R4.D.09 Outils Mathématiques de gestion

# La valeur et le temps

Objectifs pédagogiques :

1. Je suis capable de convertir un taux d’intérêt annuel en taux d’intérêt mensuel, trimestriel, ou semestriel dans le cadre d’intérêts simples ou composés.
2. Dans la situation où un capital « c » placé pendant « n » périodes à un taux d’intérêt « t » obtient une valeur acquise « va » grâce à des intérêts composés, je suis capable de retrouver « c », « n », « t », ou « va » si les autres éléments sont fournis.
3. Dans la situation où, une suite de sommes d’argent constantes « a » versées en fin de période placée pendant « n » périodes à un taux d’intérêt « t » obtient une valeur acquise « va » grâce à des intérêts composés, je suis capable de
   1. Retrouver « a », « n », « t », ou « va » si les autres éléments sont fournis.
   2. Calculer la valeur actuelle de cette suite de somme d’argent.
   3. Calculer le montant de la somme constante qui permet d’obtenir une certaine valeur actuelle en connaissant le taux et le nombre de périodes.

**Prérequis**

* log(a × b) = log(a) + log(b)
* log(an) = nlog(a)
* log(1) = 0 et log(x) > 0 si x > 1.
* Somme d’une suite géométrique q et de premier terme a = (démonstration [ici](https://fr.khanacademy.org/math/fr-v2-premiere-s/x67ebdaa4f3e116cf:algebre-les-suites/x67ebdaa4f3e116cf:somme-des-n-premiers-termes-d-une-suite/v/deriving-formula-for-sum-of-finite-geometric-series" \l ":~:text=cette vidéo Transcription-,La somme des n premiers termes d'une suite géométrique,qⁿ)%2F(1-q).))

Dans ce chapitre nous allons parler de la différence de valeur entre une somme d’argent reçue immédiatement et une somme d’argent reçue à un autre moment : plus tard ou plus tôt.

## Vocabulaire

### La différence entre capitalisation et actualisation

La capitalisation consiste à calculer combien vaudra une somme d’argent plus tard en tenant compte des intérêts. En effet, celui qui place de l’argent souhaite recevoir des intérêts, car il renonce à cet argent le temps du placement.

A l’inverse, l’actualisation consiste à déterminer la valeur aujourd’hui (valeur actuelle) d’une somme d’argent dont la valeur future est connue.

### Intérêt simple et intérêt composé

En finance le mot capital doit être compris comme une somme d’argent empruntée ou placée.

#### Définition des intérêts simples

Les intérêts simples sont des intérêts calculés uniquement sur le montant du capital sans tenir compte des intérêts perçus antérieurement.

Exemple.

Cristiano place 100 € à 2% pendant 2 ans avec des intérêts simples. Les intérêts sont de 2 € chaque année. À la fin des deux années, Cristiano a 104 €.

#### Définition des intérêts composés

Les intérêts composés sont des intérêts calculés sur le montant du capital majoré des intérêts perçus antérieurement.

Exemple

Lionel place 100 € à 2% pendant 2 avec ces intérêts composés. La première année, les intérêts sont de 2 €. Cependant, la deuxième année, on rajoute les intérêts de la première année au capital. Lionel obtient donc 102 x 2% soit 2,04€. À la fin des deux années, Lionel a 104,04 €.

Conclusion, Lionel est plus fort…

### Différence entre taux proportionnel et taux équivalent

Un problème récurrent est de connaitre le taux d’intérêt qui permet d’obtenir les mêmes intérêts si l’on change la fréquence de versement des intérêts. Par exemple, quel est le taux trimestriel qui donne les mêmes intérêts qu’un taux annuel ? Cela dépend si les intérêts sont simples ou composés.

Avec des intérêts simples, on parle de taux proportionnel, avec des intérêts composés on parle de taux équivalent.

