Correction du TD d'Analyse Hilbertienne.

Modia : 2022-2023

Enseignants : Sadok Jerad, Mouhamad Jradeh.

CORRECTION

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$

1 . Soit $A \subset B$. Montrons que $B^{\perp} \subset A$, soit $x \in B^{\perp}$.
Alors $\langle x, a \rangle = 0$, $\forall\, a \in A \subset B$. Et donc $x \in A^{\perp}$.

2.

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^{\perp} &\iff \langle x, a \rangle = 0 \ \forall a \in A \text{ et } \langle x, b \rangle = 0\, \forall b \in B, \\ &\iff x \in A^{\perp} \cap B^{\perp}, \end{aligned}$$

3. Soit $a \in A$. Alors $\forall\, b \in A^{\perp}$, $\langle a, b \rangle = 0 \to a \in A^{\perp\perp}$.
Contre-exemple : $A = \{-1, 1\}$. On a $A^{\perp} = \{0\}$ et $A^{\perp\perp} = \mathbb{R}$.

4. Soit A un sous espace vectoriel de E.

$$x \in A \cap A^{\perp} \to \langle x, x \rangle = 0 \to x = 0.$$

Donc $A \cap A^{\perp} \subset 0$, et comme A sous espace vectoriel, $0 \subset A \cap A^{\perp}$, CQFD.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$

1. Soit $A = \{(x, y, z); x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.
Montrons que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $P_A((x, y, z)) = (\max(x, 0), \max(y, 0), \max(z, 0))$.
Soit $a = (a_1, a_2, a_3) \in A$ et $t = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}\langle t - P_A(t), a - P_A(t)\rangle &= (x - \max(x, 0))(a_1 - \max(x, 0)),\\ &+ (y - \max(y, 0))(a_2 - \max(y, 0)),\\ &+ (z - \max(z, 0))(a_3 - \max(z, 0)), \leq 0.\end{aligned}$$

En effet, si $x \geq 0$, alors $x - \max(x, 0) = 0$. et si $x < 0$, alors $xa_1 < 0$. De même pour y, a_2 et z, a_3. Par caractérisation de la projection, on a le résultat souhaité.
Soit $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Montrons que

$$P_B(t) = \begin{cases} t & \text{si } \|t\| \leq 1 \ , \\ \frac{t}{\|t\|} & \text{sinon .}\end{cases} \tag{1}$$

Soit $b = (b_1, b_2, b_3) \in B$ et $t \in \mathbb{R}^3$, $\|t\| \geq 1$,

$$\begin{aligned}\langle t - P_B(t), b - P_B(t)\rangle &= \left\langle t - \frac{t}{\|t\|}, b - \frac{t}{\|t\|}\right\rangle,\\ &= \left\langle t - \frac{t}{\|t\|}, -\frac{t}{\|t\|}\right\rangle + \left\langle t - \frac{t}{\|t\|}, b\right\rangle,\\ &= -\|t\| + 1 + \left\langle t - \frac{t}{\|t\|}, b\right\rangle,\\ &\leq -\|t\| + 1 + \|b\|\|t\|\left|1 - \frac{1}{\|t\|}\right| \text{ (Cauchy Schwarz) },\\ &\leq -\|t\| + 1 + \|b\|\|t\|\left(1 - \frac{1}{\|t\|}\right)\\ &\leq -\|t\| + 1 + \|t\|\left(1 - \frac{1}{\|t\|}\right)\\ &\leq -\|t\| + 1 + \|t\| - 1 \leq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Ou on a utilisé que $\|b\| \leq 1$ et $\|t\| \geq 1$ pour obtenir la dernière inégalité.
Pour $\|t\| \leq 1, t \in B$, et donc (1) est bien la formule de projeté orthogonale.
Soit $C = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 1\}$. Montrons que

$$P_C(t) = \left\{ \left(\frac{t_1}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}, \frac{t_2}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}, t_3\right) \quad \text{sinon,} \right. \tag{3}$$

