INSA Toulouse
Éléments finis

Année 2024 - 2025
5$^{\text{e}}$ année ModIA

TP 2 :
Équation de la chaleur

Ce projet propose d'étudier le problème de l'équation de la chaleur sous contrainte. Ce problème modélise par exemple l'évolution de la température d'une pièce au cours du temps en présence d'une source de chaleur.

Considérons une pièce modélisée par un domaine rectangulaire $\Omega =]-a, a[\times]-b, b[$ dans laquelle une source de chaleur, représentée par un domaine $F \subset \Omega$, impose une température T_F constante.

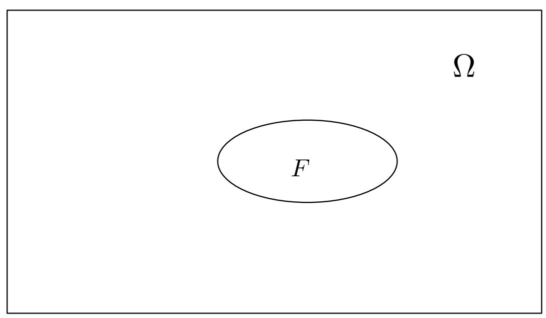

Figure 1 – Domaine Ω avec la source de chaleur F.

Le problème modélisant l'évolution de la température $T(t, \boldsymbol{x})$ au cours du temps et en espace s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - \mu \triangle T &= 0 \quad \text{dans } \Omega \backslash F, \\ T &= T_F \quad \text{dans } F, \end{aligned} \tag{1}$$

avec μ la conductivité du milieu (pour commencer l'air). Pour prendre en compte la contrainte imposée par la source de chaleur sur le domaine F, nous allons utiliser une méthode de pénalisation. Cette méthode est intéressante car facile à mettre en œuvre et permet de considérer des sources mobiles au cours du temps sans nécessairement devoir remailler le domaine à chaque pas de temps. Dans un premier temps, nous nous intéressons à la mise en œuvre de cette méthode de pénalisation dans le cas stationnaire. Nous regardons ensuite le cas instationnaire, puis nous nous intéressons au cas où la source de chaleur est mobile afin de réchauffer par exemple une plaque métallique à l'aide d'un chalumeau.

Exercice 1 *Chauffage d'une pièce (cas stationnaire).*

Le problème stationnaire peut être vu comme la limite en temps long de la solution instationnaire que nous verrons ensuite. Dans le cas stationnaire, le problème s'écrit

$$-\mu\triangle T = 0 \quad \text{dans } \Omega\backslash F,$$
$$T = T_F \text{ dans } F.$$

Les conditions limites que nous considérons ici et dans la partie suivante sont de type Dirichlet ; un mur de notre pièce est constitué d'une baie vitrée donnant vers l'extérieur et imposant une température correspondant à celle de l'extérieur, que nous prendrons à $T_{\text{ext}} = 0$. Les trois autres murs ont une température imposée correspondant aux appartements voisins, et l'on prendra $T_{\text{vois}} = 25$.

Pour imposer une température T égale à T_F dans F, nous allons pénaliser l'équation $T - T_F = 0$ dans F. Soit $\varepsilon > 0$ le paramètre de pénalisation, la formulation variationnelle pénalisée consiste à déterminer $T_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions de Dirichlet évoquées ci-dessus telle que pour toute fonction test $v : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\int_{\Omega\backslash F} \mu\nabla T_\varepsilon \cdot \nabla v + \frac{1}{\varepsilon}\int_F (T_\varepsilon - T_F)v = 0.$$

En particulier, on pourra s'assurer que si $||T_\varepsilon||_{\mathbb{L}^2(\Omega\backslash F)}$ est bornée, alors $||T_\varepsilon - T_F||_{\mathbb{L}^2(\Omega\backslash F)} \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Dans la suite, nous omettrons la dépendance en ε et nous écrirons T au lieu de T_ε.

A faire. Implémenter les schémas éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ de ce problème en choisissant une source de chaleur F sous la forme d'un disque à la température $T_F = 50$. Étudier l'influence de ε.

