

# Proiezioni di mortalità per la popolazione Francese

Massimiliano Pastorino

April 2023

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>La scelta dei modelli di mortalità</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Previsione con modelli stocastici di mortalità</b>	<b>14</b>
<b>4</b>	<b>Incertezza dei parametri dei modelli di mortalità e previsione</b>	<b>20</b>
<b>5</b>	<b>Valore attuale di rendite vitalizie</b>	<b>25</b>
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>28</b>

## Elenco delle figure

1	Modello Renshaw-Haberman stimato sulla popolazione femminile . . . . .	7
2	Parametri stimati del modello Lee-Carter per la popolazione femminile . . . . .	8
3	Parametri stimati del modello Lee-Carter per la popolazione maschile . . . . .	8
4	Parametri stimati del modello RH per la popolazione maschile . . . . .	9
5	Parametri stimati del modello PLAT per la popolazione femminile . . . . .	10
6	Residui del modello LC per la popolazione femminile . . . . .	11
7	Residui del modello LC per la popolazione maschile . . . . .	11
8	Colourmap dei residui del modello LC per la popolazione femminile . . . . .	12
9	Colourmap dei residui del modello LC per la popolazione maschile . . . . .	12
10	Residui del modello RH per la popolazione maschile . . . . .	13
11	Colourmap dei residui del modello RH per la popolazione maschile . . . . .	13
12	Residui del modello PLAT per la popolazione femminile . . . . .	14
13	Colourmap dei residui del modello PLAT per la popolazione femminile . . . . .	14
14	Previsione del parametro $k_t^{(1)}$ per la popolazione francese femminile con $h = 50$ (Lee-Carter) . . . . .	15
15	Previsione del parametro $k_t^{(1)}$ per la popolazione francese maschile con $h = 50$ (Lee-Carter) . . . . .	15
16	Previsione del parametro $k_t^{(1)}$ e del parametro $\gamma_{t-x}$ per la popolazione francese maschile con $h = 50$ (Renshaw-Haberman) . . . . .	16
17	Previsione dei trend di mortalità $k_t^{(1)}, k_t^{(2)}$ per la popolazione francese femminile con $h = 50$ (Plat) . . . . .	17
18	Previsione del parametro $\gamma_{t-x}$ per la popolazione francese femminile con $h = 50$ (Plat) . . . . .	17
19	Proiezioni del tasso di mortalità all'età di 65, 75, 85 anni con il modello Lee-Carter per la popolazione francese maschile e femminile ( $k_t^{(1)}$ model: ARIMA(1,1,0) ) . . . . .	19
20	Proiezioni del tasso di mortalità all'età di 65, 75, 85 anni con il modello Renshaw-Haberman ( $k_t^{(1)}$ model: ARIMA(1,2,1) ) e con il modello Plat ( $k_t^{(1)}$ model: ARIMA(2,1,2), $k_t^{(2)}$ model: ARIMA(0,2,2) ) . . . . .	19
21	Parametri bootstrap per il modello Lee-Carter adattato alla popolazione femminile francese . . . . .	20

22	Parametri bootstrap per il modello Lee-Carter adattato alla popolazione maschile francese . . . . .	21
23	Parametri bootstrap per il modello Renshaw-Haberman adattato alla popolazione maschile . . . . .	21
24	Parametri bootstrap per il modello Plat adattato alla popolazione femminile . . . . .	22
25	Intervalli di previsione al 95% per i tassi di mortalità $q_{xt}$ all'età $x = 65$ per il modello Lee-Carter adattato alla popolazione femminile francese . . . . .	23
26	Intervalli di previsione al 95% per i tassi di mortalità $q_{xt}$ all'età $x = 65$ per il modello Lee-Carter adattato alla popolazione maschile francese . . . . .	23
27	Intervalli di previsione al 95% per i tassi di mortalità $q_{xt}$ all'età $x = 65$ per il modello Renshaw-Haberman adattato alla popolazione maschile francese . . . . .	24
28	Intervalli di previsione al 95% per i tassi di mortalità $q_{xt}$ all'età $x = 65$ per il modello Plat adattato alla popolazione femminile francese . . . . .	25
29	Rendita vitalizia con i relativi intervalli di confidenza per il modello Lee-Carter (popolazione femminile) . . . . .	26
30	Rendita vitalizia con i relativi intervalli di confidenza per il modello Lee-Carter (popolazione maschile) . . . . .	26
31	Rendita vitalizia con i relativi intervalli di confidenza per il modello Renshaw-Haberman (popolazione maschile) . . . . .	27
32	Rendita vitalizia con i relativi intervalli di confidenza per il modello Plat (popolazione femminile) . . . . .	28

## Elenco delle tabelle

1	Modelli di mortalità . . . . .	5
2	Log-Lik-AIC-BIC Popolazione maschile . . . . .	6
3	Log-Lik-AIC-BIC Popolazione femminile . . . . .	6
4	Miglior modello ARIMA per $k_t^{(1)}$ e $k_t^{(2)}$ . . . . .	18

# 1 Introduzione

Questo lavoro presenta i risultati ottenuti dalla modellazione dei dati di mortalità della Francia dal 1969 al 2019 riguardanti sia la popolazione maschile sia quella femminile, prendendo in considerazione una fascia d'età compresa tra 0 e 100 anni. L'orizzonte di proiezione scelto è pari a 50 anni.

I dati raccolti sono disponibili al seguente link (<https://www.mortality.org/>)

I dati del numero dei decessi e della popolazione esposta al rischio di morte formano una matrice, dove le righe sono le età  $x = x_1, \dots, x_k$  e le colonne gli anni  $t = t_1, \dots, t_n$ . Trasformiamo le esposizioni centrali  $E_{xt}^C$  in esposizioni iniziali  $E_{xt}^0$  attraverso la seguente formula:  $E_{xt}^0 \approx E_{xt}^C + \frac{1}{2}d_{xt}$ , dove  $d_{xt}$  rappresenta il numero di decessi osservati.

La tabella 1 mostra i modelli di mortalità utilizzati. Il modello di Lee-Carter sarà il modello di benchmark, esso sarà confrontato con ulteriori modelli di mortalità per capire quali di essi si adatta meglio ai dati in questione. I modelli verranno applicati separatamente alla popolazione maschile e alla popolazione femminile.

Tabella 1: **Modelli di mortalità**

Modello	Formula
Lee-Carter	$\eta_{xt} = \alpha_x + \beta_x^{(1)}k_t^{(1)}$
Renshaw-Haberman	$\eta_{xt} = \alpha_x + \beta_x^{(1)}k_t^{(1)} + \beta_x^{(0)}\gamma_{t-x}$
Age-Period-Cohort	$\eta_{xt} = \alpha_x + k_t^{(1)} + \gamma_{t-x}$
Cairns-Blake-Dowd (M7)	$\eta_{xt} = k_t^{(1)} + (x - \bar{x})k_t^{(2)} + ((x - \bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2)k_t^{(3)} + \gamma_{t-x}$
Plat	$\eta_{xt} = \alpha_x + k_t^{(1)} + (\bar{x} - x)k_t^{(2)} + (\bar{x} - x)^+k_t^{(3)} + \gamma_{t-x}$

Ognuno dei modelli presenti nella tabella 1 ha una serie di vincoli che riguardano i parametri da rispettare, affinché l'identificabilità del modello sia garantita.

