INSA Toulouse

Signal 2, 4GMM, CC, Jeudi 20 Avril 2023
durée 2h. Aucun document autorisé.

On rappelle ici la définition d'une famille multirésolution :

Définition 1. *Une suite $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de sous espaces fermés de $L^2(\mathbb{R})$ est une approximation multi-résolution si elle vérifie les 6 propriétés suivantes :*

$$\forall (j,k)\in\mathbb{Z}^2,\quad f(t)\in V_j \Leftrightarrow f(t-2^j k)\in V_j \tag{1}$$

$$\forall j\in\mathbb{Z},\quad V_{j+1}\subset V_j \tag{2}$$

$$\forall j\in\mathbb{Z},\quad f(t)\in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right)\in V_{j+1} \tag{3}$$

$$\lim_{j\to+\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\} \tag{4}$$

$$\lim_{j\to-\infty} V_j = Adhérence\left(\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} V_j\right) = L^2(\mathbb{R}) \tag{5}$$

Il existe ϕ tel que $\{\phi(t-n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de V_0.

Soit (V_j) une famille multirésolution et W_j les espaces définis comme dans le cours comme des supplémentaires orthogonaux de V_j dans V_{j-1}. On rappelle qu'il existe nécessairement une unique suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\phi_{0,0} = \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n \phi_{-1,n}$$

où $\phi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}}\phi(2^{-j}x-k)$.

Exercice 1.

1. Rappeler les deux conditions nécessaires du Théorème de Mallat-Meyer vérifiées par une suite (h_n) associée à une famille multirésolution.
2. Donner un exemple de telle suite (h_n).
3. Soit g_n la suite définie par $g_n = (-1)^{1-n}h_{1-n}$. Justifier que pour tout $\omega\in\mathbb{R}$
$$|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{g}(\omega)|^2 = 2. \tag{6}$$
4. On rappelle que la fonction ψ définie par
$$\psi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sqrt{2} g_n \phi(2x-n) \tag{7}$$
est l'ondelette associée à la famille multirésolution $(V_j)_{j\in\mathbb{Z}}$.
Donner une expression de $\hat{\psi}$ en fonction des transformées de Fourier $\hat{g}$ et $\hat{\phi}$ de la suite g et de la fonction d'échelle ϕ. On ne demande pas de justifier l'interversion de la somme et de l'intégrale.
5. Déduire des questions précédente qu'une ondelette associée à une famille multirésolution vérifie nécessairement
$$\int_{t\in\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0. \tag{8}$$

Exercice 2

Soit f la fonction 2π périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } |t| < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } |t| = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{9}$$

1. Représenter graphiquement la fonction f.
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$.
3. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{int}. \tag{10}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on pose $h_n = c_n(f)$.
   Justifier que la suite (h_n) vérifie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |h_n|^2 < +\infty$ et déterminer sa transformée de Fourier $\hat{h}(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n e^{-in\omega}$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que la suite (h_n) ainsi définie vérifie le théorème de Mallat-Meyer.
6. Pourquoi les bases d'ondelettes associées à une telle suite (h_n) ne sont pas utilisées pour la compression et le débruitage de signaux 1D et 2D.

Exercice 3

Parmi les assertions suivantes, déterminer celles qui sont vraies pour toute base d'ondelettes, celles qui sont fausses et celles qui ne sont vérifiées que pour les bases d'ondelettes de Haar. Les réponses devront être justifiées.

1. $\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n h_{n-1} = 0$.
2. V_j est l'espace des fonctions constantes sur les intervalles de la forme $[k2^j, (k+1)2^j[$.
3. $\forall (j_1, j_2, k_1, k_2)$ tels que la paire (j_1, k_1) est différente de la paire (j_2, k_2) on a

$$\langle \phi_{j_1,k_1}, \phi_{j_2,k_2} \rangle = 0$$

4. $\forall (j_1, j_2, k_1, k_2)$ tels que la paire (j_1, k_1) est différente de la paire (j_2, k_2) on a

$$\langle \psi_{j_1,k_1}, \psi_{j_2,k_2} \rangle = 0$$

5. $W_j \perp V_{j+1}$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$.
6. Pour tout $(j,k) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\phi_{j,k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{j-1,2k} + \frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{j-1,2k+1} \tag{11}$$

7. $(\hat{h})'(\pi) = 0$.