

Support de cours

Automne
2021
V270921



Par ici les ondes !

Partie 1/2 : du circuit au guide

- Brest : F. Le Pennec
- Nantes : M. Guilbaud

Rédaction/Relectures

- F. Le Pennec /J.P. Coupez – M.L. Moulinard – EP.



« Qui serait assez téméraire pour affirmer que nous connaissons et percevons toutes les forces, toutes les ondes et tous les moyens de communications ? »

Hubert Reeves

Astrophysicien, vulgarisateur scientifique, écogéologue

LICENSE CC-BY-NC-ND-4.0: Attribution-NonCommercial-NoDerivs 4.0 International



Table des matières

Introduction	5
1 Rappels et compléments circuits et ondes unidimensionnelles	7
1.1 (Rappels) Circuits électriques en régime harmonique	7
1.2 (Rappels) Ondes unidimensionnelles	10
1.3 (Rappels et compléments) Interface entre deux supports unidimensionnels	13
1.4 (Rappels) Résonance.....	16
1.5 (Nouveau) Répartition des ondes.....	17
1.6 (Rappels) Dispersion	19
2 Introduction à la théorie des lignes	21
2.1 Ondes dans les circuits électriques	21
2.2 Equations des télégraphistes.....	22
2.3 Le quadripôle « ligne de transmission idéale »	24
2.4 Impédance ramenée en entrée d'une ligne de transmission idéale chargée	26
2.5 Abaque de Smith	28
2.6 Application : adaptation simple stub.....	32
3 Rappels et compléments ondes électromagnétiques.....	35
3.1 (Généralités) Quelques repères historiques	35
3.2 (Rappels) Forces et champs électromagnétiques	36
3.3 (Rappels) Grandeurs et paramètres électromagnétiques.....	38
3.4 (Rappels et compléments) Ondes entre milieux différents	40
3.5 (Rappels) Onde électromagnétique plane	42
3.6 (Optionnel) Atténuation de l'onde plane	45
4 Guides d'ondes électromagnétiques.....	48
4.1 Guides électromagnétiques standards.....	48
4.2 Guidage par trajet longitudinal	49
4.3 Guidage par trajets obliques	55
4.4 Nomenclature et caractéristiques des modes.....	58
4.5 Mode fondamental.....	64
4.6 (Optionnel) Pertes de propagation des modes	65
4.7 (Optionnel) Mode de référence	66
4.8 (Optionnel) Matrice S généralisée.....	66

4.9 (Optionnel) Orthogonalité des modes	68
4.10 Modélisation circuit de guides interconnectés	68
Travaux dirigés	71
Sujet du TD1 : Adaptation par stub	71
Sujet du TD2 : Atténuation et distorsions de l'onde guidée	74
Sujet du TD3-4 : Etude d'un guide planaire pour l'optique intégrée	78
Glossaire	82
Index	93
Références générales	95
Tables	96
Table des figures.....	96
Table des tableaux.....	98
Annexes	99
4.1 Ecritures mathématiques	99
4.2 Grandeurs et notations.....	99
4.3 Conditions électriques générales à l'interface entre deux milieux.....	101
4.4 Méthode d'étude systématique des modes non TEM	103
4.5 Abaques de Smith pour les déterminations	105

Introduction

Acoustiques, lumineuses, marines... les ondes font parti de notre environnement quotidien. Si elles sont étudiées depuis longtemps, c'est en analysant le mouvement d'une corde de violon que l'équation de d'Alembert est établie au 18ème siècle, ouvrant la voie à des modèles très utiles pour l'ingénierie. Mais les ondes n'ont pas encore livré tous leurs secrets. Tandis que la première observation expérimentale des ondes gravitationnelles ne date que de 2015 et nourrit depuis de multiples découvertes, la mécanique quantique nous bouscule dans notre représentation intuitive des ondes... Le sujet des ondes dépasse donc très largement les fondamentaux de l'ingénierie des ondes dont il sera question ici. Il sera approfondi au-delà de ce focus, notamment dans les enseignements de spécialité. Les parcours de formation antérieurs à l'IMT Atlantique étant diverses et les compétences déjà acquises variables, chacun adaptera ses efforts d'apprentissage en tirant parti des ressources pédagogiques, mais aussi en développant des échanges coopératifs entre apprenants.