Per quanto riguarda i parametri possiamo dire che  $\alpha_x$  descrive il comportamento della mortalità al variare dell'età, mentre  $\beta_x^{(1)}$  descrive per ogni età come la mortalità reagisce al variare di  $k_t^{(1)}$  dove  $k_t^{(1)}$  è l'indice della variazione della mortalità nel tempo.

Il parametro  $\beta_x^{(0)}$  descrive per ogni età come la mortalità reagisce al variare dell'effetto coorte, mentre il parametro  $\gamma_{t-x}$  prende in considerazione l'effetto coorte per la coorte nata nell'anno  $t - x$ .

Il modello M7 è una variante del modello Cairns-Blake-Dowd originale, in questo caso nella struttura del predittore avremo un parametro che cattura l'effetto coorte e un altro parametro temporale che rappresenta l'effetto quadratico dell'età.  $\hat{\sigma}_x^2$  è il valore medio di  $(x - \bar{x})^2$ .

Nel modello Plat il parametro  $(\bar{x} - x)^+$  è uguale a  $\max(\bar{x} - x, 0)$ , in cui  $\bar{x}$  rappresenta l'età media.  $k_t^{(2)}$  consente ai cambiamenti nel tasso di mortalità tra

le età di riflettere le osservazioni storiche che migliorano la mortalità in alcune età, mentre  $k_t^{(3)}$  viene introdotto per catturare la dinamica del tasso di mortalità nelle età più giovani.

## 2 La scelta dei modelli di mortalità

Nella tabella 2 e nella tabella 3 confrontiamo quanto bene i modelli si adattano ai dati prendendo in considerazione la log-verosomiglianza e i criteri d'informazione quali AIC (Akaike Information Criterion) e BIC (Bayesian Information Criterion). Nella procedura di fitting non abbiamo considerato le coorti con meno di 4 osservazioni.

Tabella 2: **Log-Lik-AIC-BIC Popolazione maschile**

Modello	Log-Verosomiglianza	AIC	BIC
Lee-Carter	-37602.23	75706.45	77348.76
<b>Renshaw-Haberman</b>	<b>-28701.93</b>	<b>58189.86</b>	<b>60761.28</b>
Age-Period-Cohort	-38436.26	77456.51	79367.08
Cairns-Blake-Dowd (M7)	-379891.70	760369.4	762286.51
Plat	-35276.75	71235.5	73466.68

Tabella 3: **Log-Lik-AIC-BIC Popolazione femminile**

Modello	Log-Verosomiglianza	AIC	BIC
<b>Lee-Carter</b>	<b>-30753.76</b>	<b>62009.52</b>	<b>63651.83</b>
Age-Period-Cohort	-33640.73	67865.46	69776.04
Cairns-Blake-Dowd (M7)	-270848.53	542283.1	544200.18
Plat	-31030.02	62742.04	64973.22

Prendendo in considerazione la log-verosomiglianza, l'AIC e il BIC, possiamo affermare che il modello di mortalità migliore per la popolazione maschile è il modello di Renshaw-Haberman, mentre il modello peggiore sia per la popolazione maschile sia per la popolazione femminile è il modello M7.

Per la popolazione femminile il miglior modello di mortalità è il modello di Lee-Carter.

Alla luce di questi risultati, per la popolazione maschile consideriamo il modello di Renshaw-Haberman per rappresentare l'evoluzione della mortalità, esso verrà confrontato con il modello di benchmark, ovvero il Lee-Carter, mentre per la popolazione femminile consideriamo il modello Plat, esso verrà confrontato con il modello di benchmark, il Lee-Carter. Il plat è il secondo modello migliore in termini di log-verosomiglianza, AIC e BIC guardando la tabella 3.

Per la popolazione femminile il modello Renshaw-Haberman non ha prodotto la convergenza, infatti come notiamo dalla tabella 3, esso è stato escluso.

```

Warning messages:
1: In gnmFit(modelTools = modelTools, y = y, constrain = constrain, :
  Fitting algorithm has either not converged or converged
  to a non-solution of the likelihood equations.
  Use exitInfo() for numerical details of last iteration.
2: In Fit.STMoMo(rhLink = "logit", cohortAgeFun = "I"), data = FRANCEFSTMoMoI, :
  STMoMo: The model fitting didn't converge.

```

Figura 1: **Modello Renshaw-Haberman stimato sulla popolazione femminile**

Nella figura 2 e nella figura 3 vengono riportati i parametri del modello Lee-Carter per le popolazioni di riferimento.

I grafici dei parametri presenti in figura 2 e figura 3 sembrano essere ragionevoli in quanto il parametro  $\alpha_x$  mostra una tendenza crescente all'aumentare degli anni, questo vuol dire che quando l'età aumenta, aumenta in media anche il tasso centrale di mortalità. Possiamo notare in linea di massima che ad 1 anno di età, il tasso di mortalità è elevato, per poi diminuire fino alla età di 16 anni. Successivamente abbiamo una ricrescita fino ai 20 anni. Dai 20 ai 40 anni la curva è molto regolare e lenta, qui abbiamo la cosiddetta “gobba degli incidenti”, abbiamo un tasso di sovra mortalità, che nei paesi più sviluppati è causata principalmente da incidenti stradali.

Dal parametro  $\alpha_x$  notiamo che il tasso di mortalità presenta una rapida diminuzione per i bambini sotto i 10 anni di età, mentre il tasso di mortalità tende ad aumentare durante l'età adulta.

Per quanto riguarda il parametro  $\beta_x^{(1)}$  presente nella figura 2, possiamo notare in linea di massima come il trend sia decrescente, in particolare fino a poco prima dei 60 anni. Successivamente abbiamo un rialzo fino a poco prima di 80 anni circa, per poi infine riprendere un calo nelle età più anziane. L'andamento del parametro  $\beta_x^{(1)}$  presente nella figura 3 è simile.

Il parametro  $k_t^{(1)}$  presente nella figura 2 e nella figura 3, indica un trend decrescente nel tempo, questo può essere dovuto al miglioramento della qualità della vita della popolazione Francese.