Soit $c = (c_1, c_2, c_3) \in C$ et $t \in \mathbb{R}^3$ tel que $t_1^2 + t_2^2 > 1$,

$$\begin{aligned}\langle t - P_C(t), c - P_B(t)\rangle &= \left(t_1 - \frac{t_1}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}\right)\left(c_1 - \frac{t_1}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}\right)\\ &+ \left(t_2 - \frac{t_2}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}\right)\left(c_2 - \frac{t_2}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}\right),\\ &\leq \left\langle (t_1,t_2) - \frac{(t_1,t_2)}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}, (c_1,c_2) - \frac{(t_1,t_2)}{\sqrt{t_1^2+t_2^2}}\right\rangle_{\mathbb{R}^2}\\ &\leq 0\end{aligned}$$

Avec un argument identique à celui de B pour obtenir la dernière inégalité. (Projection sur la sphère unité dans $\mathbb{R}^2$ du vecteur (t_1, t_2)).

2. Dans $\ell^2(\mathbb{N};\mathbb{R})$, $A = \{u;\ u_{2k} \geq 0\}$. Montrons que

$$P_A(u) = \begin{cases} u_k & \text{si } k \text{ impaire,}\\ \max(u_k, 0) & \text{sinon.}\end{cases}$$

Comme $(P_A(u))_k^2 \leq u_k^2, P_A(u) \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$.
Soit $v \in A$,

$$\begin{aligned}\langle u - P_A(u), v - P_A(u)\rangle &= \sum_k \left[u_k - (P_A(u))_k\right]\left[v_k - (P_A(u))_k\right]\\ &\sum_{k\in\mathbb{N}} (u_{2k} - \max(u_{2k},0))(v_{2k} - \max(u_{2k},0)) \leq 0.\end{aligned}$$

En effet, si $u_{2k} \geq 0 \to u_{2k} - \max(u_{2k}, 0) = 0$ et si $u_{2k} < 0 \to u_{2k}v_{2k} \leq 0$.

Exercice 3

1 . Par linéarité du produit scalaire, C^0 est un convexe. Le caractère fermé provient du fait que $x \in H \mapsto \langle x, y\rangle$ est continue $\forall y \in C$.
Comme

$$\forall y \in C,\ \langle y, 0\rangle = 0.$$

On a alors $0 \in C^0$.

2. Par caractérisation du projeté et comme $0 \in C$

$$\langle x - p, 0 - p\rangle \leq 0 \to \langle x - p, p\rangle \geq 0.$$

Soit $y \in C$

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{x-p}{\langle x-p,p\rangle+\epsilon}, y\right\rangle &= \left\langle \frac{x-p}{\langle x-p,p\rangle+\epsilon}, y-p+p\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{x-p}{\langle x-p,p\rangle+\epsilon}, y-p\right\rangle + \left\langle \frac{x-p}{\langle x-p,p\rangle+\epsilon}, p\right\rangle \\ &\leq \frac{1}{\langle x-p,p\rangle+\epsilon}\langle x-p,p\rangle \leq 1.\end{aligned}$$

Ou on a utilisé le fait que $\langle x-p, y-p\rangle$ est négative dans la deuxième équation et que $\langle x-p,p\rangle \geq 0$.

3. Soit $x \in C^{00}$, comme $\frac{x-p}{\langle x-p,p\rangle+\epsilon} \in C^0 \to \left\langle x, \frac{x-p}{\langle x-p,p\rangle+\epsilon}\right\rangle \leq 1$. Alors,

$$\langle x, x-p\rangle \leq \epsilon + \langle p, x-p\rangle \to \|x-p\|^2 \leq \epsilon.$$

4. L'inclusion $C \subset C^{00}$ s'obtient par symmétrie du produit scalaire. Soit $x \in C^{00}$, alors si on note $p = p_C(x)$, en utilisant la question précédente

$$\forall \epsilon > 0,\ \|x-p\|^2 \leq \epsilon.$$

Alors, $x = p_C(x)$, et donc que $x \in C$.