Les différentes natures et propriétés des ondes sont essentielles à la transmission d'information et d'énergie, aussi bien dans les environnements naturels que dans les ouvrages technologiques les plus diverses. Les ingénieurs ont su mettre à profit les connaissances sur la physique des ondes pour concevoir des systèmes extraordinaires. Certains peuvent pourtant nous sembler communs, comme ceux qui permettent des communications quasi-instantanées à l'échelle de la planète, ou ceux qui acheminent de l'électricité dans des centaines de millions de foyers. Leur histoire est pourtant pleine de challenges et leurs évolutions ont de quoi stimuler les nouvelles générations d'ingénieurs. Par analogie entre formes d'équations, on tire aussi parti des ondes pour innover dans des domaines sociétaux majeurs comme l'écologie, l'épidémiologie, la finance....

Alors que les ondes se propagent «partout où elles le peuvent» et possèdent la capacité remarquable d'interférer, leur contrôle peut rapidement devenir une tâche complexe. Du fait des altérations que subissent les ondes en se propageant, une ingénierie moderne bénéficie notamment 1) d'une bonne connaissance de la nature et des propriétés des ondes ainsi que des lois associées de la physique, 2) d'une modélisation mathématique où les hypothèses simplificatrices sont adaptées aux différentes phases du développement ciblé, 3) des efforts d'interprétation critique des résultats fournis par les modèles et les expérimentations. Cet enseignement est construit sur ces bases et s'insère naturellement dans le contexte général d'assimilation de la démarche scientifique.

A partir d'un point de vue macroscopique (c'est-à-dire tant que les dimensions sont grandes devant celles des atomes), ce focus de tronc commun (UE-PHYS1) s'inscrit dans l'étude générale des ondes, distincte de l'étude tout aussi importante de leurs interactions avec la matière. Cette première partie est consacrée à l'étude des ondes guidées. La deuxième sera présentée dans un document distinct et portera sur l'étude des ondes rayonnées.

Après quelques rappels et compléments sur les circuits électriques, les ondes unidimensionnelles et le régime harmonique approprié au contexte étudié, la théorie des lignes sera introduite pour étendre le champ d'application des circuits électriques en prenant en compte l'enveloppe variable des ondes stationnaires, sans préjuger de leur nature physique spécifique. De telles modélisations circuits bénéficient aujourd'hui de la puissance

considérable des environnements de conception assistée par ordinateur (CAO) et des calculateurs modernes. Aussi la pratique de ces environnements sera introduite dans certaines activités associées à ce cours. Leur pratique plus avancée constitue une compétence importante pour de nombreux ingénieurs. Elle se poursuivra dans les modules spécialisés.

Compte tenu de leur importance particulière dans les domaines des communications et de l'énergie, on s'intéressera particulièrement aux ondes électromagnétiques (EM) non ionisantes se propageant dans des milieux linéaires, homogènes et isotropes (LHI). Sans constituer un cours d'électromagnétisme, quelques rappels et compléments sur les équations et théorèmes utiles permettront de relier certaines ondes EM aux lignes de transmission. Nous verrons alors l'intérêt pour le dimensionnement et les limites pour la précision de ces modélisations dans le contexte de guides d'ondes EM courants.

Les « modes de propagation » qui constituent une base infinie des ondes élémentaires de tout guide seront alors naturellement introduits. Ils fourniront des clés de compréhension et de conception de premiers dispositifs. Les principes associés s'adressent à bien d'autres exemples que ceux présentés, y compris au-delà des ondes EM. Ils introduisent par ailleurs d'autres familles de « modes » au cœur de nombreux systèmes : modes résonants, modes sphériques, modes caractéristiques, etc..

Les cours en séance sont une synthèse de l'exposé détaillé dans le polycopié. Quelques vidéos ciblées sont également proposées. Les séances de TD seront l'occasion de mettre en pratique les concepts sous la conduite des enseignants. Un devoir maison (DM) basé sur des données différencieras sera à mener dans le temps indiqué. Il repose sur une méthodologie favorable au partage des compréhensions et savoir faire entre apprenants : à vous d'en tirer parti ! Ce DM sera l'occasion d'une mise en œuvre du simulateur libre « QUCS », associée à quelques constructions graphiques et calculs typiques de démarches d'ingénierie et tirant parti des résultats des cours et TDs sur les circuits et des ondes.

