2 Réordonnancement (X points)

On souhaite étudier différentes permutations et les conséquences sur la factorisation LL^T de la matrice symétrique définie positive et inversible suivante (éléments non nuls : éléments diagonaux + croix) :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	**1**		X			X		
2		**2**			X			X
3	X		**3**		X			
4				**4**		X	X	
5		X	X		**5**			X
6	X			X		**6**	X	
7				X		X	**7**	
8		X			X			**8**

1. Rappelez ce que l'on entend par remplissage (*fill-in*) en Algèbre Linéaire Creuse et pourquoi on essaie de le minimiser (plusieurs réponses attendues)
2. Construire le graphe G associé à cette matrice (on ne représente pas les arêtes associées aux termes diagonaux).
   En dessinant les différents graphes obtenus lorsque l'on factorise la matrice dans l'ordre naturel (ie qu'on élimine les noeuds dans l'ordre naturel), calculer le remplissage (nombre et localisation).
   On indiquera de façon précise dans la matrice **(sur le sujet)** les nouvelles entrées qui apparaissent dans la matrice et l'étape à laquelle elles ont été introduites ($F1$ pour *fill-in* à l'élimination du noeud 1 par exemple).

3. Algorithme du Degré Minimum

   (a) Appliquer l'algorithme du degré minimum en supposant que si deux nœuds ont le même degré, celui de plus petit indice sera préféré. Donner la permutation et calculer le remplissage (nombre et localisation).

   (b) Permuter la matrice en utilisant l'ordonnancement obtenu avec le degré minimum et donner sa structure dans la figure suivante **(sur le sujet)** :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

      i. Vous prendrez soin d'indiquer dans la diagonale la ligne/colonne de la matrice originale (par exemple si le premier noeud à éliminer est le noeud 5, vous placerez 5 comme premier terme diagonal).

      ii. Vous placerez aussi les nouvelles valeurs non nulles (de la même façon que pour la question 2).

4. Algorithme de Cuthill-Mc Kee

   (a) Utiliser le noeud 1 comme noeud de départ pour appliquer l'algorithme de Cuthill-Mc Kee.

      i. Indiquer les ensembles (level sets) ainsi construits.

      ii. En déduire une permutation de la matrice permettant de réordonnancer la matrice sous une forme tridiagonale par blocs (on rappelle que quand on a le choix dans le parcours en largeur entre plusieurs noeuds, on prend celui de degré minimum puis, s'il y a encore le choix, celui de plus petit numéro).

      Voici la matrice permutée (diagonale à compléter) :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	**1**	X	X					
2	X					X		
3	X			X	X			
4			X		X			
5			X	X				
6		X					X	X
7						X		X
8						X	X	

iii. Complétez la diagonale de la matrice permutée **(sur le sujet)** (même principe que pour le minimum degree) ; le 1 déjà placé correspond au choix du noeud 1 comme premier noeud à éliminer.

iv. Indiquez aussi sur la matrice permutée la structure tridiagonale par blocs ainsi obtenue.

v. Calculer le remplissage (nombre) lors de la factorisation LL^T de la matrice permutée et positionnez les valeurs non nulles supplémentaires dans la figure.

(b) Utiliser le noeud 2 comme noeud de départ pour appliquer l'algorithme de Cuthill-Mc Kee.

i. Indiquer les ensembles (level sets) ainsi construits.

ii. En déduire une permutation de la matrice permettant de réordonnancer la matrice sous une forme tridiagonale par blocs.

iii. Permuter la matrice en utilisant l'ordonnancement obtenu et donner sa structure dans la figure suivante **(sur le sujet)** (numérotation des termes diagonaux comme précédemment ; cela devrait commencer par un 2) :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

iv. Indiquer sur la matrice permutée la structure tridiagonale par blocs ainsi obtenue.

v. Calculer le remplissage lors de la factorisation LL^T de la matrice permutée.

(c) Expliquer pourquoi on pouvait s'attendre à ce que l'utilisation du noeud de départ 2 conduise à une permutation de meilleure qualité. Indiquez par rapport à quelle métrique vous mesurez la qualité.

(d) À votre avis, existe-t-il d'autres permutations permettant d'éviter tout remplissage et si oui, donnez-en une ?

Rendre le sujet