5. Soit F sous espace vectoriel de H. Soit $x \in F^0$ Alors $\forall y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}$: $\langle x, \lambda y\rangle \leq 1$ (car $\lambda y \in F$).
Soit $\alpha > 0$. En divisant par $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ et $\lambda = \frac{-1}{\alpha}$ dans l'inégalité précédente

$$\frac{-1}{\alpha} \leq \langle x, y\rangle \text{ et } \langle x, y\rangle \leq \frac{1}{\alpha}.$$

En faisant tendre $\alpha \to 0$, on obtient que $\langle x, y\rangle = 0$. Alors, $F^0 \subset F^\perp$. L'autre inclusion étant évidente. On obtient $F^0 = F^\perp$.

Donc $F^{00} = (F^\perp)^0 = F^{\perp\perp}$. Ou la dernière égalité découle du fait que $F^\perp$ est un sous espace vectoriel fermé. D'autre part en utilisant la question précédente, $F^{00} = F$. CQFD.

Exercice 4

$$\begin{aligned} x \in \ker(T^\star) &\iff T^\star x = 0, \\ &\iff \langle T^\star x, y\rangle = 0, \ \forall y \in H, \\ &\iff \langle x, Ty\rangle = 0, \ \forall y \in H, \\ &\iff x \in \mathrm{Im}(T)^\perp. \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathrm{Im}(T^\star)$, $x = T^\star u$, Montrons que $x \in \ker(T)^\perp$. Soit $y \in \ker(T)$,

$$\langle y, x\rangle = \langle y, T^\star u\rangle = \langle Ty, u\rangle = 0.$$

Alors $x \in \ker(T)^\perp$ et donc $\mathrm{Im}(T^\star) \subset \ker(T)^\perp$.
Remarque En dimension finie, on aurait l'égalité entre les deux ensembles avec le théorème du rang.

Exercice 5
1. Soit $f \in L^2([0,1])$, par Cauchy-Scharwz,

$$\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2 = \left(\int_0^1 f(t)\mathbf{1}_{[0,x]}(t)\,dt\right)^2 \leq \|f\|_H^2 x,$$

En intégrant x entre $[0,1]$ des deux cotés

$$\|T(f)\|_H^2 \leq \frac{\|f\|_H^2}{2}.$$

T est un opérateur borné et donc T un opérateur continue.

2. Soit $f, g \in H$. En utilisant Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |T(f)(x)g(x)|\ dx &\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|\,dt\right) |g(x)|\,dx, \\ &\leq \int_0^1 \sqrt{x}\|f\|_H |g(x)|\,dx, \\ &\leq \frac{\|f\|_H\|g\|_H}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors utiliser Fubini pour obtenir que

$$
\begin{aligned}
\langle Tf(x), g\rangle &= \int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\,dt\right) g(x)\,dx,\\
&= \int_0^1 \int_0^1 f(t)\mathbf{1}_{[0,x]}(t)g(x)\,dt\,dx,\\
&= \int_0^1 f(t)\int_0^1 g(x)\mathbf{1}_{[0,x]}(t)\,dx\,dt,\\
&= \int_0^1 f(t)\int_t^1 g(x)\,dx\,dt,
\end{aligned}
$$

Alors $T^\star(g)(x) = \int_x^1 g(t)\,dt$.

Exercice 6

1. P_E est le projecteur orthogonal sur E si et seulement si :

$$\forall x \in H, \forall y \in E,\ \Re(\langle x - P_E(x), y - P_E(x)\rangle) \le 0. \tag{4}$$

En considérant $\forall u \in E$, on définit $y = u + P_E(x) \in E$, En remplaçant y dans (4),

$$\Re(\langle x - P_E(x), u\rangle) \le 0.$$

En remplaçant u par u, $-u$, iu et $-iu$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$$(\langle x - P_E(x), u\rangle) = 0.$$

Pour l'implication réciproque, on considère $y = u - P_E(x) \in E$ et on obtient $\langle x - P_E(x), y - P_E(x)\rangle) = 0$ ce qui implique (4).

