INSA Toulouse

GMM 4ème année, Signal 2, CC, Jeudi 21 Avril 2022
durée 2h. Aucun document autorisé.

On rappelle ici la définition d'une famille multirésolution :

Définition 1. *Une suite $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de sous espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ est une approximation multi-résolution si elle vérifie les 6 propriétés suivantes :*

$$\forall (j,k)\in\mathbb{Z}^2,\quad f(t)\in V_j \Leftrightarrow f(t-2^jk)\in V_j \tag{1}$$

$$\forall j\in\mathbb{Z},\quad V_{j+1}\subset V_j \tag{2}$$

$$\forall j\in\mathbb{Z},\quad f(t)\in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right)\in V_{j+1} \tag{3}$$

$$\lim_{j\to+\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\} \tag{4}$$

$$\lim_{j\to-\infty} V_j = Adhérence\left(\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j\right) = L^2(\mathbb{R}) \tag{5}$$

Il existe ϕ tel que $\{\phi(t-n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de V_0 (Pour le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R})$).

On notera comme dans le cours pour tout couple $(j,k)\in\mathbb{Z}^2$

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}\phi(2^{-j}x-k).$$

On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction f st définie par $\hat{f}(\omega) := \int_{t\in\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t}dt$, que la transformée de Fourier d'une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est définie par $\hat{h}(\omega) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{-in\omega}$.

On rappelle également que la suite $(h_n)_{n\mathbb{B}\mathbb{Z}}$ associée à une fonction d'échelle ϕ issue d'une famille multirésolution est définie par $h_n := \langle \phi, \phi_{-1,n}\rangle$ et appartient à l'ensemble des suites réelles de carrés sommable ($\sum_{n\in\mathbb{N}} |h_n|^2 < +\infty$), que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ associée à $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est définie par $g_n = (-1)^{1-n}h_{1-n}$ et que l'ondelette ψ associée à ϕ est définie par

$$\psi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n\phi_{-1,n}. \tag{6}$$

On notera $Supp(f)$ le support d'une f, c'est-à-dire le plus grand intervalle I fermé tel que pour tout $x\notin I$, $f(x)=0$. A titre d'exemple, le support de l'a fonction d'échelle ϕ de Haar est $[0,1]$.

Exercice 1

Dans ce premier exercice on considère une fonction d'échelle Φ associée à une famille multi-résolution et à une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant les deux premières hypothèses du Théorème de Mallat Meyer.

Calculs préliminaires

1. Donner la valeur de $\hat{h}(0)$ et exprimer $|\hat{h}(\omega+\pi)|^2$ en fonction de $\hat{h}(\omega)$.
2. Justifier le fait que $\phi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n\phi_{-1,n}$ puis que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\phi_{0,k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_{n-2k}\phi_{-1,n}$.
3. Justifier que pour tout $l\in\mathbb{Z}$
$$\sum_n |h_nh_{n-l}| \leqslant \|h\|_2^2 := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |h_n|^2.$$
4. Justifier que pour tout $k\in\mathbb{Z}^*$
$$\sum_n h_nh_{n-2k} = 0$$
5. Montrer que pour tout $\omega\in\mathbb{R}$
$$\hat{\psi}(2\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{g}(\omega)\hat{\phi}(\omega). \tag{7}$$
6. Donner une expression de $\hat{g}(\omega)$ en fonction de celle de $\hat{h}(\omega)$ et précisez la valeur de $\hat{g}(0)$.

7. En déduire la valeur du moment d'ordre 0 de ψ c'est-à-dire la valeur de $\int_{t\in\mathbb{R}} \psi(t)dt$.

Une ondelette avec 2 moments nuls

Dans les questions suivantes on fait l'hypothèse que l'ondelette ψ a un moment d'ordre 1 et que cette ondelette est associée à une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ admettant un nombre fini K de termes non nuls ceux dont les indices k sont entre 0 et $K-1$. On va également supposer que la fonction d'échelle est à support compact et quitte à translater ϕ on peut supposer que son support est de la forme $[0,A]$.