Le polycopié constitue une ressource de référence et sera à apporter à chaque séance encadrée. Les supports d'enseignement sont rédigés pour être utiles au-delà de la durée de cet enseignement, à d'autres moments de la formation à l'école (SARs, projets, TAFs) ou ultérieurement. Les autres ressources importantes sont situées au niveau de l'espace numérique <http://moodle.imt-atlantique.fr/>, dans la rubrique appropriée. Attention à bien suivre et lire les messages qui seront transmis par le forum général sur vos mails école. Venez également consulter régulièrement cet espace qui sera enrichi tout au long du déroulement des activités TC-Phys1 sur les ondes.

L'ensemble de l'équipe pédagogique compte sur votre engagement dans l'apprentissage de ces « fondamentaux de l'ingénierie des ondes » et espère que vous partagerez son intérêt pour les sujets qui en découlent. Elle sera à vos côtés pour que vos efforts conduisent au meilleur niveau sur l'ensemble des compétences élémentaires visées et qui contribuent aux compétences générales de la formation d'Ingénieur IMT-Atlantique. N'hésitez pas à interagir avec vos enseignants, durant les séances ou en-dehors de celles-ci.

Excellente réussite !

1 Rappels et compléments circuits et ondes unidimensionnelles

Cette partie est très principalement dédiée à une synthèse des notions issues des cursus antérieurs. Ceux qui n'ont pas suivi les enseignements sur les circuits électriques et les ondes unidimensionnelles auront tout intérêt à y consacrer le temps nécessaire, en complétant si besoin avec d'autres ressources. Les autres pourront parcourir plus rapidement ce chapitre, mais en repérant bien les notions nouvelles, selon les parcours de formation antérieurs suivis.

1.1 (Rappels) Circuits électriques en régime harmonique

Un schéma électrique est constitué de différents composants (par exemple la résistance R_1 dans l'exemple ci-dessous) reliés les uns aux autres dans un réseau d'interconnexions. Les extrémités des liens (appelés aussi branches) sont les nœuds (R_1 est située entre les nœuds A et B).

Sous conditions, de tels schémas permettent de modéliser d'autres phénomènes que ceux électriques, par exemple thermiques ou acoustiques. Il est alors possible de concevoir les systèmes associés en tirant parti des puissantes règles de calcul des circuits ou des environnements logiciels qui permettent leur simulation.

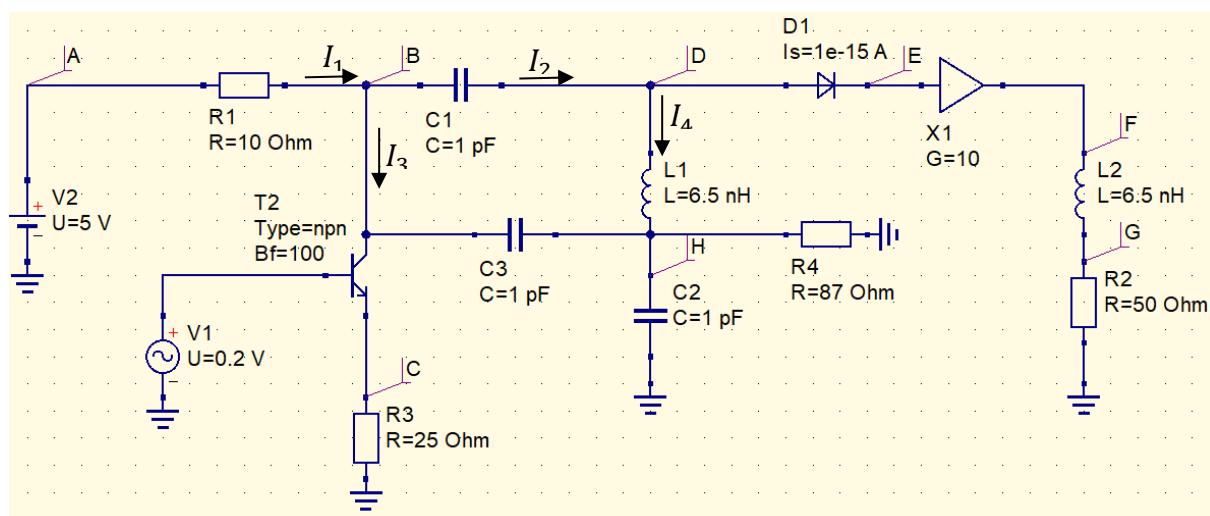


Figure 1 Exemple de schéma électrique

Sous l'effet des sources (ici V_1 une tension alternative et V_2 une tension continue), le réseau distribue des potentiels U sur les différents nœuds et des courants I dans les branches, induisant aux bornes des composants des tensions V issues des différences de potentiels.

