibt es ja auch nur auf UMF?! Iwie ist das halt cool (vor allem cool bei Smoczyk), weil man daran Zerlegungen in tangentialen und normalen Anteil sieht, aber sonst iwie unnötig oder? Bzw nicht hilfreich für Anfang, eventuell später (zeitlich gemeint, soll schon hier hin in subsection zu UMF z.B.) ergänzen - ζ metrischer Tensor ist die erste Fundamentalform, die brauchen wir hier eigentlich nur erstmal (jo, Heller führt zweite zwar ein, aber nutzt die nicht weiter)

- ζ Heller hat das besser gemacht; auch zuerst auf UMF, aber direkt ne (Riemannsche) Metrik und die wird dann verallgemeinert

dann als wichtige Anwendung davon die Längenmessung von Kurven einführen (damit definiert man erst die eigentliche Metrik! Das davor ist streng genommen nur der metrische Tensor); Motivation/ Idee zeigt Abbildung 7.1; ahhh und das zeigt auch generelle Motivation, in gekrümmten Räumen (wie z.B. auf der Kurve) kann man nicht einfach Abstand messen indem man die Punkte gerade verbindet und die Länge der Geraden misst, damit bewegt man sich außerhalb der Mannigfaltigkeit (wie man auch an einer Kugel sehr gut sehen kann)

Smoczyk zeigt dann (zwar nur auf UMF des \mathbb{R}^n , aber darum geht es hier ja eh noch) in Satz 2.2.4, dass diese anschauliche Längendefinition einer Kurve γ gleich $\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle} dt$ ist (nice ist dann auch die Definition des Linienelements darüber) - das ist dann die Motivation (nachdem man ein Skalarprodukt hat mit dem metrischen Tensor; ein Skalarprodukt ist ja auch einfach eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}!!!$), die Länge auf allgemeinen MF genau so zu definieren

noch Gleichung 2.3.1 von Smoczyk aufnehmen? Zeigt wie man das Integral auf MF auch anders ausdrücken kann (mit lokaler Darstellung der 1. Fundamentalform - kann man die nicht einfach ausrechnen?); ahhh, 3.1.3 ist auch sehr geil, glaube noch allgemeiner - ok, scheint doch alles für UMF sein und es ist nicht das erhoffte mit Darstellung allgemeiner Metrik über Standardskalarprodukt (geht da nur, weil UMF des \mathbb{R}^n)

- man braucht bald bestimmt auch Normalenbündel (doch nicht oder? Nur für zweite Fundamentalform), das hat Ferus gut definiert im Topologieskript (Satz 120); dazu braucht man aber sogar umgebenden Raum, also UMF

- Normalenshit und Zweite Fundamentalform in einem Beispiel machen (also wie bei Heller?)

- mega nice intuitive Einführung von Metriken etc in Hitchin-Skript, auch von Killing-Vektoren z.B. (die einparametrische Gruppe von Diffeos, die ein Vektorfeld bestimmt, ist btw der Fluss); Folge/ Deutung müsste sein: entlang von Killing-Vektorfeldern ist die Metrik also konstant. Das heißt das ja mit Lie-Ableitung Null)

grob: ein Killing-Vektorfeld ist dann eins, für das $\mathcal{L}_X g = 0$ (die Metrik kann man dabei ableiten, weil es ja Tensorfeld ist); das entspricht dann der Konstantheit $\phi^* g = g$ mit ϕ als Fluss zu X , der zugehörige Fluss (Diffeo) soll also eine Isometrie sein

7.2 Kovariante Ableitung, Paralleltransport und Krümmung

Nach der Definition des Längenbegriffs kann man nun damit arbeiten und beispielsweise die Variation davon betrachten, um minimale Längen und damit Abstände zu finden. Dafür muss man allerdings Vektoren ableiten können und das ist noch nicht möglich (tatsächlich ist das etwas wie eine zweite Ableitung, DF als Differential von Abbildungen ist sinnvoll definiert). Ein Problem dabei ist, dass der Begriff von parallelen Vektoren noch nicht sinnvoll und koordinatenunabhängig definiert werden kann, da man dafür Vektoren an verschiedenen Punkten p, q vergleichen muss. Partielle Ableitungen sind dazu nicht geeignet, es ist Zusatzstruktur nötig: ein neuer Ableitungsoperator ∇ , der auch Änderungen der Koordinaten mitberücksichtigt und damit am Ende auch die Definition von Parallelität erlauben wird.

Definition 7.11: Zusammenhang

Für eine Mannigfaltigkeit M und ein Vektorbündel $\pi : E \rightarrow M$ heißt ein linearer Operator

$$\nabla : \Gamma(M; E) \rightarrow \Gamma(M; T^*M \otimes E) \text{ mit } \nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s \quad (7.18)$$

Zusammenhang (auf E). Zudem bezeichnet man abkürzend für $X \in X(M)$

$$\nabla_X : \Gamma(M; E) \rightarrow \Gamma(M; E), s \mapsto \nabla_X s := \text{tr}_{1,1}(X \otimes \nabla s). \quad (7.19)$$

Zusammenhänge auf $E = TM$ heißen auch *Lineare Zusammenhänge*.

Somit erfüllen ∇, ∇_X die tensorielle Eigenschaft. Äquivalente Schreibweisen sind

$$\nabla : \Gamma(M; TM \otimes E) = \Gamma(M; TM) \otimes \Gamma(M; E) = \Gamma(M; TM) \times \Gamma(M; E) \rightarrow \Gamma(M; E)$$

und $\nabla \in \Gamma(M; E^* \otimes T^*M \otimes E), \nabla_X \in \Gamma(M; E^* \otimes E)$. Aufgrund der Eigenschaften der Spur folgen sofort Linearität und C^∞ -Linearität von ∇_X :

$$\nabla_{fX+gY}s = f\nabla_X s + g\nabla_Y s. \quad (7.20)$$

Eine interessante Eigenschaft von Zusammenhängen ist, dass sie ebenso gut lokal definierbar sind. Für offene Teilmengen $U \subset M$ lassen sich, wie bereits erläutert wurde, problemlos Schnitte $s \in \Gamma(U; E)$ erklären und damit ist auch

$$\nabla s \in \Gamma(U; T^*U \otimes E) = \Gamma(U; T^*M \otimes E) \quad (7.21)$$

wohldefiniert. Es gilt zusätzlich aber auch die Umkehrung: aus lokalen Zusammenhängen ∇^i auf $U_i \subset M$ erhält man einen wohldefinierten Zusammenhang ∇ auf $\cup_i U_i$ wenn die Verträglichkeitsbedingung

$$\nabla^i = \nabla^j \text{ auf } U_i \cap U_j, \forall i, j \quad (7.22)$$

erfüllt ist. Das entspricht einer glatten Zusammensetzung der Operatoren. Für eine Überdeckung $M = \cup_i U_i$ reproduziert das Definition 7.11.

Beispiel 7.12: Zusammenhang auf trivialem Vektorbündel, Lie-Ableitung

Das einfachste Beispiel für ein Vektorbündel ist das triviale, also $E = M \times \mathbb{R}$. Für ein beliebiges $\omega \in \Omega(M, \mathbb{R})$ ist wegen $\Gamma(M; E) = C^\infty(M), \Omega(M) = \Gamma(M; T^*M \otimes E)$ ein einfaches Beispiel für einen Zusammenhang die Abbildung

$$\nabla : C^\infty(M) \rightarrow \Omega(M), f \mapsto df + \omega f .$$

In diesem Fall erhält man für Vektorfeld X

$$\nabla_X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M), f \mapsto df(X) + \omega(X)f$$

und dieser Operator ordnet jeder Funktion f die folgende Funktion zu:

$$\nabla_X(f) : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto d_p f(X_p) + \omega_p(X_p)f(p) .$$

Im Gegensatz dazu ist die Lie-Ableitung / -Klammer $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ kein Zusammenhang auf dem Tangentialbündel TM , da sie nicht tensoriell in X ist.

Bisher wirkt ein Zusammenhang nur auf einem Vektorbündel, aber man kann die Definition auch auf Tensorbündel beliebigen Rangs verallgemeinern (wobei hier nur Bündel $T^{(r,s)}M$ betrachtet werden).

Satz 7.13: Zusammenhang auf Tensorbündel

Ein linearer Zusammenhang ∇ auf TM induziert eindeutige Zusammenhänge ∇ auf allen Tensorbündeln $T^{(r,s)}M$ mit

1. $\nabla f = df, \forall f \in C^\infty(M)$
2. $\nabla(S \otimes T) = (\nabla S) \otimes T + S \otimes (\nabla T), \forall S \in \Gamma(M; T^{(r,s)}M), T \in \Gamma(M; T^{(k,l)}M)$
3. $\nabla \circ \text{tr}_{k,l} = \text{tr}_{k,l} \circ \nabla$

Der induzierte Zusammenhang auf Tensorbündeln ist damit sogar eindeutig für einen festen Zusammenhang ∇ (analoge Aussagen gelten für allgemeine Tensorbündel

$\otimes_i E_i$). Es handelt sich somit um eine Verallgemeinerung der Definition des Zusammenhangs, die auch *Kovariante Ableitung* genannt wird. Streng genommen sind ∇ auf TM und ∇ auf $T^{(r,s)}M$ zwar verschiedene Objekte, aber aufgrund der analogen Eigenschaften und der Verbindung wird kein neues Symbol eingeführt.

Damit wurde der neue Ableitungsoperator gefunden, der die Motivation für diesen Abschnitt bildete. Der Name „Kovariante Ableitung“ betont dabei die Koordinatenunabhängigkeit, aber es handelt sich nicht um eine völlig neue Idee. Stattdessen lässt sich ∇_X als verallgemeinerte Richtungsableitung entlang² X interpretieren, siehe 1., die auf beliebige Tensorfelder aus $\Gamma(M; (T^{(r,s)}M)^* \otimes (T^{(v,w)}M))$ oder $\Gamma(M; E^* \otimes E)$ wirken kann. Genau wie das Differential einer Abbildung F Vektorfelder X auf neue Vektorfelder $DF(X)$ abbildet, werden hier (punktweise) Tensoren $T^{(r,s)}M$ auf Tensoren $T^{(r,s)}M$ abgebildet. Das Ergebnis erfasst dabei die Änderung des Tensors in Richtung des eingesetzten Vektorfeldes. Dabei gelten die altbekannte Eigenschaften für Abbildungen: Produktregel und Linearität in beiden Argumenten. Diese legen den Operator dann eindeutiger fest als die rein phänomenologische Erklärung.

Die geforderten Eigenschaften, die zur Eindeutigkeit führen, kann man dabei wie folgt zusammenfassen: ∇ soll für Funktionen der Richtungsableitung entsprechen, es soll eine Art Produktregel gelten (wobei das Produkt hier das Tensorprodukt ist, nicht Multiplikation) und zuletzt soll die Wirkung mit der Kontraktion verträglich sein (mit ihr vertauschen). Die Produktregel lässt sich induktiv fortsetzen, sodass sie für beliebig lange Tensorprodukte gilt (da im Ergebnis wieder Tensoren stehen, bei denen die Produktregel genutzt werden kann). Es lässt sich zudem ausschreiben, was die Forderungen 2. + 3. bei eingesetzten Argumenten bedeuten:

$$\begin{aligned}\nabla_X(S \otimes T) &= (\nabla_X S) \otimes T + S \otimes \nabla_X T \\ \nabla_X \circ \text{tr}_{k,l}(S) &= \text{tr}_{k,l} \circ \nabla_X S,\end{aligned}$$

jeweils $\forall X \in \mathcal{X}(M), S \in \Gamma(M; T^{(r,s)}M), T \in \Gamma(M; T^{(k,l)}M)$. Da ∇_X dadurch wie in Definition 7.11 auf einzelne Tensoren wirkt, wird die Linearität in X vererbt:

$$\nabla_{fX+gY}S = f\nabla_X S + g\nabla_Y S. \quad (7.23)$$

Zusammenhänge lassen sich auf viele verschiedene Weisen motivieren. Ein anderer Ansatz ist die Tatsache, dass partielle Ableitungen nicht tensoriell sind. Die Suche nach einem geeigneten, tensoriellen Analogon führt dann ebenso zu Zusam-

² „Entlang X “ meint hier nicht „parallel zu X “, sondern „wenn in Richtung von X bewegt“.

menhängen, indem man lokal und komponentenweise definiert:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} s = \frac{\partial}{\partial x_i} s + \Gamma_i s = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} s^0 \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_i} s^{n-1} \end{pmatrix} + \Gamma_{ij}^k \begin{pmatrix} s^0 \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (7.24)$$

Hier sieht man auch, warum ∇ Tensoren auf Tensoren gleicher Art abbildet: in jeder Komponente des neuen Objekts ist die Änderung dieser jeweiligen Komponente des Arguments enthalten.