Le taux d’intérêt proportionnel au taux t divisé en k sous période =

Exemple :

Le taux mensuel proportionnel à un taux annuel de 2.4% est

Le taux équivalant au taux t pour une période divisée en k sous-périodes est

Exemple

Le taux mensuel équivalant à un taux annuel de 2.4% est de

## Placement d’une somme d’argent

Dans cette partie nous allons partir de la situation où un capital « c » placé pendant « n » périodes à un taux d’intérêt « t » obtient une valeur acquise « va » grâce à des intérêts composés.

### Calcul de la valeur acquise d’une somme d’argent (calculer « va »)

=le capital en début de période, = le capital au bout d’une période, = le capital au bout de deux périodes et = le capital au bout d’un certains nombres de périodes.

Avec des intérêts composés

Grace à la première équation, on sait que , donc dans la deuxième équation, on peut remplacer C1 par ce qui donne

ou

Maintenant dans le calcul de on peut remplacer par ce qui donne

ou

On se rend compte que

Exemple :

Quelqu’un place 10 000 € à 2% pendant 5 ans dans un compte épargne. Si chaque année il laisse les intérêts sur le compte, combien aura-t-il d’argent au bout des 5 ans ?

### Calcul de la valeur actuelle (retrouver « c »)

On veut connaitre la valeur actuelle d’une somme d’argent dont on connait la valeur acquise au bout de « n » périodes, placée à un taux « t ».

Il faut se rappeler que

Si alors =

Valeur actuelle =

Exemple :

Quelle somme faut-il placer pendant 10 ans à 3% pour avoir 150 000 € ?

### Déterminer le temps de placement nécessaire pour atteindre une valeur acquise (retrouver « n »)

Exemple :

Combien de temps faut-il placer 110 000 € à 5% pour obtenir 127338.75 €

= 3

### Déterminer le taux d’intérêt pour atteindre une valeur acquise

ou -1

Exemple

À quel taux faut-il placer 110 000 € pour obtenir 127 000 € en 3 ans

= 4.907%

## Placement d’une suite de somme d’argent constante

Dans cette partie nous allons partir de la situation où à la fin de chaque « n » périodes quelqu’un ajoute une somme d’argent « a » à un placement rémunéré à un taux d’intérêt « t ». « a » est constant, ce qui veut dire que c’est toujours la même somme d’argent qui est ajouté.

### Déterminer la valeur acquise d’une suite de sommes d’argent placée

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Périodes** | **Sommes placées depuis le début de période** | **Somme placées en fin**  **de période** | **Durée de placement de chaque somme** |
| 1 | 0 |  | placée 0 an |
| 2 |  |  | placée 1 an |
| 3 |  |  | placée 2 ans |
| 4 |  |  | placée 3 ans |

On sait calculer la valeur acquise d’une somme d’argent pendant n période

En appliquant cette formule à chaque somme et en partant des dernières on obtient :

+ + +

Comme les sommes sont constantes on peut écrire :

+ + +

Comme =1, et = x, on peut écrire

+ + +

On voit que nous sommes face à une suite géométrique de raison (1+t) et de premier terme a. La somme des n premiers termes se calcule de la façon suivante :

Exemple :

On place 1000 € tous les ans à un taux annuel de 3% pendant 5 ans.

### Déterminer le temps de placement nécessaire pour atteindre une certaine valeur acquise

Pour trouver n, on va de nouveau utiliser la propriété log(x)n = nlog(x)

### Déterminer le taux de placement nécessaire pour atteindre une certaine valeur acquise

Aucune formule simple permet de retrouver t à partir de l’équation

Sur papier, il faut passer par une interpolation linéaire, sur Excel, on peut utiliser l’outil « Valeur cible », sinon il existe des calculatrices financières.