Par exemple la tension V_{AB} aux bornes de R_1 provient de la différence de potentiel entre le nœud A et le nœud B, soit $U_A - U_B$.

De façon générale, en régime linéaire et harmonique¹, chaque composant est caractérisé par une impédance Z complexe² qui varie possiblement avec la fréquence. La loi d'Ohm est fondamentale dans ce contexte.

Loi d'Ohm

$$V = ZI \quad (\text{Eq. 1})$$

Le transistor $T2$ et la diode $D1$ dans la figure sont typiquement non-linéaires. En régime variable à petits signaux et selon les conditions, il est parfois possible de leur associer un modèle linéaire équivalent. Les régimes non linéaires ne seront pas développés dans ce document.

Puissance

Sous l'effet de la tension aux bornes et du courant qui la traverse, chaque impédance consomme une puissance P complexe dont la partie réelle est la puissance active, pouvant être convertie en travail (chauffage, moteur, éclairage ...). La puissance réactive provient d'une partie imaginaire non nulle et traduit un stockage d'énergie. On a l'expression harmonique de P ci-dessous³ :

$$P = \frac{1}{2}VI^* \quad (\text{Eq. 2})$$

Par exemple dans la figure 1, R_1 consomme une puissance purement active (P réelle), C_1 une puissance purement réactive (P purement imaginaire).

Loi des nœuds (loi de Kirchoff en courant)

La somme des courants qui arrivent sur un nœud est égale à la somme des courants qui le quittent.

Figure 1, au nœud A, avec l'orientation indiquée sur le schéma, $I_1 = I_2 + I_3$.

Loi des mailles (loi de Kirchoff en tension)

Dans une maille (une boucle fermée du schéma), la somme algébrique des chutes de tension est nulle.

Figure 1, on a par exemple $V_{BD} + V_{DH} + V_{HB} = 0$.

Impédances élémentaires classiques

Avec $\omega = 2\pi f$ qui est la pulsation (rd/s) et f la fréquence (Hz) :

- Résistance R (Ω) : $Z_R = R$
- Inductance L (H) : $Z_L = jL\omega$
- Capacité C (F) : $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$

¹ Régime harmonique : les signaux sont purement sinusoïdaux (fréquence donnée $f = \frac{1}{T}$)

² $Z = |Z|e^{j\varphi_Z} = |Z|[\cos(\varphi_Z) + j \cdot \sin(\varphi_Z)]$, $|Z|$: amplitude, φ_Z : phase. Les termes « module » et « argument » sont peu utilisés dans ce contexte, « amplitude » et « phase » étant d'origine anglo-saxonnes sont le plus souvent adoptés. La notation j pour le nombre imaginaire pur est habituelle en électronique, i est souvent utilisé ailleurs

³ Elle est établie à partir de la moyenne de la puissance instantanée dissipée sur une période

Par exemple dans la figure 1, on a $V_{AB} = R_1 I_1$, $V_{DH} = jL_1 \omega I_4$ et $V_{BD} = \frac{1}{jC_1 \omega} I_2$

Vocabulaire

Soit l'impédance $Z = R + jX = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G+jS}$, les dénominations suivantes sont utilisées :

- R : **résistance** (Ω)
- X : **réactance** (Ω)
- Y : **admittance** (S)
- G : **conductance** (S)
- S : **susceptance** (S)
- *Immitance* : terme qui désigne aussi bien une impédance qu'une admittance

Association d'Impédances

L'impédance équivalente Z_s à deux impédances Z_1 et Z_2 en série est :

$$Z_s = Z_1 + Z_2 \quad (\text{Eq. 3})$$

L'impédance Z_p équivalente à deux impédances Z_1 et Z_2 en parallèle est telle que :

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad (\text{Eq. 4})$$

Par exemple dans la figure 1, R_2 et L_2 sont en série, ce qui correspond à une impédance $Z_s = R_2 + jL_2 \omega$. Par contre R_4 et C_2 sont en parallèle, soit dans ce cas une impédance équivalente $Z_p = \frac{R_4}{1+jR_4 C_2 \omega}$.

