

## Rapport

# Réalisation d'un modem de fréquence selon la recommandation V21 de l'Union Internationale des Télécommunications (UIT)

*réalisé par*

Samy Afker & Maxime Moshfeghi



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>II</b>	<b>Modem de fréquence</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Génération du signal NRZ</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Génération du signal modulé en fréquence</b>	<b>7</b>
2.1	Signal $x(t)$ modulé en fréquence . . . . .	7
2.2	La densité spectrale de puissance de $x(t)$ . . . . .	8
2.3	Bruit du canal de transmission . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Démodulation par filtrage</b>	<b>12</b>
3.1	Synthèse du filtre passe-bas . . . . .	12
3.2	Synthèse du filtre passe-haut . . . . .	13
3.3	Filtrage . . . . .	13
3.4	Modification du démodulateur . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Démodulateur de fréquence adapté à la norme V21</b>	<b>15</b>
4.1	Contexte de synchronisation idéale . . . . .	15
4.1.1	Calcul préliminaire . . . . .	15
4.1.2	Démodulation FSK . . . . .	16
4.2	Gestion d'une erreur de synchronisation de phase porteuse . . . . .	17
4.2.1	Calcul préliminaire . . . . .	17
4.2.2	Démodulation FSK . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Reconstitution de l'image</b>	<b>21</b>
<b>III</b>	<b>Conclusion</b>	<b>22</b>
1	Bilan . . . . .	23
2	Remerciements . . . . .	23
	<b>Annexe</b>	<b>25</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>26</b>

Première partie

Introduction

Le but de ce projet, réalisé en binôme, est de réaliser un modem (modulateur/démodulateur) de fréquence. Ce dernier devra suivre la recommandation V21 du CCIT<sup>1</sup> et permettra de transmettre de l'information sous forme d'une suite de bits.

Trois versions du modem seront réalisées lors de ce projet, modem par filtrage, modem V21 et modem V21 avec gestion d'une erreur de synchronisation de phase porteuse.

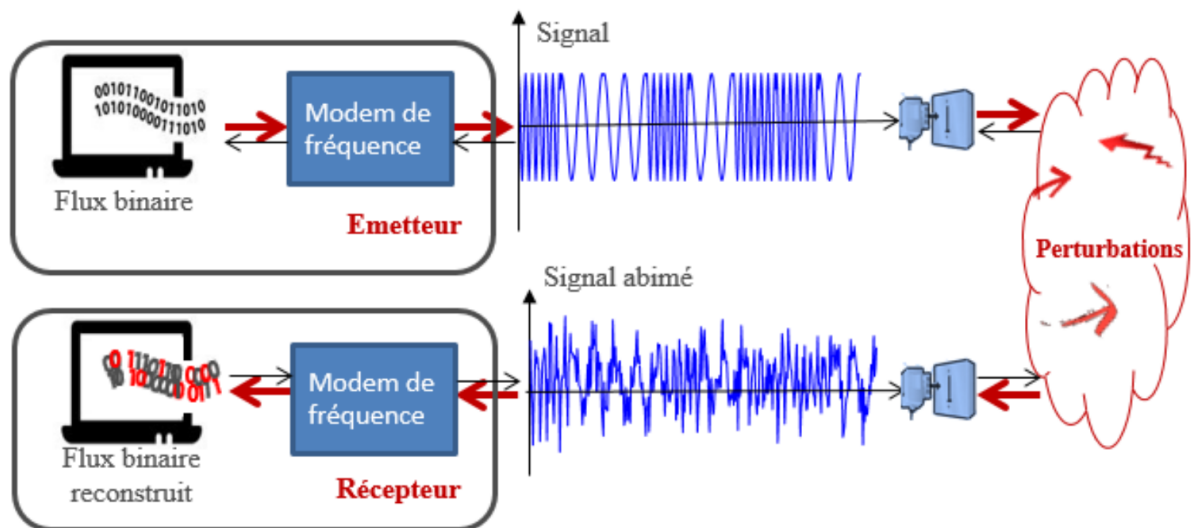


FIGURE 1 – Opération de modulation/démodulation

1. Comité Consultatif International de Téléphonie et de Télégraphie, renommé depuis 1990 Union Internationale des Télécommunications (UIT)

Deuxième partie

Modem de fréquence

# Chapitre 1

## Génération du signal NRZ

Pour commencer, nous avons généré de façon aléatoire un signal NRZ unipolaire qui représente l'information binaire que nous souhaitons transmettre. Chaque bit aura une durée  $T_s$  qui contiendra un nombre  $N_s$  d'échantillons (on prend une fréquence d'échantillonnage  $F_e = 1/T_e = 48$  kHz).

La figure 1.1 est un exemple de signal NRZ avec  $N_s = 3$ .

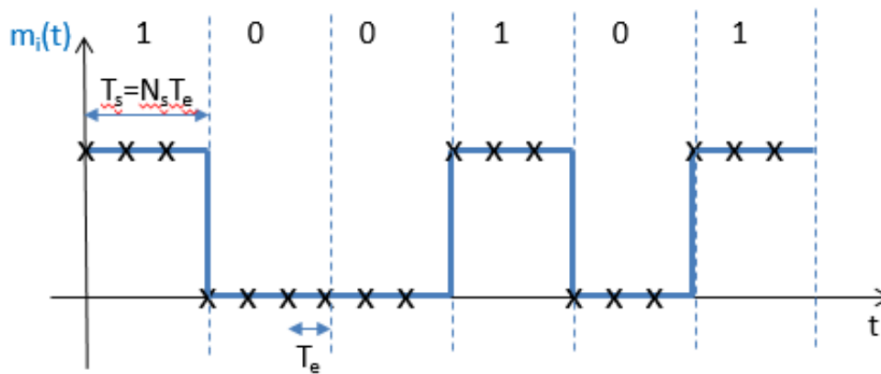


FIGURE 1.1 – Exemple de signal NRZ unipolaire

Pour la suite du projet, nous allons générer un signal NRZ de taille `Taille_signal` avec un débit  $F_s = 300$  bits/s et une fréquence d'échantillonnage  $F_e = 48$  kHz. Ainsi

