Correction CC ModIA

Exercice 1

1) Soit $x, y \in C$ et $t \in [0,1]$, montrons que $tx+(1-t)y \in C$

On a d'une part $x, y \in \ell^2(\mathbb{N};\mathbb{R})$ donc toute combinaison linéaire de x et y appartient à $\ell^2(\mathbb{N};\mathbb{R})$, en particulier $tx+(1-t)y$. D'autre part $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$ $\forall n$ donc $tx_n+(1-t)y_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Ainsi C est convexe.

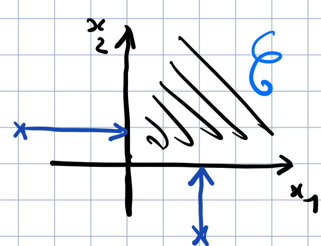
D'autre part, supposons que $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de C convergeant (pour la norme de $\ell^2(\mathbb{N};\mathbb{R})$) vers x.
Montrons que $x \in C$.

Soit $n \in \mathbb{N}$: on a $|x^k_n - x_n| \leq \|x^k - x\|_{\ell^2(\mathbb{N};\mathbb{R})}$

Ainsi $x^k_n \longrightarrow x_n$ lorsque $k \longrightarrow +\infty$.

Or $x^k_n \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ donc, en passant à la limite $k \longrightarrow +\infty$, on a $x_n \geq 0$.

2°) Dans $\mathbb{R}^2$



On a $P_C(x) = \left(\max(0,x_1) ; m(0,x_2)\right)$

En généralisant, on postule la formule de projection $P_C(x)_n = \max(0, x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

On utilise alors la caractérisation

$$\langle x - p_C(x) ; y - p_C(x) \rangle \leqslant 0 \quad \forall y \in C$$

On a $\langle x - p_C(x) ; y - p_C(x) \rangle$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (x_n - \max(0, x_n)) (y_n - \max(0, x_n))$$

$\left(\text{Or } x_n = \max(0, x_n) + \min(0, x_n) \right)$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \min(0, x_n) (y_n - \max(0, x_n))$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \min(0, x_n) \, y_n$$

car $\min(0, x_n) \times \max(0, x_n) = 0$

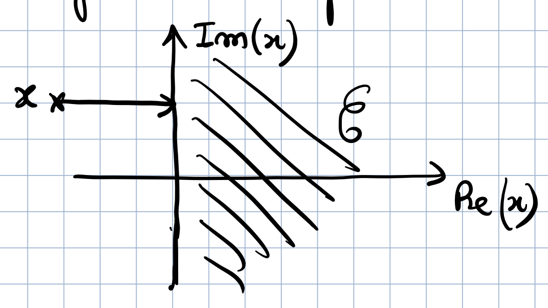
Comme $\min(0, x_n) y_n \leqslant 0 \quad \forall n$, on a bien

que $p_C(x)$ est donné par $p_C(x) = \max(0, x_n)$.

3°) Ici $C = \{ x \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \; / \; \mathrm{Re}(x_n) \geqslant 0 \quad \forall n \}$.

La convexité et le caractère fermé de C se démontre de la même manière que dans 1°)

On peut faire une représentation dans le plan complexe



Ici $p_C(x) = (\max(0, \mathrm{Re}(x)) + i \, \mathrm{Im}(x))$

On propose la formule suivante.

$$P_C(x)_n = \max(0; Re(x_n)) + i\, Im(x_n)$$

On utilise la caractérisation

$$Re(x - P_C(x) ; y - P_C(x)) \leq 0 \quad \forall y \in C.$$

Ici, on obtient

$$Re\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \min(0, Re(x_n)) \times \overline{y - P_C(x)}\right)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \min(0, Re(x_n)) \times (Re(y_n) - \max(0, Re(x_n)))$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \min(0, Re(x_n))\, Re(y_n) \leq 0$$

Ce qui conclut la preuve $\square$

Exercice 3

1°) On a $f_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2}$

Si on dérive, on obtient $f'_\alpha(x) = -2\alpha x\, f_\alpha(x)$ (*)

Notons $\hat{f}_\alpha(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-ix\xi}\, dx$ la transformée de Fourier de f_α

On rappelle que pour tout g (dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ par exemple, ce qui est le cas ici) que

$$\widehat{g'}(\xi) = i\xi\, \hat{g}(\xi) \quad \text{et} \quad \widehat{xg}(\xi) = i\, \hat{g}'(\xi)$$

En utilisant ces relations et en passant à la TF

Sur $(*)$, on a

$$i\xi\,\hat{f}_\alpha(\xi) = -2\alpha i\,\hat{f}_\alpha'(\xi)$$

Ainsi $\hat{f}_\alpha'(\xi) + \dfrac{\xi}{2\alpha}\hat{f}_\alpha(\xi) = 0$.