Cette association en parallèle se traduit en terme d'admittances par :

$$Y_p = Y_1 + Y_2 \quad (\text{Eq. 5})$$

Générateurs équivalents (Thévenin & Norton)

On peut remplacer un vaste réseau électrique linéaire entre deux nœuds A et B quelconques par un **générateur de Thévenin** (générateur équivalent), composé d'un générateur de tension idéal en série avec une impédance. La tension du générateur de Thévenin est celle qui apparaît entre A et B . L'impédance de Thévenin est obtenue en éteignant tous les générateurs de tension indépendants, en débranchant les générateurs de courant et en appliquant les règles de composition d'impédances entre ces deux mêmes nœuds. Une équivalence similaire concerne le **générateur de Norton** composé d'un générateur de courant idéal en parallèle avec l'impédance de Thévenin, suivant l'illustration ci-dessous :

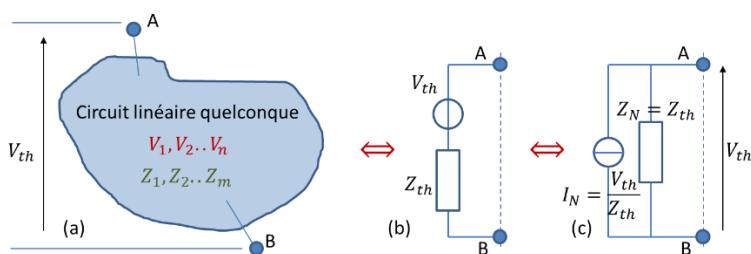


Figure 2 Générateurs équivalents (a) circuit linéaire quelconque (b) générateur de Thévenin (c) générateur de Norton

1.2 (Rappels) Ondes unidimensionnelles

Nous considérons uniquement les milieux de propagation qui sont **LHI** : **linéaires** (les fréquences des grandeurs physiques sont identiques à celles des sources), **homogènes** (pas de variation des propriétés physiques dans un milieu donné) et **isotropes** (pas de variation des conditions de propagation selon la direction). Ces milieux sont d'une importance pratique considérable et leur compréhension introduit celle des milieux plus complexes.

Exemples

- Une impulsion qui se propage sur une corde isolée : la déformation induite est fonction uniquement de la position z sur cette corde et du temps t considéré. Il s'agit d'une onde non divergente, comme pour toutes les ondes guidées généralement.
- Un ricochet provoque une vague circulaire qui s'éloigne du point d'impact. Même en négligeant les échanges d'énergie avec le milieu, elle s'amortit car la puissance concentrée dans un intervalle angulaire donné reste identique quelle que soit la distance parcourue par l'onde. Cet « étalement spatial » est l'expression de la divergence. Les propriétés de l'onde sont fonction de la distance r relativement à l'origine O du ricochet et du temps t , indépendamment de la direction θ suivie (symétrie circulaire).
- Un pétard de feu d'artifice qui explose provoque un « bang » fonction du temps t et de la distance r au point d'explosion, indépendamment de la direction (θ, φ) considérée (symétrie sphérique). L'intensité de l'onde acoustique décroît par divergence spatiale. L'énergie produite à l'origine se trouve entièrement répartie sur la sphère qui l'entoure, avec un délai fonction de la célérité de l'onde et de r .