$$N_s = \frac{F_e}{F_s} = 160.$$

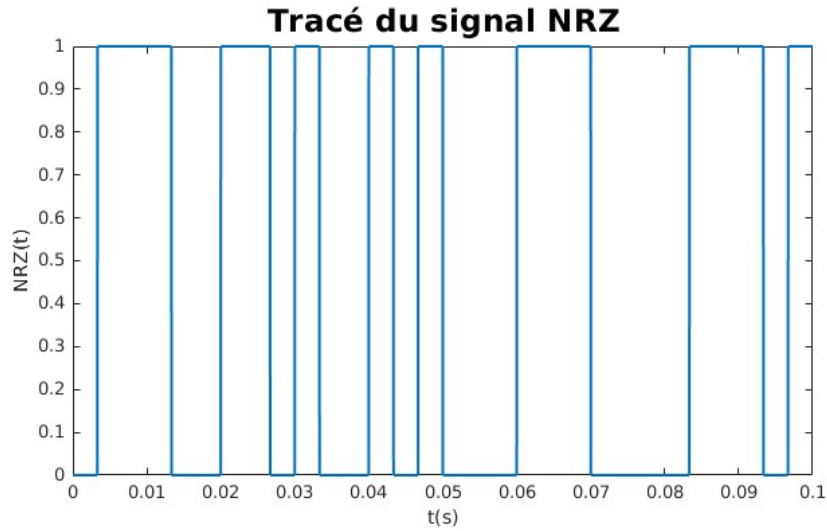


FIGURE 1.2 – Signal NRZ généré

Ensuite, nous avons estimé la densité spectrale de puissance du signal NRZ à l'aide la fonction `pwelch` et nous l'avons tracé ainsi que la DSP théorique donnée par :

$$S_{NRZ}(f) = \frac{1}{4}T_s \text{sinc}^2(\pi f T_s) + \frac{1}{4}\delta(f)$$

On obtient la courbe ci-après :

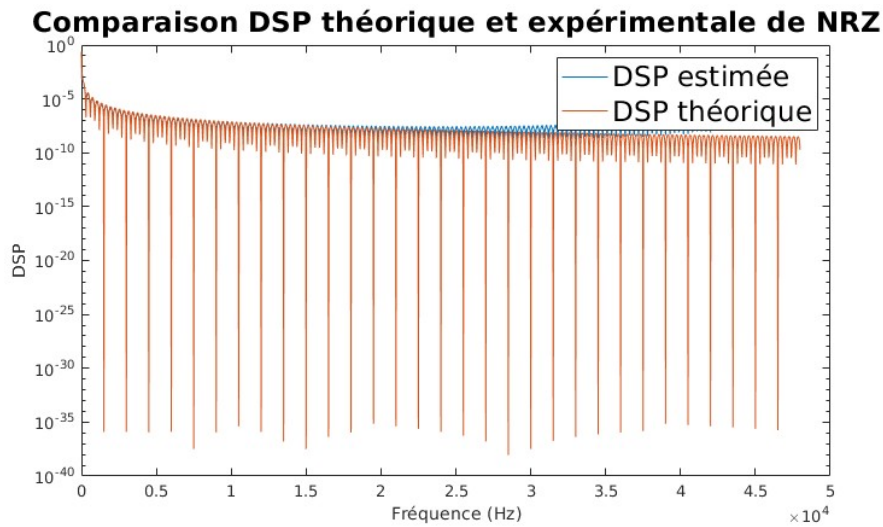


FIGURE 1.3 – Comparaison de la DSP théorique et estimée du signal NRZ

On remarque que les deux courbes de la figure 1.3 sont quasiment superposées sauf vers la fin car la DSP estimée est  $F_e$ -périodique.

## Chapitre 2

# Génération du signal modulé en fréquence

### 2.1 Signal $x(t)$ modulé en fréquence

Après la génération du signal NRZ, nous pouvons maintenant générer le signal  $x(t)$  à transmettre qui sera modulé en fréquence. Chaque bit sera représenté par un morceau de cosinus de durée  $T_s$ . Les bits à 1 seront représentés par un cosinus de fréquence  $F_1 = 980$  Hz et ceux à 0 seront représentés par un cosinus de fréquence  $F_0 = 1180$  Hz.

#### Remarque

Dans la section de démodulation par filtrage, on prend  $F_0 = 6000$  Hz et  $F_1 = 2000$  Hz pour des raisons de limite de la méthode.

Le signal  $x(t)$  s'écrit alors :

$$x(t) = (1 - NRZ(t)) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) + NRZ(t) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1)$$

où  $\phi_0$  et  $\phi_1$  sont des variables aléatoires indépendantes uniformément réparties sur  $[0, 2\pi[$ .

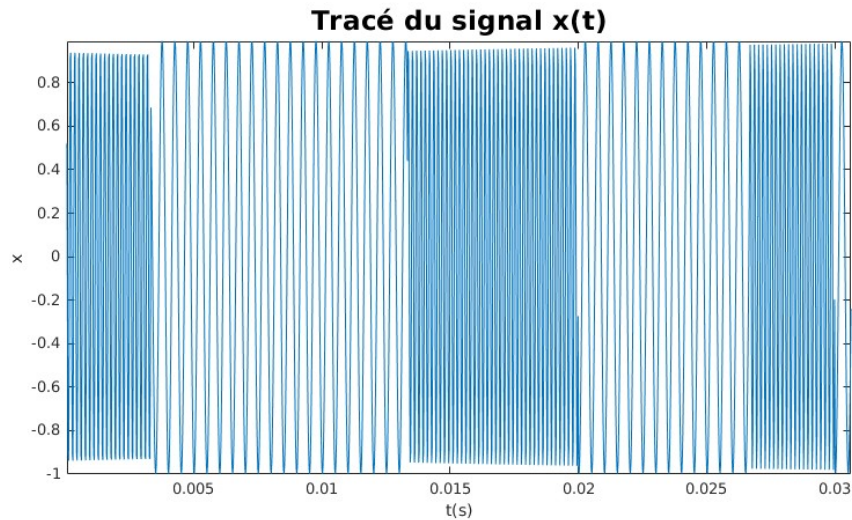


FIGURE 2.1 – Signal  $x(t)$  modulé en fréquence

La figure 2.1 correspond à une partie du signal  $x(t)$  modulé en fréquence. On peut facilement identifier des morceaux de cosinus aux fréquences  $F_0$  et  $F_1$ .