Dieser zweite Ansatz ist also, lineare Funktionen (die *Zusammenhangskoeffizienten* Γ_{ij}^k ; nicht selber tensoriell) zu ergänzen, um die tensorielle Eigenschaft zu erfüllen. Die Äquivalenz dieses Ansatzes zu dem vorher gewählten wird in der lokalen Darstellung klar, die nun beispielhaft für die Wirkung auf Vektorfelder berechnet wird. Der Zusammenhang bildet unter Anderem Vektorfelder auf Vektorfelder ab. Für die Gauß'schen Basisfelder gilt daher per Definition

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (7.25)$$

mit geeigneten Koeffizienten $\lambda_k : M \rightarrow \mathbb{R}$. Für die lokale Darstellung ergibt sich:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{\sum_i \mu_i \frac{\partial}{\partial x_i}} \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i \mu_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i,j} \mu_i \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} v_j \right) \frac{\partial}{\partial x_j} + \mu_i v_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i,j} \mu_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i,j,k} \mu_i v_j \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \sum_{i,j,k} \mu_k \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} + \mu_i v_j \lambda_k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Hierbei wurden viele Eigenschaften von ∇ genutzt und im letzten Schritt ein Index im linken Summanden umbenannt. Die allgemeine Idee bei der Rechnung ist, ∇ auf Funktionen wirken zu lassen, wo $\nabla f = df$. Insgesamt ist damit klar, dass

$$\lambda_k = \Gamma_{ij}^k. \quad (7.27)$$

Die Indizes i, j werden dabei ergänzt, damit auch klar ist zu welchen Basisvektoren der Koeffizient gehört. Diese Idee der lokalen Definition reicht dann bereits aus für einen wohldefinierten Zusammenhangsbegriff. Es ist also so, dass die Zusammenhangskoeffizienten den Zusammenhang bereits vollständig bestimmen, da sie die

zusätzlich zur partiellen Ableitung auftretende Wirkung enthalten. Analog lässt sich die Wirkung auf andere Tensoren ausschreiben, es muss lediglich die partielle Ableitung durch die jeweiligen Basisvektoren ersetzt werden.

Beispiel 7.14: Zusammenhang auf dem \mathbb{R}^n

Im flachen \mathbb{R}^n ist

$$\Gamma_{ij}^k = 0, \forall i, j, k \quad \Rightarrow \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (7.28)$$

Wie gewollt verallgemeinern Zusammenhänge partieller Ableitungen.

Mithilfe von Zusammenhängen kann man nun viele interessante Eigenschaften der unterliegenden Mannigfaltigkeit M untersuchen. Beispiele davon sind die folgenden:

Definition 7.15: Eigenschaften von Zusammenhängen

Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt ein linearer Zusammenhang ∇ *torsionsfrei* falls

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M) \quad (7.29)$$

und *metrisch* falls

$$\nabla g = 0. \quad (7.30)$$

Beiden Bedingungen haben sehr anschauliche Interpretationen:

- Torsionsfreiheit bedeutet, dass sich Parallelogramme schließen (für kommutierende X, Y) bzw. nur um Terme unterscheiden, die von einer „Unverträglichkeit“ der Vektorfelder kommt (genauer: vom Nicht-Kommutieren). Es treten also keine zusätzlichen Unterschiede bei der Bewegung von X entlang Y mithilfe des Zusammenhangs auf.
- Bei Verschiebung mittels eines metrischen Zusammenhangs ∇ entlang beliebiger Vektorfelder ändert sich nicht, was die Metrik misst. Es handelt sich um eine durchaus besondere Verträglichkeitsforderung mit der intrinsischen Struktur einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.

Durch cleveres Ausnutzen der Eigenschaften eines Zusammenhangs lässt sich die Bedingung für die metrische Eigenschaft auch umschreiben. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} \nabla_X(g(Y, Z)) &= \nabla_X \circ \text{tr}_{1,1} \circ \text{tr}_{2,2}(g \otimes Y \otimes Z) = \text{tr}_{1,1} \circ \text{tr}_{2,2} \circ \nabla_X(g \otimes Y \otimes Z) \\ &= \text{tr}_{1,1} \circ \text{tr}_{2,2}((\nabla_X g) \otimes Y \otimes Z + g \otimes (\nabla_X Y) \otimes Z + g \otimes Y \otimes (\nabla_X Z)) \end{aligned}$$

und umgestellt kann das genutzt werden, um zu zeigen:

$$\begin{aligned}
 0 &= (\nabla_X g)(Y, Z) = \text{tr}_{1,1} \circ \text{tr}_{2,2} ((\nabla_X g) \otimes Y \otimes Z) \\
 &= \text{tr}_{1,1} \circ \text{tr}_{2,2} (g \otimes (\nabla_X Y) \otimes Z + g \otimes Y \otimes (\nabla_X Z)) - \nabla_X(g(Y, Z)) \\
 &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - d(g(Y, Z))(X) \\
 &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - X \cdot (g(Y, Z)) \\
 \Leftrightarrow X \cdot (g(Y, Z)) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z). \tag{7.31}
 \end{aligned}$$

Das ist eine etwas explizitere Formel für die metrische Eigenschaft eines Zusammenhangs. Für die Torsionsfreiheit kann man nun eine interessante Eigenschaft zeigen:

Lemma 7.16: Torsionstensor

Für eine Mannigfaltigkeit M und einen linearen Zusammenhang ∇ ist

$$T^\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M), T^\nabla(X, Y) = \nabla_X - \nabla_Y - [X, Y] \tag{7.32}$$

für Vektorfelder $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ ein Tensor.

T^∇ wird auch *Torsionstensor* genannt und mit ihm kann man die Bedingung für einen torsionsfreien Zusammenhang umschreiben zu $T^\nabla(X, Y) = 0, \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ oder einfach $T^\nabla = 0$. Eine interessante Beobachtung ist, dass der Torsionstensor und damit auch die Eigenschaft der Torsionsfreiheit eine Verbindung zwischen Zusammenhängen und der Lie-Klammer $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ herstellt. Außerdem impliziert Torsionsfreiheit die Symmetrie der Zusammenhangskoeffizienten Γ_{ij}^k .

Es stellt sich nun heraus, dass diese zwei Eigenschaften starke Forderungen sind, die bei Weitem nicht alle Zusammenhänge erfüllen. Auf der anderen Seite sind sie gerade nicht zu stark, dass kein Zusammenhang sie erfüllen kann, es gilt:

Satz 7.17

Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) existiert genau ein linearer Zusammenhang ∇ , der torsionsfrei und metrisch ist.

Dieser Zusammenhang ∇ erfüllt zudem $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$:

$$\begin{aligned}
 &X \cdot g(Y, Z) + Y \cdot g(X, Z) + g([X, Y], Z) \\
 &= Z \cdot g(X, Y) + 2g(\nabla_X Y, Z) + g(X, [Y, Z]) + g(Y, [X, Z]). \tag{7.33}
 \end{aligned}$$

Definition 7.18: Levi-Civita-Zusammenhang

Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt der eindeutige torsionsfreie und metrische Zusammenhang ∇ *Levi-Civita-Zusammenhang*. Die Zusammenhangskoeffizienten Γ_{ij}^k heißen hier dann auch *Christoffelsymbole (zweiter Art)*. Gleichung (7.33) heißt auch *Formel von Koszul*.

Dieser bestimmte Zusammenhang spielt eine immense Rolle in der Riemannschen Geometrie und ganz allgemein Differentialgeometrie, auch wenn er nicht auf allgemeinen Vektorbündeln oder Mannigfaltigkeiten definiert ist, sondern speziell auf TM und einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (nur dann ergibt z.B. die Forderung nach einem metrischen Zusammenhang Sinn). Das kommt daher, dass er im besonders kompatibel ist der Struktur der Mannigfaltigkeit auf der er definiert ist (insbesondere mit der Metrik). Im gewissen Sinne beeinflusst er die Objekte nicht, auf die er wirkt (Parallelogramme schließen sich weiterhin, Metrik ist konstant).

Nur Levi-Civita-Zusammenhänge erfüllen die Formel von Koszul. Gleichermaßen definiert die Formel von Koszul aber auch Levi-Civita-Zusammenhänge eindeutig (die nötigen Umformungen klappen nur für torsionsfreie, metrische Zusammenhänge).

Beispiel 7.19: Levi-Civita-Zusammenhang des \mathbb{R}^n

Für $M = \mathbb{R}^n$ zusammen mit dem Standardskalarprodukt $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ ist der Levi-Civita-Zusammenhang einfach das normale Differential, das definiert ist über $\nabla_X Y = dY(X)$ für Vektorfelder $X, Y \in X(M)$. Das Differential kann dabei auf Vektorfelder wirken, da es sich dabei ja auch einfach um Funktionen handelt, die ein $p \in M$ abbilden (nur eben auf einen Vektor statt eine Zahl).

Eine natürliche Frage ist nun, ob ein Zusammenhang ∇ auf einer Mannigfaltigkeit M auch einen Zusammenhang auf einer anderen Mannigfaltigkeit N liefern kann, beispielsweise mittels Abbildungen $\phi : N \rightarrow M$. Um überhaupt darüber nachdenken zu können, muss man sich zunächst mit der unterliegenden Menge beschäftigen, dem zugehörigen Vektorbündel E .

Satz 7.20: Pullback von Vektorbündeln

Für ein Vektorbündel $\pi : E \rightarrow M$ und $\phi : N \rightarrow M$ glatt ist die Menge

$$\phi^* E := \{(q, v) : q \in N, v \in E_{\phi(q)}, \pi(v) = \phi(q)\} \quad (7.34)$$

eine Untermannigfaltigkeit von $N \times E$. Außerdem ist die natürliche Projektion

$$\pi^N : \phi^* E \rightarrow N, (q, v) \mapsto q \quad (7.35)$$

glatt und

$$\left(\pi^N\right)^{-1}(q) = E_{\phi(q)} \quad (7.36)$$

sind Vektorräume. Insgesamt ist (ϕ^*E, N, π^N) ein Vektorbündel mit Fasern $E_{\phi(q)}$.

Für einen Schnitt $s \in \Gamma(M; E)$ ist zudem

$$\tilde{s} : N \rightarrow \phi^*E, q \mapsto (q, s(\phi(q))) \quad (7.37)$$

ein Schnitt $\phi^*\tilde{s} \in \Gamma(N; \phi^*E)$.

Die Idee ist also wie bei Pullbacks allgemein, man baut eine Verknüpfung ein und ändert so den Definitionsbereich, ohne jedoch die wesentlichen Eigenschaften des Objekts zu ändern (was hauptsächlich an der Glattheit von ϕ liegt). Hier bedeutet das, dass man die gleichen Vektorräume E_p nimmt, aber die zugehörigen Fußpunkte als $p = \phi(q)$ ausdrückt. Daraus erhält man Vektorbündel ϕ^*E über und Schnitte ϕ^*s in $N = \phi^*M$ aus E über und s in M .

Man beachte, dass ϕ kein Diffeomorphismus sein muss, also nicht bijektiv. Insbesondere kann man das Ganze also mit Kurven machen, wo $N = [a, b]$ (wird sehr wichtig werden). In diesem Fall bzw. allgemeiner für den Fall $E = TM$ nennt man Schnitte dann auch Vektorfelder längs/entlang ϕ .

Nachdem der Pullback eines Vektorbündels erklärt ist, lässt sich nun auch nach dem Pullback eines Zusammenhangs fragen.

Satz 7.21: Pullback von Zusammenhängen

Für ein Vektorbündel $\pi : E \rightarrow M$ und $\phi : N \rightarrow M$ glatt existiert auf dem Vektorbündel $\pi^N : \phi^*E \rightarrow N$ genau ein Zusammenhang $\tilde{\nabla}$, sodass

$$\phi^*(\nabla s) = \tilde{\nabla} \phi^*s =: (\phi^*\nabla)(\phi^*s), \quad \forall s \in \Gamma(M; E). \quad (7.38)$$

$\tilde{\nabla}$ ist, was natürlicherweise als Pullback von ∇ zu sehen ist – $\phi^*\nabla$ beschreibt also einfach einen (eindeutig bestimmten) Zusammenhang auf ϕ^*E . Er wirkt auf die gepullten Schnitte so, dass das Ergebnis genau der Pullback des Objekts ∇s ist (ähnlich zu (5.83)). Mit eingesetztem Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(M)$ wird die definierende Gleichung zu:

$$\phi^*(\nabla_X s) = (\phi^*\nabla)_{\tilde{X}}(\phi^*s) = (\phi^*\nabla)_{\phi^*X}(\phi^*s), \quad (7.39)$$

wobei X, \tilde{X} ϕ -verwandt sind (also $\tilde{X} = \phi^*X$). Das zeigt weiterhin, wie viel Sinn die Bezeichnung $\phi^*\nabla$ ergibt, man hat so eine komplette Verträglichkeitsgleichung.

