

Максим Мильшин

Тема работы: решение задачи о кувшинах с водой при помощи SAT-решателя

Проектная работа по курсу "Математическая логика в информатике"

04.06.2022



Факультет математики и компьютерных наук СПбГУ
Программа «Современное программирование»

Постановка задачи

- Есть набор кувшинов с определенными натуральными ёмкостями
- Имеется неограниченный запас воды
- Разрешается наливать воду в кувшины, выливать воду, а также переливать воду из одного кувшина в другой
- Требуется определить, возможно ли отмерить определённый объём жидкости



Решение

1. Ограничим количество состояний каким-то числом m
2. Закодируем в арифметике состояния каждого кувшина на протяжении всех действий: $x_{i,j} \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$
3. Закодированную формулу в арифметике транслируем в булеву пропозициональную формулу
4. С помощью SAT-солвера найдём решение (если оно есть) и восстановим ответ



Кодирование состояний

1. Стартовое состояние кувшинов: $\bigwedge_i (x_{i,1} = 0)$
2. Конечное состояние кувшинов: $\bigvee_i (x_{i,n} = d)$
3. Переходы
 - 3.1 Вылить воду из кувшина: $(x_{i,s+1} = 0) \wedge (\bigwedge_{j \neq i} (x_{j,s} = x_{j,s+1}))$
 - 3.2 Налить воду в кувшин: $(x_{i,s+1} = c_i) \wedge (\bigwedge_{j \neq i} (x_{j,s} = x_{j,s+1}))$
 - 3.3 Перелить воду из одного кувшина в другой: $\bigwedge_{k \neq i,j} (x_{k,s} = x_{k,s+1})$
 - в первом кувшине не осталось воды:
 $(x_{i,s+1} = 0) \wedge (x_{j,s+1} = x_{i,s} + x_{j,s}) \wedge (x_{j,s+1} \leq c_j)$
 - второй кувшин полностью наполнился:
 $(x_{i,s+1} = x_{i,s} - (c_j - x_{j,s})) \wedge (x_{j,s+1} = c_j) \wedge (x_{i,s+1} \geq 0)$



Трансляция в булеву формулу

1. Каждой переменной состояния кувшина отводится набор булевых переменных, хранящих её двоичную запись
2. Кодировем предикаты
 - Равенство переменных: $X = Y$
 - Равенство переменной числовой константе: $X = C$
 - Неравенство переменных: $X \leq Y$
 - Равенство переменной сумме двух других переменных:
 $Z = X + Y$



Трудности и SAT-решатель

- Слишком большая формула в КНФ
- Решение - SAT-решатель Limboole, который уметь отвечать на вопрос разрешимости формулы в любом виде



Функционал приложения

- Поддержка любого числа кувшинов
- Поиск оптимального решения
- Для более быстрого решения
ВОЗМОЖНОСТЬ
САМОСТОЯТЕЛЬНО
задания
максимального
числа шагов
переливаний

```
Usage: main.py [options]
```

```
Options:
```

```
-h, --help            show this help message and exit
-o, --optimal          find optimal solution
-t TRANSFUSION_BOUND, --transfusionBound=TRANSFUSION_BOUND
                        maximum number of transfusions
-b BOTTLE_SIZES, --bottleCapacities=BOTTLE_SIZES
                        comma-separated capacities of each bottle
-d DESIRED_NUMBER, --desiredNumber=DESIRED_NUMBER
                        desired number gallons
```



Примеры использования

```
maxmiln@MacBook-Air-Max DieHardBottleChallenge % python3 main.py -b 4,6 -d 3 -o
Impossible
maxmiln@MacBook-Air-Max DieHardBottleChallenge % python3 main.py -b 3,5 -d 4 -o
[0, 0, 3, 0, 2, 2, 3]
[0, 5, 2, 2, 0, 5, 4]
maxmiln@MacBook-Air-Max DieHardBottleChallenge % python3 main.py -b 3,5,7 -d 4 -t 10 -o
[0, 0, 3]
[0, 0, 0]
[0, 7, 4]
maxmiln@MacBook-Air-Max DieHardBottleChallenge % python3 main.py -b 5,7 -d 3 -o
[0, 5, 0, 5, 3]
[0, 0, 5, 5, 7]
maxmiln@MacBook-Air-Max DieHardBottleChallenge % python3 main.py -b 5,7 -d 3 -t 4 -o
Impossible
maxmiln@MacBook-Air-Max DieHardBottleChallenge % python3 main.py -b 4,5 -d 2
[0, 0, 0, 0, 4, 4, 0, 0, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 0, 4, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 0]
[0, 0, 5, 5, 1, 1, 5, 5, 1, 0, 5, 5, 0, 5, 5, 0, 5, 5, 1, 1, 0, 5, 5, 0, 5, 5, 0, 5, 5, 2, 2]
maxmiln@MacBook-Air-Max DieHardBottleChallenge % python3 main.py -b 4,5 -d 2 -o
[0, 0, 4, 0, 1, 1, 4]
[0, 5, 1, 1, 0, 5, 2]
```



Максим Мильшин

<https://github.com/MaxMilshin/DieHardBottleChallenge>