Exercice 2 *Chauffage d'une pièce (cas instationnaire).*

Le problème instationnaire (1) se discrétise en deux étapes. La première étape consiste à considérer les variations en temps. On note alors $T^n(\boldsymbol{x})$ une approximation de $T(t_n, \boldsymbol{x})$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega$ avec $t_n = n\Delta t$ et $\Delta t > 0$ notre pas de temps. Le schéma d'Euler implicite s'écrit donc

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} - \mu\triangle T^{n+1} = 0 \quad \text{dans } \Omega\backslash F,$$
$$T^{n+1} = T_F \text{ dans } F.$$

La deuxième étape consiste à discrétiser par éléments finis ce problème d'inconnue T^{n+1}. La formulation variationnelle pénalisée s'écrit alors, pour toute fonction test $v : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\int_{\Omega\setminus F} T^{n+1}v - \int_{\Omega\setminus F} T^n v + \Delta t \left(\int_{\Omega\setminus F} \mu \nabla T^{n+1} \cdot \nabla v + \frac{1}{\varepsilon} \int_F (T^{n+1} - T_F) v \right) = 0.$$

En plus des conditions limites, il nous faut préciser une condition initiale. Pour cela, nous supposons que les occupants de cette pièce ont été absents longtemps, que le chauffage était éteint en leur absence et qu'ils le rallument à leur arrivée.

A faire. Implémenter le schéma ci-dessus. La solution doit converger vers la solution stationnaire calculée dans la partie précédente. Calculer le temps nécessaire qu'il faut pour chauffer cette pièce en calculant l'erreur $||T - T_{\text{sta}}||_{\mathbb{L}^2(\Omega)}$. On pourra arrêter la boucle sur le pas de temps dès lors que l'erreur passe en dessous de 10^{-2} par exemple.

Exercice 3 *Chauffage à blanc d'une plaque métallique.*

On considère maintenant une plaque métallique représentée par Ω à une température initiale T_i. On souhaite chauffer à cette plaque à une température donnée T_c. Pour cela, nous disposons d'un chalumeau que nous réglons à cette température T_c, que nous allons faire tourner au dessus de notre plaque. Le domaine de chauffe représente ainsi le point d'impact du chalumeau sur notre plaque et est maintenant mobile au cours du temps. On le notera donc $F(t)$. Le point d'impact du chalumeau sera modélisé par un disque de rayon r et tournant autour du centre de la plaque à la pulsation ω. Ainsi, nous aurons

$$F(t) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a/2\cos(\omega t))^2 + (y - b/2\sin(\omega t))^2 \leqslant r^2 \right\}.$$

Les conditions limites sur le bord de la plaque seront maintenant libres, et on prendra des conditions de Neumann homogènes. Le problème s'écrit ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - \mu \triangle T &= 0 \quad \text{dans } \Omega\setminus F(t), \\ T &= T_c \quad \text{dans } F(t), \\ \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ T(t = 0, \boldsymbol{x}) &= T_i \quad \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

Discrétisé en temps par l'algorithme d'Euler implicite, le problème portant sur T^{n+1} s'écrit ainsi

$$\int_{\Omega\setminus F^{n+1}} T^{n+1}v - \int_{\Omega\setminus F^{n+1}} T^{n}v + \Delta t\left(\int_{\Omega\setminus F^{n+1}} \mu\nabla T^{n+1}\cdot\nabla v + \frac{1}{\varepsilon}\int_{F^{n+1}}(T^{n+1}-T_c)v\right) = 0.$$

A faire. Implémenter le schéma ci-dessus en choisissant $T_i = 20$, $T_c = 800$ et $\mu = 25$ la conductivité de l'inox. Visualiser la solution au cours du temps et comparé la vitesse de chauffe en fonction de ω et en la comparant à la situation où la plaque est chauffée au centre sans rotation du chalumeau. On fera attention de prendre un pas de temps suffisamment petit relativement à ω. Pour afficher la solution avec des isovaleurs constantes, on utilisera la commande suivante

```
real[int] vviso(28);
real[int] arrperso(28) ;
for (int i=0;i<28;i++)
  vviso[i]=(20+30*i) ;
arrperso = vviso ;
...
plot(Th,u,...,viso=vviso,varrow=arrperso);
```