## 2.2 La densité spectrale de puissance de $x(t)$

Premièrement, nous avons calculé la DSP du signal  $x(t)$  :

$$\begin{aligned} x(t) \times x^*(t - \tau) = & \left[ \left( 1 - NRZ(t) \right) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) + NRZ(t) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \right] \\ & \times \left[ \left( 1 - NRZ(t - \tau) \right) \times \cos \left( 2\pi F_0(t - \tau) + \phi_0 \right) \right. \\ & \left. + NRZ(t - \tau) \times \cos \left( 2\pi F_1(t - \tau) + \phi_1 \right) \right] \end{aligned}$$

On pose alors :

$$NRZ_2(t) = \left( 1 - NRZ(t) \right)$$

On remarque que  $NRZ_2$  est aussi un signal NRZ (les valeurs qu'il prend sont soit 0 soit 1).

On obtient après développement :

$$\begin{aligned} x(t) \times x^*(t - \tau) = & \left[ NRZ_2(t) \cos \left( 2\pi F_0 t + \phi_0 \right) \right] \times \left[ NRZ_2(t - \tau) \cos \left( 2\pi F_0(t - \tau) + \phi_0 \right) \right] \\ & + \left[ NRZ_2(t) \cos \left( 2\pi F_0 t + \phi_0 \right) \right] \times \left[ NRZ(t - \tau) \cos \left( 2\pi F_1(t - \tau) + \phi_1 \right) \right] \\ & + \left[ NRZ(t) \cos \left( 2\pi F_1 t + \phi_1 \right) \right] \times \left[ NRZ_2(t - \tau) \cos \left( 2\pi F_0(t - \tau) + \phi_0 \right) \right] \\ & + \left[ NRZ(t) \cos \left( 2\pi F_1 t + \phi_1 \right) \right] \times \left[ NRZ(t - \tau) \cos \left( 2\pi F_1(t - \tau) + \phi_1 \right) \right] \end{aligned}$$

On pose aussi :

$$C_0(t) = \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \text{ et } C_1(t) = \cos(2\pi F_1 t + \phi_1)$$

Avec  $R_x(\tau) = \mathbb{E}[x(t) \times x^*(t - \tau)]$ , on obtient par linéarité de l'espérance et indépendance des signaux  $NRZ$  et  $NRZ_2$  par rapport à  $\phi_0$  et  $\phi_1$  (donc indépendance des signaux  $NRZ$  et  $NRZ_2$  par rapport à  $C_0$  et  $C_1$ ) :

$$\begin{aligned} R_x(\tau) = & R_{NRZ_2}(\tau) \times R_{C_0}(\tau) + R_{NRZ_2 NRZ}(\tau) \times R_{C_0 C_1}(\tau) \\ & + R_{NRZ NRZ_2}(\tau) \times R_{C_1 C_0}(\tau) + R_{NRZ}(\tau) \times R_{C_1}(\tau) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} R_{C_0}(\tau) &= \frac{1}{2} \cos(2\pi F_0 \tau) \\ R_{C_1}(\tau) &= \frac{1}{2} \cos(2\pi F_1 \tau) \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}
R_{NRZ_2NRZ}(\tau) &= \mathbb{E}[NRZ_2(t) \times NRZ(t - \tau)] \\
&= \mathbb{E}[(1 - NRZ(t)) \times NRZ(t - \tau)] \\
&= \mathbb{E}[NRZ(t - \tau) - NRZ(t) \times NRZ(t - \tau)] \\
&= \underbrace{\mathbb{E}[NRZ(t - \tau)]}_{=\frac{1}{2}} - R_{NRZ}(\tau) \quad (\text{par linéarité de l'espérance})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{NRZNRZ_2}(\tau) &= \mathbb{E}[NRZ(t) \times NRZ_2(t - \tau)] \\
&= \mathbb{E}[NRZ(t) \times (1 - NRZ(t - \tau))] \\
&= \mathbb{E}[NRZ(t) - NRZ(t) \times NRZ(t - \tau)] \\
&= \underbrace{\mathbb{E}[NRZ(t)]}_{=\frac{1}{2}} - R_{NRZ}(\tau) \quad (\text{par linéarité de l'espérance})
\end{aligned}$$

Et enfin :

$$\begin{aligned}
R_{C_0C_1}(\tau) &= \mathbb{E}[\cos(2\pi F_0\tau + \phi_0) \cos(2\pi F_1(t - \tau) + \phi_1)] \\
&= \mathbb{E}[\cos(2\pi F_0\tau + \phi_0)] \times \mathbb{E}[\cos(2\pi F_1\tau + \phi_1)] \quad (\text{par indépendance de } \phi_0 \text{ et } \phi_1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

De même :

$$R_{C_1C_0}(\tau) = 0$$

D'où :

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2} \cos(2\pi F_0\tau) \times R_{NRZ_2}(\tau) + \frac{1}{2} \cos(2\pi F_1\tau) \times R_{NRZ}(\tau)$$