Für diese Eigenschaft gilt weiter eine Art Kettenregel:

Satz 7.22

Für ein Vektorbündel $\pi : E \rightarrow M$ mit Zusammenhang ∇ und Abbildungen $f : N \rightarrow M, g : O \rightarrow N$ gilt auf $(f \circ g)^*E = g^*(f^*E)$ über O :

$$(f \circ g)^*\nabla = g^*(f^*\nabla). \quad (7.40)$$

Man mag sich nun fragen, ob die Eigenschaften eines Levi-Civita-Zusammenhangs sich unter Pullbacks ändern. Es stellt sich heraus, dass das nicht der Fall ist:

Satz 7.23: Torsionsfrei, metrisch unter Pullback

Sei $\phi : N \rightarrow M$ und ∇ ein Zusammenhang auf TM .

Ist ∇ torsionsfrei, so gilt für $X, Y \in \mathcal{X}(M) = \Gamma(M; TM)$ und $\tilde{X} = \phi^*X = D\phi(X), \tilde{Y} = \phi^*Y = D\phi(Y) \in \Gamma(N; \gamma^*TM)$ längs ϕ :

$$(\phi^*\nabla)_X \tilde{Y} - (\phi^*\nabla)_Y \tilde{X} = D\phi([X, Y]). \quad (7.41)$$

Ist ∇ metrisch, so gilt für $X \in \mathcal{X}(M)$ und $Y, Z \in \Gamma(N; \gamma^*TM)$ längs ϕ :

$$X \cdot g(Y, Z) = g(\phi^*\nabla_X Y, Z) + g(Y, \phi^*\nabla_X Z). \quad (7.42)$$

- ζ viele nice Formeln vor Korollar 6.16 (zu Verhalten bei Pullback etc);
- ζ uh ja, 6.12 ist sehr wichtig; zeigt, was die Notation γ^* bedeutet: $(\gamma^*\nabla)\tilde{s} = (\gamma^*\nabla)(\gamma^*s) = \gamma^*\nabla(s \circ \gamma) = \gamma^*(\nabla s)$; das erklärt unter Anderem die Herleitung bei Parallelitätsbedingung; ist sowas wie Kettenregel oder? - ζ ok, glaube $\gamma^*s = s \circ \gamma$ gilt nicht, aber bei Funktionen ja auf jeden Fall (von daher kann man es in Rechnung so machen; man sollte über Pullback ja auch auf jeden Fall so nachdenken)

7.2.1 Geodäten

Die erste Anwendung bei der ein Levi-Civita-Zusammenhang benutzt wird, ist die Bestimmung des Abstands von Punkten auf Mannigfaltigkeiten. Dieser konnte über (7.14) bereits zwar sinnvoll definiert werden, jedoch muss zur tatsächlichen Berechnung die Kurve γ bekannt sein, die $L(\gamma)$ minimiert. Das Ziel dieses Abschnitts ist es daher, einen systematischen Weg zum Aufstellen dieser Kurve γ zu finden. Im \mathbb{R}^n mag das trivial sein, auf allgemeinen Mannigfaltigkeiten ist es bisher noch nicht möglich!

Satz 7.24

Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) mit Zusammenhang ∇ und eine glatte, auf Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ mit $L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$ gilt für das Vektorfeld $\gamma' \in \Gamma([a, b]; \gamma^* TM)$ längs γ

$$\nabla_{\gamma'} \gamma' := \nabla_{\frac{d}{dt}} \gamma' := (\gamma^* \nabla)_{\frac{d}{dt}} \gamma' = 0. \quad (7.43)$$

Beweis. Erste Variation der Länge $L(\gamma)$, hier nicht explizit berechnet. \square

Definition 7.25: Geodäte

Eine glatte Kurve $\gamma : I \rightarrow M$, die (7.43) erfüllt, heißt **Geodäte**.

Geodäten sind also nichts als Kürzeste, die $L(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$ erfüllen. (7.43) heißt auch **Geodätengleichung** und das ist der angekündigte systematische Weg, den Abstand zwischen Punkten zu finden. Da γ nur von einem Parameter t abhängt, wird hier $\frac{d}{dt}$ statt wie eigentlich üblich $\frac{\partial}{\partial t}$ geschrieben.

Die Bedeutung dieser Gleichung ist zudem sehr intuitiv: die Richtung der Kurve bleibt konstant wenn man sie entlanggeht – was so etwas wie das Verschwinden der zweiten Ableitung der Kurve bedeutet, dass sie also ungekrümmt ist. Der Pullback Zusammenhang $\gamma^* \nabla$ als Operator auf $\gamma^* TM$ statt ∇ auf M wird dabei benutzt, damit man nur Punkte $\gamma(t) \in M$ statt beliebiger p einsetzt. So ist garantiert, dass man wirklich nur der Kurve folgt und sich nicht an anderer Stelle auf der Mannigfaltigkeit bewegt. Weil das jedoch eher ein Detail ist, wird es in der Schreibweise oft unterschlagen.

Im \mathbb{R}^n werden Abstände einfach über die Differenz der entsprechenden Ortsvektoren gemessen, also die Gerade zwischen diesen beiden. Wie das nächste Beispiel zeigt, reproduziert die Geodätengleichung dieses Ergebnis.

Beispiel 7.26: Geraden

Umschreiben der Geodätengleichung mit ∇ als Differential d ergibt

$$d_{\gamma'} \gamma' = d\gamma' \left(\frac{d}{dt} \right) = \frac{d\gamma'}{dt} = \gamma'' = 0 \Leftrightarrow \gamma' = \text{const} \Leftrightarrow \gamma(t) = vt + p \quad (7.44)$$

mit $p, v \in \mathbb{R}^n$ als Orts- und Richtungsvektoren. Geodäten im \mathbb{R}^n sind also Geraden.

Im Gegensatz dazu zeigt Abbildung 4.1 einen Kreisbogen mit dem zugehörigen Tangentialvektorfeld. Betrachtet man das Vektorfeld auf $M = \mathbb{R}^2$, so ist es keine

Geodäte, weil sich offenbar die Richtung des Vektorfeldes ändert; die schwarzen Pfeile sind nicht parallel, was gleichbedeutend ist mit einer Richtungsänderung und damit auch einer Änderung der Vektoren γ' . Das umfasst insbesondere eine Änderung in Richtung von γ' , weshalb $\nabla_{\gamma'} \gamma' \neq 0$. Auf dem Kreisbogen \mathbb{S}^1 hingegen ändert sich die Richtung der Vektoren nicht.

Nach diesem ersten Beispiel, die unterstreicht dass die Definition sinnvoll ist, stellt sich nun wieder einmal die Frage, was bei anderen Darstellungen passiert. Das entspricht der Frage, wie sich die Geodätengleichung unter einem Pullback $\phi^*\gamma$ verhält.

Lemma 7.27: Umparametrisierung Geodätengleichung

Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ , eine glatte Kurve $\gamma : I \rightarrow M$ und einen Diffeomorphismus $\phi : J \rightarrow I$ gilt für $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi : J \rightarrow M$:

$$\tilde{\gamma}^* \nabla_{\frac{d}{ds}} \tilde{\gamma}' = \phi''(s) \gamma'(\phi(s)) + (\phi'(s))^2 \gamma^* \nabla_{\frac{d}{dt}} \gamma'(\phi(s)). \quad (7.45)$$

Wird dieses Ergebnis = 0 gesetzt, ergibt sich die Geodätengleichung auf J .

Bezüglich einer Trivialisierung gilt nun mit $\tilde{\gamma} = x \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (per Definition)

$$\gamma'(t) = \sum_i \tilde{\gamma}'_i(t) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\gamma(t)}$$

und damit erhält man die folgende lokale Darstellung der Geodätengleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\gamma'} \gamma'(t) = \nabla_{\frac{d}{dt}} \gamma'(t) = \sum_i \left. \frac{d\tilde{\gamma}'_i(t)}{dt} \right. \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_{\gamma(t)} + \left. \tilde{\gamma}'_i(t) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \right. \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\gamma(t)} \\ &= \sum_i \left. \tilde{\gamma}''_i(t) \right. \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_{\gamma(t)} + \sum_{i,j} \left. \tilde{\gamma}'_i(t) \tilde{\gamma}'_j(t) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \right. \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\gamma(t)} \\ &= \sum_i \left. \tilde{\gamma}''_i(t) \right. \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_{\gamma(t)} + \sum_{i,j,k} \left. \tilde{\gamma}'_i(t) \tilde{\gamma}'_j(t) \Gamma_{ji}^k \right. \left. \frac{\partial}{\partial x_k} \right|_{\gamma(t)} \\ &= \sum_k \left(\tilde{\gamma}''_k(t) + \sum_{i,j} \tilde{\gamma}'_i(t) \tilde{\gamma}'_j(t) \Gamma_{ji}^k(\gamma(t)) \right) \left. \frac{\partial}{\partial x_k} \right|_{\gamma(t)} \\ \Leftrightarrow 0 &= \left. \frac{d^2 \tilde{\gamma}_k}{dt^2} \right|_t + \sum_{i,j} \left. \frac{d\gamma_i}{dt} \right|_t \left. \frac{d\gamma_j}{dt} \right|_t \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)). \end{aligned} \quad (7.46)$$

Anmerkung: im letzten Schritt wurde dabei nicht die Symmetrie der Christoffelsymbole angenommen, sondern lediglich Indizes umbenannt.

Nach Variablensubstitution lässt sich diese DGL 2. Ordnung in eine DGL 1. Ordnung (auf $T\mathbb{R}^n$) umschreiben. Das hat die wichtige Folgerung, dass Geodäten durch Anfangspunkt und -richtung bereits eindeutig bestimmt sind (gilt bei Geraden ganz offensichtlich, aber somit allgemein).

7.2.2 *Exponentialabbildung und Geodätischer Spray*

Die eben vorgestellte Eigenschaft motiviert die Suche nach einer Abbildung, die Startpunkt und -richtung als Argumente nimmt und daraus Geodäten „baut“.

Satz 7.28

Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) existiert eine offene Menge $\mathcal{U} \subset TM$ sodass $\forall p$ die Menge $\mathcal{U}_p := \mathcal{U} \cap T_p M$ sternförmig bezüglich $0 \in \mathcal{U}_p$ ist und eine glatte Abbildung $\text{Exp} : \mathcal{U} \rightarrow M$, sodass für $X_p \in \mathcal{U}_p$ die Kurve

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow M, t \mapsto \text{Exp}(tX_p) \quad (7.47)$$

eine Geodäte mit $\gamma(0) = p = \pi(X_p)$ und $\gamma'(0) = X_p$.

Zudem gilt $\text{Exp}(0_p) = p$ und $D_{0_p} \text{Exp}_{\mathcal{U}_p} = \text{id}_{T_p M} \forall p \in M$.

Definition 7.29: Exponentialabbildung

Die Abbildung Exp heißt *Exponentialabbildung*.

Interpretation: $\text{Exp}(X_p)$ ist der Endpunkt $\gamma(1)$ der (eindeutig bestimmten) Geodäten $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = X_p$; denke so sollte man über Exp nachdenken, nicht als tatsächliche e-Funktion (ah, wobei Name halt daher kommt, dass es sowas wie die Definition der Exponentialabbildung erfüllt, wir haben ja $\gamma'(0) = \frac{d\text{Exp}(tX_p)}{dt} \Big|_{t=0} = X_p \text{Exp}(tX_p) \Big|_{t=0} = X_p$ bzw. allgemeiner $\gamma'(t) = \frac{d\text{Exp}(tX_p)}{dt} = X_p \text{Exp}(tX_p) = X_p \gamma(t)$; das heißt immer noch nicht, dass es zwangsläufig eine e-Funktion ist, aber es erfüllt halt die Definition, die wir von \mathbb{R} her kennen und wo es halt eine e-Funktion ist)

Beispiel 7.30: Matrix-Lie-Gruppe

nach Beispiel 6.22

Metrik ist punktweise definiert als $g_h(X_h^\xi, X_h^\mu) = -\text{tr}(\xi \mu^T)$, also insgesamt auch $g(X^\xi, X^\mu) = -\text{tr}(\xi \mu^T)$; ist bi-invariant (in beiden Argumenten also?)