L’interpolation linéaire est une méthode qui permet de trouver une approximation de la valeur d’un point d’une courbe. Ici la courbe est celle dessinée par l’équation Le but est de trouver la valeur tx qui donne une valeur acquise particulière appelé Vx. Par tâtonnement, on va trouver t1 qui donne une valeur acquise V1 inférieur à Vx et t2 qui donne une valeur acquise V2 supérieure à Vx. L’interpolation linéaire se base sur l’hypothèse (fausse) que la courbe qui passe par V1 Vx V2 est une droite. Le résultat est donc une approximation dont la qualité est inversement proportionnelle à l’écart entre V1 et V2.

Exemple :

On peut placer 1000 € tous les ans pendant 10 ans et l’on souhaite obtenir une valeur acquise de 12500 €. À quel taux faut-il placer ces versements ?

On commence par essayer d’encadrer t en tâtonnant.

Avec t=4% on trouve 1

Avec t=5% on trouve 1

On pourrait faire l’interpolation linéaire avec 4 et 5% mais l’interpolation serait imprécise. On va essayer de trouver une valeur basse plus proche de 12500 €

Avec t=4.8% on trouve 1

Donc le tx qui permet d’obtenir une valeur acquise Vx de 12500 € est compris entre 4.8 et 5%.

En utilisant la formule de l’interpolation

tx=4.867%

La vérification montre que tx est bien une approximation car = 12500.09

### Déterminer l’annuité qui permet d’atteindre une certaine valeur acquise

On sait que : donc :

Comme

Exemple :

Quelle somme faut-il verser tous les ans pendant 10 ans pour obtenir 50 000 € si le taux d’intérêt est de 4%

### Déterminer la valeur actuelle d’une suite de sommes d’argent placée

On commence par calculer la valeur acquise des sommes à la fin de la dernière période, puis de calculer la valeur actuelle de cette valeur acquise.

Rappel de la formule de la valeur acquise d’une suite de somme d’argent constantes :

Rappel de la formule de la valeur actuelle d’une somme :

Donc

Exemple :

Quelle est la valeur actuelle d’un versement d’une rente de 10 000 € pendant 12 ans placées à 3%

Calcul de la valeur actuelle de la rente :

### Déterminer la somme d’argent constante à placer pour obtenir une certaine valeur actuelle.

On vient de démontrer que pour une valeur actuelle C0

Donc

Exemple :

Une banque prête 500 000 € sur 20 ans à 2.5% par an. Elle souhaite que l’emprunteur rembourse par annuité constante. Il faut donc que la valeur actuelle des annuités soient égales aux 500 000 € prêtés.

a = 32073.56 €

L’annuité sera de 32073.57 €.

# Remboursement d’emprunt indivis

Objectifs pédagogiques

1. Définir ce qu’est un emprunt indivis
2. À partir des informations « Somme empruntée », « Durée du prêt », et « Taux d’intérêt », être capable de
   1. Construire un tableau d’amortissement d’emprunt à annuité constante ou à amortissement constant ou in fine.
   2. En cas d’annuité constante, calculer le capital du en début de période, l’amortissement, et les intérêts de n’importe quelle période.

Un emprunt indivis est un emprunt réalisé auprès d’un seul prêteur. La plupart des emprunts réalisés par des particuliers auprès de banques sont des emprunts indivis.

## Vocabulaire

La somme empruntée s’appelle « Capital »

Le montant payé chaque période s’appelle le terme. On peut aussi l’appeler en fonction de sa périodicité. On parle d’annuité, de mensualité… Dans ce cours nous allons parler d’annuité, mais le raisonnement est le même pour des mensualités. Attention toutefois à ce que le taux d’intérêt soit exprimé dans la même unité de temps que celle du terme. Taux annuel pour des annuités, taux mensuel pour des mensualités. Il faut utiliser la formule du taux proportionnel (chap I) pour passer du taux annuel au taux mensuel.

L’annuité « A » se décompose en deux parties : l’amortissement « M » qui correspond à la part du capital remboursé, et les intérêts « I » qui correspond à la rémunération du prêteur.