On peut alors calculer la densité spectrale de puissance du signal  $x$  :

$$\begin{aligned}
S_x(f) &= TF[R_x(\tau)](f) \\
&= \frac{1}{2} \times \left[ TF[\cos(2\pi F_0\tau)] * TF[R_{NRZ_2}(\tau)] + \right. \\
&\quad \left. TF[\cos(2\pi F_1\tau)] * TF[R_{NRZ}(\tau)] \right]
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
S_x(f) &= \frac{1}{4} \times \left[ (\delta(f - F_0) + \delta(f + F_0)) * S_{NRZ}(f) + \right. \\
&\quad \left. (\delta(f - F_1) + \delta(f + F_1)) * S_{NRZ}(f) \right]
\end{aligned}$$

$$S_x(f) = \frac{1}{4} \times \left[ S_{NRZ}(f - F_0) + S_{NRZ}(f + F_0) + S_{NRZ}(f - F_1) + S_{NRZ}(f + F_1) \right]$$

Finalement, nous pouvons estimer numériquement la densité spectrale de puissance du signal  $x(t)$  afin de la comparer à la fonction DSP théorique calculée ci-dessus.

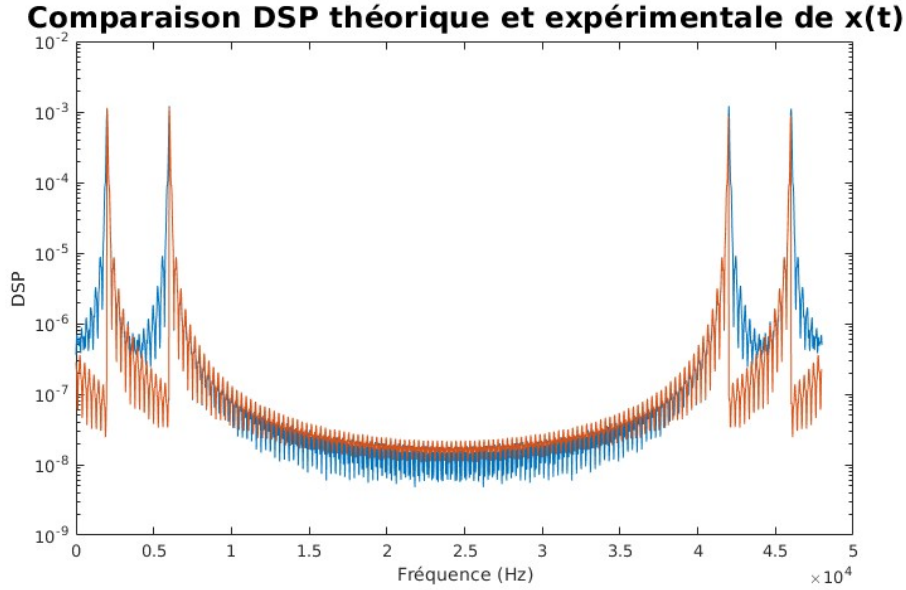


FIGURE 2.2 – DSP théorique et estimée de  $x(t)$

On remarque que les deux courbes sur la figure 2.2 se superposent en présentant deux pics aux fréquences  $F_0$  et  $F_1$ .

### 2.3 Bruit du canal de transmission

En pratique, le canal de transmission de notre signal (ligne téléphonique) ajoute des perturbations au signal transmis. Il est donc important de prendre en compte ce facteur. Afin de modéliser ces perturbations, nous allons considérer que le canal de propagation ajoute au signal émis un bruit que l'on suppose blanc et Gaussien.

Tout d'abord, on se fixe un rapport signal à bruit  $SNR_{dB}$  et on détermine la puissance du bruit à générer grâce à la formule suivante :

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_x}{P_b}$$

On obtient alors :

$$P_b = P_x \times 10^{-\frac{SNR_{dB}}{10}}$$

$P_x$  représente la puissance du signal  $P_x = \mathbb{E}[|x(t)|^2]$ .

On génère alors un signal Gaussien de moyenne nulle et de puissance  $\sigma^2 = P_b$ .

## Chapitre 3

# Démodulation par filtrage

Dans cette partie, nous allons prendre  $F_0 = 6000$  Hz et  $F_1 = 2000$  Hz afin de faire fonctionner le démodulateur (1180 Hz et 980 Hz sont très proches). Dans la suite, nous allons synthétiser des filtres passe-bas et passe-haut d'ordre 61.

### 3.1 Synthèse du filtre passe-bas

En s'aidant du travail réalisé lors du TP2, nous avons généré un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $F_c = \frac{F_0 + F_1}{2} = 4000$  Hz.

$$h_{PB}(t) = (F_0 + F_1) \times \text{sinc}(\pi(F_0 + F_1)t)$$

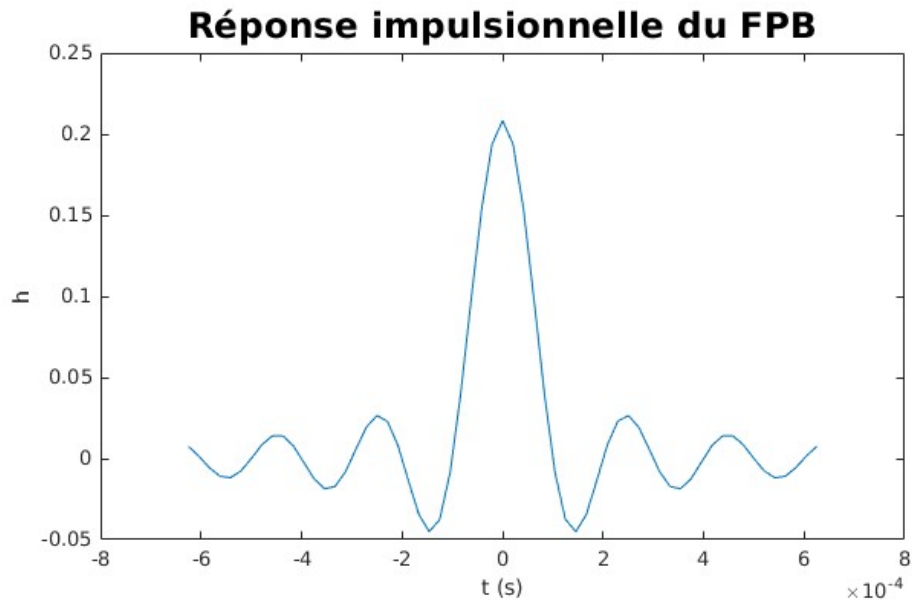


FIGURE 3.1 – Réponse impulsionnelle du filtre passe-bas

### 3.2 Synthèse du filtre passe-haut

Sachant que  $H_{PH}(f) = 1 - H_{PB}(f)$ , on déduit que :