2. Soit $\|P\|_{\mathcal{L}(H)} = 1$ et $x, u \in H$.

$$
\begin{gathered}
\|P(x - P(u))\|^2 \le \|x - P(u)\|^2,\\
\|P(x)\|^2 - 2\Re(\langle P(u), P(x)\rangle) \le \|x\|^2 - 2\Re(\langle P(u), x\rangle)
\end{gathered} \tag{5}
$$

En prenant $x = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$ dans (5)

$$\lambda^2\|P(x)\|^2 - 2\lambda\Re(\langle P(u), P(x)\rangle) \le \lambda^2\|x\|^2 - 2\lambda\Re(\langle P(u), x\rangle). \tag{6}$$

En prenant $x = i\lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$ dans (5)

$$\lambda^2\|P(x)\|^2 + 2\lambda\Im(\langle P(u), P(x)\rangle) \le \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\Im(\langle P(u), x\rangle). \tag{7}$$

Pour montrer les égalités $\Re(\langle P(u), P(x)\rangle) = \Re(P(u), x)$ et $\Im(\langle P(u), P(x)\rangle) = \Im(P(u), x)$, on divise par $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$ négatif et on fait tendre λ vers zéro dans (6) et (7). Donc,

$$\forall x, u \in H \ \langle x - P(x), P(u)\rangle = 0.$$

D'après la première question, P est un projecteur orthogonal.

Soit P un projecteur orthogonal. Montrons que $P^\star = P$.

$$\begin{aligned}\langle P(x), y\rangle &= \langle P(x), y - P(y) + P(y)\rangle \\ &= \langle P(x), P(y)\rangle \\ &= \langle x - P(x) + P(x), P(y)\rangle = \langle x, P(y)\rangle . \end{aligned} \tag{8}$$

Où $\langle P(x), y - P(y)\rangle = \langle x - P(x), P(y)\rangle = 0$ découle de la première question. D'après l'équation (8), $P = P^\star$.

Soit P tel que $P^\star = P$. Montrons que $\langle P(x), x - P(x)\rangle = 0$.

$$\langle P(x), x - P(x)\rangle = \langle P(x), x\rangle - \langle P^\star(P(x)), x\rangle = \langle P(x), x\rangle - \left\langle P^2(x), x\right\rangle = 0.$$

Comme $x = P(x) + (x - P(x))$, par Pythagore, $\|P(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ et donc $\|P\|_{\mathcal{L}(H)} = 1$. (si E est non réduit au singleton $\{0\}$.)

Exercice 7

La minimisation de $F(a, b) = \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \, dt$ peut être vue comme la projection de t^2 sur le sous espace vectoriel fermé des fonctions affines (Vect$\{1, t\}$) de l'espace $L^2([0,1])$. Alors, d'après la question 1 de l'Exercice 6,

$$\forall c, d \in \mathbb{R}, \ \int_0^1 (t^2 - a^\star t - b^\star)(ct + d) = 0.$$

Pour $c = 0, d = 1$, on obtient $\frac{1}{3} = \frac{a^\star}{2} + b^\star$. Pour $c = 1, d = 0$, on obtient $\frac{1}{4} = \frac{a^\star}{3} + \frac{b^\star}{2}$ alors $a^\star = 1, b^\star = -\frac{1}{6}$.

Exercice 8

1. $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$.

2. En utilisant le fait que

$$\cos((a + b)) + \cos(a - b) = 2\cos(a)\cos(b),$$

pour $a = \arccos(x)$ et $b = n\arccos(x)$, on obtient le résultat souhaité.

3. Par récurrence et en utilisant la question précédente, on peut facilement prouver que T_n polynôme d'ordre n dont le plus grand coefficient est $2^{n-1}, n \geq 1$ et 1 si $n = 0$.

4. $T_n(x_k) = 0$ impliqe $n\arccos(x_k) = -\frac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$ et donc $x_k = \cos(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}), k \in \{1, \dots, n\}$. L'arccos de x_k est bien définie car $\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n} \in [0, \pi]$.
$T_n(1) = \cos(0) = 1$. Et comme $|T_n(x) = \cos(n\arccos(x))| \leq 1$ pour tout x dans $[-1, 1]$, donc $\max_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1$.

