Versuch 52

Signale auf Leitungen

Laura Kodytek
laura.kodytek@tu-dortmund.de

Lena Linhoff
lena.linhoff@tu-dortmund.de

28. 05. 2014

technische universität
dortmund

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel

Der Versuch „Signale auf Leitungen“ beschäftigt sich mit dem Verhalten von transversalen elektromagnetischen Wellen in Koaxialkabeln. Dazu sollen die Leitungskonstanten R, L, C, G und α bestimmt und die Ausbreitung von Pulsen, das heißt zum Beispiel Reflexion und Dispersion, sowie das Verhalten bei realen und komplexen Leitungsabschlüssen untersucht werden.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Verlustfreie und verlustbehaftete Leitung

In der Leitungstheorie wird in verlustlose und die verlustbehaftete Leitung unterschieden. Die verlustlose Leitung ist ein ideales Modell, das sich im Ersatzschaltbild durch eine Spule L und einen Kondensator C, vergleichlich Abbildung 1a, darstellen lässt. Bei der verlustbehafteten Leitung, also bei realen Leitern, setzt sich das Ersatzschaltbild aus einem ohmschen Belag R und einem Induktivitätsbelag L in Reihenschaltung, sowie einem Querleitfähigkeitsbelag G und einem Kapazitätsbelag C in Parallelschaltung zusammen (siehe Abbildung 1b). Die Verluste rühren aus dem elektrischen Widerstand des Leitermaterials und der Leitfähigkeit, sowie den dielektrischen Verlusten des Isolators zwischen den Leitern im Koaxialkabel her. Der ohmsche Belag R beschreibt gerade die Längsspannungsverluste des Leitermaterials und der Querleitfähigkeitsbelag G die Querstromverluste im Dielektrikum. Bei den meisten metallischen Leitern überwiegen allerdings die ohmschen gegenüber den dielektrischen Verlusten.

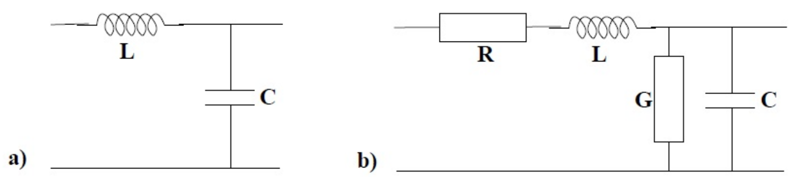

Abbildung 1: Ersatzschaltbilder einer a) verlustlosen und b) verlustbehafteten Leitung [1]

2.1.1 Ohmscher Belag R

Der ohmsche Belag R gibt den elektrischen Widerstand pro Länge an. Für geringe Frequenzen ist R frequenzunabhängig, erst ab 100 kHz gehorcht R einer $\sqrt{\omega}$-Abhängigkeit. Die Ursache dafür liegt im Skin-Effekt.
Er besagt, dass sich in einem stromdurchflossenen Leiter im Inneren ein perodisch seine Richtung änderndes Magnetfeld aufbaut. Dieses Magnetfeld erzeugt Wirbelströme im

Leiter, die den Wechselstrom zur Leiteroberfläche drängen. Der dadurch kleiner werdende effektive Leiterquerschnitt hat bei hohen Frequenzen eine Vergrößerung des Leitwiderstandes R zur Folge.
Für verlusfreie Leitung gilt stets $R = 0$, sonst hat der ohmsche Belag folgende Frequenzanhängigkeit

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega\ \mu\,\mu_0}{2\sigma}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{D}\right)} \tag{1}$$

mit σ der Leitfähigkeit des Materials, μ der Permeabilität des Dielektrikums und d bzw. D dem Durchmesser des Innen- bzw. Außenleiters des Koaxialkabels.

2.1.2 Kapazitätsbelag C

Aufgrund des zweipoligen Aufbaus von Koaxialkabeln sind diese prinzipiell mit Kapazitäten vergleichbar, welche frequenzunabhängig sind. Für den Kapazitätsbelag C gilt

$$C = \frac{2\pi\,\epsilon\,\epsilon_0}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)} \tag{2}$$

mit ϵ der Dielektrizitätskonstante des Dielektrikums.

Beispielhaft ergibt sich für das im Versuch benutzte Koaxialkabel „RG 58 C/U“ ein Kapazitätsbelag von

$$C = 0{,}105\,\mathrm{nF} \quad , \tag{3}$$

wobei der Innendurchmesser $d = 0{,}9\,\mathrm{mm}$, der Außendurchmesser $D = 2{,}95\,\mathrm{mm}$, $\epsilon_r = 2{,}25$, $\mu_r = 1$, $\epsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$ und $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$ ist.

2.1.3 Induktivitätsbelag L

Der Induktivitätsbelag L folgt ebenfalls aus dem Aufbau des Koaxialkabels und ist frequenzabhängig. Für Frequenzen oberhalb von 20 kHz beträgt die Selbstinduktivität

$$L = \frac{\mu\,\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{D}{d}\right) \quad . \tag{4}$$

Mit den Angaben aus dem vorherigen Abschnitt folgt für das Koaxialkabel „RG 58 C/U“

$$L = 0{,}27\,\mu\mathrm{H} \quad . \tag{5}$$

2.1.4 Querleitwert G

Der Querleitwert G ist frequenzabhängig. Vergleichbar mit dem ohmschen Belag R ist G bei verlustfreier Leitung null, sonst

$$G = \frac{2\pi\,\sigma}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)} \quad . \tag{6}$$

2.2 Die Telegraphengleichung

Die Beschreibung der Ausbreitung von Strom und Spannung auf einer verlustbehafteten Leitung erfolgt analog zur Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle, die durch eine Wellengleichung beschrieben werden kann. Im speziellen Fall der Leitungstheorie heißt diese Wellengleichung Telegraphengleichung und lautet:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = L\,C\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (L\,G + R\,C)\,\frac{\partial U}{\partial t} + R\,G\,U \quad . \tag{7}$$

Die Lösungen dieser Diffenrentialgleichung sind ein- und rücklaufende, gedämpfte, harmonische Wellen zur Zeit t am Ort z

$$U(z,t) = U\,\mathrm{e}^{-\gamma\,z}\,\mathrm{e}^{i\,\omega\,t} \tag{8}$$

mit der komplexen Ausbreitungkonstante $\gamma = \alpha + i\,\beta$, die den Dämpfungsbelag α und den Phasenbelag β enthält. Wird ein verlustfreies Kabel mit $R = G = 0$ betrachtet, berechnet sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit zu

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L\,C}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \tag{9}$$

mit c der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Das Signal kann sich also frequenzunabhängig ausbreiten, sodass die Form des Signals erhalten bleibt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Signals in einem realen Leiter ist frequenzabhängig, das heißt es tritt Dispersion auf. Die Dispersion führt in Abhängigkeit vom Aufbau und Wellenwiderstand Z_0 der Leitung zu einer Verzerrung des Signals. Dieser Effekt wird im Versuch allerdings vernachlässigt, sodass Gleichung (9) angenommen werden kann.

Der soeben erwähnte Wellenwiderstand Z_0 wird auch als charakteristische Impedanz bezeichnet und beschreibt das Verhältnis von komplexer Spannungs- und Stromamplitude bei einem sinusförmigen Signal der Frequenz ω

$$Z_0 = \frac{U(\omega)}{I(\omega)} = \sqrt{\frac{R + i\,\omega\,L}{G + i\,\omega\,C}} \quad . \tag{10}$$

Für ein verlustfreies Kabel, bei dem $R = 0$ und $G = 0$ sind, ergibt sich für den Wellenwiderstand $Z_0 = \sqrt{L/C}$.

2.3 Verhalten von Spannungspulsen

Ein Spannungspuls auf einer Leitung verhält sich laut der Telegraphengleichung (7) wie eine hin- und rücklaufende Welle. Dabei entsteht der rücklaufende Puls durch die Reflexion der Welle am Leiterende. Bei Anschluss einer Quelle und einer Last an die Leitung

wird das Signal zusätzlich zur charakteristischen Impedanz Z_0 auch durch die Quellimpedanz Z_g und die Lastimpedanz Z_L beeinflusst.
Die Reflexion des Pulses an einer Last beschreibt der Reflexionsfaktor

$$\Gamma = \frac{U_r}{U_0} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad , \tag{11}$$

wobei U_0 der Eingangspuls und U_r der reflektierte Puls ist. Für $Z_L = Z_0$ ist $\Gamma = 0$, das Signal wird also nicht reflektiert. Die Leitung ist angepasst. Ist die Lastimpedanz $Z_L = 0$, so ist $\Gamma = -1$ und das Signal wird vollständig mit entgegengesetzter Polarität reflektiert. Dies wäre der Fall eines Kurzschlusses.

Zur anschaulichen Beschreibung des Verlaufs der reflektierten Signalspannung, lässt sich mit der Laplace-Transformation

$$\mathbb{L} = \int_0^\infty f(t)\, \mathrm{e}^{-(a+ib)t}\, \mathrm{d}t \tag{12}$$

die Impulsdarstellung des Signals $U_r(p)$ zur Ortsdarstellung $U_r(z,t)$ umformen. Die Spannung des rücklaufenden Pulses ist dann

$$U_r(z,t) = \mathbb{L}^{-1}\{U_r(p)\} = \mathbb{L}^{-1}\{\Gamma(p)\, U_h(p)\} \tag{13}$$

mit $U_h(p)$ der Spannung des hinlaufenden Pulses in Impulsdarstellung. Das heißt aus den Signalformen ist es möglich, die Impedanzen der Übertragungsleitung zu bestimmen.