$$h_{PH}(t) = \delta(t) - h_{PB}(t)$$

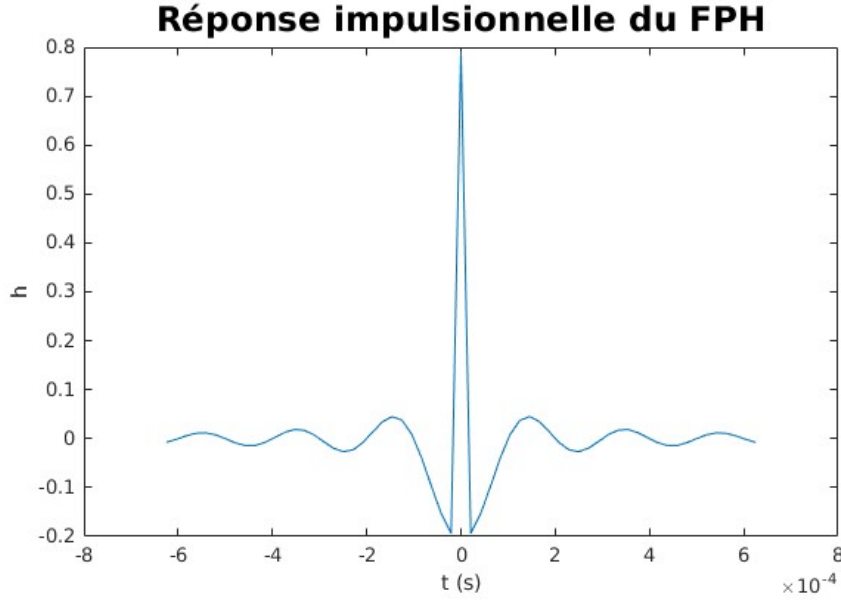


FIGURE 3.2 – Réponse impulsionnelle du filtre passe-haut

### 3.3 Filtrage

Afin de récupérer l'information binaire transmise, nous avons filtré le signal  $x(t)$  en utilisant le filtre passe-bas et nous avons effectué une détection d'énergie. Pour cela, on calcule  $\sum_{n=1}^{N_s} x_n^2$  sur chaque période de temps  $T_s$ . Le bit sera donc à 1 si  $\sum_{n=1}^{N_s} x_n^2 > K$  ( $K$  est un seuil). Il vaudra 0 sinon.

Nous avons choisi  $K = \mathbb{E}(x_n^2)$ .

Si on enlève le bruit, on obtient en sortie des filtres les signaux suivant :

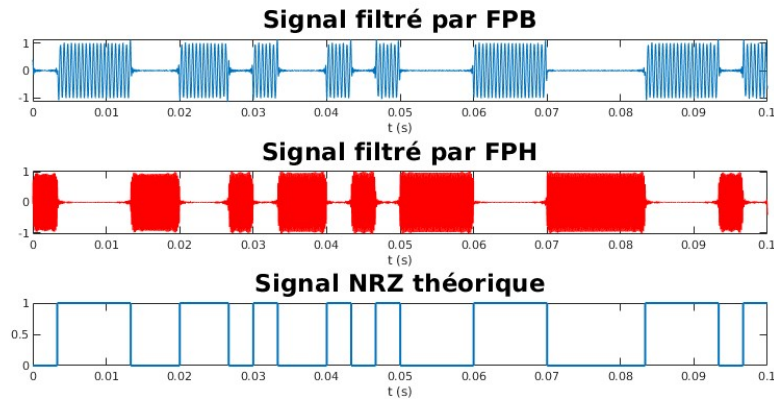


FIGURE 3.3 – Signaux en sortie du filtre

Dans la figure 3.3, le taux d'erreur binaire est nul. Il est important de remarquer que le taux d'erreur binaire augmente en augmentant le bruit. La figure 3.4 illustre l'évolution du taux d'erreur en fonction du bruit :

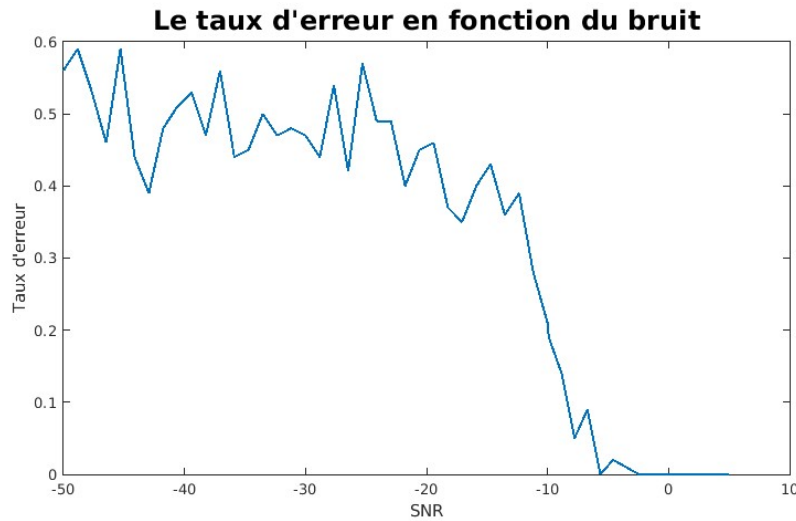


FIGURE 3.4 – Taux d'erreur binaire en fonction du bruit

### 3.4 Modification du démodulateur

Après filtrage, nous avons remarqué que les signaux en sortie présentent un décalage au début. Ceci correspond à la non causalité du filtre, il est donc décalé de  $\frac{\text{Ordre}-1}{2}$ .