5. Soit $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n\arccos(x))\cos(m\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \int_{0}^{\pi} \cos(mt)\cos(nt)dt \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{\cos((n-m)t) + \cos((n+m)t)}{2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-m}\left[-\sin\left((n-m)t\right)\right]_0^\pi + \frac{1}{n+m}\left[-\sin\left((n+m)t\right)\right]_0^\pi\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ou on a utilisé le changement de variable $t = \arccos(x)$.

Exercice 9

1. Soit $\mathcal{I}$ une formule d'intégration numérique à $k+1$ points. Supposons que $\mathcal{I}$ est d'ordre supérieure à $2k+2$. Considérons le polynôme, $P(X) = \prod_{i=0}^{k}(X - x_i)^2$. D'après la formule d'intégration, $\mathcal{I}(P) = 0$. Et donc $\int_{\mathbb{R}} P(x)\omega(x)\,dx = 0$, alors $\omega(x) = 0$. Absurde.

2. $\forall i \in \{1, \dots k\}$, $Q_k(x_i) = 0$. Et comme le degré de QQ_k est inférieure ou égale à $2k+1$, en appliquant la formule d'intégration, $\langle Q, Q_k\rangle = \mathcal{I}(QQ_k) = 0$. Et donc, $\int_I Q(x)Q_k(x)\,dx = 0\ \forall Q \in \mathbb{R}_k[X]$. Q_k est donc le $k+1$-ème polynôme orthogonale et les x_i sont les racines de ce polynôme.

Soit $L_j(X) := \dfrac{\displaystyle\prod_{i=0,i\neq j}^{k}(X-x_i)}{\displaystyle\prod_{i=0,i\neq j}^{k}(x_j-x_i)}$. En appliquant la formule d'intégration

$$\mathcal{I}(L_j) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i L_j(x_i) = \lambda_j.$$

3.a. **Erreur dans l'ennoncé. On considère P_k le k+1-ème polynôme orthogonal pour le poids ω et $(x_i)_{0\leq i\leq k}$ ses racines.**

Comme $P(X) = \sum_{i=0}^{k} P(x_i)L_i(X)$ (les deux polynômes coïncident sur $k+1$ points et les deux polynômes sont de degré inférieure ou égales à k, donc il coïncident partout) . Par linéarité de l'intégrale, $\mathcal{I}(P) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i P(x_i)$. La méthode est au moins d'ordre k.

3.b. $P \in \mathbb{R}_{2k+1}[X]$, $P = QP_{k+1} + R$. Comme P est au plus de degré $2k+1$ et R de degré inférieure ou égale à k,

$$2k+1 \geq deg(P) = k+1+deg(Q)$$

Q est donc de degré au plus k. En utilisant le fait que P est le $k+1$-ème polynôme orthogonale pour le poids ω, on obtient que $\langle Q, P_{k+1}\rangle = 0$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_I P(x)\omega(x)\,dx = \int_I R(x)\omega(x)\,dx.$$

Comme $R \in \mathbb{R}_k[X]$ (car $deg(R) < deg(P_{k+1}) = k+1$),

$$\int_I R(x)\omega(x)\,dx = \sum_{i=0}^{k+1} \lambda_i R(x_i).$$

Par la division Euclidienne, $P(x_i) = R(x_i)$, on obtient alors

$$\int_I P\omega = \mathcal{I}(P) = \sum_{i=0}^{k+1} \lambda_i P(x_i).$$

La formule proposée est au moins d'ordre $2k+1$ et grâce à la question 1, on sait qu'elle est inférieure à $2k+1$. Et donc L'ordre de la méthode est exactement $2k+1$. En considérant $P = (L_j)^2$ de degré $2k$. En appliquant la formule d'intégration, $\lambda_j = \int_I (L_j(x))^2\omega(x)\,dx > 0$.

Exercice 10

1. On a $\|x\|_H = \sum_{i\in\mathbb{N}} |\langle x, e_i\rangle|^2$. La série $|\langle x, e_i\rangle|^2$ est convergente alors $\langle x, e_i\rangle$ converge vers zéro pour tout x dans H. I.e. : e_i converge faiblement vers 0.

2. $\|e_i\|^2 = 1$, la suite e_i ne peut converger fortement vers 0.