2.4 Störstellen

Zum Verständnis der Reflexion in einem Leiter mit mehreren Störstellen eignet sich die Aufstellung eines Impulsfahrplans. Dies ist ein Weg-Zeit-Diagramm, bei dem Spannungsänderungen bestimmten Störstellen zugeordnet werden. In Abbildung 2 ist der Impulsfahrplan eines rechteckigen Eingangssignals U_0 abgebildet. Zum Zeitpunkt t_1 umfasst das Signal nur das Eingangssignal U_0. Beim Zeitpunkt t_1 wurde das Signal zunächst einmal an einer Last reflektiert, sodass das neue Signal nun um $\Gamma_e\, U_0$ größer ist. Genau dieser Vorgang erfolgt erneut an der Quelle, sodass sich die Signalspannung dann um $\Gamma_g\, \Gamma_L\, U_0$ vergrößert. Durch weitere wiederholte Reflexion des Signals ergibt sich die Amplidtude des Ausgangspulses zu

$$U_e = U_0 + \Gamma_L\, U_0 + \Gamma_L\, \Gamma_g\, U_0 + \cdots + \Gamma_L^n\, \Gamma_g^m\, U_0 \quad . \tag{14}$$

Über eine Darstellung als geometrische Reihe ergibt sich der Grenzwert U_e zu

$$U_e = U_0\, \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L\, \Gamma_g} \quad . \tag{15}$$

Der zeitliche Spannungsverlauf $U(z,t)$ ist in Abbildung 3 abgebildet.

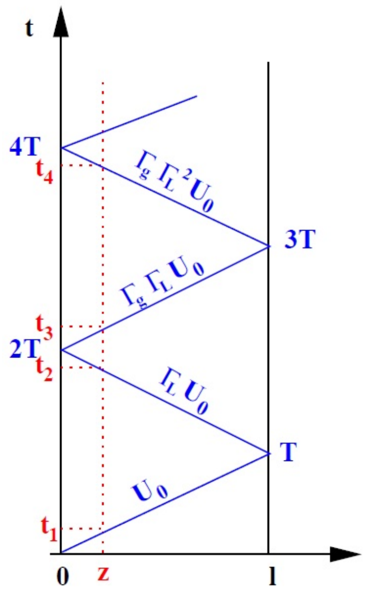

Abbildung 2: Impulsfahrplan [1]

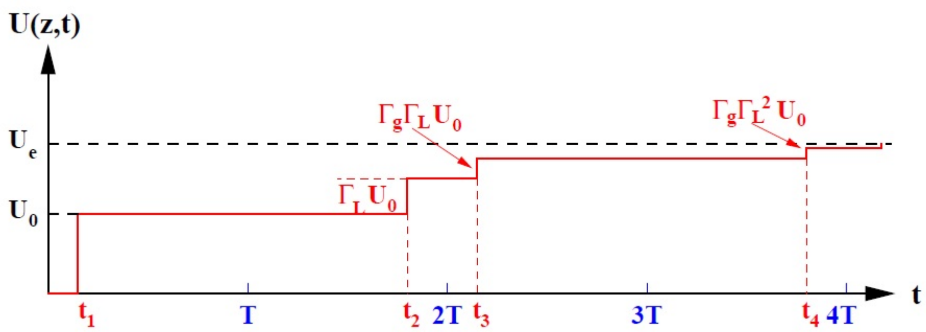

Abbildung 3: Zeitlicher Spannungverlauf $U(z,t)$ [1]

3 Versuchsaufbau und Durchführung

3.1 Eigenschaften von Koaxialkabeln

Ein Koaxialkabel ist ein zweipoliges Kabel, aufgebaut aus einem Innenleiter mit dem Durchmesser d, welcher von einem Außenleiter mit dem Durchmesser D umgeben ist (siehe Abbildung 4). Das Verhältnis der Leiterdurchmesser hat einen starken Einfluss auf den Wellenwiderstand Z_0 und das Dämfungsverhalten des Kabels. Des Weiteren ist zu beachten, dass der Leitwiderstand R und der Querleitwert G bei hohen Frequenzen frequenzabhängig werden. Ab einer Frequenz von $100\,\mathrm{kHz}$ gehorcht R einer $\sqrt{\omega}$-Abhängigkeit (siehe Abschnitt 2.1.1).

Im Versuch wurden drei verschiedene Koaxialkabel verwendet:

Kabel A „RG 58 C/U“ ($l = 10\,\mathrm{m}$, $Z_0 = 50\,\Omega$)
Kabel B „RG 59 B/U“ ($l = 10\,\mathrm{m}$, $Z_0 = 75\,\Omega$)
Kabel C „M17/028 RG 58“ ($l = 85\,\mathrm{m}$, $Z_0 = 50\,\Omega$) .

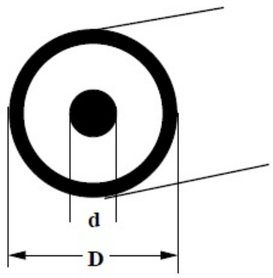

Abbildung 4: Aufbau eines Koaxialkabels [1]

3.2 Aufgaben

a) Messung der Leitungskonstanten L, C und R für das Kabel B in Anhängigkeit von der Frequenz ω mit Hilfe eine RLC-Messgeräts. Berechnung des Querleitwerts G und Dastellung aller Leitwerte in Abhängigkeit von der Frequenz ω.

b) Ausmessung der Dämfpungskonstante α für das Kabel C mit einem Fourier-Analysator. Dazu wird eine Vergleichsmessung mit einem sehr kurzen Kabel durchgeführt, um „ohne“ bzw. mit vernachlässigbarer Dämpfung zu messen.

c) Bestimmung der Kabellängen von allen drei Kabeln. Dazu wird für jedes Kabel (offen/kurzgeschlossen) jeweils ein Bild des zeitlichen Spannungsverlaufs am Oszilloskop aufgenommen und ausgewertet.

d) Bestimmung der Leitungskonstanten mit Hilfe der in c) gemessenen Spannungsverläufe bei offenem und kurzgeschlossenem Ende.

e) Aufnahme von zeitlichen Spannungsverläufen am Oszilloskop für drei unbekannte Abschlusswiderstände. Das dabei zwischengeschaltete Kabel ist das Kabel A. Bestimmung der Art des Bauelements durch Auswertung der Spannungsverläufe.

f) Aufnahme eines zeitlichen Spannungsverlaufs am Oszilloskop, wenn die Kabel A und B in Reihe geschaltet sind. Bestimmung der Reflexionskoeffzienten und Aufstellung eines Impulsfahrplans.

3.3 Versuchsaufbau

Für die Messungen stehen ein RLC-Messgerät, ein Fourier-Analysator, ein Oszilloskop, ein Frequenzgenerator, verschiedene Abschlusswiderstände und die bereits genannten Koaxialkabel zur Verfügung. Für die Messung a) wird das Kabel B direkt an das RLC-Messgerät angeschlossen und entweder ein offenes oder kurzgeschlossenes Ende gewählt. In Messung b) wird das kurze Referenzkabel und anschließend das Kabel C auf der einen Seite an den Frequenzgenerator und an der anderen Seite direkt an den Fourier-Analysator angeschlossen. Als Ausgangssignal wird eine Rechteckspannung benutzt. In den Messungen c) - f) wird ein Aufbau wie in Abbildung 5 genutzt. Die Kabelenden sind dabei offen oder kurzgeschlossen bzw. für Messung e) mit einem unbekannten Abschlusswiderstand versehen.

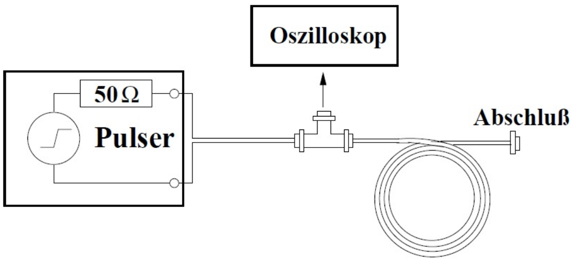

Abbildung 5: Experimenteller Aufbau zur Aufnahme des Spannungsverlaufs [1]

4 Auswertung

4.1 Fehlerbetrachtung

Der Mittelwert $\bar{x}$ von N Messdaten x_i und sein Fehler $\Delta\bar{x}_i$ lassen sich ermitteln durch die Formeln

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{16}$$

$$\sigma = s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \tag{17}$$

$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}} \quad . \tag{18}$$

Treten N fehlerbehaftete Größen x_i auf, gilt die Gaußsche Fehlerfortpflanzung für den Gesamtfehler von $f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$. Der Fehler berechnet sich dann mit

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_i}\Delta x_i\right)^2} \quad . \tag{19}$$

4.2 Bestimmung der Leitungskonstanten mit dem RLC-Gerät

Mit Hilfe der aufgenommenen Leitungskonstanten für das Kabel B wird der Querleitwert G mit Hilfe der Gleichung

$$G = \frac{RC}{L} \tag{20}$$

für den gemessenen Frequenzbereich von 1 kHZ bis 100 kHz berechnet. Die Messwerte und sich ergebenden Querleitwerte G finden sich in Tabelle 1. Die graphische Darstellung der Messergebnisse in Abhängigkeit von der Frequenz f ist in Abbildung 6 veranschaulicht.

Bei Vergleich der Messergebnisse mit der Theorie sind nur teilweise Übereinstimmungen zu finden. Theoretisch vorausgesagt wird die Zunahme des ohmschen Belags R durch den Skin-Effekt, diese wird durch das Experiment bestätigt. Der Induktivitätsbelag L und der Kapazitätsbelag C sind theoretisch frequenzunabhängige Größen, dies trifft hier aber nur für den Kapazitätsbelag C zu. Der Querleitfähigkeitsbelag G nimmt im Experiment mit steigender Frequenz zu, dies entspricht auch den Erwartungen. Allerdings steigt G sehr stark, da L sehr stark sinkt und nicht konstant bleibt.

