CC ModIA

Exercice 1

Si p_V projection orthogonale alors $\forall x \in H$

$$x = \underbrace{p_V(x)}_{\in V} + \underbrace{x - p_V(x)}_{\in V^\perp}$$

(a)
$$\begin{aligned}
\langle x ; p_V(y) \rangle &= \langle p_V(x) + x - p_V(x) ; p_V(y) \rangle \\
&= \langle p_V(x) ; p_V(y) \rangle + \underbrace{\langle x - p_V(x) ; p_V(y) \rangle}_{= 0 \text{ (orthogonalité)}} \\
&= \langle p_V(x) ; y \rangle
\end{aligned}$$

en échangeant le rôle de x et y

(b) Avec $x = y$

$$\langle p_V(x) ; p_V(x) \rangle = \langle x ; p_V(x) \rangle \quad \text{d'après 1a}$$

$$\leq \|x\| \, \|p_V(x)\| \quad \text{(Cauchy Schwarz)}$$

D'où $\|p_V(x)\|^2 \leq \|x\| \, \|p_V(x)\| \Rightarrow \|p_V(x)\| \leq \|x\|$.

(c)
$$p_V(f) = \langle f ; 1 \rangle \times \frac{1}{\|1\|^2} + \langle f ; \sin(2\pi \cdot) \rangle \frac{\sin(2\pi \cdot)}{\|\sin(2\pi \cdot)\|^2} + \langle f ; \cos(2\pi \cdot) \rangle \frac{\cos(2\pi \cdot)}{\|\cos(2\pi \cdot)\|^2}$$

$$\langle f ; 1 \rangle = \int_0^1 t \times 1 \, dt = \frac{1}{2}$$

$$\langle f ; e^{2i\pi \cdot} \rangle = \int_0^1 t \, e^{2i\pi t} dt = \left[t \frac{e^{2i\pi t}}{2i\pi} \right]_0^1 - \frac{1}{2i\pi} \int_0^1 e^{2i\pi t} dt$$

$$= \frac{1}{2i\pi} = -\frac{1}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \langle f ; \cos(2\pi \cdot) \rangle = 0 \qquad \langle f ; \sin(2\pi \cdot) \rangle = -\frac{1}{2\pi}.$$

$$\int_0^1 \cos(2\pi t)^2 \, dt = \int_0^1 \sin(2\pi t)^2 \, dt.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \cos^2(2\pi t)\, dt + \int_0^1 \sin^2(2\pi t)\, dt = 1$

$$\Rightarrow \|\cos(2\pi \cdot)\|^2 = \frac{1}{2} \qquad \|\sin(2\pi \cdot)\|^2 = \frac{1}{2}$$

$$p_V(f) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(2\pi \cdot)}{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sin(2\pi \cdot)}{\pi}$$

2°) a) Pour tout $d \in C$

$$\|d - x\|^2 \geq \|p_C(x) - x\|^2$$

Soit $d \in C$ alors $\forall t \in [0,1]$ $\quad t d + (1-t) p_C(x) \in C$

d'où $\quad \|t d + (1-t) p_C(x) - x\|^2 \geq \|x - p_C(x)\|^2 \quad \forall t \in [0,1]$

<u>Ainsi</u> $\quad \|x - p_C(x) - t(d - p_C(x))\|^2 \geq \|x - p_C(x)\|^2$

$$\Rightarrow -t \langle x - p_C(x) ; d - p_C(x) \rangle + t^2 \|d - p_C(x)\|^2 \geq 0$$

On divise par $t > 0$ et on passe à la limite $t \to 0$.

Cela donne

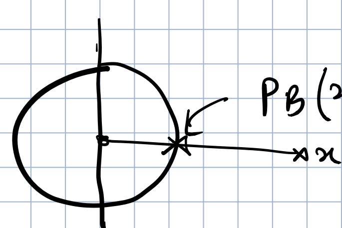
$$-\langle x - p_C(x) ; d - p_C(x) \rangle \geq 0$$

b) $\|p_C(x) - p_C(y)\|^2 = \langle p_C(x) - p_C(y) ; p_C(x) - p_C(y) \rangle$

$$= \boxed{\langle p_C(x) - x \,;\, p_C(x) - p_C(y) \rangle} \leq 0$$
$$+ \langle x - p_C(y) \,;\, p_C(x) - p_C(y) \rangle$$
$$\leq \langle x - p_C(y) \,;\, p_C(x) - p_C(y) \rangle$$
$$\leq \langle x - y \,;\, p_C(x) - p_C(y) \rangle$$
$$+ \boxed{\langle y - p_C(y) \,;\, p_C(x) - p_C(y) \rangle} \leq 0$$
$$\leq \langle x - y \,;\, p_C(x) - p_C(y) \rangle$$
$$\leq \|x - y\| \, \|p_C(x) - p_C(y)\| \quad \text{(Cauchy Schwarz)}$$

$$\Longrightarrow \quad \|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\| .$$

c)



$$p_B(x) = \frac{x}{\|x\|} \quad \text{si } \|x\| > 1 ,$$
$$= x \quad \text{si } \|x\| \leq 1 .$$

Exercice 2

1°) La bilinéarité et la symétrie sont élémentaires.