Levi-Civita-Zusammenhang wirkt als $\nabla_{X^\xi} X^\mu = \frac{1}{2} X^{[\xi, \mu]}$; weil das $\nabla_{X^\xi} X^\xi = 0$ impliziert, sind Integralkurven von X^ξ auch Geodätische; wie bereits gezeigt wurde, sind die Integralkurven Exponentialfunktionen und daher hat die Exponentialabbildung von Matrix-Lie-Gruppen tatsächlich die Form einer Exponentialabbildung (nicht unbedingt der Fall für Exponentialabbildung nach Definition 7.29)

Exponentialabbildung von Matrix-Lie-Gruppe ist Exp von Matrix-Lie-Gruppe betrachtet als Riemannsche MF (mit geeigneter Metrix, im Wesentlichen Spur)

Definition 7.31: (Riemannsche) Normalkoordinaten

Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) und eine ONB v_1, \dots, v_n von $T_p M$ heißen die Koordinaten $x : \text{Exp}(U_p) \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$x(\text{Exp}(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n)) = (x_1, \dots, x_n) \quad (7.48)$$

(Riemannsche) Normalkoordinaten (um p).

-; hm, ist Proposition 6.25 cool? Und daher intuitiv oder mehr so: gilt echt?

nützliche Eigenschaft:

Lemma 7.32

Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) , $p \in M$, $v, w \in T_p M$ sodass $\text{Exp}_p(v)$ existiert, gilt

$$g_p(rv, w) = g_{\text{Exp}_p(v)}(D_v \text{Exp}_p(rv), D_v \text{Exp}_p(w)), \forall r \in \mathbb{R}. \quad (7.49)$$

zeigt auch, wie praktisch Exponentialabbildung (damit kann man potentiell halt Eigenschaften ausnutzen, right?); stellt sich halt raus, dass man die noch etwas erweitern kann auf allgemeine $r \in \mathbb{R}$, nicht nur $r = 1$, deswegen schreiben wir hier die allgemeine Version hin

Theorem 6.27 ist zwar cool (Satz von Hopf-Rinow), aber braucht halt ganze Vorarbeit; das folgende Korollar am Ende ist aber sehr nützlich:

Korollar 7.33: Geodäten auch kompakten Mannigfaltigkeiten

Auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit existieren alle Geodäten für alle Zeiten.

Geodäten können in diesem Fall also global definiert werden.

7.2.3 Krümmung

Eine natürliche Frage ist, ob und wie man Riemannsche Metriken unterscheiden kann (und damit auch die zugehörigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, als Kriterium neben der Dimension). Die Antwort lautet ja und aus den vielen Möglichkeiten, das zu sehen, wird hier die Motivation mittels Paralleltransport gewählt. Um zu verstehen, worum es sich dabei handelt, sind zunächst einige Definitionen nötig (eine Veranschaulichung gibt es in Abbildung 7.2).

Definition 7.34: Paralleler Schnitt

Ein Schnitt $s \in \Gamma(M; E)$ heißt *parallel* (auch: *konstant*) wenn $\nabla s = 0$.

Hm, irgendwie fehlt mir hier ein eingesetztes Vektorfeld... Soll das wirklich global sein? Oder ist das ohne eingesetzt und mit äquivalent (Verschwinden entlang eines impliziert entlang aller?) Hmm, sieht sogar aus Beweis Paralleltransport so aus, dass das äquivalent ist zu entlang einer Kurve (wobei das halt auch an Benutzen von $\gamma^*\nabla$ liegen kann, ist dann nicht γ^*TM eindimensional? Und dann können wir den Basisvektor halt auch einfach einsetzen)

Satz 7.35

Für eine glatte Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ und ein Vektorbündel $\pi^E : E \rightarrow M$ mit Zusammenhang ∇ existiert ein eindeutiger Schnitt $s \in \Gamma([a, b]; \gamma^*E)$ mit $s(a) \in E_{\gamma(0)}$ und $\gamma^*\nabla s = 0$. Außerdem ist

$$\mathcal{P}^\nabla(\gamma) : E_{\gamma(a)} \rightarrow E_{\gamma(b)}, \quad s(a) \mapsto s(b) \quad (7.50)$$

für diesen Schnitt s eine lineare, bijektive Abbildung.

Beweis. Wegen $\dim(\gamma^*E) = \dim(\mathbb{R}) = 1$ sind alle Elemente von $\Gamma([a, b]; \gamma^*E)$ proportional zu $\frac{\partial}{\partial t}$. Da weiter $\nabla_{fX}s = f\nabla_Xs = 0 \Leftrightarrow \nabla_Xs = 0$, folgt

$$\gamma^*\nabla s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^*\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}s = 0.$$

Lokal ist das (wie noch explizit gezeigt wird) aber einfach eine lineare, gewöhnliche DGL 1. Ordnung. Daher existiert eine eindeutige Lösung s . \square

Definition 7.36: Paralleltransport

$\mathcal{P}^\nabla(\gamma)$ heißt *Paralleltransport (bezüglich ∇) entlang γ* .

Damit ist das anfangs formulierte Ziel, Parallelität zu definieren, erreicht. Unabhängig von einer vielleicht komplizierten Definition kann man sich Paralleltransport sehr anschaulich vorstellen, vor allem im Falle von Vektoren (also $E = TM$): ein Vektor ist parallel transportiert/verschoben/verlängert, wenn sich seine Orientierung relativ zur Kurve, entlang der transportiert wird, nicht ändert (siehe wiederum Abbildung 7.2). Da \mathcal{P} zudem bijektiv und linear ist, erhält man somit auch einen (fast kanonischen) Isomorphismus zwischen den verschiedenen Fasern E_p eines Vektorbündels. Diese Verbindung stellt einen *Zusammenhang* zwischen den Fasern her, was durch ∇ ermöglicht wird und damit auch die Namensgebung erklärt.

Zur Notation ist zu sagen, dass $\gamma^*\nabla s = 0$ der Forderung $\nabla s = 0$ längs γ entspricht, also exakt der Intuition. Das wird jedoch nicht als $\gamma^*(\nabla s) = 0$ ausgedrückt, weil s bereits ein Schnitt in γ^*E und nicht E ist, während ∇ zu E gehört. Die Interpretation bleibt jedoch gleich, es handelt sich also nur um eine notationelle Nickeligkeit.

Zudem ist auch die Notation \mathcal{P} eher symbolisch, da es keine allgemeinen, expliziten Ausdruck für s gibt. Stattdessen muss jedes Mal die definierende Gleichung $\gamma^*\nabla = 0$ gelöst werden und das wird zumeist bezüglich einer Trivialisierung (also lokal) gemacht. Mit $\tilde{s} = \sum_i \tilde{s}_i \tilde{e}_i$ nimmt die Bedingung dann folgende Form an:

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_i \gamma^*\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(\tilde{s}_i \tilde{e}_i) = \sum_i \gamma^*\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(\tilde{s}_i) \tilde{e}_i + \tilde{s}_i \gamma^*\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \tilde{e}_i \\
 &= \gamma^*\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(s \circ \gamma) = \sum_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}(s_i \circ \gamma) \Big|_t (e_i \circ \gamma)(t) + (s_i \circ \gamma)(t) \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} e_i \circ \gamma \Big|_t \\
 &= \sum_i \frac{\partial s_i \circ \gamma}{\partial t} \Big|_t (e_i \circ \gamma)(t) + (s_i \circ \gamma)(t) \frac{\partial \gamma}{\partial t} \Big|_t \sum_k \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) (e_k \circ \gamma)(t) \\
 &= \sum_k \left(\frac{\partial s_k \circ \gamma}{\partial t} \Big|_t + \sum_i (s_i \circ \gamma)(t) \frac{\partial \gamma}{\partial t} \Big|_t \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \right) (e_k \circ \gamma)(t) \\
 \Leftrightarrow 0 &= \frac{\partial s_k \circ \gamma}{\partial t} \Big|_t + \sum_i (s_i \circ \gamma)(t) \frac{\partial \gamma}{\partial t} \Big|_t \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)). \tag{7.51}
 \end{aligned}$$

Zur Klarstellung: $s \in \Gamma(M; E)$, $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, $\tilde{s} = \gamma^*s \in \Gamma([a, b]; \gamma^*E)$. Per Definition des Pullbacks gilt dann für die Komponentenfunktionen: $\gamma^*s_i = s_i \circ \gamma$.

Das parallel transportierte Objekt zum Startobjekt $\tilde{s}(a)$ erhält man dann durch Einsetzen des Punktes b in \tilde{s} als Lösung von (7.51).

Beispiel 7.37: Paralleltransport für parallelen Schnitt

Für einen parallelen Schnitt $s \in \Gamma(M; E)$ und eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ mit $\gamma(a) = p, \gamma(b) = q$ ist $\mathcal{P}^\nabla(\gamma)(s(p)) = s(q)$ unabhängig von der gewählten Kurve zwischen p, q . Das Besondere an dieser Aussage ist, dass hier $\nabla s = 0$ entlang jeder Kurve γ gilt (daher wird hier auch ein Schnitt in E statt γ^*E abgeleitet).

Lemma 7.38: Paralleltransport als Isometrie

6.30

-; Eckert schreibt dazu auch was, remark 2. nach Definition metrischer Zusammenhang

Bündelmetrik ist doch einfach nur Metrik oder? Halt Tensorfeld, das punktweise Skalarprodukt ist (wir sagen hier faserweise) -; vielleicht nicht genau das Gleiche, aber sehr ähnliche Idee

Von nun an wird hauptsächlich der Paralleltransport bezüglich eines Levi-Civita-Zusammenhangs auf dem Tangentialbündel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit relevant sein. Ganz allgemein lässt sich jedoch zeigen (und definieren):

Satz 7.39

Für ein Vektorbündel $\pi^E : E \rightarrow M$ mit Zusammenhang ∇ ist

$$\begin{aligned} F^\nabla : \mathcal{X}(M) \otimes \mathcal{X}(M) \otimes \Gamma(M; E) &\rightarrow \Gamma(M; E), \\ (X, Y, s) &\mapsto F^\nabla(X, Y)(s) = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s \end{aligned} \tag{7.52}$$

ein Tensorfeld $F^\nabla \in \Gamma(M; T^*M \otimes T^*M \otimes E^* \otimes E)$.

Definition 7.40: (Riemannscher) Krümmungstensor

F^∇ heißt *Krümmungstensor* des Zusammenhangs ∇ . Falls ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist, heißt

$$R := F^\nabla \in \Gamma(M; T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M \otimes TM) \tag{7.53}$$

auch *Riemannscher Krümmungstensor*.

F^∇ misst also inwiefern Bewegungen in verschiedene Richtungen auf M kommunizieren (in gewisser Weise infinitesimal, es handelt sich ja um ein Tensorfeld). Eine Möglichkeit, diesen Effekt ganz explizit mess- und sichtbar zu machen ist, den Paralleltransport eines Vektors entlang verschiedener Wege zu betrachten, wie es Abbildung 7.2 tut.

punktweise $R(X, Y) \in \text{BiLi}(T_p M, T_p M; \mathbb{R})$ (?ganz sage? Idee von Eckert)

Riemann Tensor ist so etwas wie Feldstärke (aus Patil), das hat wohl sogar Einstein zu ART motiviert! Ahhh, siehe auch Eckert dazu (mega nice, er macht das iwie über Cartan Kalkül)

[Wikipedia](#) dazu

-ζ erhalten so Integrabilitätsbedingung für Existenz paralleler Schnitte, nämlich $F^\nabla = 0$ (wie das folgende Lemma zeigt)

ahhh ok, Idee (vielleicht): sagen wir nun, wir haben einen parallelen Schnitt zu $v = \gamma'(0) = \frac{\partial}{\partial t}$ (und kommutierende Vektorfelder); dann untersucht F^∇ , ob das Ding nach Verschieben um ein anderes Vektorfeld immer noch ein paralleler Schnitt ist, richtig? Bzw. das ist der Fall für flache MF, allgemein untersucht das Ding wie groß der Unterschied ist -ζ das sollte Verbindung zwischen Krümmung Paralleltransport sein (ist jetzt nicht explizit in der Formel drin, aber die Idee ist ziemlich analog bzw. die sind eng verbunden von der Art wie man darüber denken sollte)

ok, wie ich es verstehe interessiert uns die explizite Wirkung auf Zusammenhänge gar nicht, eher wie R aussieht”(und insbesondere ob null oder nicht)

der Kommutatorterm ist wieder dazu da, um sicherzustellen dass das alles nicht eigentlich von den Vektorfeldern herkommt, dass die nicht kompatibel sind und daher komische Sachen verursachen (so wissen wir, dass es von ∇ und damit wegen der Eindeutigkeit am Ende von M kommen muss)

Beispiel 7.41: Krümmungstensor und Gauß'sche Basisvektoren

Auswerten der Abbildung $R(X, Y, s)$ in den Vektorfeldern $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}$ ergibt

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, s\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} s - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} s = \left[\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \right] s.$$

Flachheit bedeutet hier also genau, dass das Ergebnis des Verschiebens nicht von der Reihenfolge abhängt. So sollte man sich das Ganze auch im allgemeinen Fall vorstellen, hier stellt der Kommutatorterm aber zusätzlich sicher, dass das Verhalten von F^∇ nicht von der expliziten Wahl der Vektorfelder im Argument abhängt.

