Correction du TD d'Analyse de Fourier.

Modia : 2022-2023

Enseignants: Sadok Jerad, Mouhamad Jradeh.

Correction

Exercice 1

1.

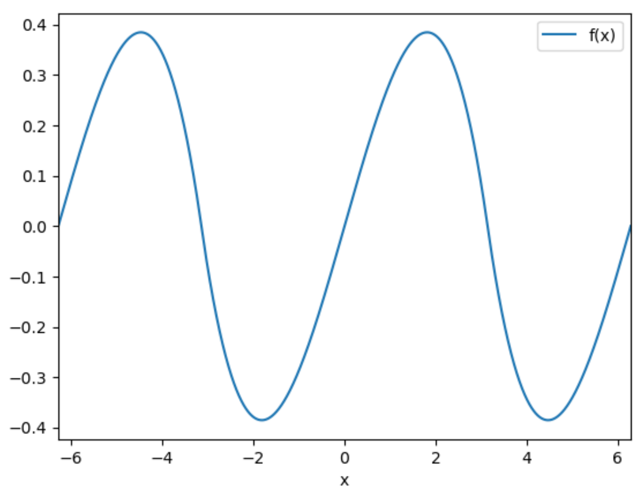

Figure 1: Tracé de la fonction f de l'Exercice 1.

2. Calculons $\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,dt$.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,dt &= \int_0^\pi \frac{t}{\pi}(1-\frac{t^2}{\pi^2})\sin(nt)\,dt \\
&= \int_0^\pi (\frac{1}{\pi n}-\frac{3t^2}{\pi^3 n})\cos(nt)\,dt \\
&= \int_0^\pi \frac{6t}{\pi^3 n^2}\sin(nt)\,dt \\
&= -\cos(n\pi)\frac{6}{\pi^2 n^3} - \int_0^\pi \frac{6}{\pi^3 n^3}\cos(nt)\,dt \\
&= (-1)^{n+1}\frac{6}{\pi^2 n^3}.
\end{aligned}$$

Ou on intègre successivement par parties et on utilise le fait que $\int_0^\pi cos(nt)\,dt = 0$. Or, $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = 2\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,dt$. Et vu que f est impaire, $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = 0$.

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n} 2\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,dt\sin(nx) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{12(-1)^{n+1}}{\pi^3 n^3}}_{b_n}\sin(nx). \qquad (1)$$

3. Comme f est continue sur le segment $[-3\pi, 3\pi]$, f est égale à sa série de Fourier. (Théorème de Dirichlet)

4.

Calculons $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ d'une part par sa série de Fourier $\hat{f}$ et la définition de la fonction f.

$$\begin{aligned}
\frac{3}{8} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12(-1)^{n+1}}{\pi^3 n^3}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) &= \sum_{n \text{ impaire}} \frac{12(-1)^{n+1}}{\pi^3 n^3}(-1)^{(n-1)/2} \\
&= \sum_{n \text{ impaire}} \frac{12(-1)^{(n-1)/2}}{\pi^3 n^3}
\end{aligned}$$

Et donc on obtient alors,

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

5. D'après la formule de Parseval, on obtient que

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{72}{\pi^6 n^6}. \tag{2}$$

Ou b_n définie dans (1). Calculons $\|f\|^2$. Comme f est impaire, f^2 est paire, on obtient que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,dt &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)^2\,dt \\
&= \int_0^{\pi} \frac{t^2}{\pi^3}\left(1-\frac{t^2}{\pi^2}\right)^2 dt \\
&= \int_0^{\pi} \frac{t^2}{\pi^3} - 2\frac{t^4}{\pi^5} + \frac{t^6}{\pi^7}\,dt \\
&= \frac{1}{3\pi^3}\left[t^3\right]_0^{\pi} - \frac{2}{5\pi^5}\left[t^5\right]_0^{\pi} + \frac{1}{7\pi^7}\left[t^7\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{8}{105}. \qquad (3)
\end{aligned}$$

Des deux équations précédentes (3) et (2), on déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{9 * 105} = \frac{\pi^6}{945}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ 1.