Tabelle 1: Gemessene Leitungskonstanten und daraus berechneter Querleitwert G

f in kHz	R in Ω	C in pF	L in µH	G in µS
1	3,75	677,02	45800,0	0,06
2	3,75	676,94	11520,0	0,22
3	3,76	676,93	5170,0	0,49
4	3,77	676,86	2932,0	0,87
5	3,78	676,84	1897,0	1,35
6	3,79	676,88	1333,0	1,92
7	3,80	676,85	992,0	2,59
8	3,82	678,83	770,0	3,37
9	3,84	676,81	618,2	4,20
10	3,86	676,81	508,7	5,14
11	3,88	676,83	427,2	6,15
12	3,90	676,86	365,2	7,23
13	3,92	676,88	316,3	8,39
14	3,94	676,93	277,2	9,62
15	3,96	676,93	245,6	10,91
16	3,98	676,96	219,3	12,29
17	4,00	676,96	197,6	13,70
18	4,03	676,97	179,1	15,23
19	4,05	676,96	163,2	16,80
20	4,07	679,97	149,6	18,50
100	7,19	678,10	13,22	368,80

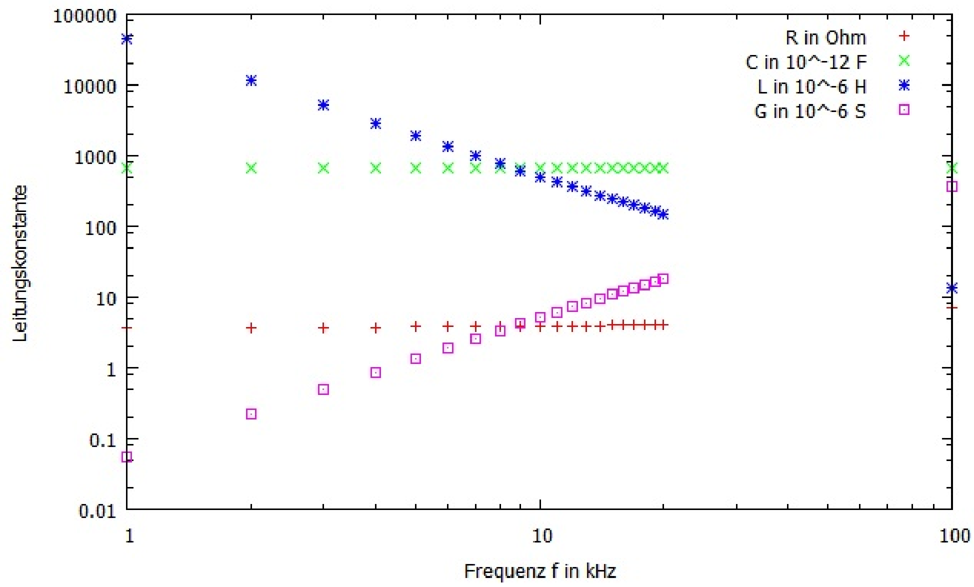

Abbildung 6: Graphische Darstellung der Leitungskonstanten in Abhängigkeit von der Frequenz f

4.3 Bestimmung der Dämpfungskonstante

Die Ausmessung der Dämpfungskonstante α des Kabels C erfolgt über einen Fourieranalysator. Dazu wird zunächst ein Signal mit mehreren Oberwellen auf ein sehr kurzes Kabel gegeben und dessen Amplituden U_0 ausgemessen um ein Referenzsignal „ohne" Dämpfung zu bekommen. Die Ausmessung der gedämpften Amplituden U_{ged} des Kabels C erfolgt analog. Aus dem Verhältnis der gemessenen Amplituden

$$\alpha = -20 \ln \left(\frac{U_0}{U_{ged}} \right) \tag{21}$$

wird die Dämpfungskonstante α in der Einheit dB bestimmt. Für die Spannungen U_0 und U_{ged} wird dabei ein Ablesefehler von $\pm 0{,}3\,\mathrm{mV}$ angenommen. Die Messwerte und die entsprechenden Dämpfungskonstanten α finden sich in Tabelle 2. Der Fehler der Dämpfungskonstante α berechnet sich mithilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung (19) zu

$$\Delta\alpha = \sqrt{\left(20 \frac{\Delta U_0}{U_0}\right)^2 + \left(20 \frac{\Delta U_{ged}}{U_{ged}}\right)^2} \quad . \tag{22}$$

Die in der Tabelle 2 aufgeführte Frequenz f ist ein Mittelwert der Frequenzen des kurzen und langen Kabels, da die Peaks an minimal anderen Stellen bei den Messungen lagen (siehe Anhang, Kopie der Messwerte). Die Frequenzabhängigkeit der Dämpfungskonstante α ist in Abbildung 7 dargestellt.

Tabelle 2: Messung der Dämpfungskonstante α

f in MHz	U_0 in mV	U_{ged} in mV	α in dB
24,74	19,32	15,28	$-4{,}69 \pm 0{,}50$
25,19	19,26	15,20	$-4{,}73 \pm 0{,}50$
25,41	19,05	14,97	$-4{,}82 \pm 0{,}51$
26,08	19,42	14,58	$-5{,}73 \pm 0{,}51$
26,53	18,95	14,35	$-5{,}56 \pm 0{,}52$
26,98	18,98	14,03	$-6{,}04 \pm 0{,}53$
27,42	18,74	13,67	$-6{,}31 \pm 0{,}54$
27,87	18,73	13,38	$-6{,}73 \pm 0{,}55$
28,32	18,35	13,14	$-6{,}68 \pm 0{,}56$
28,76	18,36	12,89	$-7{,}07 \pm 0{,}57$
29,21	17,89	12,65	$-6{,}93 \pm 0{,}58$
29,42	18,19	12,41	$-7{,}65 \pm 0{,}59$
30,10	17,67	12,21	$-7{,}39 \pm 0{,}60$
30,55	17,98	11,84	$-8{,}36 \pm 0{,}60$
31,00	18,38	11,70	$-9{,}03 \pm 0{,}60$
31,44	17,54	11,37	$-8{,}67 \pm 0{,}63$
31,89	17,06	11,26	$-8{,}31 \pm 0{,}64$
32,34	17,12	10,97	$-8{,}90 \pm 0{,}65$
32,78	16,67	10,81	$-8{,}66 \pm 0{,}66$
33,23	16,82	10,50	$-9{,}42 \pm 0{,}67$

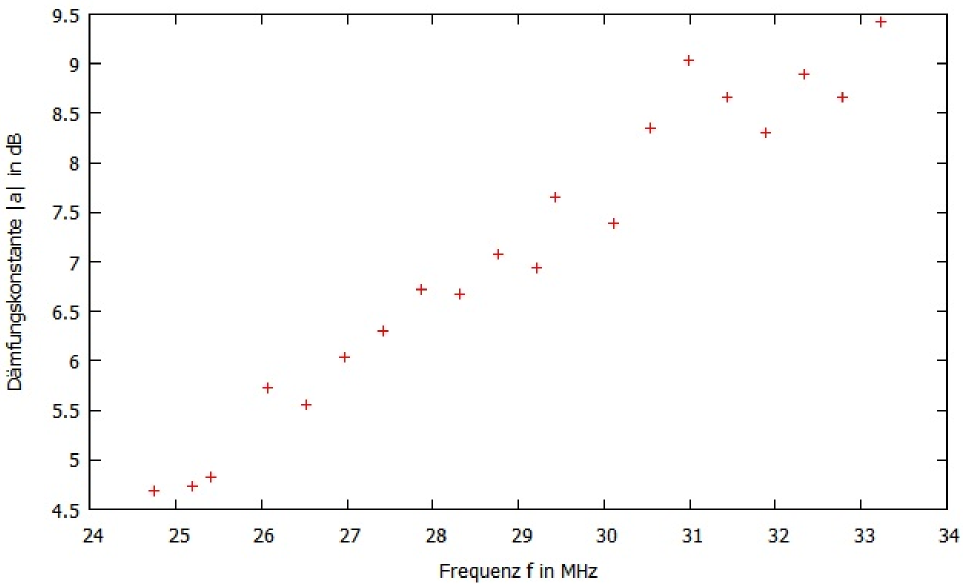

Abbildung 7: Graphische Darstellung der Dämfungskonstante α in Abhängigkeit von der Frequenz f

4.4 Bestimmung der Kabellängen durch Laufzeitmessung

Zur Bestimmung der drei Kabellängen wird von jedem Kabel der zeitliche Spannungsverlauf bei offenem und kurzgeschlossenem Ende mit dem Oszilloskop aufgenommen. Dazu werden die Zeitpunkte t_1 und t_2 bestimmt, an denen das Anfangssignal bzw. das reflektierte Signal beginnt. Durch die Lauftzeitdifferenz $t_2 - t_1$ wird dann die Kabellänge mit

$$l = \frac{1}{2}\, v\,(t_2 - t_1) \tag{23}$$

berechnet, wobei v die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist. Für diese ergibt sich nach Gleichung (9) mit $\epsilon_r = 2{,}25$

$$v = 1{,}9986 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad . \tag{24}$$

Für die Zeitpunkte t_1 und t_2 wird ein Ablesefehler von $\Delta t = 0{,}3\,\mathrm{ns}$ angenommen. Der Fehler für die Kabellänge beläuft sich damit zu $\Delta l = \frac{1}{\sqrt{2}} v\,\Delta t$ (vgl. Gaußsche Fehlerfortpflanzung (19)) und ist somit unabhängig von den Zeiten t_1 und t_2. Für alle Kabellängen l ergibt sich ein Fehler von

$$\Delta l = 0{,}04\,\mathrm{m} \quad . \tag{25}$$

Die berechneten Kabellängen mit den entsprechenden Laufzeiten (entnommen aus den *.csv* Dateien des Oszilloskops) finden sich in den Tabellen 3 - 5, die Oszilloskopbilder in den Abbildungen 8 - 10.