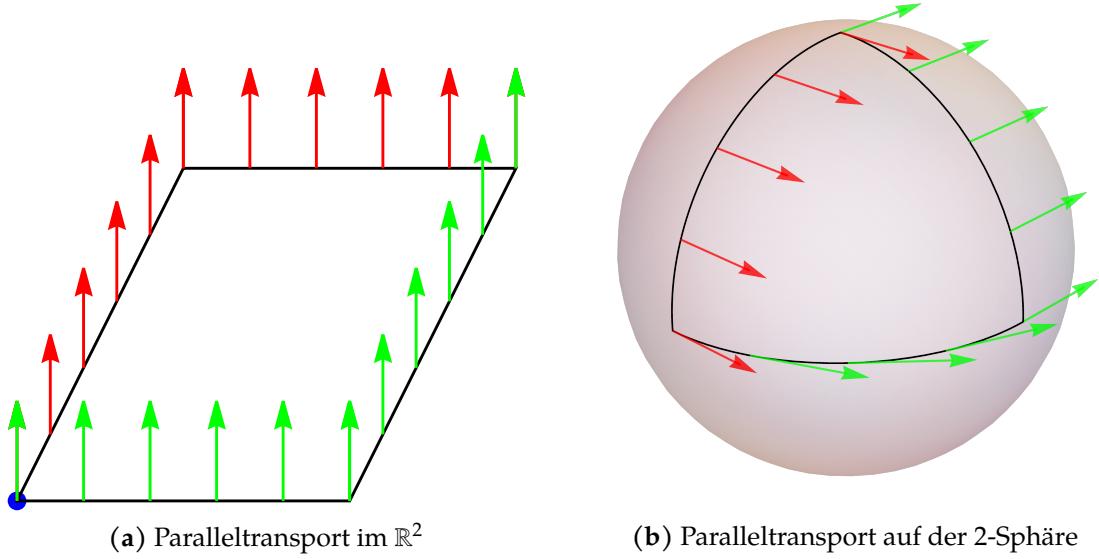


Abbildung 7.2: Im Gegensatz zum flachen \mathbb{R}^n hängt das Ergebnis des Paralleltransports eines Vektors in gekrümmten Räumen wie der Sphäre vom Weg ab. In (a) sind roter, grüner Vektor an Start- und Endpunkt parallel, in (b) nur am Startpunkt.

Rechnungen mit dem Krümmungstensor sind oft sehr kompliziert, es gibt aber immerhin einige Eigenschaften, die dabei sehr nützlich sind:

Satz 7.42: Eigenschaften des Krümmungstensors

Für den Levi-Civita-Zusammenhang ∇ einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) mit Krümmungstensor R gilt $\forall p \in M$ und $X, Y, Z, W \in T_p M$:

1. $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$
2. $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$
3. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
4. $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$

Eine wichtige Frage ist, ob überhaupt Krümmung vorliegt oder ob man die damit einhergehenden Effekte nicht berücksichtigen muss.

Definition 7.43: Flachheit

Ein Zusammenhang ∇ auf einem Vektorbündel $\pi^E : E \rightarrow M$ heißt *flach* falls $F^\nabla = 0$ und eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt *flach* falls $R = 0$.

äquivalente Definition:

Satz 7.44: Flachheit

Ein Zusammenhang ∇ auf einem Vektorbündel $\pi^E : E \rightarrow M$ vom Rang r ist genau dann flach wenn $\forall p$ eine Umgebung $U \subset M$ und r parallele, linear abhängige Schnitte $s_1, \dots, s_r \in \Gamma(U; E)$ existieren.

Flache Riemannsche Mannigfaltigkeiten erlauben oftmals einfachere Definitionen bzw. Ausdrücke. Am Naheliegendsten ist die Suche danach vermutlich für die Metrik selber und tatsächlich lässt sich in diesem Fall zeigen:

Korollar 7.45: Satz von Riemann

Für eine flache Riemannsche Mannigfaltigkeit existiert um jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$ und eine Karte $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$g_U : x^* \langle \cdot, \cdot \rangle = \sum_i dx_i \otimes dx_i \quad \Leftrightarrow \quad g_{ii} = 1, g_{ij} = 0, \forall i, j. \quad (7.54)$$

Das umfasst natürlich insbesondere im \mathbb{R}^n und Teilmengen davon.

Der Begriff der Krümmung ist sehr hilfreich und hilft beispielsweise auch, Antworten auf ganz alltägliche Fragen zu finden - unter Anderem warum es keine maßstabs-/längentreuen Karten von der Erdoberfläche gibt. Diese Themen werden in den nächsten Abschnitten behandelt und dort wird sich auch eine Verbindung zwischen der Krümmung der Mannigfaltigkeit und der intrinsischen, topologischen Struktur zeigen (dies wird sich auch als Antwort auf die Frage nach Karten der Erdoberfläche erweisen, zwischen Räumen mit verschiedenen topologischen Eigenschaften, die sich als eng mit der Krümmung verbunden herausstellen, kann es keine Isometrien geben).

7.2.4 Notes

geile Motivation von kovarianter Ableitung (von Carroll): partielle Ableitung ist nicht tensoriell, aber wir wollen das; man sucht eine Ableitung, die invariant unter Basiswechseln ist und damit diese Eigenschaft der Kovarianz erfüllt (das hier etwas frei geschrieben, sollte aber Idee ungefähr treffen); es stellt sich dann eben heraus, dass man partielle Ableitung mit Korrekturfaktoren (eher: -summanden, bzw. einfach -termen; das sind die connection-coefficients, ein Spezialfall davon sind die Christoffel-Symbole) nehmen kann

7.2.4 NOTES

ist Proposition 6.25 krass? Also ist das nur für Beweis cool (vlt ja, weil Proposition) oder generell?

Ah, glaube man macht den ganzen Shit mit geodätischem Spray etc wegen Theorem 6.27

7.3 Anderer Stuff

hier halt evtl den weirden, sehr mathematischen Shit machen - ζ oder den stark abkürzen und in vorherigen Abschnitt. Spray braucht man nicht, aber Exponentialabbildung und Normalkoordinaten sind cool

Exponentialabbildung lässt sich auch allgemeiner als bei Lie-Gruppen definieren, die bei Lie-Gruppen ergibt sich dann wiederum als Spezialfall (hat Bielawski auch so geschrieben)

7.4 *Satz von Gauß-Bonnet*

Nachdem nun sehr lange die Theorie von Mannigfaltigkeiten erforscht wurde, soll es nun um ein wichtiges Anwendungsgebiet solcher gehen, die (Differential-)Geometrie und dort einer der wichtigsten Sätze gezeigt werden, der Satz von Gauß-Bonnet.

an betrachtet dort eine spezielle Klasse von Mannigfaltigkeiten, die sogenannten Flächen (Dimension 2) und dort insbesondere, kompakte, orientierbare und meist noch zusammenhängende -; werden meist mit Σ bezeichnet

können die disjunkte Vereinigung von Flächen sinnvoll betrachten/ vorstellen (halt zwei Flächen, die irgendwo im Raum liegen und dann als eine Menge betrachtet werden) und um Widersprüche damit auszuschließen, werden hier zusammenhängende genommen

Beispiele für solche Flächen sind die 2-Sphäre, der 2-Torus und dann erhält man immer ähnlich aussehende Flächen mit mehr Löchern (indem man also Henkel an den Torus heranklebt, der im Prinzip genau so aus der 2-Sphäre entsteht)

Löcherzahl g heißt *Geschlecht* und es ist dann eine natürliche Frage, wie viele Flächen gleichen Geschlechts es gibt (eignet sich das eventuell zur einfachen Klassifikation von Mannigfaltigkeiten ?)

Satz 7.46

Je zwei kompakte, orientierte Flächen gleichen Geschlechts g sind diffeomorph.

Man hat also mit dem Geschlecht g eine sogenannte *topologische Invariante* gefunden. Jede solche Fläche ist also aus also äquivalent zu einer Sphäre mit g angeklebten Henkeln ! Mathematisch kann man sich das Ankleben eines Henkels aber vorstellen über das Herausnehmen zweier disjunkter Kreisscheiben und dann Verkleben der so entstehenden Löcher (dabei bleiben Eigenschaften wie die Orientierbarkeit erhalten).

Es bleibt nun jedoch die Frage, wie man das Geschlecht einer abstrakten Mannigfaltigkeit bestimmen kann (wo das Ganze nicht so anschaulich klar ist wie z.B. bei einem Torus). Dabei hilft der folgende Satz enorm:

Satz 7.47: Berechnung des Geschlechts

Für eine kompakte, orientierte Fläche Σ gilt

$$\chi(\Sigma) = 2 - 2g . \quad (7.55)$$

Man muss also „nur“ die Euler-Charakteristik bestimmen (hier wird die De-Rham-Kohomologie auch interessant). Der Beweis ist sehr aufwendig und wird daher hier nicht ausgeführt.

- ζ man nutzt wohl Mayer-Vietoris (erste und zweite De-Rham sind eindimensional)

betrachte nun Endomorphismenfeld $\mathcal{J} \in \Gamma(\Sigma, \text{End}(T\Sigma))$ mit $\mathcal{J}^2 = \text{id}$ (punktweise) als komplexe Struktur

Beispiel: drehe Tangentialvektoren um 90 Grad oder etwas abstrakter mit einer Riemann'schen Metrik g : wenn $\mathcal{J}X = Y$, wobei das Bild Y die Eigenschaften $g(X, Y) = 0, g(X, X) = g(Y, Y)$ sowie X, Y positiv orientiert (das heißt sie stehen senkrecht, haben die gleiche Länge und gleiche Orientierung) hat und dann ist die Wirkung eindeutig

wichtig dazu zu wissen: auf jeder orientierten Fläche existiert eine Riemann'sche Metrik und damit auch eine komplexe Struktur (umgekehrt ist jede Fläche, auf der eine komplexe Struktur existiert, auch orientiert, indem man $X, \mathcal{J}X$ als positiv orientiert fordert)

je zwei komplexe Strukturen mit derselben Orientierung sind homotop

hat man nun ein Tupel (Σ, \mathcal{J}) , so ist das Tangentialbündel $T\Sigma$ ein komplexes Liniensystem, das heißt die Übergangsabbildungen? Trivialisierungen? sind komplexe lineare Abbildungen von \mathbb{C} nach \mathbb{C} ? nicht von Σ nach \mathbb{C} ? bzw. können zumindest so gewählt werden, weil man folgendes setzen kann: $(a + i b)X = aX + b\mathcal{J}X$ (ist sinnvoll, weil eine Multiplikation mit i ja in der komplexen Zahlenebene wie eine Drehung um 90 Grad wirkt und genau das macht ja \mathcal{J}); hmmm ok, das heißt $\mathcal{J}^2 = -\text{id}$, also Spiegelung, richtig?