2. Calculons $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}\,dx$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx}\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi(1-in)}[e^{x-inx}]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^n\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}{2\pi(1-in)} \\
&= \frac{(-1)^n\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)(1+in)}{2\pi(1+n^2)}
\end{aligned}$$

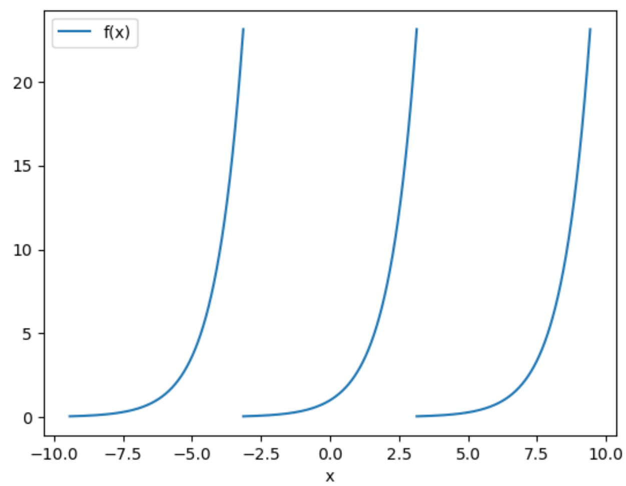

Figure 2: Tracé de la fonction f Exercice 2.

La série de Fourier $\hat{f}$ s'écrit alors,

$$\hat{f}(x) = \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)} \left[\cos(nx) + \sin(nx)\right].$$

3. D'après la question précédente $c_n(f) = \frac{(-1)^n \left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)(1+in)}{2\pi(1+n^2)}$. Et donc

$$|c_n(f)|^2 = \frac{\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)^2}{4\pi^2(1+n^2)}$$

En utilisant la formule de Parseval

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2x} \, dx \\ &= \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{4\pi} = \frac{(e^{\pi} - e^{-\pi})(e^{\pi} + e^{-\pi})}{4\pi} \end{aligned}$$

En simplifiant par $\frac{e^{\pi}-e^{\pi}}{4\pi}$ des deux côtés, on obtient que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)} = (e^{\pi}+e^{-\pi})$$
$$\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)} = (e^{\pi}+e^{-\pi})$$

En isolant le terme en $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi(e^{\pi}+e^{-\pi})}{(e^{\pi}-e^{-\pi})} - \frac{1}{2}.$$

Autre méthode En utilisant le Théorème de Dirichlet généralisé, f admet des limites à droite et à gauche de π et la fonction dérivée admet aussi des limites à droite et à gauche de π. Alors, $\hat{f}(\pi) = \frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2}$.
En développant l'expression de $\hat{f}(\pi)$

$$\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2} = \hat{f}(\pi) = \frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}.$$

En isolant le terme en $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\pi(e^{\pi}+e^{-\pi})}{(e^{\pi}-e^{-\pi})} - \frac{1}{2}.$$

4. Comme f est continue au voisinage de 0, Par le théorème de Dirichlet, $\hat{f}(0) = f(0)$. On obtient alors,

$$1 = \frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}.$$

En réarrangeant la dernière équation,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n^2)} = \frac{\pi}{(e^{\pi}-e^{-\pi})} - \frac{1}{2}.$$

Exercice 3

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-int}\,dt \\ &= \frac{1}{-2\pi in}[e^{-int}]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi in}(1-e^{-in\pi}) \\ &= \frac{1}{2\pi in}(1-(-1)^n). \end{aligned}$$

Calculons $f\star f$.

$$\begin{aligned} f\star f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)f(x-t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x-t)\,dt. \end{aligned}$$

Si $x\in[0,\pi]$,

$$f\star f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{x} f(x-t)\,dt = \frac{x}{2\pi},$$

si $x\in[\pi,2\pi]$,

$$f\star f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{\pi} f(x-t)\,dt = \frac{2\pi-x}{2\pi}.$$

Calculons $c_n(f\star f)$.

$$\begin{aligned} c_n(f\star f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (f\star f)\,(t)e^{-int}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\frac{t}{2\pi}e^{-int}\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{2\pi-t}{2\pi}e^{-int}\,dt\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{e^{-in\pi}}{2in} + \int_0^{\pi}\frac{1}{2\pi in}e^{-int}\,dt + \frac{e^{-in\pi}}{2in} - \int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{2\pi in}e^{-int}\,dt\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi n^2}[e^{-int}]_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi n^2}[e^{-int}]_{\pi}^{2\pi}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi^2 n^2}\left[-1+(-1)^n-1+(-1)^n\right] \\ &= \frac{-1}{4\pi^2 n^2}(1-(-1)^n)^2 = c_n(f)\cdot c_n(f). \end{aligned}$$