En intégrant cette équation, on a

$$\hat{f}_\alpha(\xi) = K_\alpha e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}} \quad \text{avec } K_\alpha = \hat{f}_\alpha(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2}dx$$

On montre que $K_\alpha = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\frac{dy}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

D'où $\hat{f}_\alpha(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\xi^2/4\alpha}$

2°) On rappelle que $\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\widehat{xg} = i\,\hat{g}'$

Ainsi $\widehat{x^k f_\alpha}(\xi) = i^k \dfrac{d^k}{d\xi^k}\hat{f}_\alpha(\xi)$

D'où $\widehat{x f_\alpha}(\xi) = i \times \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha}} \times \left(-\dfrac{\xi}{2\alpha}\right) e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$

$$\widehat{x^2 f_\alpha}(\xi) = -1 \times \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \times \left(-\frac{1}{2\alpha} + \frac{\xi^2}{4\alpha^2}\right) e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$$

$$\widehat{x^3 f_\alpha}(\xi) = -i \times \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \times \left(\frac{2\xi}{4\alpha^2} - \frac{\xi}{2\alpha}\left(\frac{\xi^2}{4\alpha^2} - \frac{1}{2\alpha}\right)\right) e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$$

$$= -i \times \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \times \left(\frac{3\xi}{4\alpha^2} - \frac{\xi^3}{8\alpha^3}\right) e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$$

$$\widehat{x^4 f_\alpha}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left(\frac{3}{4\alpha^2} - \frac{3\xi^2}{8\alpha^3} - \frac{\xi}{2\alpha}\left(\frac{3\xi}{4\alpha^2} - \frac{\xi^3}{8\alpha^3}\right)\right) e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$$

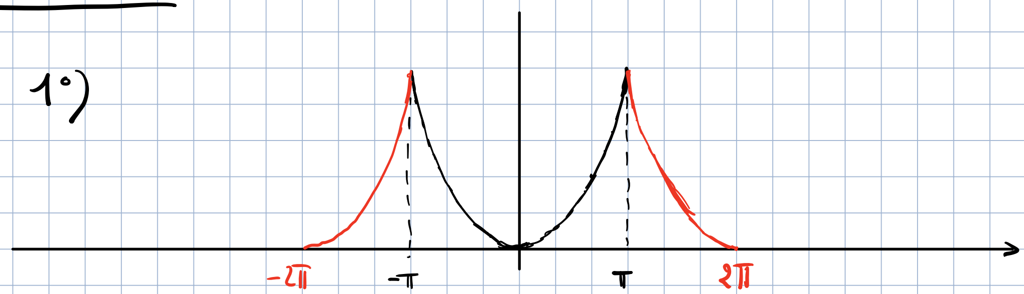
3°) On a $I_k = \widehat{x^k f_\alpha}(0)$

D'où $I_1 = I_3 = 0$

$$I_2 = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad ; \quad I_4 = \frac{3}{4\alpha^2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Exercice 4

1°)



2°) On calcule les coefficients de Fourier de f : la fonction f est paire et 2π periodique donc $\hat{f}$

la serie de Fourier associée à f s'écrit

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \quad \text{avec } b_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

On a $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$ si $n \neq 0$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

On a aussi

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos(nt)\,dt \quad \text{(en utilisant la parité)}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{ \cancel{\left[t^2 \frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}} - \int_0^{\pi} 2t \, \frac{\sin(nt)}{n} \right\}$$

$$= +\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} t - \sin(nt)\,dt$$

$$= + \frac{4}{\pi n} \left\{ \left[t \, \frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} - \cancel{\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{n} \, dt} \right\}$$

$$= \frac{4}{\pi n^2} \times \pi \times \cos(n\pi) = \frac{4}{n^2} \times (-1)^n$$

On obtient ainsi la serie de Fourier associée à f :

$$\hat{f} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

3°) Sa serie de Fourier $\hat{f}$ converge normalement d'après le critère de Riemann donc elle est égale à sa serie de Fourier.

Rq : on peut aussi dire que f est continue, C^1 par morceaux et appliquer le théorème de Dirichlet.

4°) On a $\hat{f}(0) = f(0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

et $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$

5°) On a aussi $f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \times (-1)^n$

D'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}$

6°) Enfin, en appliquant le théorème de Parseval, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \, dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$$

Ainsi $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t^4\,dt = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{n^4}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi^4}{5}-\frac{\pi^4}{9}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\times\frac{4\pi^4}{45} = \frac{\pi^4}{90}$$

Exercice 2

1°) La gaussienne $x \mapsto e^{-x^2/2}$ est une fonction de la classe de Schwarz donc $\forall P \in \mathbb{R}[X]$,

$x \mapsto P(x)\,e^{-x^2/2}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$

L'intégrale $\langle P, Q\rangle = \int_{\mathbb{R}} P(t)\,Q(t)\,e^{-t^2/2}\,dt$ est donc bien définie.

Par linéarité de l'intégrale et commutativité du produit de polynôme, $(P,Q) \longmapsto \langle P,Q\rangle$ est clairement une forme bilinéaire symétrique. On a aussi $\langle P,P\rangle \geq 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$

Si $\langle P,P\rangle = 0$ alors $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)^2\,e^{-t^2/2}\,dt = 0$

La fonction $t \longmapsto P(t)^2 e^{-t^2/2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $P(t)^2 e^{-t^2/2} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Comme $e^{-t^2/2} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, on a $P(t)^2 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ donc P est le polynôme nul.