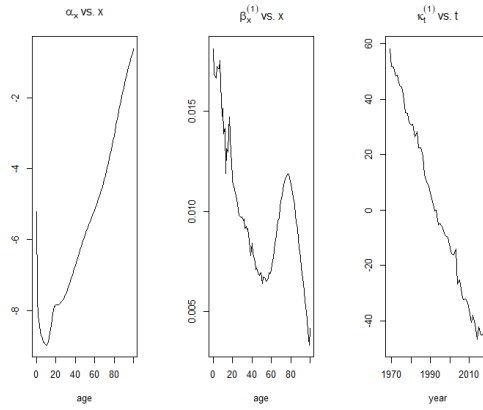


Figura 2: **Parametri stimati del modello Lee-Carter per la popolazione femminile**

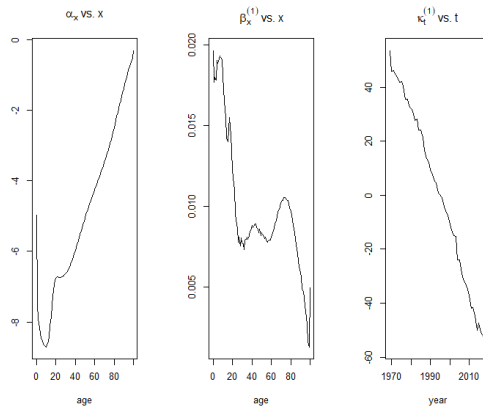


Figura 3: **Parametri stimati del modello Lee-Carter per la popolazione maschile**



Dalla tabella 2 abbiamo visto che il miglior modello di mortalità per la popolazione maschile, secondo i vari criteri presi in considerazione, è quello di Renshaw-Haberman.

Nella figura 4 vengono riportati i parametri del modello RH per la popolazione maschile.

Come per il modello Lee-Carter, il parametro  $\alpha_x$  descrive l'andamento del tasso di mortalità attraverso l'età. Anche in questo caso quando l'età aumenta, aumenta in media anche il tasso centrale di mortalità.

Dal parametro  $\beta_x^{(1)}$  osserviamo la velocità con cui la mortalità diminuisce nei bambini e nei giovani.

Il parametro  $k_t^{(1)}$  presenta l'andamento del tasso di mortalità nel periodo 1969-2019, e ci mostra come il tasso di mortalità ha subito una marcata diminuzione nel periodo studiato.

Il parametro  $\beta_x^{(0)}$  è pari a 1, abbiamo una sotto struttura del modello Renshaw-Haberman, in questo caso possiamo risolvere problemi di stabilità legati al modello originale.

Il parametro  $\gamma_{t-x}$  rappresenta l'effetto di coorte. Il fattore di coorte è coerente con quello che ci aspettiamo, ovvero aumenta fino alla fine degli anni 20, successivamente diminuisce, abbiamo delle coorti quindi più fortunate rispetto a quelle passate.

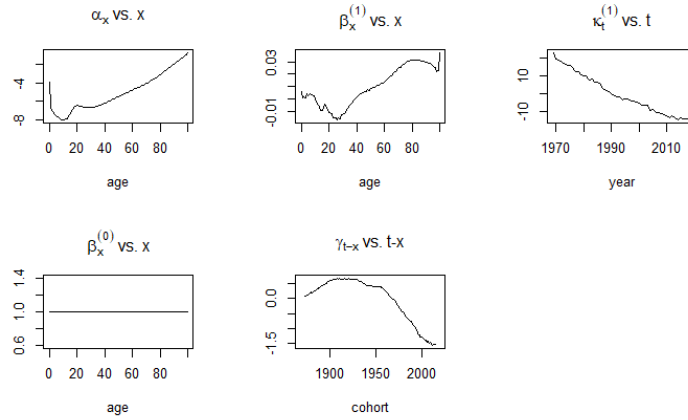


Figura 4: **Parametri stimati del modello RH per la popolazione maschile**

Nella figura 5 vengono riportati i parametri del modello Plat per la popolazione femminile.

Il parametro  $\alpha_x$  mostra che il tasso di mortalità all'età di 1 anno è alto, successivamente diminuisce fino a quando la persona raggiunge i 16 anni circa, rimanendo costante dai 17 ai 30 anni circa, per poi aumentare all'aumentare dell'età.

Il parametro  $k_t^{(1)}$  mostra che il tasso di mortalità è diminuito in tutte le età nel tempo studiato. Il parametro  $k_t^{(2)}$  mostra che il tasso di mortalità nel periodo analizzato varia nelle diverse età.

Il parametro  $\gamma_{t-x}$  presenta l'effetto di coorte, in particolare notiamo l'esistenza di generazioni più fortunate e di generazioni meno fortunate.

In generale, il trend dei tassi di mortalità è in diminuzione negli anni, sia per gli uomini che per le donne, considerando i vari modelli di mortalità utilizzati.

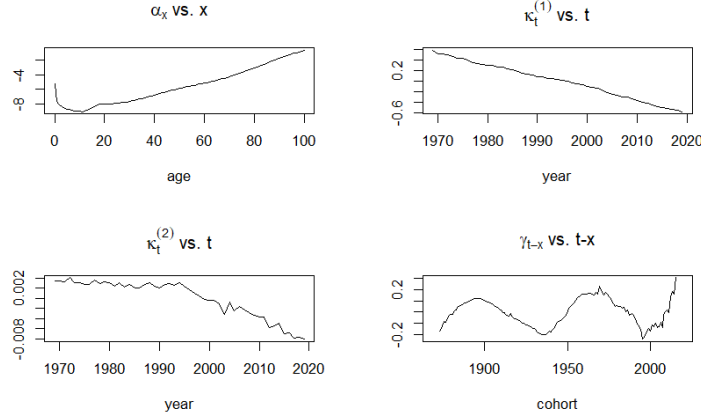


Figura 5: **Parametri stimati del modello PLAT per la popolazione femminile**

Per studiare la bontà di adattamento dei modelli utilizzati, vengono studiati i residui. Quando nei residui c'è una regolarità, un pattern deterministico e non casuale allora il modello in esame non è stato in grado di descrivere correttamente tutte le caratteristiche dei dati.

Nella figura 6 e nella figura 7 vengono riportati i residui del modello Lee-Carter per le popolazioni di riferimento.

Analizzando i residui del modello Lee-Carter, non si evince una totale casualità, è possibile notare una qualche forma di correlazione. Questo ci fa capire che il modello Lee-Carter non fitta bene i dati e questo può essere dovuto al fatto che non viene preso in considerazione l'effetto dovuto alla coorte di appartenenza.

Questo aspetto lo si evince bene anche dalle figure 8 e 9, infatti come possiamo notare c'è un evidente trend diagonale dei residui, essi non sono distribuiti in modo casuale. Nelle diagonali sono presenti le generazioni. Il modello Lee-Carter considerato lavora sull'età  $x$  e sul tempo  $t$ , ma non su  $\tau$ .