Afin de résoudre ce problème, on allonge le signal de  $\frac{\text{Ordre}-1}{2}$  échantillons puis on recoupe la même quantité du signal en sortie du filtre.

Finalement, on se propose de générer un signal  $x(t)$  composé de morceaux de cosinus de fréquences  $F_0 = 1180$  Hz et  $F_1 = 980$  Hz. On remarque que le taux binaire n'est pas nul même sans bruit. La raison est que les deux fréquences sont très proches. c'est la limite de la méthode par filtrage.

## Chapitre 4

# Démodulateur de fréquence adapté à la norme V21

### 4.1 Contexte de synchronisation idéale

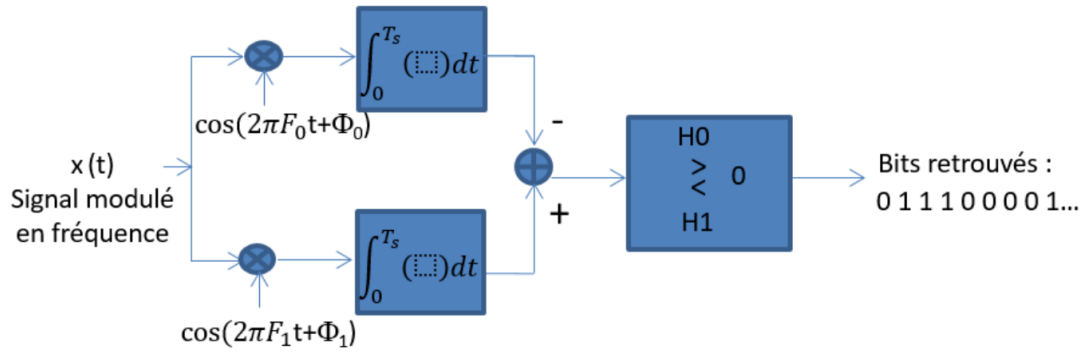


FIGURE 4.1 – Démodulation FSK. Synchronisation supposée idéale.

#### 4.1.1 Calcul préliminaire

$$I_0 = \int_0^{T_s} \cos^2(2\pi F_0 t + \phi_0) dt = \frac{1}{2}T_s + \underbrace{\frac{1}{8\pi F_0}(\sin(4\pi F_0 T_s + 2\phi_0) - \sin(2\phi_0))}_{\ll \frac{1}{2}T_s}$$

Donc :

$$I_0 = \int_0^{T_s} \cos^2(2\pi F_0 t + \phi_0) dt \simeq \frac{1}{2}T_s$$

De même :

$$I_1 = \int_0^{T_s} \cos^2(2\pi F_1 t + \phi_1) dt \simeq \frac{1}{2}T_s$$

D'où :



$$I_0 \simeq I_1$$

On trouve aussi :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{T_S} \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2\pi(F_1 - F_0)} \left( \sin(2\pi(F_1 - F_0)T_S + \phi_1 - \phi_0) - \sin(\phi_1 - \phi_0) \right) \right. \\ &\quad \left. + \overbrace{\frac{1}{2\pi(F_1 + F_0)} \left( \sin(2\pi(F_1 + F_0)T_S + \phi_1 - \phi_0) - \sin(\phi_1 + \phi_0) \right)}^{\text{négligeable}} \right] \end{aligned}$$

D'où :

$$I_2 \simeq \frac{1}{4\pi(F_1 - F_0)} \left( \sin(2\pi(F_1 - F_0)T_S + \phi_1 - \phi_0) - \sin(\phi_1 - \phi_0) \right)$$

#### 4.1.2 Démodulation FSK

Rappel de l'expression du signal  $x(t)$

$$x(t) = (1 - NRZ(t)) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) + NRZ(t) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1)$$

Il y a alors deux cas.

**Cas 1 : le bit d'intérêt est égal à 0**

On a alors  $NRZ(t) = 0 \forall t \in [t_0, t_0 + T_S]$ . Le signal  $x(t)$  devient alors :

$$x(t) = \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)$$

Ainsi, d'après le modèle, on obtient la sortie suivante :

$$S_0 = I_2 - I_0$$

**Cas 2 : le bit d'intérêt est égal à 1**

On a alors  $NRZ(t) = 1 \forall t \in [t_0, t_0 + T_S]$ . Le signal  $x(t)$  devient alors :

$$x(t) = \cos(2\pi F_1 t + \phi_1)$$

De même, on obtient la sortie suivante :

$$\begin{aligned} S_1 &= I_1 - I_2 = I_0 - I_2 \\ S_1 &= -S_0 \end{aligned}$$

## Bilan

Ainsi, comme  $I_2 < I_0$  on en déduit :

$$S_0 < 0$$

$$S_1 > 0$$

Il est ainsi simple de reconstruire le signal NRZ initial : la sortie est négative quand le NRZ est nul et positive quand le NRZ vaut 1.

Le taux d'erreur binaire obtenu sans bruit est  $\tau = 0\%$ .

## 4.2 Gestion d'une erreur de synchronisation de phase porteuse

En changeant les phases des cosinus dans la méthode précédente, on obtient des résultats faux (taux d'erreur binaire très haut). En réalité, on ne peut pas connaître les phases  $\phi_0$  et  $\phi_1$ , d'où l'intérêt de cette dernière méthode.