ein komplexer Zusammenhang auf $T\Sigma$ ist ein komplex linearer Differentialoperator, also eine Abbildung $\nabla : \Gamma(\Sigma, T\Sigma) \rightarrow \Omega^1(\Sigma, T\Sigma)$, der die Leibniz-Regel $\nabla(fX) = df \otimes X + f\nabla X$ und zwar für alle $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$ und auch glatte Funktionen $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ in die komplexen Zahlen (beachte, dass man bei den Multiplikationen hier etwas aufpassen muss, es gilt z.B. $df \otimes X = dg \otimes X + dh \otimes \mathcal{J}X$)

weil $X, \mathcal{J}X$ punktweise linear unabhängig sind (also Basis von $T\Sigma$), existiert für eine offene Menge $U \subset \Sigma$ und $X \in \Gamma(U, T\Sigma)$ (man muss nicht TU schreiben, weil ja $TU = T\Sigma$) genau ein $\eta^X \in \Omega^1(U, \mathbb{C})$ mit $\nabla X = X \otimes \eta^X$

für $Y = fX$ mit einer glatten Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ gilt $\nabla Y = \nabla(fX) = X \otimes df + f\nabla X = (fX) \otimes \frac{df}{f} + f\nabla X = Y \otimes \frac{df}{f} + fX \otimes \eta^X = Y \otimes \left(\frac{df}{f} + \eta^X \right)$ (hier wird tensorielle Eigenschaft genutzt, man kann Funktionen am Tensorprodukt vorbeiziehen, sowie die Definition von η^X eingesetzt) und das heißt $\eta^Y = \eta^X + \frac{df}{f}$ (bemerke: das $\frac{df}{f}$ sieht aus wie die logarithmische Ableitung, also $d \ln(f)$!); insbesondere gilt (lokal auf jeden Fall,

wähle dazu Zweig des Logarithmus $d\eta^Y = d\left(\eta^X + \frac{df}{f}\right) = d\eta^X + d(d\ln(f)) = d\eta^X$ nach den Rechenregeln des Äußenen Differentials (übertragen sich auf die komplexen Zahlen)

das liefert eine Krümmungs-2-Form auf Σ mit Werten in \mathbb{C} , also $F^\nabla \in \Omega^2(\Sigma, \mathbb{C})$, indem man lokal auf einer solchen offenen Menge $U \subset \Sigma$ mit einem Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$ ohne Nullstellen setzt: $F_U^\nabla = d\eta^X$ (das ist wohldefiniert, also unabhängig vom gewählten Vektorfeld, wie ja nachgerechnet wurde); man nennt das eben auch einfache Krümmung von ∇

man braucht dann noch einen weiterführenden Begriff, die Totalkrümmung längs eingebetteter Kurven; betrachte dazu $\gamma : \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \Sigma$ injektiv und immersiert, dann hat man UMF Bild(γ) von Σ ; dann existiert auch eine offene Menge $U \subset \Sigma$ mit Bild(γ) $\subset U$ und es existiert ein Vektorfeld $X \in \mathcal{X}(U)$ ohne Nullstellen und mit $X_{\gamma(t)} = \gamma'(t), \forall t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

?! Idee für Existenz des X auf U statt nur dem Bild: setze das VF iwie fort mittels induzierter Karten, verklebe das mittels Zerlegung der 1 und das ergibt dann glattes Vektorfeld ?! - ζ WTF

für das $\eta^X \in \Omega^1(U, \mathbb{C})$ zu diesem X kann man dann die Totalkrümmung von ∇ entlang γ definieren als $\tau(\nabla, \gamma) = \int_{\mathbb{S}^1} \eta^X = \int_{\mathbb{S}^1} \gamma^* \eta^X$ (ist komplexe Zahl) - ζ können die beiden Gleichzeichen so stimmen ?

die Totalkrümmung ist dabei unabhängig von der Wahl des Vektorfelds X mit diesen gewissen Eigenschaften und man kann das Ganze zudem auf endliche Vereinigungen disjunkter Kurven verallgemeinern

nützlich: bei orientierungserhaltender Umparametrisierung bleibt die Totalkrümmung erhalten, also für einen Diffeomorphismus $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ und $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ gilt $\tau(\nabla, \tilde{\gamma}) = \tau(\nabla, \gamma)$ wenn φ orientationserhaltend ist (sonst steht da ein minus dabei noch, weil eben andere Umlaufrichtung) - ζ wurde das nicht bereits in MfP II gemacht und gezeigt ? - ζ hier geht das wohl darüber, einfach auch das Vektorfeld umzu-parametrisieren und dann Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung zu benutzen

er berechnet dann einmal als Beispiel die Totalkrümmung eines Annulus; cooles Ding: erste De-Rham ist eindimensional, weil man Annulus zu \mathbb{S}^1 zusammenziehen kann, nullte De-Rham ist eindimensional, zweite De-Rham ist nulldimensional - ζ hilft dann wohl, weil dann so die Euler-Charakteristik reinkommt, Totalkrümmung sollte null werden (weil Euler-Charakteristik 0)

Unabhängigkeit von Wahl des Zusammenhangs: die Differenz $\nabla - \tilde{\nabla} = \omega \in \Omega^1(D, \mathbb{C})$ zweier Zusammenhänge auf der Kreisscheibe D ist also tensoriell und daher ist $F^\nabla - F^{\tilde{\nabla}} = d\omega$ und ? das hat nach Stokes keinen Beitrag zur Totalkrümmung (die ist

also unabhängig vom gewählten Zusammenhang) ? - ζ scheint so nicht zu stimmen, es ist wohl $\int_D F^\nabla - \tau(\nabla, \partial D)$ unabhängig von der Wahl des Zusammenhangs

daher kann man einfach mit einem speziellen Zusammenhang rechnen, der über $\nabla(fD + g\mathcal{J}X) = X \otimes df + \mathcal{J}X \otimes dg$ definiert wird; bei geeigneter Parametrisierung existiert dann eine glatte Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die den Drehwinkel beschreibt, für die also $\gamma'(t) = e^{i\varphi(t)} \cdot X$ (nutze dabei iwie die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, $t \mapsto e^{2\pi it}$; analog zur Umlaufzahl erhält man dann $\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t) + 2\pi$, $\forall t$ und damit gilt $\nabla\gamma' = i d\varphi$ (zumindest nach Zurückziehen); daher folgt $\tau(\nabla, \gamma) = \int_{\mathbb{S}^1} i d\varphi = 2\pi i$; wegen $F^\nabla = 0$ (gilt weil $\nabla X = 0$) wird dann $\int_D F^\nabla - \tau(\nabla, \partial D) = -\tau(\nabla, \partial D) = -2\pi i = -2\pi i \chi(0)$

für Hosen H (fülle dazu z.B. mit Kreisscheibe auf einmal, ist dann unabhängig davon, wie man das konkret macht) ist dann $\int_D F^\nabla - \tau(\nabla, \partial D) = 2\pi i = -2\pi i \chi(H)$

Satz 7.48: Gauß-Bonnet

Für eine kompakte, orientierte Fläche Σ mit komplexer Struktur \mathcal{J} und komplexem Zusammenhang ∇ gilt

$$\int_\Sigma F^\nabla = 2\pi i(2g - 2) = -2\pi i \chi(\Sigma). \quad (7.56)$$

Beweis. Beweis jetzt easy, weil ja bekannt ist wie die Flächen vom Geschlecht g aussehen (bzw. wie dazu diffeomorphe Dinger aussehen, aber Euler-Charakteristik ändert sich unter denen ja nicht und daher auch dieses Integral nicht): zerlege den Shit in viele Hosen, von denen kennen wir das Integral und es gibt genau g Löcher, also braucht man $2g$ Hosenstücke und hat damit $2g$ mal den Beitrag $2\pi i$, aber man muss bedenken, dass am Rand nur zwei Kreisschreiben vorliegen, die jeweils einen Beitrag $-2\pi i$ geben; Totalkrümmung der Randkurven fällt wegen unterschiedlicher Orientierungen weg (gehen zweimal lang, in unterschiedliche Richtung dabei) \square

das ist eben unabhängig von der Wahl von \mathcal{J}, ∇ und man kann es nur über eine topologische Größe bestimmen; sick ! liefert nämlich Verbindung zwischen dem, was lokal vorgeht mit Drehung um 90 Grad in Tangentialräumen, lokalen Differentialoperatoren oder so und der globalen Gestalt/ Topologie der Fläche; hilft bei theorema egregium von Gauß, sagt halt im Prinzip sowas wie man kann Erde nicht auf Landkarte kriegen ohne Verzerrung oder Ball nicht einpacken ohne Knicke/ Risse (alleine aus Krümmung kann man sowas sagen, was halt krass ist !)

wird insbesondere interessant für Flächen mit Riemannscher Metrik, weil man dann Levi-Civita-Zusammenhang kriegt, der einen komplexen Zusammenhang auf $T\Sigma$ gibt; dann bestimmt nämlich die lokale Geometrie auf der Fläche (die ja durch die Krümmung beschrieben wird) welchen globalen Typ die Fläche hat und damit die globale Gestalt der kompakten Fläche

Krümmung = geometrisch, aber Euler-Charakteristik = topologisch und kriegen da dann halt Zusammenhang rein; hmm, gilt wohl nur ohne Rand ? Gauß-Krümmung ist dann halt die Abweichung bei infinitesimaler Bewegung auf der MF im Vergleich zur Ebene oder so

Zusammenhang definiert uns halt sinnvollen Differentenquotienten, normal hat man an verschiedenen Punkten verschiedene Basen und kann daher nicht sinnvoll subtrahieren !

sat wos it wis se officiel pard ! everissing from nau on is not prüfungsrelevant
enimoar

aus Antworten:

komplexer Zsmhang ist z.B. Levi-Civita bzgl. Riemannscher Metrik; dann ist $F^\nabla = ik dA$ mit Gauß-Krümmung k ; haben dann Zwei-Form $g(\mathcal{J}, \cdot) = dA$, $dA(X, Y) = g(\mathcal{J}X, Y)$ (bei positiv orientierter ONB X, Y ist $\mathcal{J}X = Y$) -; Gauß-Krümmung ist hier ja nur Funktion !

Totalkrümmung hat was mit κ zu tun, wie schnell ändert sich Tangentialrichtung; er hat das noch expliziter gemacht für auf Bogenlänge parametrisierte Kurven; können geodätische Krümmung berechnen, das ist dann wohl κ ; Totalkrümmung misst dann halt, wie doll die Kurve gekrümmmt ist; wird 2π bei geschlossenen (oder mit minus bei Durchlauf in anderer Richtung) in einer Ebene (flachem Raum); bei gekrümmten Räumen $\int_D k dA \pm \int_{\partial D} \kappa = 2\pi$; Äquator ist Geodäte (lokal kürzeste Verbindung) und hat daher Totalkrümmung 0 und Gauß-Krümmung ist konstant 1, daher ist Flächeninhalt der oberen Halbsphäre gerade 2π

zu Beweis Flächen diffeomorph: haben glatte Funktion von Fläche in reelle Zahlen, das ist quasi Höhenfunktion (deshalb Name h)

-; Verkleben von Wurst gibt Torus

8 Restlicher Stuff

8.1 Aus Fragestunde/ Sonstige Ergänzungen

Zu Grundlagen (Anfang)

zur Notation: \subset bedeutet hier auch immer, dass Gleichheit möglich ! Und oft werden $=$ und \cong vermischt (aber aus verständlichen Gründen, man kann die Sachen dann halt immer als äquivalent behandeln)

Sinn der Vorlesung: lernen, möglichst einfach zu rechnen und gleichzeitig wohldefiniert bleiben; wollen das aber auch irgendwie konkret machen können (statt nur abstrakt auf der MF), um mit vorherigen Erkenntnissen vergleichen zu können

wichtig: Mengen können offen und abgeschlossen sein (sind dann halt zusammenhängend; Namen sind dann auch eher verwirrend, es geht ja nur Menge in Topologie und Komplement in Topologie, beides zusammen ist natürlich denkbar); das ist insbesondere wichtig bei Abbildungen von beispielsweise kompakten (also abgeschlossenen) Mannigfaltigkeiten M , weil dann $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung auf die Menge $f(M)$ ist und man hat dann halt auch M offen (weil gesamter Raum, liegt also per Definition in der Topologie !) und damit $f(M)$ offen (insgesamt dann $f(M)$ kompakt, aber das hier nebensächlich; geht darum, dass man hier Abbildung zwischen offenen Mengen hat, was ja immer wichtig ist)

jede MF ist lokal homöomorph zu euklidischem Raum (aber wie man diese lokalen Dinger zusammenpackt bestimmt ob Diffeomorphie oder so existiert, sonst sind das ja nur Karten !)

bei Existenz eines Diffeo zwischen MF hat man dann topologische Äquivalenz der beiden (ne, das wohl sogar nur bei homöomorph, das heißt also wohl anders)

differenzierbare Struktur ist nicht unbedingt gleichzusetzen mit Atlas, dabei handelt es sich (siehe Seite 3 im Forster zu Riemannsche Flächen, im Reellen sollte das ja analog sein) um eine Äquivalenzklasse von Karten (bezüglich der Äquivalenzrelation, dass der Kartenübergang ein Diffeomorphismus ist) und eine solche Struktur kann durch Angabe eines Atlas definiert/ angegeben werden (jede dfb Struktur enthält nämlich einen maximalen AtlasL; jeder Atlas ist damit ein Repräsentant der Struktur anscheinend)

Funktionen heißen glatt, wenn sie eine glatte Fortsetzung haben (also eine Funktion, die eingeschränkt auf das Definitionsgebiet die gleichen Werte annimmt und von der man weiß, dass sie glatt ist); analog geht das ganze für glatte Abbildungen und Diffeomorphismen

Glaube gute Diskussion: <https://matheplanet.com/default3.html?call=viewtopic.php?topic=161282&ref=https%3A%2F%2Fwww.qwant.com%2F>

dazu, dass erst auf MF der Unterschied von Punkten als Elemente von M und Vektoren als Element von $T_p M$ klar wird, ist noch zu ergänzen, dass das Ganze bei der Betrachtung in Karten/ Trivialisierungen wegen $\dim(M) = \dim(T_p M)$ wieder verschwimmt und nicht mehr wirklich der Fall ist (weil dann Punkte und Vektoren wieder im \mathbb{R}^n dargestellt werden)

man nennt das bei Funktionen wohl auch Pushforward $f_{*p} := d_p f$; gut diskutiert in <https://matheplanet.com/default3.html?call=viewtopic.php?topic=213693&ref=https%3A%2F%2Fwww.qwant.com%2F>; ! lol, mit Verknüpfung der Form $f \circ \phi$ (mit Karte ϕ z.B.) machen wir die ganze Zeit Pullbacks von f (wirkt ja per Verknüpfung auf Funktionen) !