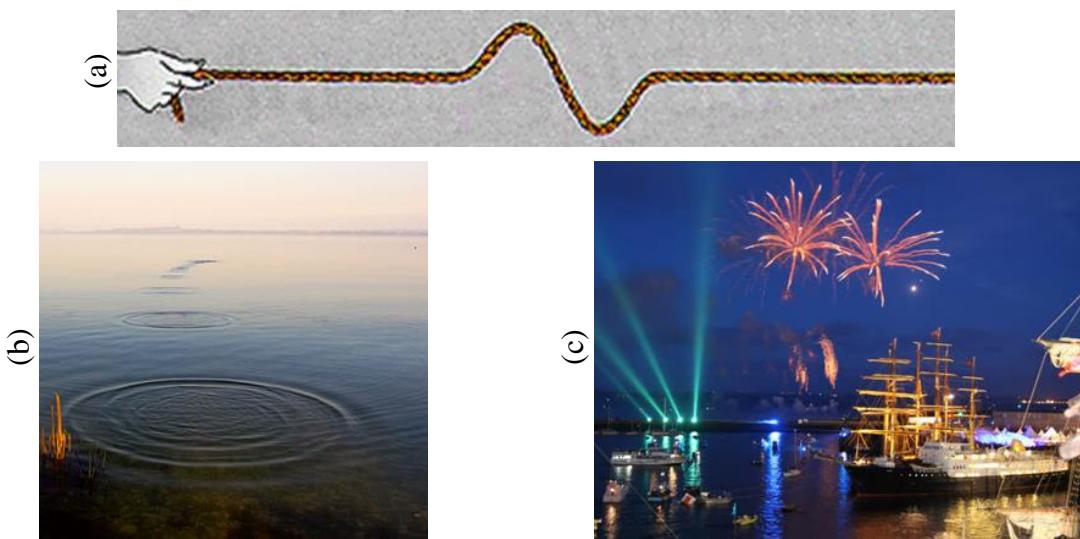


Figure 3 Onde unidimensionnelle (a) le long d'une corde - 1D, (b) ricochet-2D, (c) Bang acoustique-3D

Equation d'onde unidimensionnelle homogène en régime harmonique

En l'absence de perturbateurs sur la trajectoire de l'onde, les exemples précédents peuvent être décrits par l'équation de D'Alembert (homogène, second membre nul) :

$$\square u(\vec{r}, t) = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) u(\vec{r}, t) = 0 \quad (\text{Eq. 6})$$

□ est l'opérateur de D'Alembert, explicité à droite entre parenthèses. $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ est l'opérateur Laplacien en coordonnées cartésiennes, la notation de dérivée partielle d'ordre n $\partial_x^n = \frac{\partial^n}{\partial x^n}$ sera utilisée tout au long du polycopié. L'onde $u(\vec{r}, t)$ a une célérité⁴ notée c , $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ étant le vecteur position et t le temps.

La notation complexe en régime harmonique étant adoptée, les grandeurs physiques dépendent du temps suivant le facteur $e^{j\omega t}$ ⁽⁵⁾. En considérant la propagation selon une seule dimension (z par exemple), l'équation d'onde précédente devient :

$$\partial_z^2 U(z) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 U(z) = 0 \quad (\text{Eq. 7})$$

Solutions de l'équation d'onde unidimensionnelle

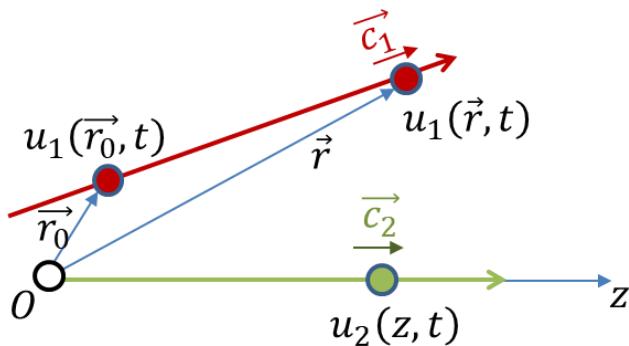


Figure 4 Trajectoires rectilignes d'ondes unidimensionnelles u_1 et u_2

L'onde guidée le long d'une trajectoire rectiligne \vec{r} quelconque est simplement retardée par rapport à une position de référence \vec{r}_0 :

$$U(\vec{r}, t) = A e^{j\omega[t - \frac{\hat{c}}{c}(\vec{r} - \vec{r}_0)]} + B e^{j\omega[t + \frac{\hat{c}}{c}(\vec{r} - \vec{r}_0)]} \quad (\text{Eq. 8})$$

Où \hat{c} est le vecteur unitaire colinéaire à celui de la célérité \vec{c} . En développant l'exponentielle :

$$U(\vec{r}, t) = A e^{j[\omega t - \vec{k}(\vec{r} - \vec{r}_0)]} + B e^{j[\omega t + \vec{k}(\vec{r} - \vec{r}_0)]} \quad (\text{Eq. 9})$$

Soient les formes suivantes lorsque $\vec{r}_0 = \vec{0}$ et en alignant l'axe z avec la direction de propagation :

$$U(z, t) = A e^{j\omega(t - \frac{z}{c})} + B e^{j\omega(t + \frac{z}{c})} \quad (\text{Eq. 10})$$

$$U(z, t) = A e^{j(\omega t - kz)} + B e^{j(\omega t + kz)} \quad (\text{Eq. 11})$$

