# 1 Problème du naufragé (10 pts | 2 pages max)

Perdu en mer. On reprend le même exemple que celui du naufragé vu en cours, avec un background Gaussien, donné par l'estimation a priori $x_b = (u_b, v_b)$, et la matrice de variance-covariance d'erreur $B = \sigma_b^2 I_2$, $I_2$ étant la matrice identité d'ordre 2. On suppose données deux variables aléatoires Gaussiennes $\epsilon_1$ et $\epsilon_2$, de moyenne nulle, d'écart type $\sigma_o$, indépendantes entre elles, et indépendantes de l'erreur de background. On pose $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2]$.

1. On suppose que l'on observe *directement* en même temps que le background, la somme et la différence des positions $u$ et $v$ et que les erreurs de mesures associées sont respectivement $\epsilon_1$ et $\epsilon_2$. On obtient ainsi 2 mesures notées $y_1$ et $y_2$.

   (a) Montrer que les hypothèses ci-dessous mènent à l'équation d'observation
   $$\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{pmatrix} = H\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} + \epsilon$$
   où le vecteur aléatoire $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2]$ suit une distribution Gaussienne de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance $\sigma_o^2 I_2$.

   (b) Donner alors une estimation de $(u, v)$ en prenant en compte l'a priori et l'équation d'observation.

$x_b = (u_b, v_b)$

$B = \sigma_b^2 I_2$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_o) \qquad \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

2 mesures $y_1, y_2$

1. a)

$y_1 = u + v + \varepsilon_1 \qquad \varepsilon_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_o^2)$

$y_2 = u - v + \varepsilon_2 \qquad \varepsilon_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_o^2)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}}_{\mathcal{H}}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}}_{\varepsilon} \qquad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_o^2 I_2)$$

primal

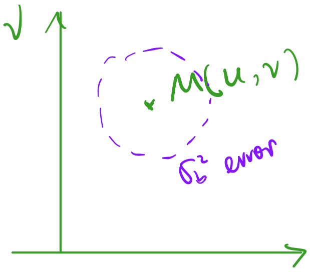
b) $u = u_b + (B^{-1} + A^T R^{-1} A)^{-1} A^T R^{-1} (\tilde{u} - u_b)$

$v = v_b + \quad \text{''} \quad (\tilde{v} - v_b)$

où $B = \sigma_b^2 I_2$

$A = \mathcal{H} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

$R = \sigma_o^2$




$$\left(\begin{pmatrix}u_b\\ v_b\end{pmatrix}, \sigma_b^2 I_2\right) \qquad \begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} ?$$

a) $\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u+v\\ u-v\end{pmatrix} + \varepsilon \qquad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_o^2 I_2)$

$\varepsilon = \begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix} \quad \mathbb{E}[\varepsilon] = \begin{pmatrix}\mathbb{E}[\varepsilon_1]\\ \mathbb{E}[\varepsilon_2]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

si $x$ centré $\mathbb{E}[x^2] = \mathrm{Var}(x)$

$= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} + \varepsilon$

$\mathbb{E}[\varepsilon\varepsilon^T] = \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{pmatrix}(\varepsilon_1 \ \varepsilon_2)\right] = \begin{pmatrix}\mathbb{E}[\varepsilon_1^2] & \mathbb{E}[\varepsilon_1\varepsilon_2]\\ \mathbb{E}[\varepsilon_2\varepsilon_1] & \mathbb{E}[\varepsilon_2^2]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_o^2 & 0\\ 0 & \sigma_o^2\end{pmatrix}$

R : mat de var-cov d'err

$x_b = \begin{pmatrix}u_b\\ v_b\end{pmatrix}$

$B = \sigma_b^2 I_2$

$R = \sigma_o^2 I_2$

$\mathcal{H} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}\hat{u}\\ \hat{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_b\\ v_b\end{pmatrix} + (B^{-1} + \mathcal{H}^T R^{-1} \mathcal{H})^{-1} \mathcal{H}^T R^{-1} \begin{pmatrix}y_1 - (u_b + v_b)\\ y_2 - (u_b - v_b)\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}u_b\\ v_b\end{pmatrix} + \underbrace{\left(\sigma_b^{-2} I_2 + \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\sigma_o^{-2} I_2 \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)^{-1}} \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\sigma_o^{-2} I_2 \begin{pmatrix}y_1 - (u_b + v_b)\\ y_2 - (u_b - v_b)\end{pmatrix}$$

$$= \left(\sigma_b^{-2} I_2 + \sigma_o^{-2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_b^2} + \frac{2}{\sigma_o^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sigma_b^2} + \frac{2}{\sigma_o^2}\end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}u_b\\ v_b\end{pmatrix} + \frac{\sigma_o^{-2}}{\underbrace{\frac{2}{\sigma_o^2} + \frac{1}{\sigma_b^2}}} \begin{pmatrix}y_1 + y_2 - 2u_b\\ y_1 - y_2 - 2v_b\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2 + \frac{\sigma_o^2}{\sigma_b^2}}$$