Man kann stetig dfb. Sachen mit glatten beliebig genau glatte approximieren !

Lifehack: zeige dass Abbildung eine Einbettung ist, weil dann eine UMF von der MF vorliegt (glatte wenn Abb. glatt) und bei gleicher Dimension folgt dann Gleichheit mit der MF an sich !

injektive, immersierte (? muss man dann injektiv dazu sagen ?) Abbildung muss Differential ungleich 0 haben (weil darauf bereits die 0 geht, darf dann kein anderer Vektor; entspricht dann Kern zu Kern von linearen Abbildungen oder ?)

allgemeine Definition der dualen Basis ist im Prinzip wie beim Bildmaß oder so über die normale Basis

im Skript wird auch teilweise verwendet: $\hat{\lambda}_j = \lambda_j \circ x^{-1}$, die dann eben von der MF ausgeht und nicht aus dem \mathbb{R}^n ; man kann dann eben analog zu $\frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \lambda_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \cdot \lambda_k$ schreiben als $\frac{\partial \lambda_j}{\partial x_k} = \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_j}$ mit den partiellen Ableitungen auf dem \mathbb{R}^n (man beachte, dass dort auch genau das gleiche steht, weil bei der Definition der Gauß'schen Basis auch die Funktion immer verknüpft wird mit der inversen Karte) ! Gauß'sche Basisfelder entsprechen den Koordinatenkurven; zudem kommutieren sie noch und haben generell tolle Eigenschaften; können das auch umkehren, weil kommutierende Vektorfelder immer zu solchen Koordinatenkurven gehören

zu Punkt vs. Vektor: können bei affiner Ebene gut im Raum rechnen (obwohl kein Fußpunkt iwie da erstmal, weil der ja variiert); der zugehörige Vektor ist aber kein Punkt aus der affinen Ebene, nur wenn Fußpunkt Ursprung wäre, weil der ja nur eine Richtung im Raum vorgibt (also: sind unterschiedlich !!!); Bedeutung Vektorfeld und

Abbildung sind komplett unterschiedlich; gute Unterscheidung beim Differential, betrachten z.B. $D_p X$ allgemein eher als Bilinearform oder so, weil gucken wollen ob Gradientenvektorfeld

Derivation heißt Vektor darüber charakterisieren, welche Richtungsableitung er macht

lol, Verknüpfen durch Karten iwie gleich Verklebung (also da ist dann $y \circ f \circ x^{-1}$ für Abbildung) ??? dude aus Uni-Frankfurt sagt das auf Seite 10

Zu Anwendungen (später)

$v \otimes w$ erzeugt den Tensorproduktraum (aber eben Linearkombis, nicht nur reine; geht, weil Tensorprodukte linear) -ζ wie Zusammenhang von reinen zu gemischten Zuständen

eigene Überlegung: Tensoren (und damit z.B. auch k -Formen) arbeiten nicht mit Punkten $p \in M$, daher operieren sie auf einem Tangentialraum (? -ζ ja, sie bilden von einem festen Tangentialraum ab), aber Tensorfelder (z.B. k -Differentialformen) ordnen beliebigen Punkten (einer gewissen Teilmenge $U \subset M$) Werte zu, daher operieren sie auf dem Tangentialbündel

Differentialformen sind die alternierenden $(k, 0)$ -Tensoren (? evtl Index an andere Stelle ?)

wichtig bei Differentialformen ist die Möglichkeit der Zurückholung/ des Pullbacks (Übertragung auf andere Mannigfaltigkeiten) und man hat eine natürliche Ableitung (ohne dass zusätzliche Struktur nötig; geht bei Vektorfeldern z.B. nicht, sondern nur mit Zusammenhängen oder so), außerdem können wir integrieren !

versuchen längs der Kurve, den Tangentialvektor an jedem Punkt zu kriegen (so kommt da ein Vektorfeld rein; Lösungen existieren lokal), das sind die Integralkurven; hatten ja sonst immer nur einen Tangentialvektor mit Kurvenkeim

erhalten aus Umschreiben der DGL in Koordinaten dann gerade eine normale DGL; die Lösung sieht überall gleich aus, müssen nur Kartenwechsel dazwischen machen (Lösung in Koordinaten ist wohldefiniert auf der MF); finden immer Lösung, die dem Vektorfeld folgt; können uns sogar fragen, was bei kleiner Variation des Startpunkts passiert, dabei erhalten wir eine dfb Abhängigkeit des Endpunkts vom Anfangswert; packt man die Integralkurven zu verschiedenen Anfangswerten zusammen, erhalten wir einen Fluss; Integralkurven sind meist nur auf Intervallen definiert, weil man eben manchmal die Ränder trifft und dort ja nicht mehr weitergehen kann (diese Endzeiten ändern sich in infinitesimaler Nähe auch nur infinitesimal bzw. nicht viel); Flüsse (sind iwie Gruppe, weil verknüpfbar) als Lie-Algebra der Vektorfelder mit Lie-Klammer Kommutator (ergibt sich wohl später); Vektorfelder

ohne Nullstellen sind in den richtigen Koordinatensystemen sehr einfach (die KS findet man aber leider nicht), können Fluss dann sehr einfach ausrechnen und müssen im Prinzip gar keine DGL mehr lösen !

Fluss vorstellen wie Verschiebung eines Punktes entlang einer Kurve in Mathematica (genau das ist es ja eigentlich !!!)

kennen Flüsse, wenn wir wissen wie Punkte bewegt werden und Punkte kriegen wir durch Anwenden auf Funktionen (also wie bei 1-Formen, die man kennt wenn Wirkung auf Vektorfeld bekannt)

zu Orientierung: MF mit Zusatzstruktur, nämlich der Orientierung; wählen dann nur Karten, die die Orientierung erhalten (Determinante des Differentials des Kartenwechsels ist größer als 0); das hilft bei schönerer Integration, weil man dann n -Formen auf natürliche Weise integrieren kann; dann geht nämlich der Betrag in der Trafo-Formel weg, der oft stört (da steht ja gerade \det des Kartenwechsels) ! Haben dann ja eine Normale und die packt man in \det mit rein, wenn man z.B. Flächeninhalt im \mathbb{R}^3 berechnen will (packen dann halt Einheitsnormale rein), so berechnet man "orientierte Flächeninhalte"

er hat wohl Fehler im Skript bei Beweis Stokes auf unberandeten, da muss weiter vol stehen statt ω ; dürfen da unter Integral differenzieren und vertauschen, wenn Schranke vorhanden, aber wir sind auf kompakten Mannigfaltigkeiten (daher passt das); können dann mit Trafo-Formel Unabhängigkeit von t zeigen, aber davor steht Ableitung davon (wird 0); können das bestimmt auch auf berandete übertragen, aber da muss man vorsichtiger sein, weil bei Trafo sich dann wohl was ändert

Träger/ support kann auch auf Vektorbündeln definiert werden - ζ bei kompaktem Träger ist das Tolle nicht die Abgeschlossenheit, sondern die endliche Überdeckung !

Zu De-Rham:

- ζ für geschlossene k -Form, die nicht im Bild liegt, findet man natürlich auch viele andere, die das nicht sind (weil der Shit ja immer unendlich-dimensional sind); nehmen stattdessen ω , die so eine Klasse repräsentieren, man identifiziert ω mit $\omega + d\eta$, damit man Dimension einschränkt; können uns dann topologisch vorstellen (De-Rham-Theorem), beruht auf Betrachtung kompakte k -dim UMF, können dann quasi damit UMF messen (die müssen aber auch klassifiziert werden, müssen daher zu Simplizialkomplex gehen); definieren dann Homologie mit diesen Tetraedern z.B. und diese Simplizes kann man paaren, die De-Rhams sind dann Dualräume modulo Rand; man sieht also, dass das misst wieviele nicht-triviale UMF es in einer MF gibt; Einheitskreis als Kurve in Kreisscheibe ist dann iwie 1-Simplex, Annulus (mit Loch in Mitte) z.B. nicht (weil da ja quasi zwei Ränder oder so); eingebettet Homologieklassen bis auf Rand oder sowsas

- ζ zu Hodge-Theorie: die haben häufig diskretes Spektrum oder so (wichtig in QM); haben dann Dirac-Operator wie $\nabla^2 = (d + d^*)^2$ mit formal dualem Operator $d^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$; Schnitt der Kerne ist endlich-dimensional (gibt nicht so viele), können dann sogar zeigen dass nur einer; das ist einfaches Beispiel einer Eichtheorie, das hier könnte sowas wie Wirkungsfunktional sein, messen Länge mit $\int \omega \wedge * \omega$ und das sind dann Euler-Lagrange; wenn ω nicht-trivial sind auch Kohomologie-Klassen nicht-trivial

- ζ für $k = 1$: für geschlossene Form ω kann man dann geschlossene Kurven $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$ betrachten und den Pullback da aufintegrieren, das gibt $\int_{\mathbb{S}^1} \gamma^* \omega = 0$; Beweis geht recht simpel, Idee ist Periodizität, weil dann da $f(\gamma(0)) - f(\gamma(0))$ steht; bei Rückrichtung ist dann eigentlich nicht wohldefiniert, aber das folgt aus Wegunabhängigkeit (weil die ja alle null sind dann iwie); De-Rham misst, wieviele Kurven es gibt, sodass Integral ungleich 0; De-Rham ist quasi Dualraum zu Klasse homotoper Kurven, müssen aber aufpassen mit Torsionen, müssen daher Äquivalenzrelation leicht ändern noch (zu homologen Kurven); wenn für geschlossene Kurven null, hat man Exaktheit

zu Grad: Hitchin beweist damit Fundamentalsatz der Algebra!!!

Weiterführende Sachen aus Fragestunde

Exkurs zu ART und Zusammenhängen: Unterschied Lie-Ableitung und kovariante Ableitung (die ja allgemein eine Abbildung von Vektorfeldern Y auf 1-Formen ∇Y ist; bzw. mit eingesetztem Vektorfeld $\nabla_X Y$, dann also auch Abbildung auf Vektorfeld): $\mathcal{L}_X Y$ erfüllt nur in Richtung Y (bzw. im Argument Y) die Leibniz-Regel, in Richtung X aber nicht, dort ist es C^∞ -linear; kovariante verhält sich normaler wie Ableitung, Lie-Ableitung wirkt iwie nur auf das eine Vektorfeld so richtig (o.Ä. hat er es gesagt); haben aber auch Verbindung zwischen den beiden, nämlich bei Torsionsfreiheit (da steht ja Kommutator drin, das ist schließlich Lie-Ableitung), Aussage dann: wenn zwei Vektorfelder kommutieren, dann auch die kovarianten Ableitungen!; Ricci-Krümmung misst, wie sich Abstände entwickeln im Vergleich zum euklidischen; Lorentz-Metrik ordnet im Wesentlichen jedem Tangentialraum ein Skalarprodukt zu (es gibt negative Richtungen und 0-Richtungen, die heißen dann ja lichtartig etc. !); wollen Verträglichkeit von Metrik und Ableitung, nämlich $\nabla g = 0$, was Sinn macht weil $g(X, Y)$ ja glatte Funktion ist und die kann abgeleitet werden, man schreibt dann $X \cdot (g(X, Y)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$, was einfach Produktregel entspricht (setze normale Metrik und normale Ableitung ein um das zu sehen); diese Forderungen bestimmen einen eindeutigen Ableitungsoperator ∇ auf dieser Mannigfaltigkeit, den Levi-Civita-Zusammenhang (wir haben das gemacht über Ausschreiben von Christoffel-Symbolen, die sich dann als symmetrisch in den unteren Indizes und als verträglich mit $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$); die Bedeutung der zu