Exercice 4

1. Calculons $\int_0^{2\pi} f(t+a)e^{-int}\,dt$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(t+a)e^{-int}\,dt &= \int_a^{2\pi+a} f(u)e^{-in(u-a)}\,du \\
&= e^{ina}\int_a^{2\pi+a} f(u)e^{-inu}\,du \\
&= e^{ina}\int_0^{2\pi} f(u)e^{-inu}\,du \\
&= 2\pi e^{ina}c_n(f).
\end{aligned}$$

On a utilisé le changement de variable $u = t + a$ et le fait que l'intégrale entre a et $2\pi + a$ d'une fonction périodique de période 2π ne dépende pas de a.

2.

$$\begin{aligned}
2\pi|e^{ina}c_n(f) - c_n(f)| &= \left|\int_0^{2\pi} (f(t+a) - f(t))e^{-int}\,dt\right| \\
&\leq \int_0^{2\pi} \left|(f(t+a) - f(t))e^{-int}\right|\,dt \\
&\leq \int_0^{2\pi} C|a|^\alpha\,dt \\
&\leq C2\pi|a|^\alpha.
\end{aligned}$$

Où on a utilisé le fait que $|e^{-int}| = 1$ et la propriété que vérifie f.
Pour $a = \frac{\pi}{n}$, La dernière équation donne,

$$2|c_n(f)| \leq C\frac{\pi^\alpha}{n^\alpha}.$$

On obtient le résultat souhaité pour $M := \frac{C\pi^\alpha}{2}$.

Exercice 5

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} (1-|t|)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-1}^{0} (1+t)e^{-i\omega t}\,dt + \int_{0}^{1} (1-t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= -\frac{1}{i\omega} + \frac{1}{i\omega}\int_{-1}^{0} e^{-i\omega t}\,dt + \frac{1}{i\omega} - \frac{1}{i\omega}\int_{0}^{1} e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \frac{1}{\omega^2}\left[e^{-i\omega t}\right]_{-1}^{0} - \frac{1}{\omega^2}\left[e^{-i\omega t}\right]_{0}^{1} \\
&= \frac{2-e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{\omega^2} \\
&= \frac{2-2\cos(2\frac{\omega}{2})}{\omega^2} \\
&= \frac{4\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega^2} = \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Parseval,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)^2\,d\omega.$$

En calcultant $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2\,dt$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2\,dt = 2\int_{0}^{1} (1-t)^2\,dt = \frac{2}{3}.$$

Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^4}\,d\omega = \frac{4\pi}{3}.$$

Par changement de variable et en utilisant le caractère paire de $\frac{\sin(x)^4}{x^4}$ On obtient alors, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(x)}{x^4}\,d\omega = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 6

1.

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t-\alpha|t|}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-i\omega t+\alpha t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-i\omega t-\alpha t}\,dt \\
&= \frac{1}{-i\omega+\alpha}\left[e^{-i\omega t+\alpha t}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-i\omega-\alpha}\left[e^{-i\omega t-\alpha t}\right]_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{-i\omega+\alpha} - \frac{1}{-i\omega-\alpha} \\
&= \frac{-2\alpha}{-\omega^2-\alpha^2} \\
&= \frac{2\alpha}{\omega^2+\alpha^2}.
\end{aligned}$$

2. En utilisant la formule de Transformé de Fourier inverse pour $\alpha = 1$

$$e^{-|t|} = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2}{\omega^2+1}\right)(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega^2+1}e^{i\omega t}\,d\omega,$$

et donc $\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)(t) = \pi e^{-|t|}$.