$$= \begin{pmatrix}u_b\\ v_b\end{pmatrix} + \frac{2\sigma_b^2}{2\sigma_b^2 + \sigma_o^2}\begin{pmatrix}\frac{y_1 + y_2}{2} - u_b\\ \frac{y_1 - y_2}{2} - v_b\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sigma_o^2}{\sigma_?^2 \ \sigma_?^2}\begin{pmatrix}u_b\\ v_b\end{pmatrix} + \frac{2\sigma_b^2}{\sigma_?^2 \ \sigma_?^2}\begin{pmatrix}\frac{y_1 + y_2}{2}\\ \frac{y_1 - y_2}{?}\end{pmatrix}$$

$2\sigma_b+\sigma_0$ ) $\sigma_b$ ) $2\sigma_b^2+\sigma_0^2$ ( $\frac{\quad}{2}$ )

2. Soit $\delta > 0$. On suppose que, comme précédemment, l'on observe somme et différence des positions $u$ et $v$ mais que les erreurs de mesures associées sont respectivement $\eta_1 = \epsilon_1$ et $\eta_2 = \epsilon_1 + \delta \cdot \epsilon_2$.
   (a) Montrer que l'équation d'observation prend alors la forme
   $$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \Gamma \cdot \epsilon,$$
   où $\Gamma$ est une matrice que vous préciserez.
   (b) Identifier par rapport au cours, la matrice d'observation $H$ et le vecteur des observations $y$, et **la matrice** $R$.
   (c) Donner alors une estimation de $(u, v)$ en prenant en compte l'a priori et l'équation d'observation en fonction de $\delta$.
   (d) On prend $\sigma_o = \sigma_b = 1$ pour simplifier. Etudier la limite de l'estimation de la matrice de covariance associée obtenue à la question (2c) lorsque $\delta$ tend vers 0 (que vaut en particulier le rang de cette matrice à cette limite ?). Donner une interprétation de ce résultat.

2. a)

$$y_1 = u + v + \varepsilon_1$$
$$y_2 = u - v + \varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{H} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \delta \end{pmatrix}}_{\Gamma} \varepsilon$$

b) $R = \mathbb{E}[\eta \eta^T] = \mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} (\eta_1\ \eta_2)\right] = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[\eta_1^2] & \mathbb{E}[\eta_1\eta_2] \\ \mathbb{E}[\eta_2\eta_1] & \mathbb{E}[\eta_2^2] \end{pmatrix}$

$\mathbb{E}[\eta_1^2] = \mathrm{Var}(\eta_1) = \sigma_0^2$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_0^2 \\ \sigma_0^2 & (1+\delta)\sigma_0^2 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{E}[\eta_1\eta_2] = \mathbb{E}[\varepsilon_1(\varepsilon_1+\delta\varepsilon_2)]$
$= \mathbb{E}[\varepsilon_1^2 + \delta\varepsilon_1\varepsilon_2]$
$= \sigma_0^2 + \cancel{\delta\mathbb{E}[\varepsilon_1\varepsilon_2]}$

$\mathbb{E}[\eta_2^2] = \mathbb{E}[(\varepsilon_1+\delta\varepsilon_2)(\varepsilon_1+\delta\varepsilon_2)]$
$= \mathbb{E}[\varepsilon_1^2 + 2\delta\varepsilon_1\varepsilon_2 + \delta^2\varepsilon_2^2]$
$= \sigma_0^2 + \delta^2\sigma_0^2$

$x_b = \begin{pmatrix} u_b \\ v_b \end{pmatrix}$

$y = Hx + \varepsilon$

$B = \sigma_b^2 I_2$

$\hat{m}$ bruit

$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\delta \end{pmatrix} \sigma_0^2$

$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$(B^{-1} + H^TR^{-1}H)^{-1}H^TR^{-1} = BH^T(R+HBH^T)^{-1}$

erreur

c) $\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_b \\ v_b \end{pmatrix} + \sigma_b^2 I_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\left( \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\delta^2 \end{pmatrix}\sigma_0^2 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\sigma_b^2 I_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)^{-1}} \begin{pmatrix} y_1 - (u_b+v_b) \\ y_2 - (u_b-v_b) \end{pmatrix}$

mesure (théorique)

$$= \begin{pmatrix} \sigma_0^2 + 2\sigma_b^2 & \sigma_0^2 \\ \sigma_0^2 & (1+\delta^2)\sigma_0^2 + 2\sigma_b^2 \end{pmatrix}^{-1}$$

mesure (numérique)

