Analyse de Hilbert-Analyse de Fourier-MoDIA

Durée : 2h00.

Consignes : Tous les documents sont autorisés. Calculatrices et téléphones portables sont interdits. La présentation de la copie, la qualité de la rédaction, le bon usage des notations et des objets mathématiques sont une partie importante de l'évaluation. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. *Soit H un espace de Hilbert réel.*

1. *Soit V un sous espace vectoriel fermé de H. On note p_V la projection orthogonale sur V.*
   (a) *Montrer que pour tout $(x, y) \in H^2$ on a*
   $$\langle x, p_V(y)\rangle = \langle p_V(x), y\rangle = \langle p_V(x), p_V(y)\rangle.$$
   (b) *En déduire que $\|p_V(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in H$.*
   (c) *Soit $H = L^2([0,1])$, $f(t) = t$ et $V = \mathrm{Vect}\,(1, \sin(2\pi \mathrm{t}), \cos(2\pi, \mathrm{t}))$. Calculer $p_V(f)$*
2. *Soit C un convexe fermé de H et p_C la projection orthogonale sur C.*
   (a) *Montrer que pour tout $x \in H$, $\langle x - p_C(x), d - p_C(x)\rangle$ pour tout $d \in C$.*
   (b) *En déduire que $\|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\|$ pour tout $(x, y) \in H^2$.*
   (c) *On note $B = \{x \in H,\ \|x\| \leq 1\}$: déterminer p_B.*

Exercice 2. *Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On notera $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On admet le résultat suivant (intégrale de Wallis)*
$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t)dt = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$
Les intégrations par parties et le changement de variable $x = \cos(t)$ seront fort utiles à partir de la question 4. On définit $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$ et $L_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}\Big((x^2-1)^n\Big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. *Montrer que $\langle .,. \rangle$ définit un produit scalaire sur E*
2. *Calculer L_0, L_1, L_2*
3. *Montrer que L_n est un polynôme de degré n dont on précisera le coefficient dominant.*
4. *Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $\langle Q, L_n\rangle = 0$*
5. *En déduire que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de E.*
6. *Calculer $\|L_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$*
7. *En déduire une base orthonormée de $V = \mathbb{R}_2[X]$ et calculer $p_V(X^3)$ la projection orthogonale de X^3 sur V*

Exercice 3. *Pour* $\alpha > 0$, *on pose* $f(x) = e^{-\alpha|x|}$

1. *Calculer la transformée de Fourier de* f
2. *A l'aide de la formule d'inversion, en déduire la transformée de Fourier de* $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
3. *Calculer* $f \star f$ *(produit de convolution) et calculer la transformée de Fourier de* $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$
4. *Déterminer la transformée de Fourier de* $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$

Exercice 4. *On considère la fonction* f *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, 2π*-périodique, impaire, vérifiant*

$$f(x) = \frac{x}{\pi}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right), \quad \forall x \in [0, \pi].$$

1. *Représenter graphiquement la fonction* f *sur l'intervalle* $[-2\pi, 2\pi]$.
2. *Montrer que la série de Fourier* $\hat{f}$ *associée à* f *s'écrit*

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^{n+1}}{\pi^3 n^3} \sin(nx).$$

3. *Montrer que la fonction* f *est égale à sa série de Fourier.*
4. *En déduire* $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.
5. *Calculer la somme* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$