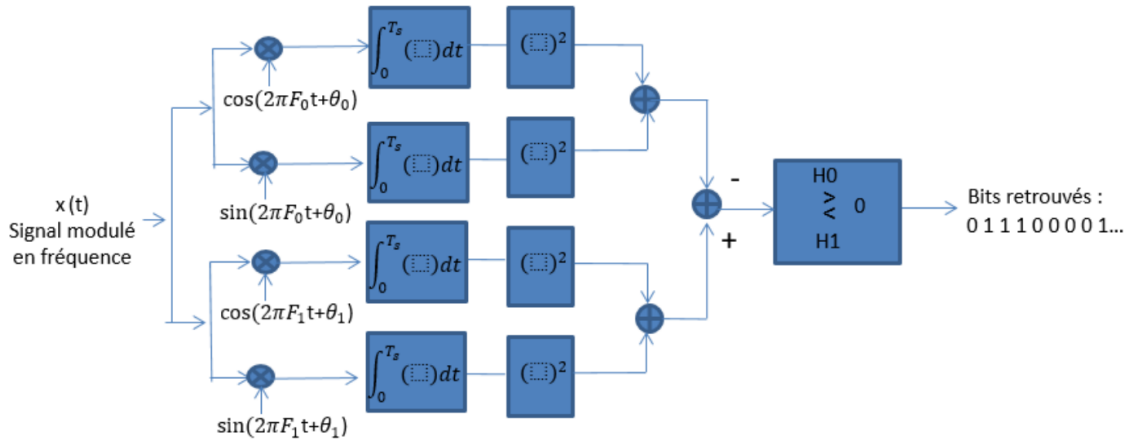


FIGURE 4.2 – Démodulation FSK - Gestion d'une erreur de phase porteuse.

### 4.2.1 Calcul préliminaire

On a :

$$\cos(2\pi\nu_0 t + \psi_0) \times \cos(2\pi\nu_1 t + \psi_1) = \frac{1}{2} \left[ \cos(2\pi(\nu_0 - \nu_1)t + \psi_0 - \psi_1) + \cos(2\pi(\nu_0 + \nu_1)t + \psi_0 + \psi_1) \right]$$

$$\sin(2\pi\nu_0 t + \psi_0) \times \cos(2\pi\nu_1 t + \psi_1) = \frac{1}{2} \left[ \sin(2\pi(\nu_0 - \nu_1)t + \psi_0 - \psi_1) + \sin(2\pi(\nu_0 + \nu_1)t + \psi_0 + \psi_1) \right]$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 I_{10} &= \int_0^{T_S} \cos(2\pi F_0 t + \theta_0) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) dt \\
 &= \frac{T_S}{2} \cos(\theta_0 - \phi_0) + \frac{1}{8\pi F_0} \left[ \sin(4\pi F_0 t + \theta_0 + \phi_0) \right]_0^{T_S} \\
 &\simeq \frac{T_S}{2} \cos(\theta_0 - \phi_0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \int_0^{T_S} \cos(2\pi F_0 t + \theta_0) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) dt \\
 &= \frac{1}{4\pi} (K_1^- + K_1^+)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{20} &= \int_0^{T_S} \sin(2\pi F_0 t + \theta_0) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) dt \\
 &= \frac{T_S}{2} \sin(\theta_0 - \phi_0) + \frac{1}{8\pi F_0} \left[ -\cos(4\pi F_0 t + \theta_0 + \phi_0) \right]_0^{T_S} \\
 &\simeq \frac{T_S}{2} \sin(\theta_0 - \phi_0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{21} &= \int_0^{T_S} \sin(2\pi F_0 t + \theta_0) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) dt \\
 &= \frac{1}{4\pi} (K_2^- + K_2^+)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{30} &= \int_0^{T_S} \cos(2\pi F_1 t + \theta_1) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) dt \\
 &= \frac{1}{4\pi} (K_3^- + K_3^+)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{31} &= \int_0^{T_S} \cos(2\pi F_1 t + \theta_1) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) dt \\
 &= \frac{T_S}{2} \cos(\theta_1 - \phi_1) + \frac{1}{8\pi F_1} \left[ \sin(4\pi F_1 t + \theta_1 + \phi_1) \right]_0^{T_S} \\
 &\simeq \frac{T_S}{2} \cos(\theta_1 - \phi_1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{40} &= \int_0^{T_S} \sin(2\pi F_1 t + \theta_1) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) dt \\
&= \frac{1}{4\pi} (K_4^- + K_4^+)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{41} &= \int_0^{T_S} \sin(2\pi F_1 t + \theta_1) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) dt \\
&\simeq \frac{T_S}{2} \sin(\theta_1 - \phi_1)
\end{aligned}$$

**Remarque**

Pour  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  et  $\Delta \in \{+, -\}$ ,  $|K_i^\Delta| \leq \frac{1}{F_1 - F_0} \simeq 10^{-2}$ . Ainsi,  $\frac{1}{4\pi} (K_i^- + K_i^+) \leq 10^{-3}$ . L'expression des constantes  $K_i^\Delta$  est donnée en annexe.

**4.2.2 Démodulation FSK****Cas 1 : le bit d'intérêt est égal à 0**

D'après le modèle, on obtient la sortie suivante :

$$\begin{aligned}
S_0 &= I_{30}^2 + I_{40}^2 - (I_{10}^2 + I_{20}^2) \\
&= \underbrace{\frac{1}{16\pi^2} \left( (K_3^- + K_3^+)^2 + (K_4^- + K_4^+)^2 \right)}_{\text{négligeable devant } \frac{T_S^2}{4}} \\
&\quad - \frac{T_S^2}{4} \underbrace{\left( \cos^2(\theta_0 - \phi_0) + \sin^2(\theta_0 - \phi_0) \right)}_{=1}
\end{aligned}$$

Donc :

$$S_0 \simeq -\frac{T_S^2}{4}$$

**Cas 2 : le bit d'intérêt est égal à 1**

La sortie est alors la suivante :

$$\begin{aligned}
S_1 &= I_{31}^2 + I_{41}^2 - (I_{11}^2 + I_{21}^2) \\
&= \frac{T_S^2}{4} \underbrace{\left( \cos^2(\theta_1 - \phi_1) + \sin^2(\theta_1 - \phi_1) \right)}_{=1} \\
&\quad - \underbrace{\frac{1}{16\pi^2} \left( (K_1^- + K_1^+)^2 + (K_2^- + K_2^+)^2 \right)}_{\text{négligeable devant } \frac{T_S^2}{4}}
\end{aligned}$$

Donc :

$$S_1 \simeq \frac{T_S^2}{4}$$

Le taux d'erreur binaire obtenu sans bruit est  $\tau = 0\%$ .