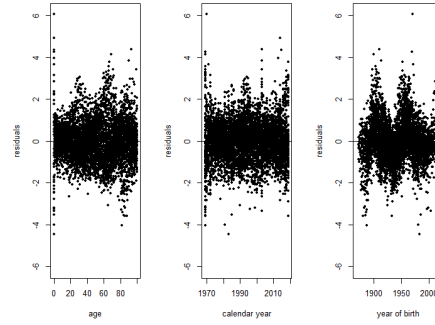


Figura 6: **Residui del modello LC per la popolazione femminile**

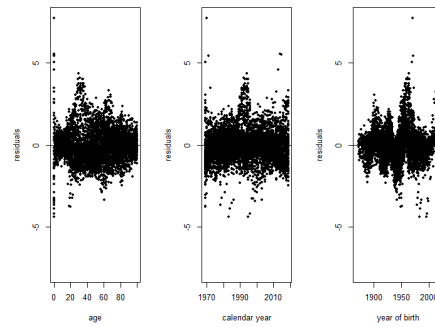


Figura 7: **Residui del modello LC per la popolazione maschile**

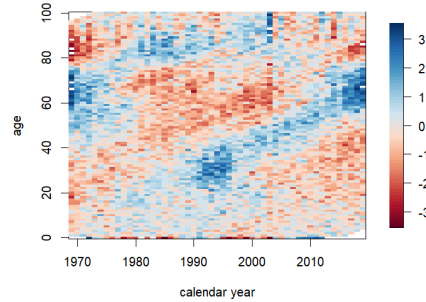


Figura 8: **Colourmap dei residui del modello LC per la popolazione femminile**

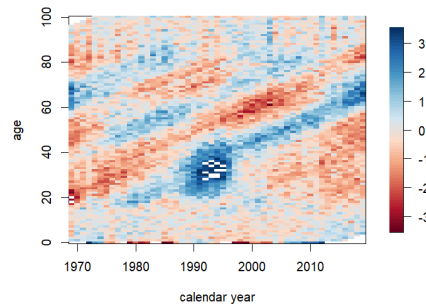


Figura 9: **Colourmap dei residui del modello LC per la popolazione maschile**

L'analogo discorso viene fatto per i residui dei modelli Renshaw-Haberman e Plat. Nella figura 10 e nella figura 11 vengono riportati i residui del modello RH per la popolazione maschile.

I residui del modello RH presentano una distribuzione simmetrica e casuale attorno allo 0, non abbiamo un pattern preciso. La maggioranza dei residui assume valori nell'intervallo  $[-2, +2]$ . Dalla figura 11 notiamo che si potrebbe fare di meglio per cercare di catturare al meglio l'effetto coorte.

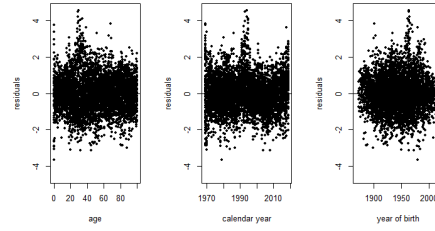


Figura 10: **Residui del modello RH per la popolazione maschile**

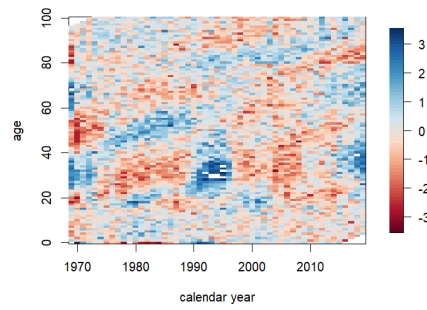


Figura 11: **Colourmap dei residui del modello RH per la popolazione maschile**

Nelle figure 12 e 13 vengono riportati i residui del modello Plat per la popolazione femminile. Anche in questo caso notiamo un evidente trend diagonale dei residui, essi non sono distribuiti in modo casuale.

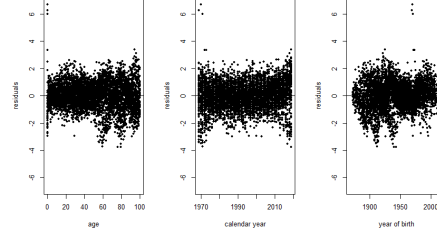


Figura 12: Residui del modello PLAT per la popolazione femminile

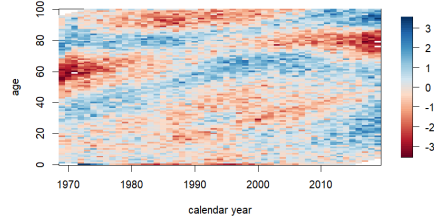


Figura 13: Colourmap dei residui del modello PLAT per la popolazione femminile

### 3 Previsione con modelli stocastici di mortalità

I modelli GAPC (generalized age-period-cohort) considerano stime dei parametri che dipendono dal tempo. Per conoscere l'andamento futuro del tasso di mortalità della Francia, utilizzeremo la metodologia Box-Jenkins per stimare l'indice di tendenza  $k_t^{(1)}$  e l'indice di coorte  $\gamma_{t-x}$ , infatti le proiezioni della mortalità derivano utilizzando la previsione delle serie temporali dei  $k_t^{(1)}$  e  $\gamma_{t-x}$  stimati, considerando dei processi ARIMA con l'ipotesi di indipendenza tra il periodo e l'effetto di coorte.

L'orizzonte temporale (h) preso in considerazione per la previsione è pari a 50 anni. Nelle figure 14 e 15 sono presentate le previsioni dei trend di mortalità considerando il modello Lee-Carter.

Il trend di mortalità  $k_t^{(1)}$  è stato previsto con un processo stocastico random walk con drift, ARIMA(0,1,0).

Il trend di mortalità diminuisce con gli anni, questo sia per gli uomini, sia per le donne.

L'intervallo di confidenza al 95% per la popolazione femminile è più ampio rispetto a quello della popolazione maschile.

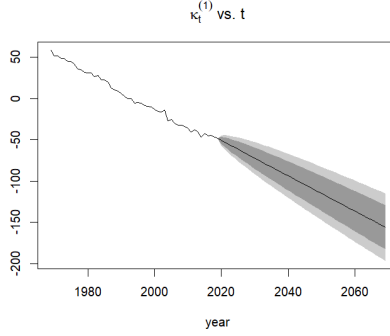


Figura 14: **Previsione del parametro  $k_t^{(1)}$  per la popolazione francese femminile con  $h = 50$  (Lee-Carter)**

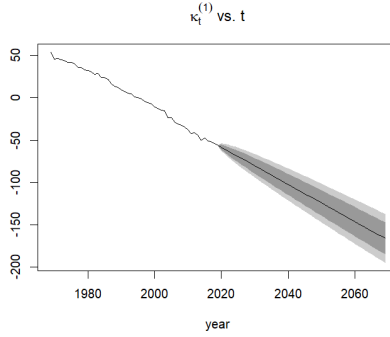


Figura 15: **Previsione del parametro  $k_t^{(1)}$  per la popolazione francese maschile con  $h = 50$  (Lee-Carter)**

L'analogo discorso viene fatto per il modello Renshaw-Haberman, in questo caso dato che il modello RH tiene conto anche dell'effetto coorte  $\gamma_{t-x}$ , possiamo pensare di prevedere non solo  $k_t^{(1)}$ , ma anche  $\gamma_{t-x}$  prendendo sempre in considerazione l'orizzonte temporale  $h=50$ .