Exercice 11

1. Soit v dans $L^2(\mathbb{R})$. On note par $K := \{\sup|x|, \phi(x) \neq 0\}$.

$$\begin{aligned}
|\langle v, u_n\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}} v(x)\phi(x-n)\,dx\right| \\
&= \left|\int_{-K+n}^{K+n} v(x)\phi(x-n)\,dx\right| \\
&= \left|\int_{-K}^{K} v(t+n)\phi(t)\,dt\right| \\
&\leq \|\phi\|\|v\mathbf{1}_{x\in[-K+n,K+n]}\|.
\end{aligned}$$

Or
$$\int_{-K+n}^{K+n} v(x)^2\,dx = \int_{-\infty}^{K+n} v(x)^2\,dx - \int_{-\infty}^{-K+n} v(x)^2\,dx,$$
et donc $\int_{-K+n}^{K+n} v(x)^2\,dx$ vers zéro. Alors u_n converge faiblement vers zéro dans H. Il n' y a pas de convergence forte car

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x-n)^2\,dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)^2\,dx > 0.$$

2. Soit f dans $L^2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
|\langle f, v_n\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(nx)\sqrt{n}\,dx\right| \\
&= \left|\int_{-\frac{K}{n}}^{\frac{K}{n}} f(x)\phi(nx)\sqrt{n}\,dx\right| \\
&= \left|\int_{-\frac{K}{n}}^{\frac{K}{n}} f(x)\mathbf{1}_{x\in[-\frac{K}{n},\frac{K}{n}]}\phi(nx)\sqrt{n}\,dx\right| \\
&\leq \|f^2\mathbf{1}_{x\in[-\frac{K}{n},\frac{K}{n}]}\|\|\phi(nx)\sqrt{n}\|
\end{aligned}$$

Or $\|\phi(nx)\sqrt{n}\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \phi^2(nx)n\,dx = \int_{\mathbb{R}} \phi^2(t)\,dt = \|\phi\|^2$.

$$\|f(x)\mathbf{1}_{x\in[-\frac{K}{n},\frac{K}{n}]}\|^2 = \int_{-\frac{K}{n}}^{\frac{K}{n}} f(x)^2\,dx \to 0,\ n \to +\infty.$$

Alors, $|\langle f, u_n\rangle|$ converge vers 0 pour tout f. En reprenant

$$\|\phi(nx)\sqrt{n}\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \phi^2(nx)n\mathrm{dx} = \int_{\mathbb{R}} \phi^2(t)\mathrm{dt} = \|\phi\|^2,$$

la suite de fonctions v_n ne converge pas fortement vers 0.

3. Soit f dans $L^2([0,1]) \cap \mathscr{C}^1([0,1])$. Vu que f' est continue sur $[0,1]$, f est Lipschitz i.e. :

$$\exists L > 0, \forall x, y \in [0,1],\ |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|.$$

Dénotons par $I_n = \int_0^1 w(x)\,dx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right)$.

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \omega(nx)f(x)\,dx - I_n\right| &= \left|\sum_{i=1}^n \int_{\frac{(i-1)}{n}}^{\frac{i}{n}} \omega(nx)f(x)\,dx - I_n\right| \\
&= \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int_{i-1}^{i} \omega(u)f\left(\frac{u}{n}\right)\,du - I_n\right| \\
&= \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int_0^1 \omega(u+i-1)f\left(\frac{u+i-1}{n}\right)\,du - I_n\right| \\
&= \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int_0^1 \omega(u)f\left(\frac{u+i-1}{n}\right)\,du - I_n\right| \\
&= \left|\int_0^1 \omega(u)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(f\left(\frac{u+i-1}{n}\right) - f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)\,du\right| \\
&\leq \int_0^1 |\omega(u)|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left|f\left(\frac{u+i-1}{n}\right) - f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right|\,du \\
&\leq \int_0^1 |\omega(u)|\frac{L}{n}\sum_{i=1}^n \left|\frac{u}{n}\right|\,du \\
&\leq \int_0^1 |\omega(u)|\frac{L}{n^2}\sum_{i=1}^n |u|\,du \\
&\leq \frac{L}{n}\int_0^1 |\omega(u)|\,du
\end{aligned} \tag{9}$$