3. Soit $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
f \star f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)f(t-u)\,du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|u|}e^{-\alpha|t-u|}\,du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|u|}e^{-\alpha|t-u|}\,du \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha u}e^{\alpha(u-t)}\,du + \int_{0}^{t} e^{-\alpha u}e^{\alpha(u-t)}\,du + \int_{t}^{+\infty} e^{-\alpha u}e^{\alpha(t-u)}\,du \\
&= \frac{e^{-\alpha t}}{2\alpha} + e^{-\alpha t}t + \frac{e^{-\alpha t}}{2\alpha} \\
&= e^{-\alpha t}\left(\frac{1}{\alpha}+t\right).
\end{aligned}$$

Pour $t \leq 0$,

$$\begin{aligned}
f \star f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)f(t-u)\,du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|u|}e^{-\alpha|t-u|}\,du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|u|}e^{-\alpha|t-u|}\,du \\
&= \int_{-\infty}^{t} e^{\alpha u}e^{\alpha(u-t)}\,du + \int_{t}^{0} e^{-\alpha u}e^{\alpha(t-u)}\,du + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha u}e^{\alpha(t-u)}\,du \\
&= \frac{e^{\alpha t}}{2} - e^{\alpha t}t + \frac{e^{\alpha t}}{2} \\
&= e^{\alpha t}\left(\frac{1}{\alpha} - t\right).
\end{aligned}$$

et donc pour $\alpha = 1$, $f \star f(t) = e^{-|t|}(1+|t|)$. Or

$$\mathcal{F}(f \star f)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) \cdot \mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{4}{(\omega^2+1)^2},$$

En utilisant la formule de transformée inverse sur $f \star f$,

$$e^{-|t|}(1+|t|) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{4}{(\omega^2+1)^2}\right) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega^2+1)^2}\,d\omega.$$

Et donc $\mathcal{F}\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)(t) = \frac{\pi e^{-|t|}}{2}(1+|t|)$.

4. On a $\frac{x}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'$. Et comme $\frac{1}{1+x^2}$ et $\frac{x}{(1+x^2)^2}$ sont intégrables, on peut appliquer la formule de la transformée de Fourier de la dérivée (On peut la prouver facilement par une intégration par partie cf: Exercice 7)

$$\mathcal{F}\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)(t) = -\frac{it\pi e^{-|t|}}{2}.$$

Exercice 6

1. Par récurrence pour $p = 0$, comme f est dans $L^1(\mathbb{R})$, la fonction $\hat{f}$ est continue. Supposons que $\hat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^p$ et que $\hat{f}^{(k)} = \hat{g}_k, 0 \leq k \leq p$ avec $g_k = (-ix)^k f(x)$. Montrons que f est de classe $\mathscr{C}^{p+1}$ et que $\hat{f}^{(p+1)} = \widehat{(-ix)^{p+1}f(x)}$.

Par hypothèse de récurrence,

$$\hat{f}^{(p)}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^p e^{-ix\xi} f(x)\, dx.$$

Soit $\phi(x,\xi) = (-ix)^p e^{-ix\xi} f(x)$. ϕ est dérivable par rapport à ξ et $\dfrac{\partial \phi}{\partial \xi} = (-ix)^{p+1} e^{-ix\xi} f(x)$. Et,

$$|(-ix)^{p+1} e^{-ix\xi} f(x)| \leq |x^{p+1} f(x)|.$$

Comme $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$, $|x^{p+1} f|$ est intégrable au voisinage de zéro. Et comme $|x^{p+1} f(x)| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (Par hypothèse), $x^{p+1} f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de dérivation sous signe intégrale, $\hat{f}^{(p)}$ est dérivable et

$$\hat{f}^{(p+1)}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^{p+1} e^{-ix\xi} f(x)\, dx.$$

Alors, par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\hat{f} \in \mathscr{C}^p(\mathbb{R})$.

2. Pour $k = 0$, le résultat est vérifié. Par réccurence, supposons le résultat vrai pour $\widehat{f^{(k)}}$ et montrons le résultat de $\widehat{f^{(k+1)}}$. Comme

$$f^k(x) - f^k(0) = \int_0^x f^{(k+1)}(t)\, dt.$$

Comme $f^{(k+1)} \in L^1(\mathbb{R})$ (par hypothèse), $f^k(x)$ admet des limites en $+\infty$ et $-\infty$ dénotées respectivement l_1 et l_2. Or $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, donc $l_1 = l_2 = 0$. Calculons $\widehat{f^{(k+1)}}$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k+1)}(x) e^{-ix\xi}\, dx &= \left[f^{(k)} e^{-ix\xi}\right]_{-\infty}^{+\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)} e^{-ix\xi}\, dx \\
&= i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)} e^{-ix\xi}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (i\xi)^k f(x) e^{-ix\xi}\, dx \\
&= (i\xi)^{k+1} \widehat{f}.
\end{aligned}$$