$\sigma_0 = \sigma_b = 1$

$$= \begin{pmatrix} u_b \\ v_b \end{pmatrix} + \sigma_b^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3+\delta^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 - u_b - v_b \\ y_2 - u_b + v_b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_b \\ v_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{8+\delta^2} \begin{pmatrix} 3+\delta^2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - u_b - v_b \\ y_2 - u_b + v_b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-cb} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_b \\ v_b \end{pmatrix} + \frac{1}{8+\delta^2} \begin{pmatrix} 2+\delta^2 & 2 \\ 4+\delta^2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - u_b - v_b \\ y_2 - u_b + v_b \end{pmatrix}$$

## 2 Filtrage de Kalman (variantes) (10 pts | 2 pages max)

On s'intéresse au problème

CI
$$x_0 = x_b + \epsilon_{-1}, \qquad e_{-1} \sim \mathcal{N}(0, B)$$
Obs à $x_0$
$$y_0 = Hx_0 + b + e_2, \quad e_2 \sim \mathcal{N}(0, R)$$
propagat° temporelle
$$x_1 = x_0 + dt \cdot Gu + dt \cdot e_3, \qquad e_3 \sim \mathcal{N}(0, Q)$$
$$x_2 = x_1 + dt \cdot Gu + dt \cdot e_4, \qquad e_4 \sim \mathcal{N}(0, Q)$$

où les vecteurs $x_b$, $b$ et $u$, ainsi que les matrices $B, Q, R, G$ sont déterministes connus à l'avance, et les erreurs $(e_i)$ sont mutuellement indépendantes.

a. Proposer une situation précise, où l'on pourrait être amené à rencontrer ces 4 équations. Préciser le rôle joué par $u$ dans ce cas pratique.

b. Expliquer la différence entre ce problème de filtrage et celui vu en cours. Rappeler la différence entre le problème de filtrage et celui du lissage *sur cet exemple.*

c. Écrire l'algorithme de Kalman (propagation, assimilation) permettant de résoudre ce problème d'estimation.

d. Justifier mathématiquement les formules du c.. Dans le but de ne pas allonger inutilement votre exposé, vous indiquerez ce qu'il vaut changer au développmement du cours et n'expliciterez que les nouveaux résultats à établir (1 page max).

a)

$$\frac{x_1 - x_0}{dt} = Gu + e_3 \quad \text{vitesse}$$

$x(t_0)$

1 mobile roule à vitesse cste ayant cdt initiale

rôle de $u$ : paramètre de la vitesse

b) moy d'err non nulle (il y a $b$)

filtrage — lissage

filtrage : (temporelle) à $t_k$, estimat° de $x_k$ à partir des obs passé

lissage : estimat° de la totalité de de $x_1 - x_k$ à partir de obs $y_1 - y_k$

c) déf de densité — filtre de Kalman calcule ça — estimat° du MAP

filtrage :

à $t_0$ : $p(x_0 \mid y_0)$

à $t_1$ : $p(x_1 \mid y_0\, y_1)$

à $t_2$ : $p(x_2 \mid y_0\, y_1 y_2)$

lissage :

$p(x_0 \mid y_0)$

$p(x_0 x_1 \mid y_0\, y_1)$

$p(x_0 x_1 x_2 \mid y_0\, y_1 y_2)$

$n = 1$

$m = 2$

$\Rightarrow$ dual

ici $n = 1 < m = 2$ donc on utilise dual

$x_{0|-1} = x_b$

$P_{0|-1} = B$

$$\begin{cases} x_{0|0} = x_{0|-1} + P_{0|-1} H^T (R + H P_{0|-1} H^T)^{-1} (y - b - H x_{0|-1}) \\ P_{0|0} = (P_{0|-1}^{-1} + H^T R^{-1} H) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1|0} = x_{0|0} + dt\, Gu \\ P_{1|0} = dt^2 Q + I\, P_{0|0}\, I \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{2|0} = x_{1|0} + dt\, Gu \\ P_{2|0} = dt^2 Q + I\, P_{1|0}\, I \ldots \end{cases}$$

$x_{0|-1} = x_b$

$P_{0|-1} = B$

$$\begin{cases} x_{0|0} = \\ P_{0|0} = (P_{0|-1}^{-1} + H_0^T R_{0|-1}^{-1} H_0)^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1|0} = x_{0|0} + dt \cdot Gu \\ P_{1|0} = Q + \underbrace{M_0}_{=I} P_{0|0} M_0^T \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{2|0} = x_{1|0} + dt \cdot Gu \\ P_{2|0} = Q + I P_{1|0} I \end{cases}$$

fitrage : à $t_k$ $(x_k \mid y_0 \cdots y_k)$ estimat° de $x_k$ à $t_k$ à partir des obs passées

Lissage : $(x_0 \cdots x_k \mid y_0 \cdots y_k)$

estimat° de la totalité de $x_0, \cdots, x_k$ ...