Il existe trois façons de rembourser un prêt :

* Le remboursement à amortissements constants
* Le remboursement à annuités constantes
* Le remboursement in fine

## Généralité sur les emprunts

L’intérêt d’une période =Cp-1 t

L’annuité d’une période

Le Capital emprunté est noté C0

Le Capital du en fin de de période est noté Cp

Comme le capital du en début de période est égal au capital du en fin de période précédente, on l’écrit Cp-1

Le document qui présente toutes les annuités à payer s’appelle un tableau d’amortissement

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Période | Capital du en début de période | Intérêt de la période | Amortissement de la période | Annuité de la période | Capital du en fin de période |
| 1 | C0 | I1=C0 t | M1 | A1=I1+M1 | C1 |
| 2 | C1 | I2=C1 t | M2 | A2=I2+M2 | C2 |
| 3 | C2 | I3=C2 t | M3 | A3=I3+M3 | C3 |
| … |  |  |  |  |  |
| p | Cp-1 | Ip=Cp-1 t | Mp | Ap=Ip+Mp | Cp |
| … |  |  |  |  |  |
| n | Cn-1 | In=Cn-1 t | Mn | An=In+Mn | 0 |

Le cout de l’emprunt se calcule en faisant la somme des intérêts ou avec la différence somme des annuités – capital emprunté.

## Les emprunts à amortissements constants

Dans ce type d’emprunt les amortissements sont tous identiques =

Les intérêts d’une période Ip=Cp-1 t

L’annuité = Ap = Mp+Ip

Pour construire le tableau, on commence par noter le montant des amortissements dans toutes les lignes.

Comme on connait tous les amortissements, on peut calculer tous les capitaux dus en début de période.

On peut enchainer sur le calcul des intérêts puis sur le calcul des annuités.

## Les emprunts à annuités constantes

Dans ce type d’amortissement l’annuité à la même valeur chaque année. Il faut donc que la somme des annuités (amortissements + intérêts) actualisée soit égale au capital emprunté.

On a vu lors du chapitre précédent qu’il fallait que

Du coup on peut retrouver

Exemple :

Si on emprunte 100 000 sur 10 ans au taux de 5 % l’annuité est de

Pour construire le tableau d’amortissement, on inscrit les annuités puis on calcule I1 qui est égal à C0i

On peut alors retrouver M1 qui est égal à A1-I1

Comme on connait M1, on peut calculer C1 et passer à la ligne suivante.

### Retrouver l’amortissement d’une période p

L’amortissement d’une période est égal à la valeur l’annuité actualisé au début de cette période.

« -n+p-1 » correspond au nombre de périodes restantes au début de la période p

Exemple :

Si on emprunte 100 000 sur 10 ans au taux de 5 % l’annuité est de 12950,46 €. L’amortissement à payer lors de la 4ème période est de

### Retrouver le capital restant dû au début d’une période p

Le capital restant dû en début de période p « Cp-1 » est égal à la somme des amortissements restant à payer. On a vu que l’amortissement de p correspond à la valeur actuelle en p de l’annuité

On sait que Mp = Mp+1(1+t)-1

La somme des amortissements restant à payer est une suite géométrique de raison (1+t)-1 et de premier terme Mn soit A(1+t)-1

Exemple :

Si on emprunte 100 000 sur 10 ans au taux de 5 % l’annuité est de 12950,46 €. Combien reste-t-il à payer au début de la septième période. Cela correspond à calculer C6 car le premier capital restant dû s’appelle C0

= 45 921.68

### Retrouver la somme des amortissements payés jusqu’au début d’une période p

Il suffit de faire la différence entre C0 et

Somme des amortissements payés au début de p =

Exemple :

Si on emprunte 100 000 sur 10 ans au taux de 5 % l’annuité est de 12950,46 €. Combien a-t-on payé d’amortissements au début de la septième période ?

### Calculer les intérêts à payer lors d’une période p

Intérêt à payer en p =

Exemple :

Si on emprunte 100 000 sur 10 ans au taux de 5 % l’annuité est de 12950,46 €. Combien faut-il payer d’intérêt au cours de la 5ème période ?