2°) On calcule $\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}\right)$

On a $\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2}\right) = -x\,e^{-x^2/2}$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-x^2/2}\right) = \left(-1 + x^2\right) e^{-x^2/2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\left(e^{-x^2/2}\right) = \left(2x - x\left(x^2-1\right)\right) e^{-x^2/2}$$

$$= \left(3x - x^3\right) e^{-x^2/2}$$

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(e^{-x^2/2}\right) = \left(3 - 3x^2 - x\left(3x - x^3\right)\right) e^{-x^2/2}$$

$$= \left(x^4 - 6x^2 + 3\right) e^{-x^2/2}$$

On en dedùit que $H_0(x) = 1$

$H_1(x) = x$

$H_2(x) = x^2 - 1$

$H_3(x) = x^3 - 3x$

$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$

3°) On observe que le coefficient est égale à 1 et H_n de degré n si $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

On raisonne par récurrence. L'hypothèse de récurrence est vraie au rang $n = 0, 1, \ldots$

Supposons la vraie au rang n : $H_n(x) = x^n + Q_{n-1}(x)$ $\deg(Q_{n-1}) < n$

Montrons que $H_{n+1}(x) = x^{n+1} + Q_n(x)$ avec $\deg(Q_n) \leq n$.

On a $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left(e^{-x^2/2}\right) = (-1)^{n+1} e^{-x^2/2} H_{n+1}(x)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\right)$$

$$= (-1)^n \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2} H_n(x)\right)$$

$$= (-1)^n \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2}\left(x^n + Q_{n-1}(x)\right)\right)$$

$$= (-1)^n e^{-x^2/2}\left(n x^{n-1} + Q'_{n-1}(x) - x\left(x^n + Q_{n-1}(x)\right)\right)$$

$$= (-1)^{n+1} e^{-x^2/2}\left(x^{n+1} + \underbrace{x\, Q_{n-1}(x) - \left(n x^{n-1} + Q'_{n-1}(x)\right)}_{\deg \leq n}\right)$$

Ainsi $H_{n+1}(x) = x^{n+1} + \tilde{Q}_n(x)$ avec $\deg \tilde{Q}_n \leq n$. et le resultat est demontré par récurrence.

4°) Soit $n \neq m$. On suppose que $m < n$

On a $\langle H_m ; H_n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(t)\, H_n(t) e^{-t^2/2}\, dt$

Or $H_n(t)\, e^{-t^2/2} = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t^2/2}\right)$

Ainsi $\langle H_m ; H_n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(H_m(t)\right) \times (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t^2/2}\right) dt$.

En faisant n integrations par parties, on obtient.

$$\langle H_m ; H_n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dt^n}\left(H_m(t)\right) \times e^{-t^2/2}\, dt.$$

Comme $\deg(H_m) = m < n$, alors

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(H_m(t)\right) = 0 \implies \langle H_m ; H_n \rangle = 0 \quad \forall m \neq n.$$

5°) On a $\langle H_n ; H_n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dt^n}\left(H_n(t)\right) \times e^{-t^2/2}\, dt$.

D'où $\langle H_n ; H_n \rangle = n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}\; n!$

6°) Base orthonormée de $\mathbb{R}_4[X]$

$$\hat{H}_n = \frac{1}{\sqrt{\langle H_n ; H_n \rangle}} H_n \qquad n = 0,1,2,3,4.$$

On a la formule.

$$Pv(X^5) = \sum_{n=0}^{4} \langle X^5 ; \hat{H}_n \rangle \times \hat{H}_n$$

$$= \sum_{n=0}^{4} \frac{\langle X^5 ; H_n \rangle}{\langle H_n ; H_n \rangle} H_n$$

Or H_n est paire si n est paire donc

$$\langle X^5 ; H_n \rangle = 0 \text{ si } n = 0,2,4.$$

$$Pv(X^5) = \frac{\langle X^5 ; X \rangle}{\langle H_1 ; H_1 \rangle} H_1 + \frac{\langle X^5 ; X^3 - 3X \rangle}{\langle H_3 ; H_3 \rangle} H_3$$

$$= \frac{\langle X^3 ; X^3 \rangle}{\langle H_1 ; H_1 \rangle} H_1 + \frac{\langle X^4 ; X^4 \rangle - 3\langle X^3 ; X^3 \rangle}{\langle H_3 ; H_3 \rangle} H_3$$

$$= \frac{\langle H_3 ; H_3 \rangle}{\langle H_1 ; H_1 \rangle} H_1 + \frac{\langle H_4 ; H_4 \rangle - 3\langle H_3 ; H_3 \rangle}{\langle H_3 ; H_3 \rangle} H_3$$

$$= \frac{3!}{1!} H_1 + \frac{4! - 3 \times 3!}{3!} H_3$$

$$= 6 H_1 + H_3$$

$$= 6x + (x^3 - 3x)$$

$$= x^3 + 3x.$$