$\nabla g = 0$ analogen Aussage mit der Lie-Ableitung $\mathcal{L}_X g = 0$ bedeutet dann wegen $\frac{d}{dt} \Phi_t^* g = 0$, dass die Metrik invariant bleibt und daher dieser Diffeo eine Isometrie ist !!!; Raum der Isometrien von \mathbb{S}^2 ist $O(3)$ und damit 3-dimensional (das ist dann der Erzeuger dieser Vektorfelder im Index von \mathcal{L}), obwohl Raum der Diffeos unendlich-dimensional (weil jedes Vektorfeld einen Fluss erzeugt); Lie-Ableitungen haben also ganz andere Eigenschaften als "normale" Ableitungen, weil dort noch dieses X im Index steht (daher werden Sachen oft lieber mit kovarianten ausgedrückt und nur bei spezielleren Symmetrien nimmt man oft Lie-Ableitung) !

können dann von $\Omega^k(M)$ mit Zusammenhang nach $T^*M \otimes \Lambda^k T^*M$ gehen (aber das Tensorprodukt ist etwas störend, haben ja dort sonst überall Dachprodukte !) und zu $T^*M \wedge \Lambda^k T^*M = \Omega^{k+1}(M)$ mit Alternierungsoperator, indem man das auf so einen Zusammenhang anwendet (der Zusammenhang ist aber nicht automatisch da, dafür Metrik nötig und es gibt theoretisch auch mehrere torsionsfreie; für d brauchen wir das halt aber nicht, der ist eindeutig und existiert immer !); daher kommt dann $d = \text{Alt}(\nabla)$

Vorteil Schnitt (erklärt mit ART): für $g \in \Gamma(M; T^*M \otimes T^*M)$ (beschreibt mit Zusatzbedingungen dann Lorentz-Metrik z.B.) kann man direkt sagen, dass bei Hereinstecken zweier Vektorfelder eine glatte Funktion herauskommt und auch Unabhängigkeit von der Basis (muss sonst nachgerechnet werden !!!) ist direkt gegeben

Beispiel Tensor ist Riemann-Tensor, der ja durch geeignete Kombinationen von Ableitungsoperatoren entsteht (den Zusammenhängen)

integrable Systeme: Werte bleiben entlang der Integralkurven konstant ("Konstanten der Bewegung"), mathematisch entspricht das Untersuchung von Flüssen; die Gradienten erzeugen (wenn sie keine Nullstellen haben) einen neuen \mathbb{R}^n bzw. oft einen n -dimensionalen Torus; Flüsse kommutieren, daher sind Lösungskurven dann gewisse Gerade in dem Urbildraum oder so

integrable Systeme in Physik sind toll, weil man dort fast globale KS hat (geht nur, weil Zusatzinfo da), wo man Flüsse linear machen kann

Lie-Algebra-wertige 1-Formen sind wohl iwie Beispiele kovariante Ableitungen; hat gewisse andere Eigenschaften als Lie-Ableitung, ist halt andere Form der Ableitung als Lie-Ableitung; die passt sich der Lorentz-Metrik an, ist sehr nützlich zum Verständnis da

Organisatorisches und Empfehlungen

Auf MF aufbauende VL: geometrische partielle DGL (Klasse von DGL auf MF, normalerweise nicht-linear und wohldefiniert folgt dann aus Beschreibung gewisser geometrischer Objekte), gibt wohl VL geometric evolution equations; Riemannsche

Geometrie als dominierender Zweig der Mathematik, unter Anderem auch wegen ART (auch Grundlage für viele weiteren Konstruktionen), aber eigentlich nur noch Grundlagen-VL eigentlich, weil nicht mehr Teil aktueller Forschung; integrable geometrische DGL dann als drittes Feld, haben hier mehr algebraische Struktur (Fluss eher analytisch), dort viel Arbeit mit Ungleichungen, dass die konvergieren und so ein Shit; interessante VL ist wohl evtl Fortsetzung komplexe DiffGeo

8.2 Literatur

8.2.1 Links

<https://matheplanet.com/default3.html?call=article.php?sid=1195&ref=https%3A%2F%2Fwww.qwant.com%2F>

8.2.2 Bücher

toll für uns Physiker sollten Nakahara (DiffGeo und Topologie), Scherer (Symmetrien und Gruppen) und Fecko (DiffGeo and Lie-Groups) sein

Tipp von Heller: Riemann Surfaces von Simon Donaldson

8.2.3 Quellen

Skript Heller (für alles); Bücher und Skript Smoczyk (für Bücher und tlw auch DiffGeo Anteil bei Riemannschen); Skript Carroll ART (für Krümmung und auch Mannigfaltigkeiten); Skript Eckert (Differentialgeometrie für ART); Skript Kriegl (in Teilen genutzt)

Index

- V -wertige 1-Form, 118
 Φ -verwandt, 114
 ϵ - δ -Kriterium, 12
Äquivalenzklasse, 3
Äquivalenzrelation, 3
Äußere
 Ableitung, 132, 198
 Algebra, 191
 Potenz, 186
Äußeres, 8
 Produkt, 186
Übergangstrivialisierung, 97, 102
1-Differentialform, 107

abgeschlossene Menge, 5
Abschluss, 7
alternierend, 146
Alternierende Abbildung, 184
Alternierungsoperator, 185
Anfangswertproblem
 auf dem \mathbb{R}^n , 16
Anfangswertprobleme
 auf einer Mannigfaltigkeit, 159
Atlas, 23
auf Bogenlänge parametrisiert, 248

Bündel der alternierenden k -Formen, 192
Bündelkarte, 94
Bilinearformen, 137

Cartan'sche Differentialformenkalkül, 205
Cartans Formel, 178, 201
Christoffelsymbole, 258

connecting-Homomorphismen d^* , 234

Dachprodukt, 186
 -raum, 186
De-Rham-Kohomologiegruppe, 227
Derivation, 68
diffeomorphe Mannigfaltigkeiten, 40
Diffeomorphismus, 37
 (lokaler), 81
Differentialform, 192
 (exakt), 201
 (geschlossene), 201
Differentialgleichung
 auf dem \mathbb{R}^n , 16
 auf einer Mannigfaltigkeit, 159
differenzierbar, 37
 -e Struktur, 23
disjunkte Vereinigung \sqcup , 88
Distribution, 156
dyadisches Produkt, 144

Einheitsgeschwindigkeit, 248
Element, 2
Euler-Charakteristik, 236
Exponentialabbildung, 126, 263

Faktorisierung, 137
Familie, 3
Faser
 des Kotangentialbündels, 100
 des Tangentialbündels, 87
flach
 -e Mannigfaltigkeit, 269

- er Zusammenhang, 269
- Fluss von X , 163
- Flussform, 208
- Formel von Koszul, 258
- Freien Vektorraum, 139
- fußpunkttreu, 104
- Fundamentalform
 - Erste, 246
- Funktion, 41
 - al, 41
- Funktionenkeim, 75
- Geodäte, 261
- Geodätengleichung, 261
- geometrischer Tangentialvektor an p , 59
- Geschlecht, 273
- glatter Schnitt, 149
- Glattheit, 37
- Gleichheit bis zur ersten Ordnung, 75
- globale Karte, 23
- Graßmann-Algebra, 191
- Grad einer Abbildung, 239
- Graduierung, 191
- Gruppe, 3
- Halbraum, 216
- Hausdorffraum, 6
- Homöomorphismus, 11
- homogene Koordinaten, 33
- Homotopie, 230
- Immersion, 81
- immersiv, 81
- induzierte Karten, 43
- Inneres, 7
- Inneres einer Mannigfaltigkeit, 216
- Integrabilitätsbedingung, 121
- integrable Distribution, 157
- Integral einer Differentialform, 210
- Integralkurve, 16, 159
 - durch p , 159
- Integralmannigfaltigkeit, 156
- Isometrie, 249
- Jacobi-Identität, 117
- Karte, 21
 - (nützliche), 32
 - nübergangsabbildungen, 22
 - ngebiet, 21
 - nwechsel, 22
- Killing-Vektorfeld, 250
- Kodimension, 43
- Kohomologiekasse, 227
- Kommutator, 115, 116
- kompatibel, 22, 24
- Komponente, 2
- konstant, 265
- Kontraktion, 155
- Koordinatengebiet, 21
- Koordinatisierung, 98
- Kotangential
 - raum, 75
 - vektor, 75
 - bündel, 100
- Kovariante Ableitung, 254
- Kozyklus
 - Bedingungen, 98
 - des Kotangentialbündels, 102
 - des Tangentialbündels, 97
- Krümmungstensor, 267
 - (Riemannscher), 267
- Kurvenkeim an p , 59
- Lösung, 16
- Lie-Ableitung, 175
- Lie-Algebra, 83, 84
- Lie-Gruppe, 49
- Lie-Klammer, 84, 117
- lokal diffeomorph, 81
- lokal euklidisch, 21
- Lokale Darstellung
 - einer 1-Form, 110
 - eines Vektorfelds, 108
- Lokale Trivialisierung
 - des Kotangentialbündels, 101

- des Tangentialbündels, 94
- Mächtigkeit, 2
- Mannigfaltigkeit, 28
mit Rand, 216
topologische, glatte, 28
- Matrix-Lie-Gruppe, 50
- Maurer-Cartan-Form, 131
- maximale Integralkurve, 159
- maximale Lösung, 18
- maximalen Atlas, 24
- maximales Definitionsintervall, 18
- Mayer-Vietoris-Sequenz, 234
- Menge, 2
- Mengensystem, 2
- Metrischer Tensor, 246
- nach außen gerichtet, 218
- nach innen gerichtet, 218
- Niveaumenge, 45
- Normalenfeld, 218
- Normalkoordinaten, 264
- Nullmenge, 213
- offen, 11
- offene Menge, 5
- orientierbar, 207
- orientierte Karte, 209
- orientierte Mannigfaltigkeit, 207
- Orientierung, 207
- orientierungserhaltende Abbildung, 209
- Orthogonale Gruppe, 52
- parallel, 265
- parallelisierbar, 93
- Paralleltransport, 266
- Parametrisierung, 24
- Permutation, 183
- Plattmacher, 43
- positiv orientiert, 212
- Potential, 201
- Potenzmenge, 2
- Projektiver Raum, 33
- Pullback
einer 1-Form, 171
einer Funktion, 173
eines Tensors, 174
eines Vektorfelds, 173
- Push-Forward, 114
- Push-Forward eines Vektorfelds, 169
- Rand, 7
-punkt, 7, 216
einer Mannigfaltigkeit, 216
- Randkarten, 216
- Randorientierung, 220
- reguläre Punkte, 45
- regulärer Wert, 45
- rektifizierbar, 245
- Restklasse, 3
- Riemannsche
Mannigfaltigkeit, 246
Metrik, 246
- Schnittwinkel, 250
- Signum, 183
- Spezielle lineare Gruppe, 51
- Spezielle orthogonale Gruppe, 54
- Spur, 155
- Stammfunktion, 121
- Standardorientierung, 212
- sternförmig, 231
- stetig, 11
- Submersion, 81
- submersiv, 81
- symmetrisch, 146
- Symmetrische Abbildung, 184
- Symmetrische Gruppe, 183
- Tangentialbündel von M , 87
- Tangentialraum
einer Mannigfaltigkeit, 59
einer Untermannigfaltigkeit, 56
- Tangentialvektor, 64
- Teilmenge, 2
- Tensor, 140

INDEX

- bündel, 152
- feld, 152
- tensorielle Eigenschaft, 132, 153
- Tensorprodukt, 136
 - raum, 136
 - von Kovektoren, 137
 - von Vektoren, 137
 - von Vektorräumen, 138
- Topologie, 5
- topologische Invariante, 273
- topologischer Raum, 5
- Torsionstensor, 257
- Transposition, 183
- trivial, 92
- Tupel, 2
- Umgebung, 6
 - ssystem, 7
 - offene, 6
 - punktierte, 7
- Untermannigfaltigkeit
 - des \mathbb{R}^n , 43
 - einer Mannigfaltigkeit, 48
- Vektorbündel
 - (duales), 149
- Vektorbündel vom Rang r , 148
- Vektorfeld, 104
- Vektorraum, 3
- Verjüngung, 155
- Verkleben, 35
- vertauschen, 116
- verträglich, 22
- vollständig, 160
- Volumenform, 207
- Zerlegung der 1, 206
- zusammenhängend, 9
- Zusammenhang, 252
 - Levi-Civita-, 258
 - Linearer-, 252
 - metrischer-, 256
 - torsionsfreier-, 256
- Zusammenhangskoeffizienten, 255
- Zusammenhangskomponente, 9
- Zweite Abzählbarkeitsaxiom, 6
- Zweites Abzählbarkeitsaxiom, 6