La figura 16 mostra proprio questo. La previsione del parametro  $\gamma_{t-x}$  indica una diminuzione della mortalità dovuta all'effetto coorte. Anche in questo caso il trend di mortalità  $k_t^{(1)}$  è stato previsto con un processo stocastico random walk con drift, ARIMA(0,1,0), mentre per il parametro  $\gamma_{t-x}$  abbiamo preso in considerazione un ARIMA(1,1,0) with drift.

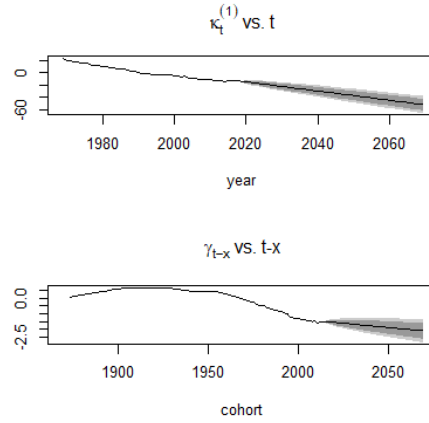


Figura 16: **Previsione del parametro  $k_t^{(1)}$  e del parametro  $\gamma_{t-x}$  per la popolazione francese maschile con  $h = 50$  (Renshaw-Haberman)**

Infine, nelle figure 16 e 17 in modo analogo a quanto visto in precedenza, sono mostrate le previsioni dei trend di mortalità  $k_t^{(1)}$ ,  $k_t^{(2)}$  e del parametro  $\gamma_{t-x}$  per il modello Plat considerando la popolazione femminile.

L'andamento dei trend di mortalità sembra essere ragionevole, meno ragionevole sembra essere l'andamento relativo al parametro  $\gamma_{t-x}$ .



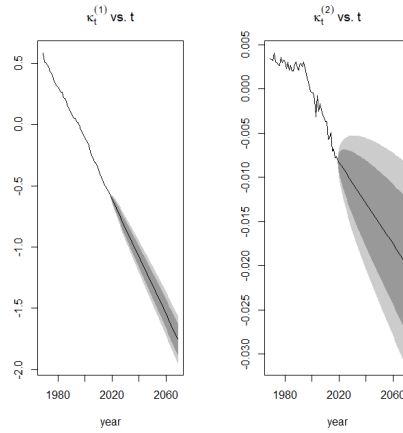


Figura 17: Previsione dei trend di mortalità  $k_t^{(1)}$ ,  $k_t^{(2)}$  per la popolazione francese femminile con  $h = 50$  (Plat)

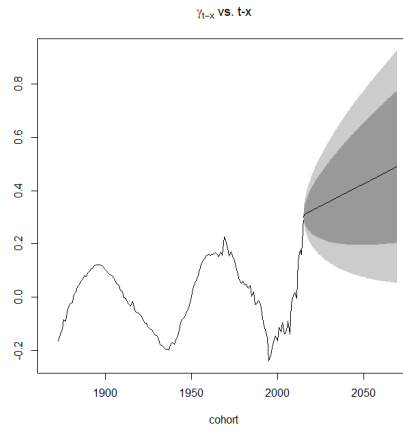


Figura 18: Previsione del parametro  $\gamma_{t-x}$  per la popolazione francese femminile con  $h = 50$  (Plat)

Per prevedere  $k_t^{(1)}$  e  $k_t^{(2)}$ , possiamo considerare modelli ARIMA differenti dal semplice random walk, (ARIMA(0,1,0)).

Nella tabella 4 vengono riportati i migliori modelli ARIMA per  $k_t^{(1)}$  e  $k_t^{(2)}$ .

Tabella 4: **Miglior modello ARIMA per  $k_t^{(1)}$  e  $k_t^{(2)}$**

Modello	$k_t^{(1)}$	$k_t^{(2)}$
Lee-Carter (maschile e femminile)	ARIMA(1,1,0) con drift	NULL
Renshaw-Haberman (Popolazione maschile)	ARIMA(1,2,1)	NULL
Plat (Popolazione femminile)	ARIMA(2,1,2) con drift	ARIMA(0,2,2)

Per decidere quale modello di mortalità stocastica sia il più appropriato, possiamo considerare i fan charts, tali grafi sono molto utili per fare un'analisi sulla plausibilità della previsione da un modello e possono essere utilizzati come criterio per decidere quale sia il più appropriato.

Le figure 19 e 20 mostrano i fan charts che rappresentano gli intervalli di previsione del 50%, 80% e 95% per i tassi di mortalità all'età di 65, 75 e 85 anni per il modello Lee-Carter (fig. 19) e per i modelli Renshaw-Haberman e Plat (fig. 20).

Sono rappresentati i tassi di mortalità  $q_{xt}$  all'età  $x = 65$  (in basso),  $x = 75$  (al centro) e  $x = 85$  (in alto). L'area blu rappresenta gli intervalli di confidenza dei tassi di mortalità previsti all'età di 85 anni sull'orizzonte di previsione, mentre le diverse gradazioni di colori denotano i diversi percentili.

L'area più scura rappresenta il percentile tra il 25% e il 75%, la gradazione "media" rappresenta il percentile tra il 10% e il 90% mentre la più chiara rappresenta il percentile tra il 2,5% e il 97,5%.

L'area rossa si riferisce agli intervalli di confidenza a 75 anni mentre quella nera si riferisce agli intervalli di confidenza a 65 anni.

Dalla figura 19 l'evoluzione della mortalità sembra essere biologicamente ragionevole, mentre dalla figura 20 notiamo un aumento non plausibile dei tassi di mortalità, soprattutto per il Plat, questo può essere dovuto al parametro  $\gamma_{t-x}$  che rappresenta l'effetto coorte, esso mostra una forte tendenza al rialzo dagli anni 2000 in poi (figura18).