Ein Mittelwert der jeweils zwei berechneten Kabellängen für die Kabel A, B und C ergibt sich mit einem Fehler von $\Delta\bar{l} = \sqrt{2}\,\Delta l$ (vgl. Gaußsche Fehlerfortpflanzung (19)) zu

$$\begin{aligned}\bar{l}_A &= (10{,}12 \pm 0{,}06)\text{ m}\\ \bar{l}_B &= (9{,}80 \pm 0{,}06)\text{ m}\\ \bar{l}_C &= (85{,}23 \pm 0{,}06)\text{ m} \quad .\end{aligned}$$

Tabelle 3: Messwerte und Kabellängen für das Kabel A

Abschluss	t_1 in ns	t_2 in ns	Kabellänge l in m
offen	-8,344	92,099	10,04
kurzgeschlossen	-8,257	93,780	10,20

Tabelle 4: Messwerte und Kabellängen für das Kabel B

Abschluss	t_1 in ns	t_2 in ns	Kabellänge l in m
offen	-8,109	93,131	10,12
kurzgeschlossen	-8,109	94,725	9,47

Tabelle 5: Messwerte und Kabellängen für das Kabel C

Abschluss	t_1 in ns	t_2 in ns	Kabellänge l in m
offen	4,730	860,35	85,50
kurzgeschlossen	-16,014	834,22	84,96

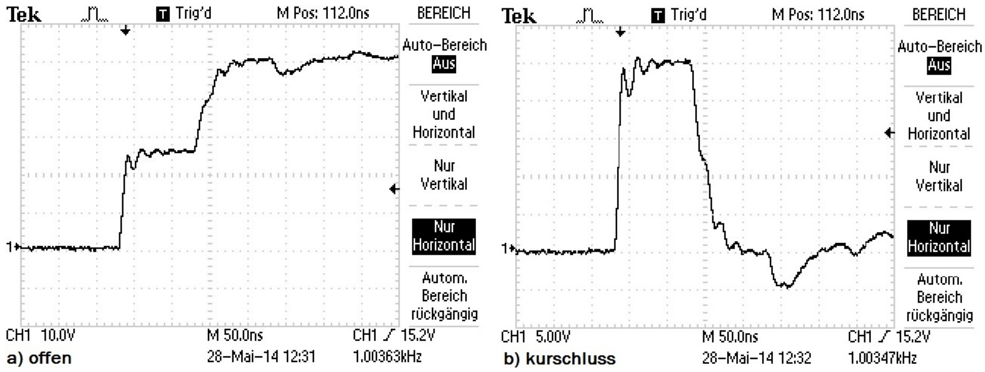

Abbildung 8: Spannungsverlauf für das Kabel A bei a) offenem und b) kurgeschlossenem Ende

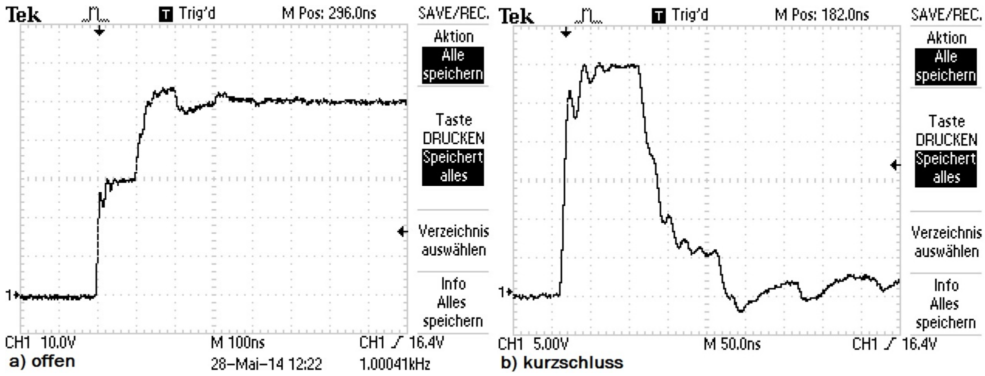

Abbildung 9: Spannungsverlauf für das Kabel B bei a) offenem und b) kurgeschlossenem Ende

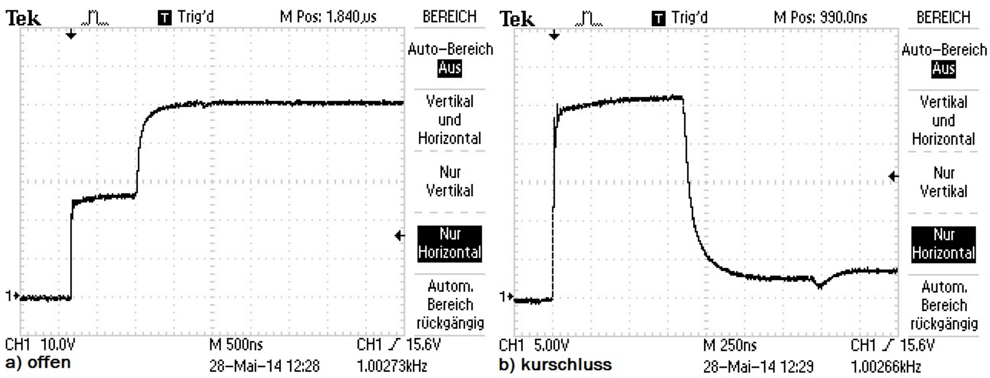

Abbildung 10: Spannungsverlauf für das Kabel C bei a) offenem und b) kurgeschlossenem Ende

4.5 Bestimmung der Leitungskonstanten mit Hilfe der Spannungsverläufe

Die Bestimmung der Leitungskonstanten und der Reflexionskoeffizienten wird mit Hilfe der aufgenommenen Spannungsverläufe in den Abbildungen 8 - 10 vorgenommen. Allerdings wird diese Parameterbestimmung nur für das Kabel C, das heißt Abbildung 10, vorgenommen, da nur hier die Spannung einer exponentiellen Ab- bzw. Zunahme gehorcht und ein Fit der anderen Kurven nur zu großen Fehlern und keinen glaubwürdigen Ergebnissen führen würde.

Für das Kabel C wird die Nullpunktsspannung U_{off} in Abbildung 10 im Intervall von 0,24 µs bis 0,01 µs zu

$$U_{off} = (-0{,}550 \pm 0{,}009)\,\mathrm{V}$$

für das kurzgeschlossene Ende bestimmt. Der Wert U_{off} dient dazu, die im Weiteren berechneten Größen auf absolute Größen zu normieren. Der Wert U_{off} und folgende werden durch eine Mittelung (16) der Messwerte in den entsprechenden Bereichen bestimmt und deren Fehler durch Gleichung (18) berechnet. Die Messwerte werden den *.csv* Dateien des Oszilloskops entnommen. Des Weiteren werden die Spannung U_0 auf der Höhe des Plateaus und die Spannung U_1, gegen die die Spannungskurve konvergiert, aus den Messwerten gemittelt. Die Spannungen U_0 im Intervall von 0,27 µs bis 0,80 µs und U_1 im Intervall von 1,91 µs bis 2,24 µs noch ohne Einberechnung der Nullpunktsspannung ergeben sich zu

$$\begin{aligned} U_{0,\,ohne} &= (25{,}518 \pm 0{,}011)\,\mathrm{V} \\ U_{1,\,ohne} &= (3{,}294 \pm 0{,}001)\,\mathrm{V} \quad . \end{aligned}$$

Nach Abzug der Nullpunktsspannung U_{off} ergeben sich

$$\begin{aligned} U_0 &= (26{,}068 \pm 0{,}014)\,\mathrm{V} \\ U_1 &= (3{,}884 \pm 0{,}009)\,\mathrm{V} \quad . \end{aligned}$$

Da sich U_1 aus $U_o(\Gamma + 1)$ berechnet, gilt für den Reflexionsfaktor Γ

$$\Gamma = \frac{U_1}{U_0} - 1 \quad , \tag{26}$$

und damit hat der Reflexionsfaktor Γ den Wert

$$\Gamma = -0{,}8510 \pm 0{,}0004 \quad ,$$

wobei der Fehler von Γ durch Gleichung (19) der Gaußschen Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta\Gamma = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}U_0}\Delta U_0\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}U_1}\Delta U_1\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{U_1}{U_0^2}\Delta U_0\right)^2 + \left(\frac{1}{U_0}\Delta U_1\right)^2} \tag{27}$$

bestimmt wird. Durch Umstellen von Gleichung (11) nach dem ohmschen Belag R ergibt sich mit der charakteristischen Impedanz $Z_0 = 50\,\Omega$ für das Kabel C

$$R = Z_0 \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = (4{,}02 \pm 0{,}01)\,\Omega \quad .$$

Der Fehler des ohmschen Belags wurde erneut durch die Gaußsche Fehlerfortpflanzung (19) zu

$$\Delta R = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\Gamma}\Delta\Gamma = \frac{2Z_0}{(1-\Gamma)^2}\Delta\Gamma \tag{28}$$

berechnet.