3. Vu que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^p f^{(q)}(x)| < +\infty$, $f^{(q)}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soit $g(x) = P(x) f(x)$. Clairement, $g \in \mathscr{C}^\infty$. On peut facilement

montrer par récurrence que $g^{(p)}(x) = Q_p(x)R_p(f)(x)$. Ou Q et R sont deux polynômes. Par les hypothèses que vérifient f, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

4. Comme pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^p f^{(q)}(x)| < +\infty$.
Par la première question, $\hat{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Soit $p, k \in \mathbb{N}$. En utilisant la deuxième question et la première question,

$$(i\xi)^k \hat{f}^{(p)} = (i\xi)^k \hat{g_p} = \widehat{g_p^{(k)}}.$$

Avec $g_p(x) = (-ix)^p f(x)$. Vu que $g_p^{(k)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (i.e : Dérivée kème d'un produit de polynômes et d'une fonction f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$), alors

$$\exists M, M' > 0, |g_p^{(k)}(x)| \leq \min(M, \frac{M'}{x^2}).$$

Et donc

$$\begin{aligned}
|(i\xi)^k \hat{f}^{(p)}(\xi)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} g_p^{(k)}(x)\, dx \right| \\
&\leq \int_{-1}^{1} |g_p^{(k)}(x)|\, dx + \int_{-\infty}^{-1} |g_p^{(k)}(x)|\, dx + \int_{1}^{+\infty} |g_p^{(k)}(x)|\, dx \\
&\leq \int_{-1}^{1} M\, dx + \int_{-\infty}^{-1} \frac{M'}{x^2}\, dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{M'}{x^2}\, dx \\
&\leq 2M + 2M' < +\infty.
\end{aligned}$$

Et donc

$$\forall p, k \in \mathbb{N}, , \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |(i\xi)^k \hat{f}^{(p)}| < +\infty.$$

Et comme on a démontré que $\hat{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

5. Soit $\psi_a(x) = e^{-ax^2}$. ψ_a vérifie

$$\psi_a'(x) = -2axe^{-ax^2} = -2ax\psi_a(x). \tag{4}$$

Comme $\psi_a' \in L^1(\mathbb{R})$ et $\sup_{x\in\mathbb{R}} |x\psi_a(x)| < +\infty$, en prenant la transformée de Fourier dans (4) et en appliquant les formules de la première et deuxième questions

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi_a'(x)} &= -2\widehat{ax\psi_a}(x) \\
i\xi\widehat{\psi_a}(\xi) &= \frac{2a}{i} \widehat{-ix\psi_a(x)} \\
-\frac{\xi}{2a}\widehat{\psi_a}(\xi) &= \left(\widehat{\psi_a}\right)'(\xi)
\end{aligned}$$

Et comme
$$\widehat{\psi_a}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$
Et donc $\widehat{\psi_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\psi_a}(\xi)\,d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}\,d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\sqrt{4a\pi} = 2\pi.$$
6.a
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\Phi(\xi)\,d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\xi} f(y)\,dy\,\Phi(\xi)\,d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\xi+ix\xi} f(y)\,dy\right)\Phi(\xi)\,d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy\xi+ix\xi}\Phi(\xi)\,d\xi\right) f(y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\Phi}(y-x)f(y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\Phi}(y)f(y+x)\,dy.\end{aligned}$$
Où on a utilisé le Théorème de Fubini pour invertir les deux intégrales. Vérifions que les conditions du théorème sont valides. Comme,
$$|e^{-iy\xi+ix\xi} f(y)\Phi(\xi)| \leq |f(y)||\Phi(\xi)|$$
Et comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)||\Phi(\xi)|dy\,d\xi < \infty$. ($f$ continue et $f(x) = \mathcal{O}(\frac{1}{x^2})$ en l'infini de même pour Φ.)