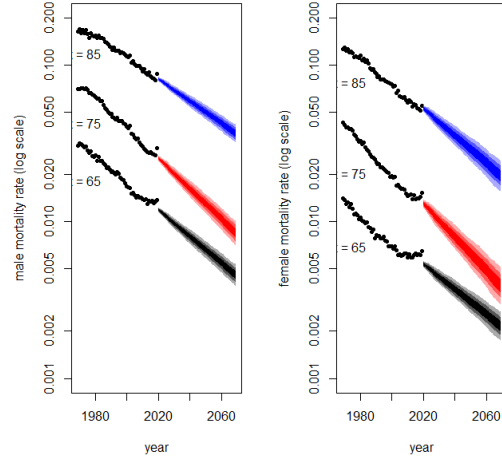


Figura 19: Proiezioni del tasso di mortalità all'età di 65, 75, 85 anni con il modello Lee-Carter per la popolazione francese maschile e femminile ( $k_t^{(1)}$  model: ARIMA(1,1,0) )

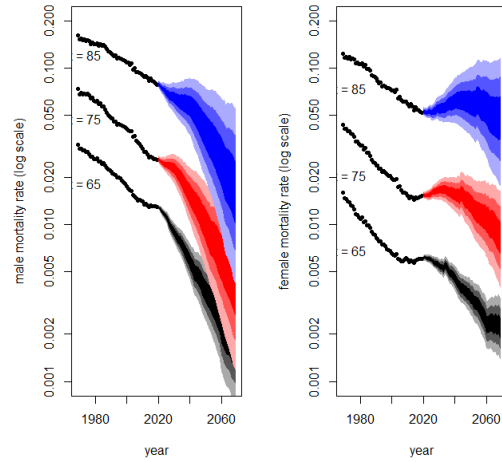


Figura 20: Proiezioni del tasso di mortalità all'età di 65, 75, 85 anni con il modello Renshaw-Haberman ( $k_t^{(1)}$  model: ARIMA(1,2,1) ) e con il modello Plat ( $k_t^{(1)}$  model: ARIMA(2,1,2),  $k_t^{(2)}$  model: ARIMA(0,2,2) )

## 4 Incertezza dei parametri dei modelli di mortalità e previsione

Le previsioni sono incerte e questo ha origini differenti, ad esempio quando si stimano gli intervalli di previsione, non teniamo conto dell'incertezza che deriva dai parametri che abbiamo stimato dal modello utilizzato. Per quantificare le diverse fonti di incertezza della stima dei parametri, si considerano procedure di Bootstrap.

Con il metodo bootstrap produciamo  $b$  campioni in base alla distribuzione dei dati e su di essi vengono stimati  $B$  set di parametri, essi vengono utilizzati per produrre intervalli di confidenza e previsioni.

Nelle figure 21 e 22 sono rappresentati i parametri bootstrap per il modello Lee-Carter adattato alla popolazione femminile e alla popolazione maschile della Francia per le età 0-100 e il periodo 1969-2020. Le diverse sfumature di colori rappresentano gli intervalli di confidenza al livello del 50%, 80% e 95%.

Il numero di campioni bootstrap preso in considerazione è pari a 20. La tipologia di bootstrap preso in considerazione è quello semiparametrico introdotto da Brouhns.

Dalle figure 21 e 22 notiamo che mentre l'incertezza nei parametri  $\alpha_x$  e  $k_t^{(1)}$  è modesta, l'incertezza nei parametri  $\beta_x^{(1)}$  è più significativa.

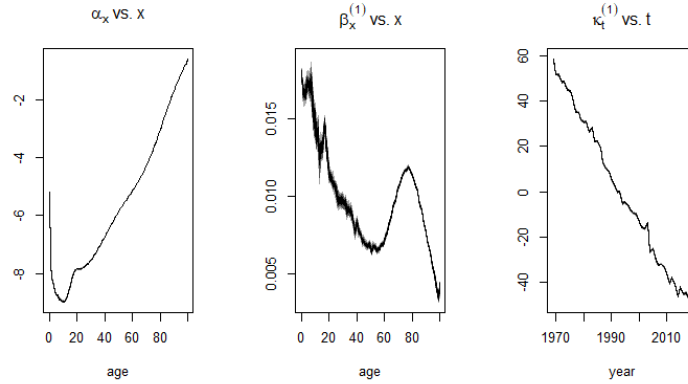


Figura 21: Parametri bootstrap per il modello Lee-Carter adattato alla popolazione femminile francese

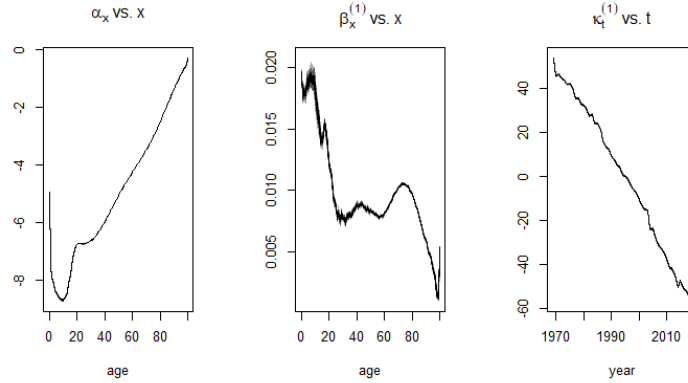


Figura 22: Parametri bootstrap per il modello Lee-Carter adattato alla popolazione maschile francese

Nelle figure 23 e 24 in modo analogo a quanto visto prima sono rappresentati i parametri bootstrap dei modelli Renshaw-Haberman e Plat.

Per quanto riguarda il modello Renshaw-Haberman, l'incertezza nei parametri  $\alpha_x$  è modesta, mentre l'incertezza nei parametri  $\beta_x^{(1)}$ ,  $k_t^{(1)}$  e  $\gamma_{t-x}$  è più significativa.

Nel modello Plat, l'incertezza nei parametri  $k_t^{(2)}$  e  $\gamma_{t-x}$  è più significativa.

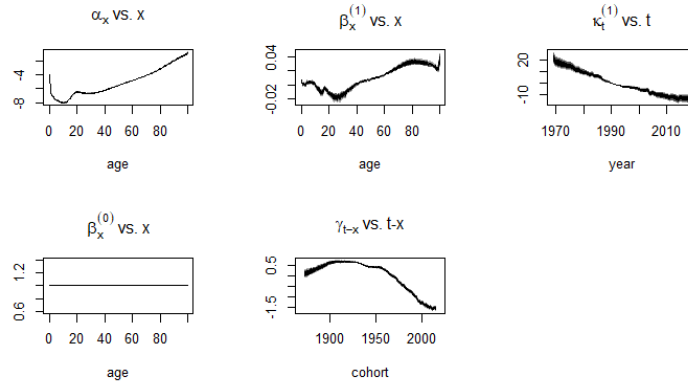


Figura 23: Parametri bootstrap per il modello Renshaw-Haberman adattato alla popolazione maschile

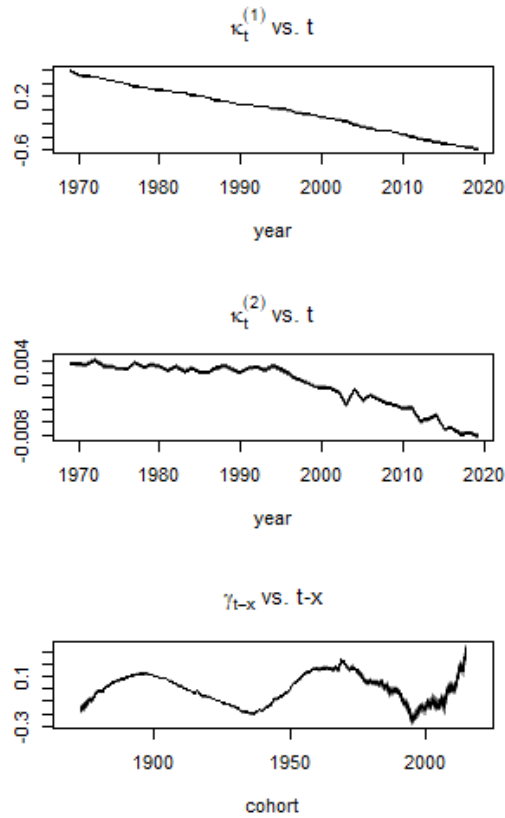


Figura 24: **Parametri bootstrap per il modello Plat adattato alla popolazione femminile**

Le figure 25 e 26 mostrano le previsioni per l'età  $x = 65$  anni relative all'andamento della mortalità per il modello Lee-Carter.