Die Leitungskoeffizienzen L und C werden mit Hilfe einer Regression berechnet. Für die Berechnung des Induktivitätsbelags L wird der Bereich ab $\approx 830\,\mathrm{ns}$ in Abbildung 10 bei kurzgeschlossenem Ende durch eine fallende Exponentialfunktion, gemäß

$$U(t) = a\,\mathrm{e}^{-\frac{t+b}{\tau_{kurz}}} + c \tag{29}$$

mit der Zeitkonstanten

$$\tau_{kurz} = \frac{L}{Z_0 + R} \tag{30}$$

genähert. Mit dieser Näherung kann eine lineare Regression der Form

$$\ln(U(t) - c) = mt + d \tag{31}$$

durchgeführt werden, wobei c gerade $U_{1,ohne}$, m gerade $-(\tau_{kurz})^{-1}$ und d einer Konstanten entspricht. Da $U(t) - c$ auch teilweise negative Zahlen sind und diese nicht logarithmiert werden können, werden diese Werte bei der Regression ausgelassen. Die Ausgleichsgerade ist in Abbildung 11 dargestellt. Aus ihr ergibt sich

$$m = (-16{,}64 \pm 0{,}20)\,\frac{1}{\mu\mathrm{s}}$$
$$d = (17{,}17 \pm 0{,}20)$$

und damit für die Zeitkonstante τ_{kurz} und den Induktivitätsbelag L mit $Z_0 = 50\,\Omega$

$$\tau_{kurz} = -\frac{1}{m} = (0{,}060 \pm 0{,}001)\,\mu\mathrm{s}$$
$$L = \tau_{kurz}(Z_0 + R) = (3{,}24 \pm 0{,}09)\,\mu\mathrm{H} \quad .$$

Die Fehler berechnen sich mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung (19) durch

$$\Delta\tau = \frac{\mathrm{d}\tau_{kurz}}{\mathrm{d}m}\Delta m = \frac{1}{m^2}\Delta m \tag{32}$$

$$\Delta L = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\tau_{kurz}}\Delta\tau_{kurz}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}R}\Delta R\right)^2}$$
$$= \sqrt{((Z_0 + R)\Delta\tau_{kurz})^2 + (\tau_{kurz}\Delta R)^2} \quad . \tag{33}$$

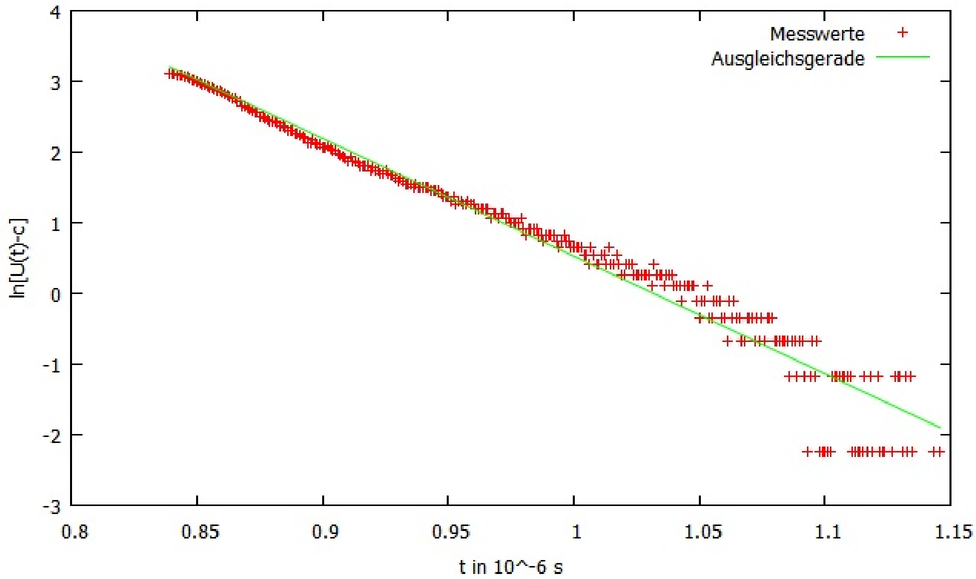

Abbildung 11: Lineare Regression des Kabels C mit kurzgeschlossenem Ende

Die Berechnung des Kapazitätsbelags C erfolgt über eine Näherung mit einer steigenden Exponentialfunktion für den Spannungsverlauf bei offenem Ende (siehe Abbildung 10) gemäß

$$U(t) = a\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t+b}{\tau_{offen}}}\right) + c \tag{34}$$

ab $\approx 0{,}86\,\mu\mathrm{s}$ mit einer Zeitkonstanten von

$$\tau_{offen} = Z_0 C \quad . \tag{35}$$

Mit dieser Näherung kann vergleichlich zum vorherigen Abschnitt eine lineare Regression in Form von

$$\ln(c + a - U(t)) = mx + d \tag{36}$$

gemacht werden, wobei m gerade $-(\tau_{kurz})^{-1}$ ist und d einer Konstanten entspricht. Die Größe $c + a$ entspricht dem Sättigungswert der Exponentialfunktion, welcher ungefähr ab $1{,}64\,\mu\mathrm{s}$ erreicht wird. Der Sättigungswert lässt sich mitteln zu

$$c + a = (50{,}019 \pm 1{,}361)\,\mathrm{V} \quad .$$

Die lineare Regression liefert folgende Werte

$$m = (-4{,}18 \pm 0{,}11)\,\frac{1}{\mu\mathrm{s}}$$
$$d = (5{,}40 \pm 0{,}18) \quad .$$

Dabei wurden ebenfalls alle negativen Werte für $(c + a - U(t))$ ausgelassen. Für die Zeitkonstante τ_{offen} und den Kapazitätsbelag C folgt mit $Z_0 = 50\,\Omega$

$$\tau_{offen} = -\frac{1}{m} = (0{,}239 \pm 0{,}006)\,\mu\mathrm{s}$$
$$C = \frac{\tau_{offen}}{Z_0} = (4{,}78 \pm 0{,}12)\,\mathrm{nF} \quad .$$

Der Fehler der Kapazität wurde dabei durch

$$\Delta C = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\tau_{offen}}\Delta\tau_{offen} = \frac{\Delta\tau_{offen}}{Z_0} \tag{37}$$

berechnet, die Berechnung von Δm_{offen} erfolgte analog zu Gleichung (32).

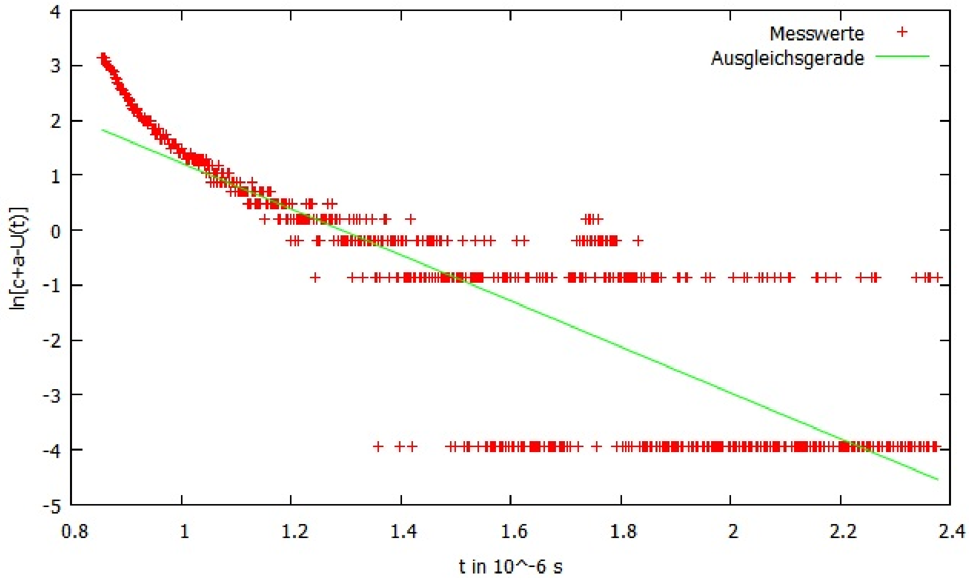

Abbildung 12: Lineare Regression des Kabels C mit offenem Ende

4.6 Bestimmung unbekannter Abschlusswiderstände

Bei der Bestimmung von drei unbekannten Abschlusswiderständen werden vergleichbar wie in Messung c) die zeitlichen Spannungsverläufe mit einem Oszilloskop aufgenommen. Die Eigenschaften bestimmter Abschlusswiderstände bestimmen dann den charakteristischen Spannugsverlauf, beispielhaft dargestellt in Abbildung 13. Die Auswertung für die drei unbekannten Abschlüsse erfolgt analog. Für diesen Versuchsteil wurde das Kabel B mit $Z_0 = 75\,\Omega$ verwendet.

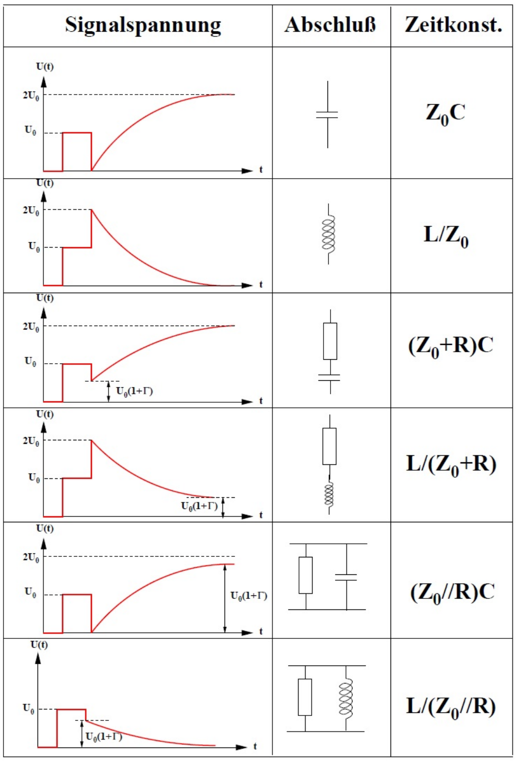

Abbildung 13: Charakteristischer Spannungsverlauf verschiedener Abschlusswiderstände

4.6.1 Abschluss 8, Kästchen 3

Der zeitliche Spannungsverlauf des Abschluss 6 (siehe Abbildung 14) deutet auf eine Reihenschaltung von einem ohmschen Belag R und einem Kapazitätsbelag C mit der Zeitkonstanten $\tau = (Z_0 + R)\,C$ hin.