Ou on a utilisé la linéarité de l'intégrale, le caractère Lipschitz de la fonction f et le fait que $|u| \leq 1$. Or d'après la formule de Riemann, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \to \int_0^1 f(x)\,dx$. De (9), on déduit donc

$$\int_0^1 \omega(nx) f(x)\,dx \to I_n \to \int_0^1 \omega(u)\,du \int_0^1 f(x)\,dx. \tag{10}$$

Calculons $\int_0^1 \omega(nx)^2\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \omega(nx)^2 &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\frac{(i-1)}{n}}^{\frac{i}{n}} \omega(nx)^2\,dx \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \int_{i-1}^{i} \omega(u)^2\,du \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \omega(u)^2\,du \\
&= \int_0^1 \omega(u)^2\,du
\end{aligned} \tag{11}$$

De même pour $\int_0^1 \omega(nx)$ grâce à un raisonnement similaire, on peut montrer que,

$$\int_0^1 \omega(nx) = \int_0^1 \omega(u)\,du = \omega_{moy} \tag{12}$$

Considérons maintenant $f \in L^2[0,1]$ et $\epsilon > 0$.
Par densité de $L^2([0,1]) \cap \mathscr{C}^1([0,1])$ dans $L^2([0,1])$, il existe $g \in L^2([0,1]) \cap \mathscr{C}^1([0,1])$ tel que $\|g - f\| \leq \epsilon$.
Vu que $g \in L^2([0,1]) \cap \mathscr{C}^1([0,1])$, en utilisant (10), il existe $N > 0$, $\forall n \geq N$, $|\langle \omega(nx) - \omega_{moy}, g\rangle| \leq \epsilon$.
Soit $n \geq N$. En utilisant (11),

$$\begin{aligned}
|\langle \omega(nx), f\rangle - \langle \omega_{moy}, f\rangle| &= |\langle \omega(nx), f-g\rangle + \langle \omega(nx), g\rangle - \langle \omega_{moy}, g\rangle - \langle \omega_{moy}, f-g\rangle| \\
&\leq |\langle \omega(nx), f-g\rangle| + |\langle \omega(nx), g\rangle - \langle \omega_{moy}, g\rangle| + |\langle \omega_{moy}, f-g\rangle| \\
&\leq \|\omega(nx)\|\|f-g\| + |\langle \omega(nx), g\rangle - \langle \omega_{moy}, g\rangle| + \|\omega_{moy}\|\|f-g\| \\
&\leq \|\omega\|\epsilon + \epsilon + \|\omega_{moy}\|\epsilon
\end{aligned}$$

Et donc $\omega(nx) \rightharpoonup \omega_{moy}$. Calculons $\int_0^1 |\omega(nx) - \omega_{moy}|^2\,du$. En utilisant (12) et (11) et par Cauchy Schwarz

$$\begin{aligned}\int_0^1 |\omega(nx) - \omega_{moy}|^2\,dx &= \int_0^1 \omega(nx)^2 - 2\omega_{moy}\omega(nx) + \omega_{moy}^2\,dx\\ &= \int_0^1 \omega(x)^2\,dx - (\omega_{moy})^2\\ &= \int_0^1 \omega(x)^2\,dx - (\int_0^1 \omega(x)\,dx)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Avec inégalité stricte si ω n'est pas constante sur $[0,1]$. et donc ω ne converge pas fortement vers ω_{moy} dans le cas ou ω n'est pas une fonction constante.

Exercice 12

1. $e_n(i) = \delta_{i,n}$ est une famille totale de $\ell^2(\mathbb{N})$ et e_n converge faiblement vers 0. (voir Exercice 10.)