De même $\forall P \in E$ $\int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt \geq 0$.

Si $\int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt = 0$ alors $P^2(t) = 0$ $\forall t \in [-1;1]$

on a donc un polynôme ayant une infinité de racines donc $P = 0$.

2°) $L_0(x) = 1$

$L_0(x) =$

$L_1(x) = (x^2-1)' = 2x$

$L_2(x) \quad [(x^2-1)^2]'' = [2(x^2-1) \times 2x]' = 4[x^3-x]'$

$= 12x^2 - 4.$

3°) On a $(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{2k} (-1)^{n-k}$

$= x^{2n} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^{2k} (-1)^{n-k}$

Or $\frac{d}{dx^j}(x^m) = m(m-1) \ldots (m-j+1) x^{m-j}$

<u>Ainsi</u> $\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n) = 2n \times \ldots (2n-n+1) x^n$

$+ \underbrace{\frac{d^n}{dx^n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k x^{2k} (-1)^{n-k}\right)}_{\text{degré} < n}$

D'où L_n polynôme de degré n de coefficient $\frac{2n!}{n!}$

4°) On commence par remarquer que

$+1$ et -1 sont racines de $(x^2-1)^n$ d'ordre n

Ainsi $\forall k < n$ on a $\frac{d^k}{dx^k}((x^2-1)^n)\Big|_{x=\pm 1} = 0$

Ensuite les $(L_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont à degré étagé : ils forment une base de E

Il suffit que montrer que

$\langle L_k ; L_n \rangle = 0 \quad \forall k < n.$

On a

$$\langle L_k ; L_n \rangle = \int_{-1}^{1} L_k(x) \frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right) dx.$$

$$= \cancel{\left[L_k(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2-1)^n \right]_{-1}^{1}} - \int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(L_k(x)\right) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left((x^2-1)^n\right)$$

On réitère le procédé n fois.

$$\langle L_k ; L_n \rangle = (-1)^n \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n} \left(L_k(x)\right) (x^2-1)^n dx$$

Or $n > k \Rightarrow \dfrac{d^n}{dx^n}\left(L_k(x)\right) = 0$.

Ainsi $\langle L_k ; L_n \rangle = 0$.

5°) Trivial.

6°) $\|L_n\|^2 = (-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \times (2n)!\, dx$

$$= (2n)! \times 2 \times \int_0^1 (1-x^2)^n dx$$ (par symétrie + disjonction de cas n pair/impair)

$$= (2n)! \times 2 \times \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2(t))^n \sin(t)\, dt.$$

$$= (2n)! \times 2 \times \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t)\, dt. \qquad x = \cos(t)$$

$$= (2n)! \times 2 \times \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{2}{2n+1} (2^n n!)^2$$

7°) On a L_n est pair si n pair
L_n est impair si n impair

(car $x \mapsto (x^2-1)^n$ est pair)

$$pv(x^3) = \sum_{j=0}^{2} \langle x^3 ; L_j(x) \rangle \times \frac{L_j(x)}{\|L_j\|^2}$$ ($L_0 ; L_1 ; L_2$ base orthogonale de V)

or $\langle x^3 ; L_0 \rangle = \langle x^3 ; L_2 \rangle = 0$

$$pv(x^3) = \langle x^3 ; 2x \rangle \times \frac{2x}{\|2x\|^2}$$

$$\int_{-1}^{1} 2x^4 = 4\int_0^1 x^4 = \frac{4}{5}$$

$$\int_{-1}^{1} (2x)^2 = 4\int_{-1}^{1} x^2 dx = 8\int_0^1 x^2 = \frac{8}{3}$$

$$pv(x^3) = \frac{4}{5} \times \frac{2x}{8/3} = \frac{3x}{5}$$

<u>Exercice 3</u>

1°) $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} e^{-\alpha|x|} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-ix\xi} e^{-\alpha x} + \int_{-\infty}^{0} e^{-ix\xi} e^{\alpha x} dx$$

$$= \left[\frac{e^{-(i\xi+\alpha)x}}{-(i\xi+\alpha)} \right]_0^{\infty} + \left[\frac{e^{(\alpha-i\xi)x}}{\alpha-i\xi} \right]_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{\alpha+i\xi} + \frac{1}{\alpha-i\xi} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\xi^2}$$

2°) <u>Pour $\alpha = 1$</u> $\quad \frac{1}{2}\hat{f}(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$