La linea di colore nero rappresenta la previsione centrale mentre le linee tratteggiate nere rappresentano gli intervalli di previsione del 95% esclusa l'incertezza dei parametri. Le linee rosse tratteggiate rappresentano gli intervalli di confidenza e previsione del 95%, inclusa l'incertezza dei parametri.

Confrontando gli intervalli di previsione, notiamo un basso livello di incertezza dei parametri, infatti i due intervalli considerati sono molto simili al variare dell'orizzonte di previsione considerato. In questo caso l'incertezza dei parametri non ha un impatto importante sugli intervalli di previsione.

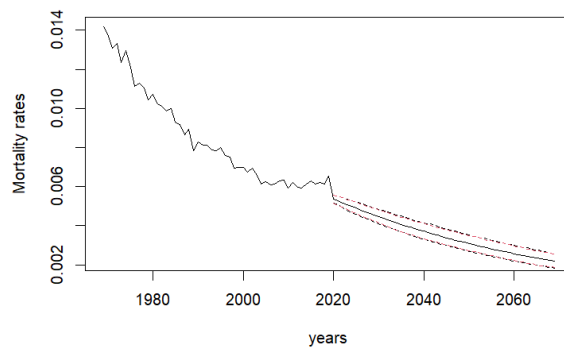


Figura 25: Intervalli di previsione al 95% per i tassi di mortalità  $q_{xt}$  all'età  $x = 65$  per il modello Lee-Carter adattato alla popolazione femminile francese

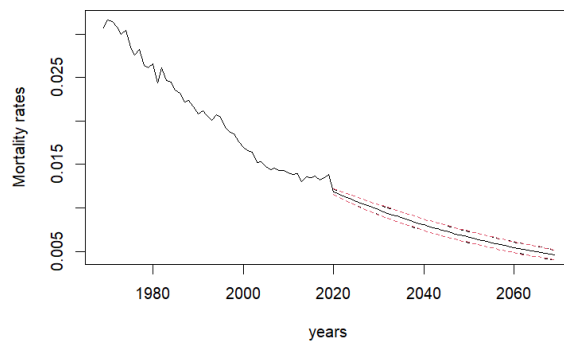


Figura 26: Intervalli di previsione al 95% per i tassi di mortalità  $q_{xt}$  all'età  $x = 65$  per il modello Lee-Carter adattato alla popolazione maschile francese

Nelle figure 27 e 28 confrontiamo gli intervalli di previsione relativi ai modelli Renshaw-Haberman e Plat. Confrontando gli intervalli di previsione, notiamo un basso livello di incertezza nei parametri, infatti i due intervalli considerati sono molto simili al variare dell'orizzonte di previsione considerato. Anche in questo caso l'incertezza nei parametri non ha un impatto importante sugli intervalli di previsione.

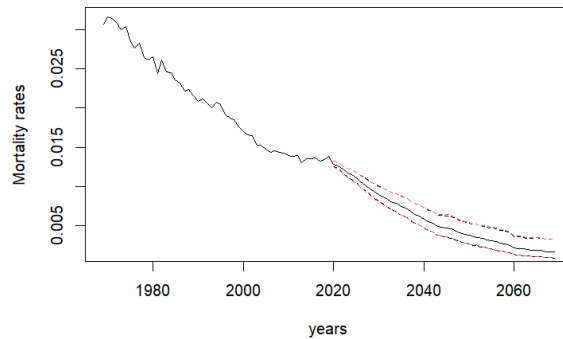


Figura 27: Intervalli di previsione al 95% per i tassi di mortalità  $q_{xt}$  all'età  $x = 65$  per il modello Renshaw-Haberman adattato alla popolazione maschile francese



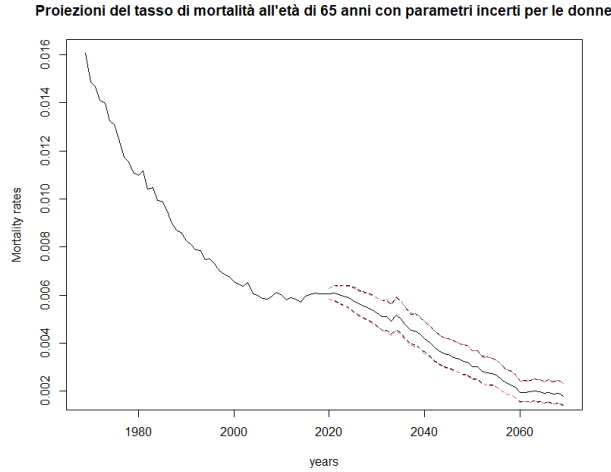


Figura 28: Intervalli di previsione al 95% per i tassi di mortalità  $q_{xt}$  all'età  $x = 65$  per il modello Plat adattato alla popolazione femminile francese

## 5 Valore attuale di rendite vitalizie

È possibile calcolare il valore attuale delle rendite vitalizie con i relativi intervalli di confidenza, grazie alle probabilità di morte che si hanno sia per la popolazione maschile sia per la popolazione femminile francese.

Le figure 29 e 30 mostrano le rendite vitalizie con i relativi intervalli di confidenza, considerando il modello Lee-Carter.

Dai grafici a sinistra vediamo come si evolve la rendita nel tempo, in particolare considerando un orizzonte di previsione pari a 50 anni. L'età è fissa, in questo caso è pari a 65 anni. Dal grafico notiamo incertezza già dal primo anno considerato. Il valore atteso della rendita cresce all'aumentare del tempo  $t$ , così come l'ampiezza del relativo intervallo di confidenza, questo è dovuto al rischio longevità, ovvero il rischio di non riuscire a prevedere quanto l'assicurato riuscirà a sopravvivere.