2. On a $b_n \in \ell^2(\mathbb{N})$ et $u_n \in \ell^2(\mathbb{N})$, d'après Cauchy Schwarz : $b_n u_n \in \ell^1(\mathbb{N})$. et comme $a_n u_n^2 \leq u_n^2\beta$, la série $a_n u_n^2$ est alors convergente. Φ est alors bien définie. Réécrivant $\Phi(u)$

$$\Phi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(u_n + \frac{b_n}{2a_n})^2 - \frac{b_n^2}{4a_n}$$

chaque terme est bien définie car $\frac{b_n^2}{a_n} \leq \alpha b_n^2$. Alors la suite $m_n = -\frac{b_n}{2a_n}$ est clairement l'unique minimiseur de $\Phi(u)$. En effet,

$$\Phi(u) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^2}{4an} \iff a_n(u_n + \frac{b_n}{2a_n})^2 = 0 \iff u_n = -\frac{b_n}{2a_n}.$$

3. Φ est une fonction strictement convexe (la fonction carrée est strictement convexe et $a_n > 0$), donc le minimiseur ,si il existe, est unique.
Soit u_k, $k \in \mathbb{N}$ une suite telle que $\Phi(u_k) \to \inf\{\Phi(u), u \in F\}$.
Comme $\lim_{\|u\|\to\infty} \Phi(u) = +\infty$. La suite u_k est bornée. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que u_k converge faiblement. I.e. :

$$\exists u' \in \ell^2(\mathbb{N}), u_k \rightharpoonup u'$$

Alors, $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{k,n} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n b_n$ par définition de la convergence faible.

Montrons que $\sqrt{a}u_k$ converge faiblement vers $\sqrt{a}u'$. Soit $t \in \ell^2(\mathbb{N})$. En utilisant le fait que $\sqrt{a}t \in \ell^2(\mathbb{N})$,

$$\left\langle \sqrt{a}(u' - u_k), t \right\rangle = \left\langle u' - u_k, t\sqrt{a} \right\rangle \to 0. \tag{13}$$

On peut récrire Φ sous la forme suivante,

$$\Phi(u) = \|\sqrt{a}u\|^2 + \langle b, u \rangle \, . \tag{14}$$

En partant de l'équation précédente,

$$\begin{aligned} \Phi(u') &= \|\sqrt{a}u'\|^2 + \left\langle b, u' \right\rangle \\ &= \|\sqrt{a}u'\|^2 + \lim_{k \to +\infty} \langle b, u_k \rangle \\ &\leq \liminf_k \|\sqrt{a}u_k\|^2 + \langle b, u_k \rangle \\ &= \inf\{\Phi(u), u \in F\}. \end{aligned} \tag{15}$$

On a utilise le fait que si $u_k \rightharpoonup u'$, alors $\|u'\|^2 \leq \liminf_k \|u_k\|^2$.
La stricte convexité implique que le minimiseur u' est unique.
Les conditions d'Euler donnent :

$$\forall x \in F, \left\langle \nabla\Phi(u'), x \right\rangle = \left\langle 2au' + b, x \right\rangle = 0.$$

4. C est clairement un ensemble convexe.
Montrons maintenant qu'il est fermé. Soit $u_n \in C$ qui converge vers $u \in \ell(\mathbb{N}^2)$. Comme $\langle e_i, u_n \rangle$ converge vers $\langle e_i, u \rangle$, $\langle e_i, u \rangle \geq 0$.
Comme vu dans l'exercice 2, la projection sur C est $\left(P_C(u)\right)_n = \max(0, u_n)$.
Comme montrée précédemment, La fonction Φ est strictement convexe et coercive.
Soit u_p une suite minimisante de Φ dans C. Comme Φ coercive, u_p est une suite bornée de $\ell(\mathbb{N})^2 \cap C$, elle admet une sous suite qui converge faiblement vers v.
Comme dans (13), on peut montrer que $\sqrt{a}u_p \rightharpoonup \sqrt{a}v$. En reprenant la même démarche que dans (15), on déduit que

$$\Phi(v) \leq \inf\{\Phi(u), u \in C\}.$$

Par la stricte convexité de Φ sur C, on déduit que le minimiseur est unique.
Comme la fonction Φ est une fonction convexe et C est un ensemble convexe, les conditions d'Euler donnent,

$$\langle \nabla\Phi(v), y - v \rangle = \langle 2av + b, y - v \rangle \geq 0, \, \forall y \in C.$$