Analyse de Hilbert-Analyse de Fourier-MoDIA

Durée : 2h00.

Consignes : Tous les documents sont autorisés. Calculatrices et téléphones portables sont interdits. La présentation de la copie, la qualité de la rédaction, le bon usage des notations et des objets mathématiques sont une partie importante de l'évaluation. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. *Soit $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (espace de Hilbert réel). On note $C = \{x = (x_n) \in H;\ \forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0\}$.*

1. *Démontrer que C est un convexe fermé.*
2. *Déterminer la projection sur ce convexe. Indication : vous pouvez faire un schéma pour représenter la situation dans $\mathbb{R}^2$.*
3. *Reprendre les deux questions précédentes avec $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ et $C = \{x = (x_n) \in H;\ \forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0\}$.*

Exercice 2. *Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On notera $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On définit $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2/2}dt$ et $H_n(x) = (-1)^n\ e^{\frac{x^2}{2}} \dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$*

1. *Montrer que $\langle ., .\rangle$ définit un produit scalaire sur E (commencer par montrer que l'intégrale existe !).*
2. *Calculer H_0, H_1, H_2, H_3, H_4.*
3. *Montrer que H_n est un polynome de degré n dont on déterminera le coefficient dominant.*
4. *Montrer que pour tout $m \neq n$, on a $\langle H_n, H_m\rangle = 0$.*
5. *Calculer $\langle H_n; H_n\rangle$.*
6. *En déduire une base orthonormée de $V = \mathbb{R}_4[X]$ et calculer $p_V(X^5)$ la projection orthogonale de X^3 sur V.*

Exercice 3. *Pour $\alpha > 0$, on pose $f(x) = e^{-\alpha x^2}$. On admettra par la suite que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.*

1. *Calculer la transformée de Fourier de f (commencer par dériver f, écrire une équation différentielle satisfaite par f et passer à la transformée de Fourier).*
2. *En déduire la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ pour $k = 1, 2, 3, 4$.*
3. *Calculer alors $I_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-x^2}dx$.*

Exercice 4. *On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique, paire, vérifiant*

$$f(x) = x^2, \quad \forall x \in [0, \pi].$$

1. *Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.*

2. Montrer que la série de Fourier $\hat{f}$ associée à f s'écrit

$$\hat{f}(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

3. Montrer que la fonction f est égale à sa série de Fourier.

4. En déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)^2}$.

5. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

6. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$