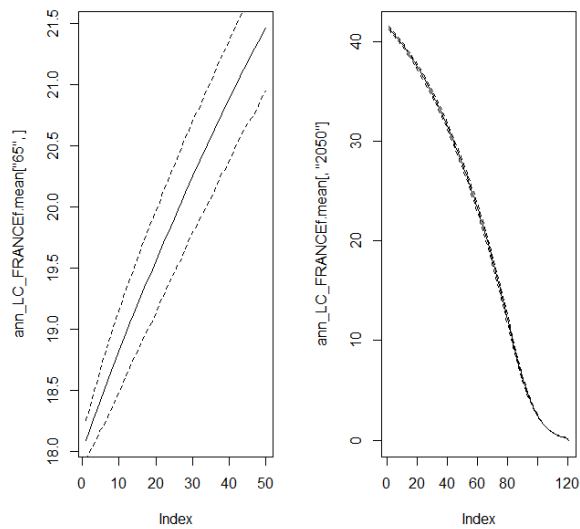


Figura 29: **Rendita vitalizia con i relativi intervalli di confidenza per il modello Lee-Carter (popolazione femminile)**

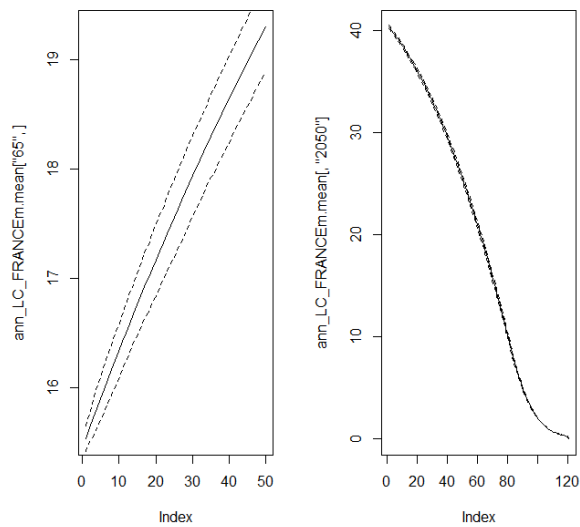
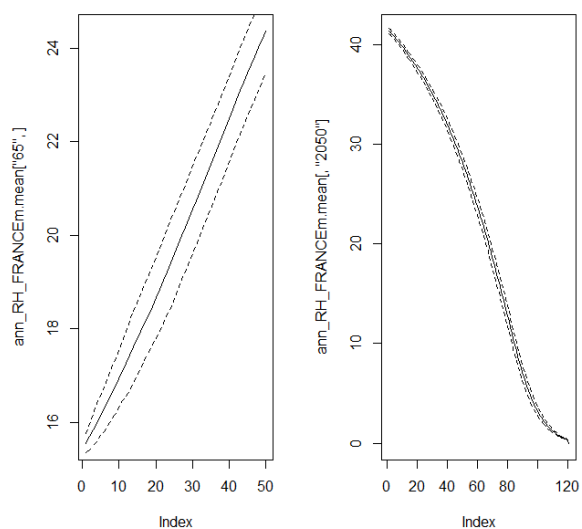


Figura 30: **Rendita vitalizia con i relativi intervalli di confidenza per il modello Lee-Carter (popolazione maschile)**

Nelle figure 31 e 32 in modo analogo a quanto visto prima sono rappresentate le rendite vitalizie con i relativi intervalli di confidenza per i modelli Renshaw-Haberman e Plat.

Rispetto agli altri modelli, le rendite vitalizie calcolate con il modello Plat presentano il grado di incertezza più ampio, esso è il peggiore.



**Figura 31: Rendita vitalizia con i relativi intervalli di confidenza per il modello Renshaw-Haberman (popolazione maschile)**

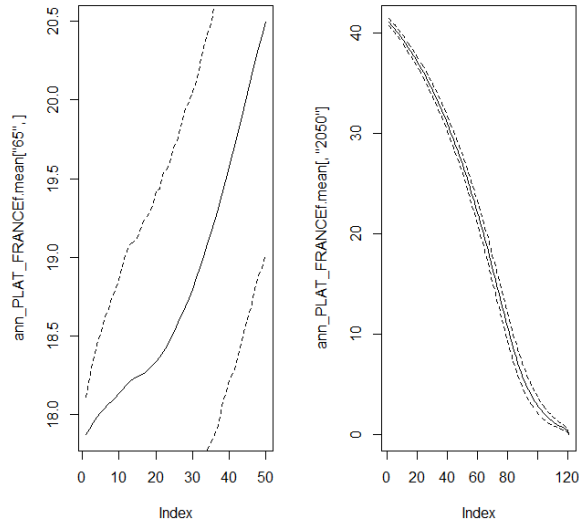


Figura 32: **Rendita vitalizia con i relativi intervalli di confidenza per il modello Plat (popolazione femminile)**

## 6 Conclusioni

Questo lavoro presenta l'applicazione della libreria StMoMo con i dati di mortalità relativi a uomini e donne francesi.

La modellazione dei dati è stata effettuata utilizzando i modelli Lee-Carter, Renshaw-Haberman e Plat, infatti tra i diversi modelli di mortalità presenti nella tabella 1, sono stati analizzati solo quelli che hanno presentato il migliore adattamento al tasso di mortalità francese.

Il modello Lee-Carter presenta una struttura semplice e i suoi parametri sono facilmente interpretabili. Il modello Renshaw-Haberman è una generalizzazione del modello Lee-Carter nel quale si incorpora il parametro relativo all'effetto coorte, mentre il modello Plat combina il modello CBD con alcune caratteristiche del modello Lee-Carter per ottenere un modello che si adatta bene a tutte le età e che catturi l'effetto coorte.

Per quanto riguarda il modello Lee-Carter, abbiamo visto che la mortalità tende ad aumentare dopo i 40 anni in modo esponenziale, questo sia per gli uomini sia per le donne, e dai residui è stato chiaro che i tassi di mortalità sono influenzati non solo dall'età e dall'anno di calendario, ma anche dall'anno di nascita della coorte.

Per quanto riguarda il modello Renshaw-Haberman, abbiamo visto che per la popolazione maschile in media il tasso centrale di mortalità aumenta all'aumentare dell'età (simile al Lee-Carter) e abbiamo notato come alcune generazioni

siano più fortunate di altre, questo è dovuto soprattutto al progresso della società in tutti i suoi campi, mentre per la popolazione femminile abbiamo preso in considerazione il modello Plat, data la mancata convergenza del modello RH.

Successivamente abbiamo applicato la metodologia Box-Jenkins per conoscere l'andamento futuro del tasso di mortalità della Francia per i parametri  $k_t^{(1)}$ ,  $k_t^{(2)}$  e  $\gamma_{t-x}$  per i successivi 50 anni (2020-2070). Dapprima abbiamo utilizzato il processo stocastico random walk con drift per la previsione, successivamente invece abbiamo utilizzato il miglior processo stocastico ARIMA, trovato con il comando "auto.arima".

Successivamente abbiamo applicato il bootstrap di tipo semiparametrico per quantificare le diverse fonti di incertezza della stima dei parametri, e infine abbiamo calcolato le rendite vitalizie con i relativi intervalli di confidenza per i diversi modelli considerati.