On commence par calculer C4

=65732.55

Puis on calcule

## Les emprunts in fine

Les emprunts in fine sont des emprunts où le seul amortissement a lieu lors de la dernière période.

Les intérêts sont de C0i toutes les périodes.

Les amortissements sont nuls toutes les périodes sauf la dernière où Mn = C0

Les termes sont toujours égaux à M+I

# Rentabilité des investissements

Objectifs pédagogiques

Je suis capable de :

1. Présenter le tableau des flux financiers d’un projet
2. Calculer et interpréter la VAN d’un projet
3. Calculer et interpréter le TRI d’un projet
4. Calculer et interpréter le délai de récupération d’un projet
5. Calculer et interpréter l’indice de profitabilité d’un projet
6. Utiliser ces différents outils et les critères non économiques pour choisir entre différents investissements

## Principes

Mesurer la rentabilité d’un investissement consiste à comparer le capital investi aux flux de trésorerie qu’il va engendrer. Pour que la comparaison soit juste, il faut actualiser les flux de trésorerie à la même date que le capital investi.

Exemple :

Une entreprise achète une machine 6000 € début 2023. Elle estime que grâce à cette machine, elle va pouvoir vendre 2500 € de produits en plus pendant 3 ans. Le capital investi est de 6000 €, les flux de trésorerie sont de 7500 € (3x2500). De façon simpliste, on pourrait dire que le projet est rentable car les flux de trésorerie sont supérieurs aux capital investi. Mais attention il faut actualiser ces flux car les 2500 € reçu fin 2023, fin 2024, et fin 2025 ne correspondent pas à 2500 € en début 2023. Il est nécessaire de connaitre le taux d’actualisation.

## Déterminer le coût du capital

Le taux d’actualisation correspond normalement au coût du capital c’est-à-dire au coût auquel l’entreprise finance l’investissement. Les sources de financement peuvent être multiples : endettement, capitaux propres, subventions… Le coût du capital correspondra à la moyenne pondérée des coûts de chaque source de financement.

Soit :

* tc le coût du capital exprimé en %
* CP les capitaux propres de l’entreprise (Capital + Résultats + Réserves)
* D le montant des emprunts
* td le cout de revient des emprunts
* tcp le coût des capitaux propres exprimé en %

Le cout de revient des emprunts correspond au taux d’intérêt diminué du taux de l’impôt sur les sociétés. En effet les intérêts payés lors de chaque échéance sont des charges qui viennent diminuer le résultat et donc l’impôt à payer. Le taux d’IS actuellement est de 25%

Le coût des capitaux propres correspond au taux de rentabilité que les actionnaires attendent. Le calcul du coût des capitaux propres n’entre pas dans le cadre du programme du BUT Informatique. Dans le cadre des exercices, il sera fourni.

## Calcul de la valeur actuelle nette (VAN)

La VAN est la différence entre le total des flux de trésorerie actualisés et le capital investi.

Si les flux sont identiques lors des différentes périodes, on peut utiliser les formules dans le chapitre 1. Sinon, il faut actualiser les différents flux et les additionner.

Pour qu’un projet soit acceptable, il faut que la VAN soit positive.

Attention la VAN mesure la différence entre les flux et le capital investi. Elle ne permet pas de comparer des projets qui nécessite des capitaux différents. En effet, les investisseurs souhaitent que les flux soient proportionnels au capital investi.

Exemples

Une entreprise hésite entre deux projets présentés ci-dessous. Le coût du capital est de 5%

|  |  |
| --- | --- |
| **Capital investi** | |
| Projet A | 5000 |
| Projet B | 50000 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Flux de trésorerie** | | | |
| Projet | Fin N | Fin N+1 | Fin N+2 |
| A | 1900 | 2100 | 2300 |
| B | 19000 | 21000 | 23000 |

VAN du projet A : 1900\*1.05-1 + 2100\*1.05-2 + 2300\*1.05-3 - 5000 = 1000

VAN du projet B : 19000\*1.05-1 + 21000\*1.05-2 + 23000\*1.05-3 - 50000 = 10000

La VAN du projet B est bien plus intéressante, pourtant la rentabilité est la même puisque le capital investi et les flux ont été multipliés par 10.