8. Déterminer le support de $\phi_{-1,0}$ puis de $\phi_{j,k}$ pour $(j,k)\in\mathbb{Z}^2$. Dans la suite on notera $I_{j,k}$ ce support.
9. En déduire le support de $\sum_{k=0}^{K-1} h_k\phi_{-1,k}$ et la valeur de A.
10. En utilisant $\boxed{6}$, expliciter le support de ψ.
11. Justifier que si f coïncide avec une fonction affine sur $I_{j,k}$ alors $\langle f,\psi_{j,k}\rangle = 0$.
12. Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$ et pour toute échelle $j\in\mathbb{Z}$ il existe au plus K valeurs de k tels que $t\in I_{j,k}$.
13. Soit $L\in\mathbb{N}$, $(a_j)_{j\in[\![0,L-1]\!]}\in\mathbb{R}^L$ des réels ordonnés sur $\mathbb{R}$ et $f\in L^2(\mathbb{R})$ telle que f est affine sur les intervalles $]a_j,a_{j+1}]$. La fonction f est ainsi affine par morceaux. Justifier qu'à une échelle $j\in\mathbb{Z}$ il existe au plus $L\times K$ coefficients d'ondelettes $\langle f,\psi_{j,k}\rangle$ qui sont non nuls.
   On peut remarquer que pour j tendant vers $-\infty$ la proportion de coefficients d'ondelettes de f non nuls parmi les k tels que $I_{j,k}$ intersecte le support de f tend vers 0. Cette proportion est d'autant plus faible que K est petit.
   On admet désormais que les fonctions $\hat{\phi}$ et $\hat{\psi}$ sont C^1 sur $\mathbb{R}$.
14. Justifier que $(\hat{\psi})'(0)=0$ et en déduire la valeur de $(\hat{h})'(\pi)$.
15. Si on note $P(z)=\sum_{n=0}^{K-1} h_n z^n$, donnez la valeur de $P(1)$ et de $P(-1)$. On reliera ces valeurs à celles de $\hat{h}$ en des points bien choisis.
16. Montrer que le fait que ψ ait deux moments nuls implique que $P'(-1)=0$.
17. En déduire que si la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'a pour éléments non nuls que h_0, h_1, h_2 et h_3 alors P est un polynôme de la forme $P(z)=a(z+1)^2(z-b)$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ sont reliés par la relation $4a(1-b)=\sqrt{2}$.
18. Après avoir exprimé les termes h_n en fonction de a et b et en utilisant la question 4, déterminer une équation polynomiale de degré 2 dont b est la solution.
19. Donner une valeur possible des coefficients h_n associé à un choix de racine de ce polynôme.
   Les deux racines de l'équation précédentes mènent à des choix de a et b qui induisent deux suites h_n symétriques l'une de l'autre (le terme h_0 de l'une est le terme h_3 de l'autre). L'une est l'ondelette de Daubechies 2 et l'autre est la symétrique de l'ondelette de Daubechies 2.

Exercice 2.
Soit (V_j) une famille multirésolution et W_j les espaces définis comme dans le cours comme des supplémentaires orthogonaux de V_j dans V_{j-1}. Parmi les assertions suivantes, précisez celles qui sont fausses, vraies pour toutes les familles multirésolution ou vraies uniquement pour la multirésolution associée à la base de Haar. Il n'est pas utile de justifier les réponses.

pour Haar at least →

1. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n g_n = 0.$ $\quad \sum = \frac{\sqrt{2}}{2}\times -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. Pour tout $j\in\mathbb{Z}$
$$W_j \subset W_{j-1}. \tag{8}$$
FAUX. $W_j \subset V_j$'

3. Pour tout couple $(j,k)\in\mathbb{Z}^2$
$$\psi_{j,k} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{j-1,2k} + \frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{j-1,2k+1}. \tag{9}$$
Haar

4. L'espace V_0 est l'espace des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ constantes sur les intervalles de la forme $[k,k+1[$ où $k\in\mathbb{Z}$. pour Haar.
5. En dimension 2 comme en dimension 1, l'espace W_j est engendré par des translatées et dilatées d'une ondelette 2D $\psi(x,y)$.
6. En dimension 2 la fonction d'échelle de Daubechies 2 s'écrit $\phi(x,y)=\phi(x)\phi(y)$ où ϕ est la fonction d'échelle de Daubechies 2 définie en 1D sur $\mathbb{R}$.