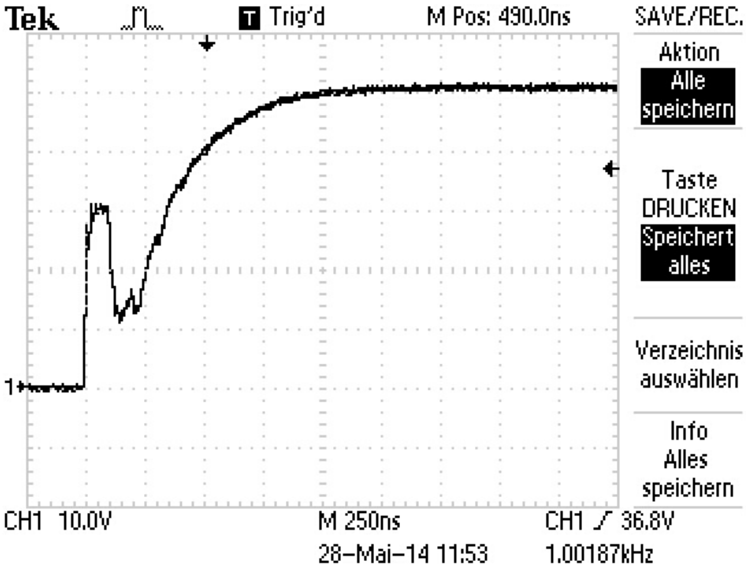

Abbildung 14: Charakteristischer Spannungsverlauf Abschluss 8, Kästchen 3

Die Berechnung der Größen U_{off}, U_0, U_1, Γ und R erfolgt anlog zum Abschnitt 4.5. Es ergeben sich die genannten Größen zu

$$\begin{aligned} U_{off} &= (-0{,}203 \pm 0{,}018)\,\mathrm{V} \\ U_{0,\,ohne} &= (29{,}966 \pm 0{,}051)\,\mathrm{V} \\ U_{1,\,ohne} &= (50{,}463 \pm 0{,}017)\,\mathrm{V} \\ U_0 &= (30{,}169 \pm 0{,}054)\,\mathrm{V} \\ U_1 &= (50{,}627 \pm 0{,}025)\,\mathrm{V} \\ \Gamma &= (0{,}6781 \pm 0{,}0003) \\ R &= (390{,}99 \pm 0{,}43)\,\Omega \quad . \end{aligned}$$

Die charakteristische exponentielle Zunahme der Spannung ab $\approx -0{,}36\,\mu\mathrm{s}$ wird wie zuvor mit Hilfe einer linearen Regression der Form

$$\ln(c + a - U(t)) = mt + d \quad \text{mit} \quad m = -\frac{1}{\tau}$$

genähert, wobei c der Größe $U_{1,\,ohne}$ entspricht. Aus den Parametern der linearen Regression (siehe Abbildung 15)

$$\begin{aligned} m &= (-4{,}85 \pm 0{,}04)\,\frac{1}{\mu\mathrm{s}} \\ d &= (2{,}28 \pm 0{,}01) \end{aligned}$$

wird die Zeitkonstante $\tau = (Z_0 + R)\,C$ und der Kapazitätsbelag C berechnet zu

$$\tau = (0{,}206 \pm 0{,}001)\,\mu\text{s}$$
$$C = (44{,}207 \pm 0{,}002)\,\text{nF} \quad .$$

Der kapazitive Fehler ΔC berechnet sich mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung (19) zu

$$\begin{aligned}\Delta C &= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\tau}\Delta\tau\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}R}\Delta R\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\Delta\tau}{Z_0 + R}\right)^2 + \left(\frac{\tau\,\Delta R}{(z_0 + R)^2}\right)^2} \quad . \end{aligned} \tag{38}$$

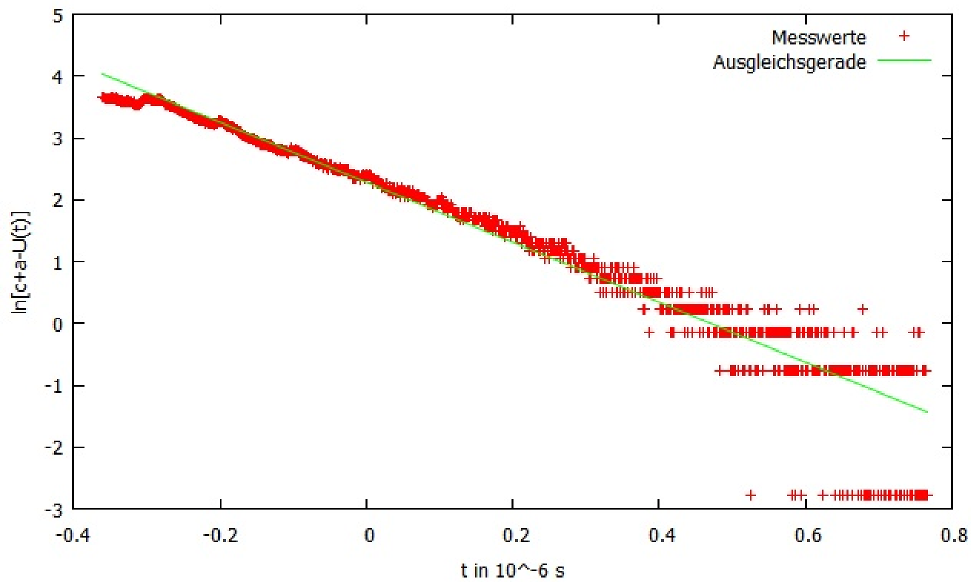

Abbildung 15: Lineare Regression für Abschluss 8, Kästchen 3

4.6.2 Abschluss 6, Kästchen 4

Der zeitliche Spannungsverlauf des Abschluss 6 (siehe Abbildung 14) deutet auf eine Reihenschaltung von einem ohmschen Belag R und einem Induktivitätsbelag L mit der Zeitkonstanten $\tau = L/(Z_0 + R)$ hin.

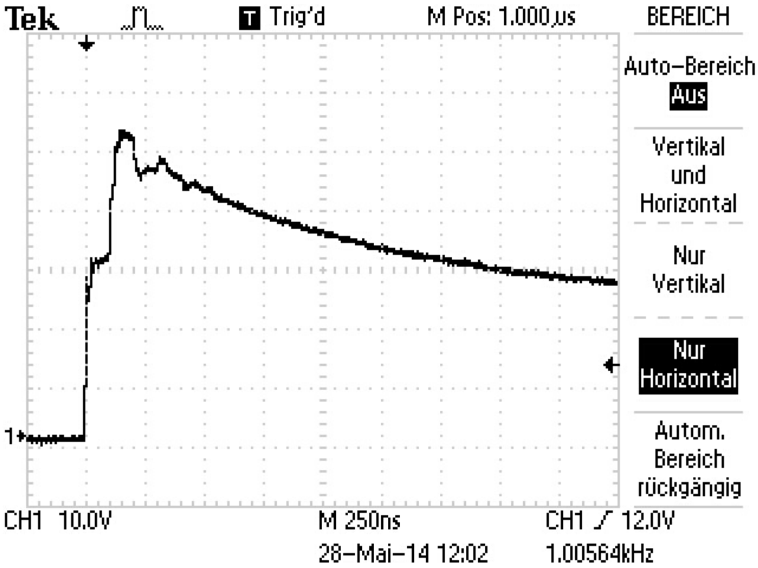

Abbildung 16: Charakteristischer Spannungsverlauf Abschluss 6, Kästchen 4

Die Berechnung der Größen U_{off}, U_0, U_1, Γ und R ergibt

$$\begin{aligned} U_{off} &= (-0{,}567 \pm 0{,}019)\,\mathrm{V} \\ U_{0,\,ohne} &= (29{,}751 \pm 0{,}056)\,\mathrm{V} \\ U_{1,\,ohne} &= (26{,}395 \pm 0{,}024)\,\mathrm{V} \\ U_0 &= (30{,}318 \pm 0{,}059)\,\mathrm{V} \\ U_1 &= (26{,}962 \pm 0{,}031)\,\mathrm{V} \\ \Gamma &= (0{,}1140 \pm 0{,}0020) \\ R &= (94{,}30 \pm 0{,}38)\,\Omega \quad . \end{aligned}$$

Die charakteristische exponentielle Abnahme der Spannung ab $\approx 0{,}31\,\mu\mathrm{s}$ wird wieder mit Hilfe einer linearen Regression der Form

$$\ln(U(t) - c) = mt + d \quad \text{mit} \quad m = -\frac{1}{\tau}$$

genähert, wobei c der Größe $U_{1,\,ohne}$ entspricht. Aus den Parametern der linearen Regression (siehe Abbildung 17)

$$\begin{aligned} m &= (-2{,}44 \pm 0{,}04)\,\frac{1}{\mu\mathrm{s}} \\ d &= (4{,}32 \pm 0{,}05) \end{aligned}$$

wird die Zeitkonstante $\tau = L/(Z_0 + R)$ und der Induktivitätsbelag L berechnet zu

$$\tau = (0{,}411 \pm 0{,}007)\,\mu\mathrm{s}$$
$$L = (69{,}502 \pm 1{,}195)\,\mu\mathrm{H} \quad .$$

Der induktive Fehler ΔL wird wie in Gleichung (33) berechnet.