6.b Remplaçons $\Phi(t)$ par $\Phi_0(\epsilon t)$ dans l'égalité de la dernière question.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\Phi_0(\epsilon\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\Phi_0(\epsilon t)}(y)f(y+x)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\epsilon}\widehat{\Phi_0}(\frac{y}{\epsilon})f(y+x)\,dy \tag{5}$$
La dernière égalité vient d'un simple changement de variable dans la transformé de Fourier de $\widehat{\Phi_0(\epsilon t)}$. (propriété de contraction du domaine de la transformée de Fourier).
Soit $\epsilon_1 > 0$. Φ est continue en 0, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall\xi \in [-\sqrt{\epsilon}, \sqrt{\epsilon}]$, $|\Phi(\xi) - \Phi(0)| \leq \epsilon_1$ et dénotons
$$M = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\Phi_0(\xi) - \Phi_0(0)| \tag{6}$$

$M < +\infty$ car $\Phi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Étudions la limite de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\Phi_0(\epsilon\xi)\,d\xi$ quand $\epsilon \to 0$. En divisant l'intégrale en 3 morceaux et en utilisant la continuité de Φ en 0 et la définition de M,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)(\Phi_0(\epsilon\xi)-\Phi_0(0))\,d\xi\right| &\leq \left|\int_{-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}}^{\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)(\Phi_0(\epsilon\xi)-\Phi_0(0))\,d\xi\right| \\
&+ \left|\int_{-\infty}^{-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)(\Phi_0(\epsilon\xi)-\Phi_0(0))\,d\xi\right| \\
&+ \left|\int_{\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}}^{+\infty} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)(\Phi_0(\epsilon\xi)-\Phi_0(0))\,d\xi\right| \\
&\leq \int_{-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}}^{\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \left|\hat{f}(\xi)(\Phi_0(\epsilon\xi)-\Phi_0(0))\right|\,d\xi \\
&+ \int_{-\infty}^{-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \left|\hat{f}(\xi)(\Phi_0(\epsilon\xi)-\Phi_0(0))\right|\,d\xi \\
&+ \int_{\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}}^{+\infty} \left|\hat{f}(\xi)(\Phi_0(\epsilon\xi)-\Phi_0(0))\right|\,d\xi \\
&\leq \epsilon_1 \int_{-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}}^{\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\
&+ M\int_{-\infty}^{-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} |\hat{f}(\xi)|\,d\xi + M\int_{\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|\,d\xi \\
&\leq \epsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\
&+ M\int_{-\infty}^{-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} |\hat{f}(\xi)|\,d\xi + M\int_{\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|\,d\xi
\end{aligned} \tag{7}$$

Et comme $\hat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} |\hat{f}(\xi)|\,d\xi$ et $\int_{\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|\,d\xi$ tendent vers 0 quand $\epsilon \to 0$. Et donc pour ϵ suffisamment petit, (7) devient

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)(\Phi_0(\epsilon\xi)-\Phi_0(0))\,d\xi\right| \leq 3\epsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|.$$

Et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\Phi_0(\epsilon\xi)\,d\xi \to \Phi_0(0)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi,\ \epsilon \to 0. \tag{8}$$

Calculons la limite de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\epsilon}\widehat{\Phi_0}(\frac{y}{\epsilon})f(y+x)\,dy$ quand ϵ tend vers 0.
Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\epsilon}\widehat{\Phi_0}(\frac{y}{\epsilon})f(y+x)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\Phi_0}(u)f(\epsilon u+x)\,du,$$

par un raisonnement similaire que précédemment et en utilisant le fait que f est continue en x et bornée sur $\mathbb{R}$ et que $\hat{\Phi}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (car $\hat{\Phi}$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$), on peut montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\Phi_0}(u)f(\epsilon u+x)\,du = f(x)\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\Phi_0}(u)\,du. \tag{9}$$

En injectant (9) et (8) dans (5), on obtient le résultat souhaité.

6.c On choisit $\Phi_0(t) = e^{-t^2}$, et en utilisant les résultats de la question précédente et de la question 5 pour calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\Phi_0}(u)\,du$, on obtient que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi = f(x)\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\Phi_0}(u)\,du = f(x)2\pi$$

En réarrangent la dernière équation, on obtient le résultat souhaité (La formule de la transformée de Fourier inverse pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$).