## Taux de rentabilité interne

Le taux de rentabilité interne (TRI) est le coût du capital qui permet d’obtenir une VAN égale à 0 (capital investi = flux de trésorerie actualisés).

C’est donc le coût du capital le plus élevé qu’il est possible d’offrir aux investisseur. Au-dessus la VAN est négative.

Pour calculer le tri, soit on passe par une interpolation linéaire, soit on utilise des outils comme valeur cible ou des programmes de résolution d’équation.

Par tâtonnement on cherche un t1 qui donne une VAN1 positive proche de 0 et un t2 qui donne une VAN2 négative proche de 0. Ensuite on applique la formule de l’interpolation linéaire en sachant que Vx =0

Exemple :

Pour le projet 1 de l’exemple précédent, un taux de 20% donne une VAN de 250 €, un taux de 30% donne une VAN de -153 €.

Avec ces données, l’interpolation donne un TRI de 26.203474 % qui correspond à une VAN de -8,06 €

Si en tâtonnant on avait utilisé 25% -> VAN de 40 € et 28% -> VAN de -78.13 € l’interpolation aurait donné un TRI de 26.01583% qui correspond à une VAN de -0.63 €

L’utilisation de la fonction valeur cible d’Excel donne un TRI à 25.99999998326%

Le TRI permet de comparer des projets qui n’ont pas la même valeur. Plus le TRI est élevé, plus le projet est intéressant.

Enfin un projet est rentable si le TRI est > au taux d’actualisation.

## Le délai de récupération

Le délai de récupération est le temps qu’il faut pour que les flux de trésorerie actualisés soient égaux aux capital investi. Si les flux sont constants, on peut utiliser les formules du chapitre 1. Si ce n’est pas le cas, il faut additionner les flux actualisés pour trouver l’année durant laquelle la somme des flux est supérieure au capital investi. Un produit en croix permet d’estimer une date au cours de cette année.

Exemple :

Le tableau ci-dessous présente le cumul des flux de trésorerie actualisés du projet 1 de l’exemple précédent.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Fin N | Fin N+1 | Fin N+2 |
| Flux | 1900.00 | 2100.00 | 2300.00 |
| Flux actualisés avec un taux de 5% | 1809,52 | 2000.00 | 2190,48 |
| Cumul des flux actualisés | 1809.52 | 3809,52 | 6000,00 |

On voit que c’est au cours de N+2 que le cumul des flux dépasse le capital investi de 5000 €

La différence entre le cumul N+1 et le capital investi est de 1190.48 €

Le flux actualisé de N+2 est de 2190.48 €

Il faut donc 365 jour pour un flux de 2190.48 €. Combien de jour pour un flux de 1190.48 ?

365\*1190.48/2190.48 = 198.37 arrondi au supérieur = 199 jours soit le 19 juillet N+2

## L’indice de profitabilité

L’indice de profitabilité est obtenu en faisant le rapport entre le cumul des flux de trésorerie actualisés et le capital investi

Plus l’indice est important, plus le projet est rentable. Un indice inférieur à 1 n’est pas rentable.

## Choix entre plusieurs projets

Les outils comme la VAN et le TRI sont basés sur des estimations de flux de trésorerie qui peuvent s’avérer être fausses. Il est donc nécessaire d’utiliser en plus de ces outils des critères non financiers comme :

* Le niveau de risque (économique, technologique, social, environnemental)
* La flexibilité (variation de la taille, revente, reconversion…)
* La cohérence avec la stratégie suivie par l’entreprise
* Les politiques menés par les concurrents