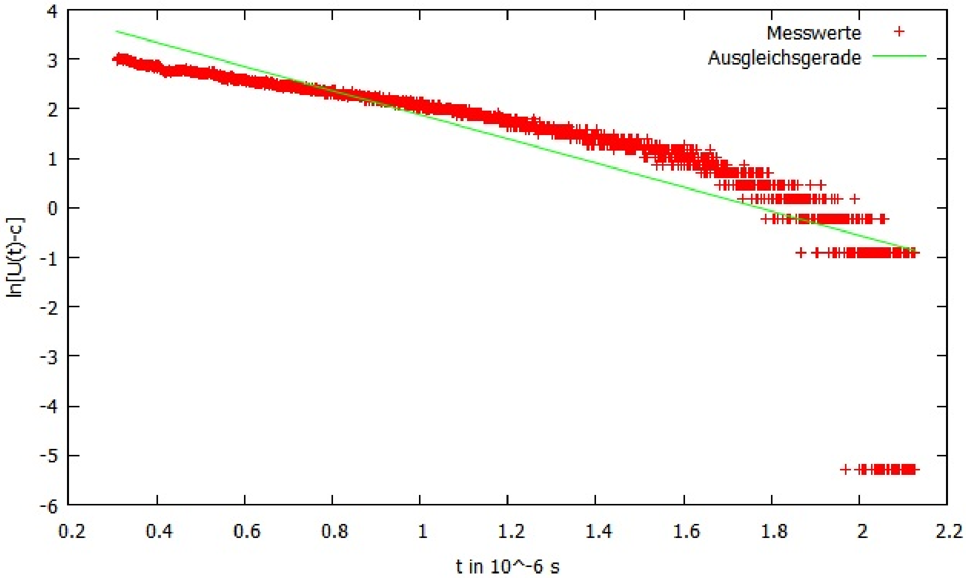

Abbildung 17: Lineare Regression für Abschluss 6, Kästchen 4

4.6.3 Abschluss 10, Kästchen 4

Der zeitliche Spannungsverlauf des Abschluss 10 (siehe Abbildung 18) deutet erneut auf eine Reihenschaltung von einem ohmschen Belag R und einem Kapazitätsbelag C mit der Zeitkonstanten $\tau = (Z_0 + R)\,C$ hin. Die Größen U_{off}, U_0, U_1, Γ und R werden berechnet zu

$$\begin{aligned}
U_{off} &= (-0{,}504 \pm 0{,}019)\,\mathrm{V} \\
U_{0,\,ohne} &= (29{,}576 \pm 0{,}054)\,\mathrm{V} \\
U_{1,\,ohne} &= (50{,}004 \pm 0{,}013)\,\mathrm{V} \\
U_0 &= (30{,}080 \pm 0{,}057)\,\mathrm{V} \\
U_1 &= (50{,}508 \pm 0{,}023)\,\mathrm{V} \\
\Gamma &= (0{,}6791 \pm 0{,}003) \\
R &= (392{,}44 \pm 4{,}37)\,\Omega \quad .
\end{aligned}$$

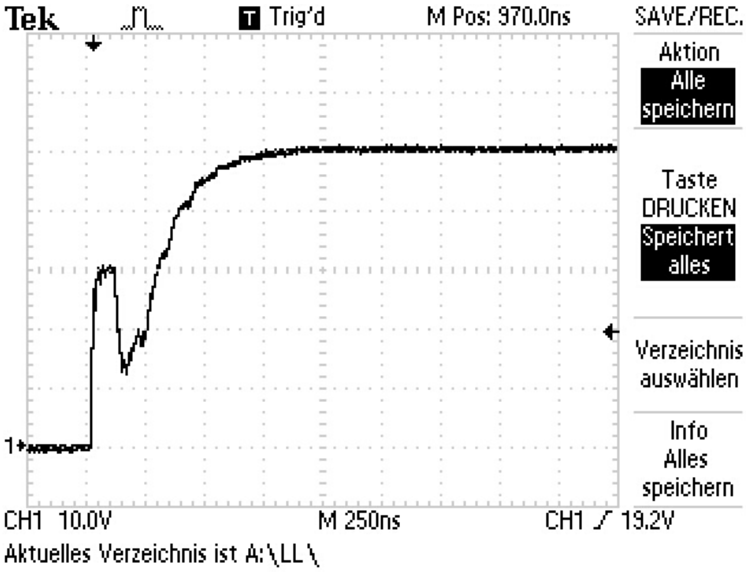

Abbildung 18: Charakteristischer Spannungsverlauf Abschluss 10, Kästchen 4

Zur Näherung der charakteristischen Zunahme der Spannung ab $\approx -0{,}36\,\mu\mathrm{s}$ wird erneut eine lineare Regression wie für den Abschluss 8, Kästchen 3 gemacht. Es ergeben sich die folgenden Parameter

$$\begin{aligned} m &= (-8{,}97 \pm 0{,}15)\,\frac{1}{\mu\mathrm{s}} \\ d &= (5{,}66 \pm 0{,}11) \quad . \end{aligned}$$

Die Zeitkonstante $\tau = (Z_0 + R)\,C$ und der Kapazitätsbelag C berechnen sich zu

$$\begin{aligned} \tau &= (0{,}112 \pm 0{,}002)\,\mu\mathrm{s} \\ C &= (23{,}854 \pm 0{,}048)\,\mathrm{nF} \quad . \end{aligned}$$

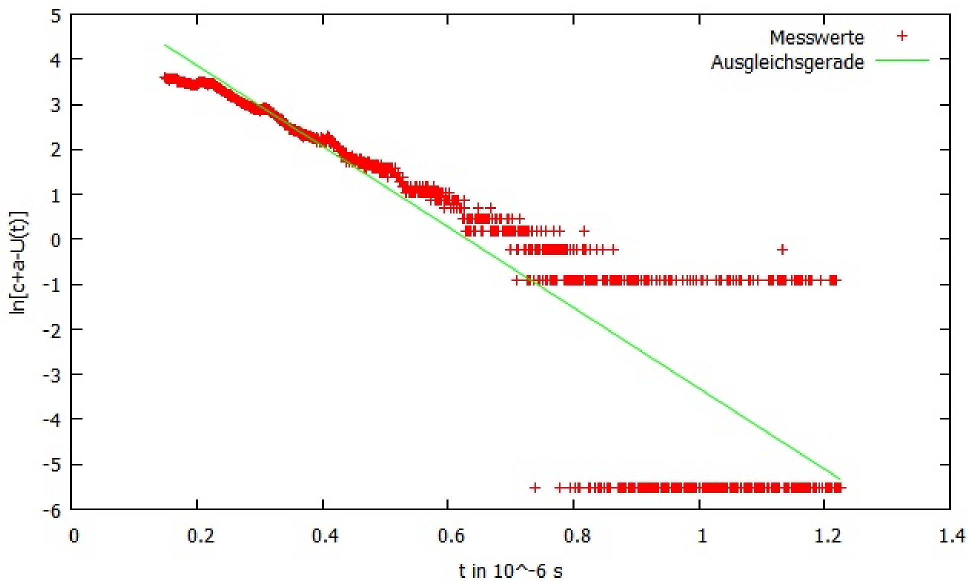

Abbildung 19: Lineare Regression für Abschluss 10, Kästchen 4

4.7 Bestimmung der Reflexionsfaktoren

Zur Bestimmung der Reflexionsfaktoren wurden das Kabel A (50 Ω) und B (75 Ω) in Reihe geschaltet (offenes Ende) und der zeitliche Spannungsverlauf mit dem Oszilloskop (vergleichlich Abbildung 20) aufgenommen. Mit Hilfe eines Impulsfahrplans ist es dann möglich, die Reflexionsfaktoren zu bestimmen.