## Chapitre 5

# Reconstitution de l'image

Finalement, en utilisant le programme `Reconstitution.m` permettant de retrouver l'image contenue dans les fichiers `fichieri.mat` avec  $i \in \{1, \dots, 6\}$ , on obtient :

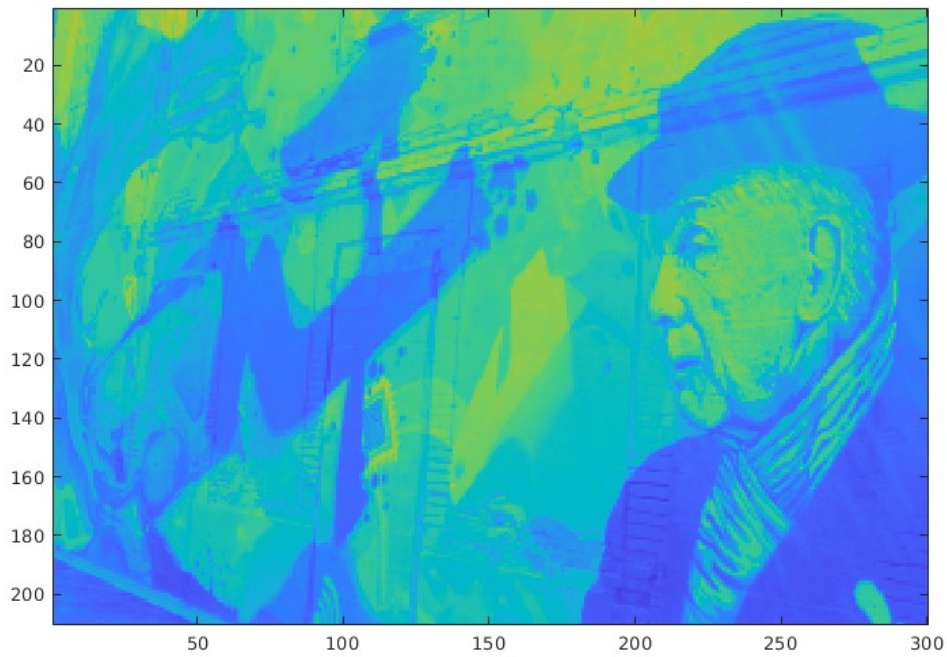


FIGURE 5.1 – L'image retrouvée

Troisième partie

Conclusion

## 1 Bilan

Ce projet nous a permis de comparer les différents moyens de démodulation d'un signal. Il apparaît ainsi que le dernier modèle est le plus correct. En effet, le premier modèle, très simple car il s'agit d'un filtrage linéaire basique, ne permet pas d'obtenir un taux d'erreur binaire nul à cause des fréquences rapprochées des deux composantes du signal que l'on cherche à filtrer. Ensuite, le deuxième modèle, bien que fonctionnel et efficace ne correspond pas à la réalité car il suppose que l'on connaisse les phases à l'origine. Enfin, le dernier modèle réalise parfaitement les opérations que l'on cherche à effectuer, sans erreur binaire et sans avoir besoin de connaître les phases à l'origine.

## 2 Remerciements

Merci à l'ensemble des enseignants pour leurs aides précieuses apportées durant les séances de projet.



# Annexe

## Constantes $K_i^\Delta$

$$K_1^- = \frac{1}{F_0 - F_1} \left[ \sin(2\pi(F_0 - F_1)T_S + \theta_0 - \phi_1) - \sin(\theta_0 - \phi_1) \right]$$

$$K_1^+ = \frac{1}{F_0 + F_1} \left[ \sin(2\pi(F_0 + F_1)T_S + \theta_0 + \phi_1) - \sin(\theta_0 + \phi_1) \right]$$

$$K_2^- = \frac{1}{F_0 - F_1} \left[ \cos(\theta_0 - \phi_1) - \cos(2\pi(F_0 - F_1)T_S + \theta_0 - \phi_1) \right]$$

$$K_2^+ = \frac{1}{F_0 + F_1} \left[ \cos(\theta_0 + \phi_1) - \cos(2\pi(F_0 + F_1)T_S + \theta_0 + \phi_1) \right]$$

$$K_3^- = \frac{1}{F_1 - F_0} \left[ \sin(2\pi(F_1 - F_0)T_S + \theta_1 - \phi_0) - \sin(\theta_1 - \phi_0) \right]$$

$$K_3^+ = \frac{1}{F_1 + F_0} \left[ \sin(2\pi(F_1 + F_0)T_S + \theta_1 + \phi_0) - \sin(\theta_1 + \phi_0) \right]$$

$$K_4^- = \frac{1}{F_1 - F_0} \left[ \cos(\theta_1 - \phi_0) - \cos(2\pi(F_1 - F_0)T_S + \theta_1 - \phi_0) \right]$$

$$K_4^+ = \frac{1}{F_1 + F_0} \left[ \cos(\theta_1 + \phi_0) - \cos(2\pi(F_1 + F_0)T_S + \theta_1 + \phi_0) \right]$$

# Bibliographie

- [1] Equipe pédagogique - Traitement du Signal (2022), *Projet de Traitement Numérique du Signal - Réalisation d'un modem de fréquence selon la recommandation V21 de l'Union Internationale des Télécommunications (UIT)*, ENSEEIHT.