La transformée de Fourier de $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ est donnée

par $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \frac{1}{} dx = \frac{1}{} \int^{+\infty} e^{-ix\xi} \hat{f}(x) dx$

$$= \pi \times \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(-\xi)x}\,\hat{f}(x)\,dx$$

$$= \pi \times f(-\xi) \quad \text{(formule d'inversion)}$$

$$= \pi\, e^{-|\xi|}.$$

3°) $$f*f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x-y|}\, e^{-\alpha|y|}\,dy$$

$f*f$ est pair $(x \to -x\,;\ y \to -y)$ On suppose $\underline{x \geq 0}$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha|x-y|}\, e^{\alpha y} + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha|x-y|}\, e^{-\alpha y}\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha x}\, e^{2\alpha y} + \int_{0}^{x} e^{-\alpha|x-y|}\, e^{-\alpha y}\,dy$$

$$+ \int_{x}^{+\infty} e^{-\alpha|x-y|}\, e^{-\alpha y}\,dy$$

$$= \frac{e^{-\alpha x}}{2\alpha} + \int_{0}^{x} e^{-\alpha x}\,dy + \int_{x}^{\infty} e^{-\alpha(y-x)}\, e^{-\alpha y}$$

$$= \frac{e^{-\alpha x}}{2\alpha} + x\,e^{-\alpha x} + e^{\alpha x}\left[-\frac{e^{-2\alpha y}}{2\alpha}\right]_{x}^{\infty}$$

$$= \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} + x\,e^{-\alpha x}$$

$f*f$ est paire donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f*f(x) = \left(|x| + \frac{1}{\alpha}\right) e^{-\alpha|x|}$.

On a $$\widehat{f*f}(\xi) = \hat{f}(\xi)^2$$

$$= \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2+\xi^2)^2}$$

Pour $\alpha = 1$; $\frac{1}{4} f * f(\xi) = \frac{1}{(1+\xi^2)^2}$

Donc la TF de $g : x \longmapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(-\xi)} \times \frac{1}{4} \widehat{f * f}(x) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{ix(-\xi)} \widehat{f * f}(x) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \, f * f(-\xi) \quad (\text{formule d'inversion})$$

$$= \frac{\pi}{2} \times (|\xi| + 1) e^{-|\xi|}$$

4°) La dérivée de $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ est $\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

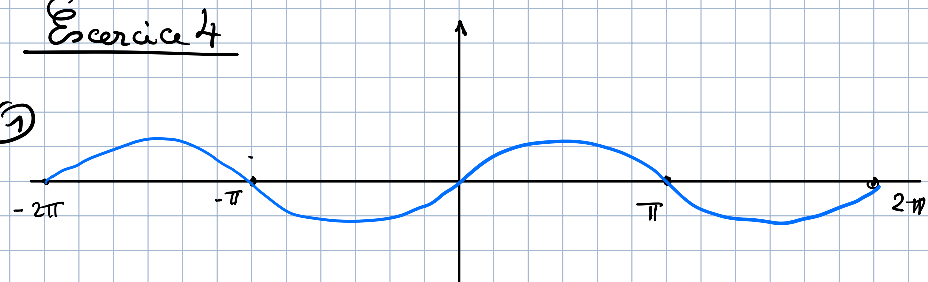
Si on note $h(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$

$$\hat{h}(\xi) = -\frac{1}{2} \widehat{\left(\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\right)}(\xi) = -\frac{i\xi}{2} \times \pi e^{-|\xi|}$$

$$= -i \frac{\pi}{2} \xi e^{-|\xi|}$$

Exercice 4

1



2 La fonction est impaire : $a_n(f) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$b_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi} f(t) \ldots$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x}{\pi}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\cancel{\left[\frac{x}{\pi}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\right]_0^\pi} + \int_0^\pi \frac{1}{n\pi}\left(1-3\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cos(nx)\,dx\right\}$$

$$= \frac{2}{n\pi^2}\left(\cancel{\left[\left(1-3\frac{x^2}{\pi^2}\right)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi} + \frac{6}{n\pi^2}\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx\right)$$

$$= \frac{12}{n^2\pi^4}\left(\left[x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\cancel{\int_0^\pi \cos(nx)\,dx}\right]$$

$$= \frac{12}{n^3\pi^3}(-1)^{n+1}$$

③ La serie des coefficients converge absolument (critère Riemann) donc f est égale à sa serie de Fourier.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (12)\,\frac{(-1)^{n+1}}{\pi^3 n^3}\sin(nx)$$

④ Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^{n+1}}{\pi^3 n^3}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(12)(-1)^{2p+2}}{\pi(2p+1)^3}\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(12)(-1)^p}{\pi^3(2p+1)^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

5°) Égalité de Parseval.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(12)^2}{n^6\pi^6}$$

Or

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} \left(\frac{x^2}{\pi^2} - 2\frac{x^4}{\pi^4} + \frac{x^6}{\pi^6}\right)$$

$$= \frac{16\pi}{105}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$