Zunächst werden die mittleren Spannungswerte der Plateaus im Diagramm berechnet und um den Spannungsnullpunkt U_{off} bereinigt. Es ergeben sich Werte von

$$\begin{aligned} U_{off} &= (-0{,}61 \pm 0{,}02)\,\mathrm{V} \\ U_0 &= (30{,}07 \pm 0{,}03)\,\mathrm{V} \\ U_1 &= (47{,}05 \pm 0{,}06)\,\mathrm{V} \\ U_2 &= (54{,}20 \pm 0{,}03)\,\mathrm{V} \\ U_3 &= (50{,}36 \pm 0{,}04)\,\mathrm{V} \quad . \end{aligned}$$

Durch Berechnung der Spannungsdifferenzen

$$\begin{aligned} U'_1 &= U_1 - U_0 = (16{,}98 \pm 0{,}07)\,\mathrm{V} \\ U'_2 &= U_2 - U_1 = (7{,}15 \pm 0{,}07)\,\mathrm{V} \\ U'_3 &= U_3 - U_2 = (-3{,}84 \pm 0{,}05)\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

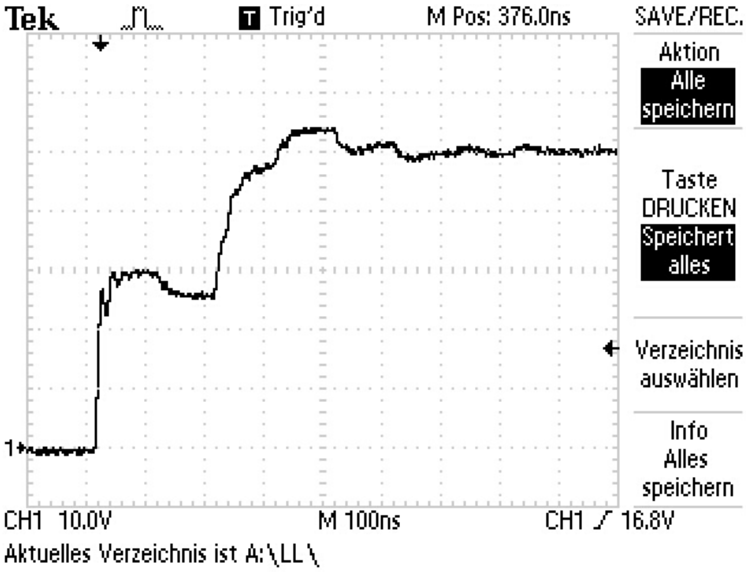

Abbildung 20: Zeitlicher Spannungsverlauf für die in Reihe geschalteten Kabel A und B

können dann die Reflexionsfaktoren mit Hilfe des Impulsfahrplans in Abbildung 21 zu

$$\Gamma_L = \frac{U_1'}{U_0} = 0{,}565 \pm 0{,}002 \tag{39}$$

$$\Gamma_E = \frac{U_3'}{U_2'} + \frac{U_2'}{U_0\,(1-\Gamma_L)} = 1{,}084 \pm 0{,}007 \tag{40}$$

$$\Gamma_R = \frac{U_3'}{U_2'\,\Gamma_E} = -0{,}497 \pm 0{,}009 \tag{41}$$

berechnet werden. An dieser Stelle fällt insbesondere auf, dass $\Gamma_E \;\; > 1$ ist, obwohl Reflexionsfaktoren physiklaisch sinnvoll immer kleiner oder gleich eins sein müssen. Diese Ungenauigkeit entsteht durch den unsauber gemessenen Bereich von ca. 0,12 µs bis 0,30 µs in Abbilung 20, in dem deutlichere „Stufen“ erkennbar sein müssten.

Die Fehler der einzelnen Reflexionsfaktoren ergeben sich durch

$$\Delta\Gamma_L = \Gamma_L \sqrt{\left(\frac{\Delta U_1'}{U_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U_0}{U_0}\right)} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}\Delta\Gamma_E = &\sqrt{\left(\frac{\Delta U_2' \, \Delta U_0}{U_0^2(1-\Gamma_L)}\right)^2 + \left[\left(\frac{-U_3'}{U_2'^2} + \frac{1}{U_0(1-\Gamma_L)}\right)\Delta U_2'\right]^2} \\ &\overline{+ \left(\frac{\Delta U_3'}{U_2'}\right)^2 + \left(\frac{U_2' \, \Delta\Gamma_L}{U_0(1-\Gamma_L)^2}\right)^2}\end{aligned} \tag{43}$$

$$\Delta\Gamma_R = \Gamma_R \sqrt{\left(\frac{\Delta U_2'}{U_2'}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U_3'^{\,2}}{U_3'}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\Gamma_E}{\Gamma_E}\right)^2} \quad . \tag{44}$$

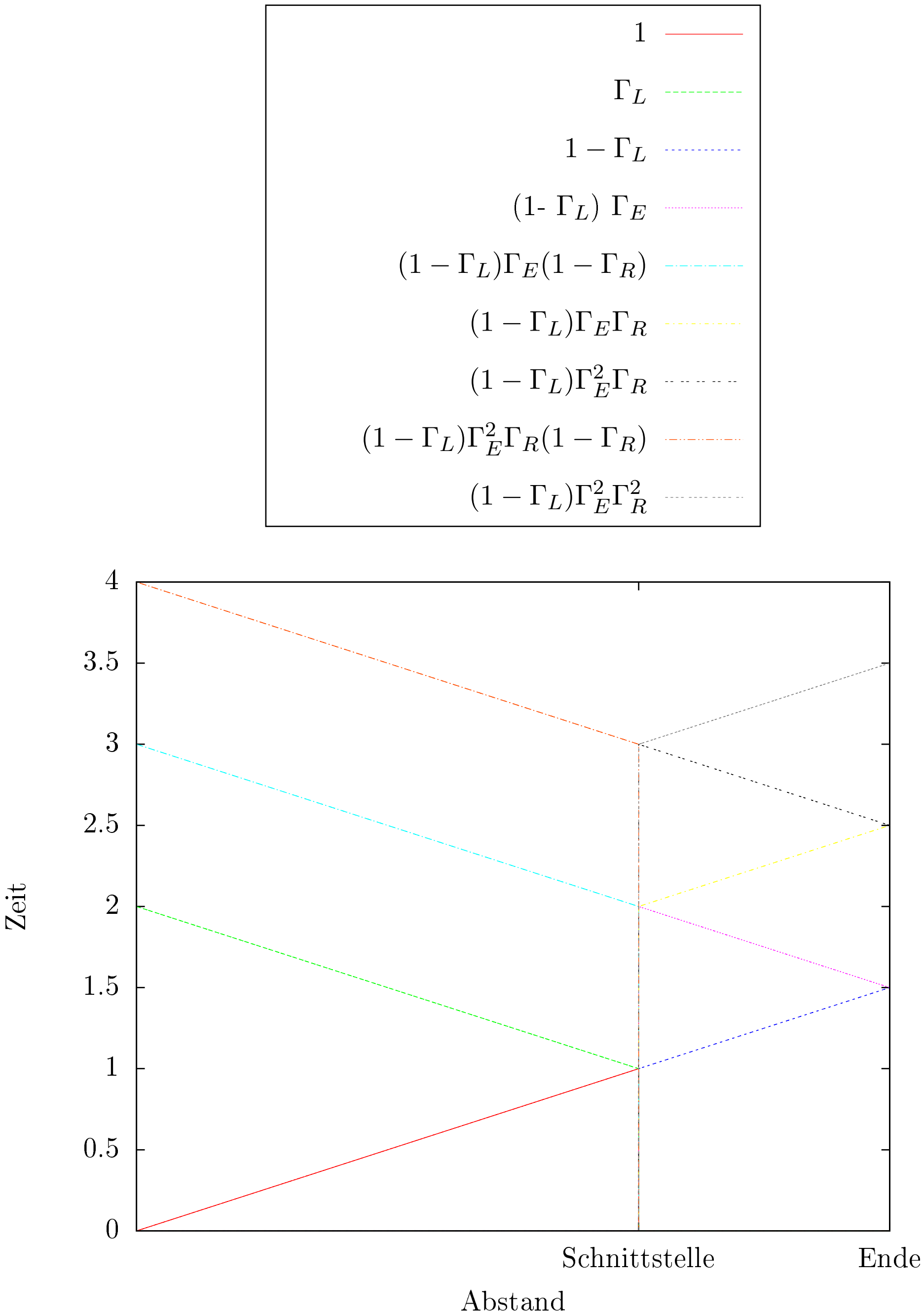

Abbildung 21: Impulsfahrplan für die in Reihe geschaltete Kabel A und B

4.8 Diskussion

Die Auswertung der verschiedenen Versuchsteile fiel unterschiedlich gut aus. Der Versuchsteil a) entsprach leider kaum den aus der Theorie erwarteten Vorausssagen, wie schon in Abschnitt 4.2 erwähnt. Nur die Frequenzabhängigkeit für den ohmschen Belag R und die Frequenzunabhängigkeit des Kapazitätsbelags C können im Experiment bestätigt werden. Diese unzureichenden Ergebnisse können auf die ungenaue Messung mit dem RLC-Gerät zurückgeführt werden. Das Gerät reagierte sehr empfindlich auf Berührungen, sodass allein beim Betätigen des Frequenzschalters die Messwerte stark schwankten. Außerdem sank die Anzeige des Induktivitätsbelags, umso länger man mit dem Ablesen der Werte wartete.

Bei der Messung der Dämpfungskonstante konnte die Frequenzabhängigkeit bestätigt werden. Allerdings ist die Dämpfung relativ klein, obwohl die Kabellängen sich in mindestens 84 m unterschieden haben, wodurch man eine höhere Dämpfung vermuten würde. Möglicherweise wurde diese Messung durch die nur ungenau abzulesenden Spannungspeaks am Oszilloskop beeinflusst.

Die Bestimmung der Längen der Kabel durch die Auswertung der zeitlichen Spannungsverläufe erwies sich insbesondere im Gegensatz zu den anderen Messteilen als sehr genau. Die größte Abweichung von 5% von der exakten Kabellänge errechnete sich bei Kabel B, bei dem sich ein Wert von 10 m statt einem Wert von 9,47 m ergab.

Die Messung der Reflexionsfaktoren ergab starke Abweichungen, die im Rahmen der ungenauen Messung zu erwarten sind. Durch die schlechte Einstellung des Oszilloskops und den dadurch verursachten relativ großen Fehlern bei Bestimmung der Plateaus im zeitlichen Spannungsverlauf ergaben sich prozentuale Abschweichungen von 182,5% für Γ_L, 148,5% für Γ_R und 8,4% für Γ_E. In der Theorie sind $\Gamma_{L,theo} = 0{,}2$, $\Gamma_{R,theo} = -0{,}2$ und $\Gamma_{E,theo} = 1$ zu erwarten.

5 Literatur- und Abbildungsverzeichnis

[1] Versuchsanleitung 52, Physikalisches Fortgeschrittenen Praktikum, TU Dortmund