Les deux termes additifs qui composent cette solution décrivent deux **ondes progressives** se propageant dans des sens opposés sur l'axe z , formant ainsi une **onde stationnaire**. Celle d'amplitude complexe A correspond à l'**onde directe**, tandis que B correspond à l'**onde**

⁴ le terme vitesse étant plutôt associé au déplacement de matière

⁵ $e^{j\omega t}$ très largement répandu mais la convention utilisant un facteur temps en $e^{-j\omega t}$ est parfois à adoptée. Ce changement de convention, assez rare, impacte certaines formules dans ce document.

rétrograde (ou **indirecte**, ou **inverse**). Le signe devant le déphasage « spatial » kz est négatif pour l'onde directe⁶, positif pour celle rétrograde. Dans ces expressions, on a :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{Eq. 12})$$

$$\|\vec{k} = k \cdot \hat{c}\| = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (\text{Eq. 13})$$

Avec ω : **pulsation** (rd/s), f : **fréquence** (Hz), T : **période** (s), \vec{k} : **vecteur d'onde**, k : **nombre d'onde** (rd/m), λ : **longueur d'onde** (m), \hat{c} : vecteur unitaire dans la direction de propagation (\vec{c}).

Une dualité apparaît entre les termes de phase, temporel ωt d'une part, spatial kz d'autre part. Le nombre d'onde pourrait tout aussi bien s'appeler « pulsation spatiale » et la longueur d'onde « période spatiale ».

En présence de symétrie, l'étalement spatial de l'onde conduit à des amplitudes qui dépendent de la distance r à la source. Un facteur de divergence F_D multiplicatif des amplitudes A et B exprime cette dépendance par rapport à la solution (Eq. 10). Par exemple pour une onde sphérique, $F_D = \frac{1}{r}$:

$$U_{\text{sphérique}}(r, t) = \frac{A}{r} \cdot e^{j(\omega t - kr)} + \frac{B}{r} \cdot e^{j(\omega t + kr)} \quad (\text{Eq. 14})$$

Dans le cas d'une onde circulaire (dans un plan) ou cylindrique (dans l'espace), $F_D = \frac{1}{\sqrt{r}}$.

Onde de référence et onde réduite

On simplifie les écritures d'onde en posant $Ae^{j(\omega t - kz)} = a(0)e^{-jkz}A_0$. Le facteur de propagation temporel $e^{j\omega t}$ est alors intégré à l'**onde réduite**⁷ $a(0)$ ou au facteur de normalisation A_0 , selon le cas. On choisit généralement la normalisation pour que la puissance portée par l'onde soit proportionnelle à $|a(z)|^2$. En l'absence de pertes dans le milieu de propagation, on a simplement :

$$a(z) = a(0)e^{\mp jkz} \quad (\text{Eq. 15})$$

Le signe dans l'exponentielle est fixé suivant le sens de propagation de l'onde sur l'axe z , comme indiqué plus haut. Il convient de rester vigilant aux éventuelles dérivées temporelles lorsque les termes en ωt sont masqués par des notations implicites.

L'onde réduite permet finalement de représenter l'onde simplement par une amplitude et une phase à une fréquence donnée, en faisant (souvent implicitement) référence à une forme d'onde. Cette dernière peut être simple (onde mécanique sinusoïdale sur une corde) ou compliquée (onde EM dans une fibre optique), selon le cas considéré.

⁶ C'est une conséquence de l'expression du retard de propagation

⁷ Ou plus simplement « onde » si le contexte ne prête pas à ambiguïté

1.3 (Rappels et compléments) Interface entre deux supports unidimensionnels

L'onde incidente à l'interface entre deux milieux de propagation engendre une onde réfléchie et une onde transmise, généralement de célérités différentes du fait du changement des caractéristiques physiques du milieu de propagation.

Coefficients de réflexion et de transmission

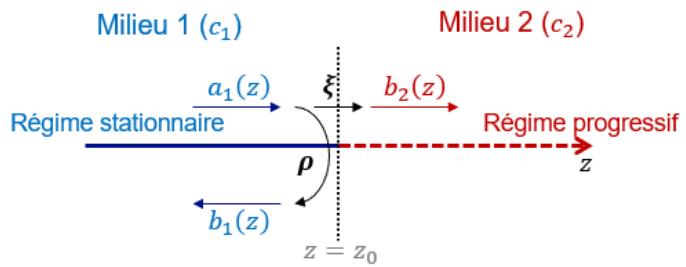


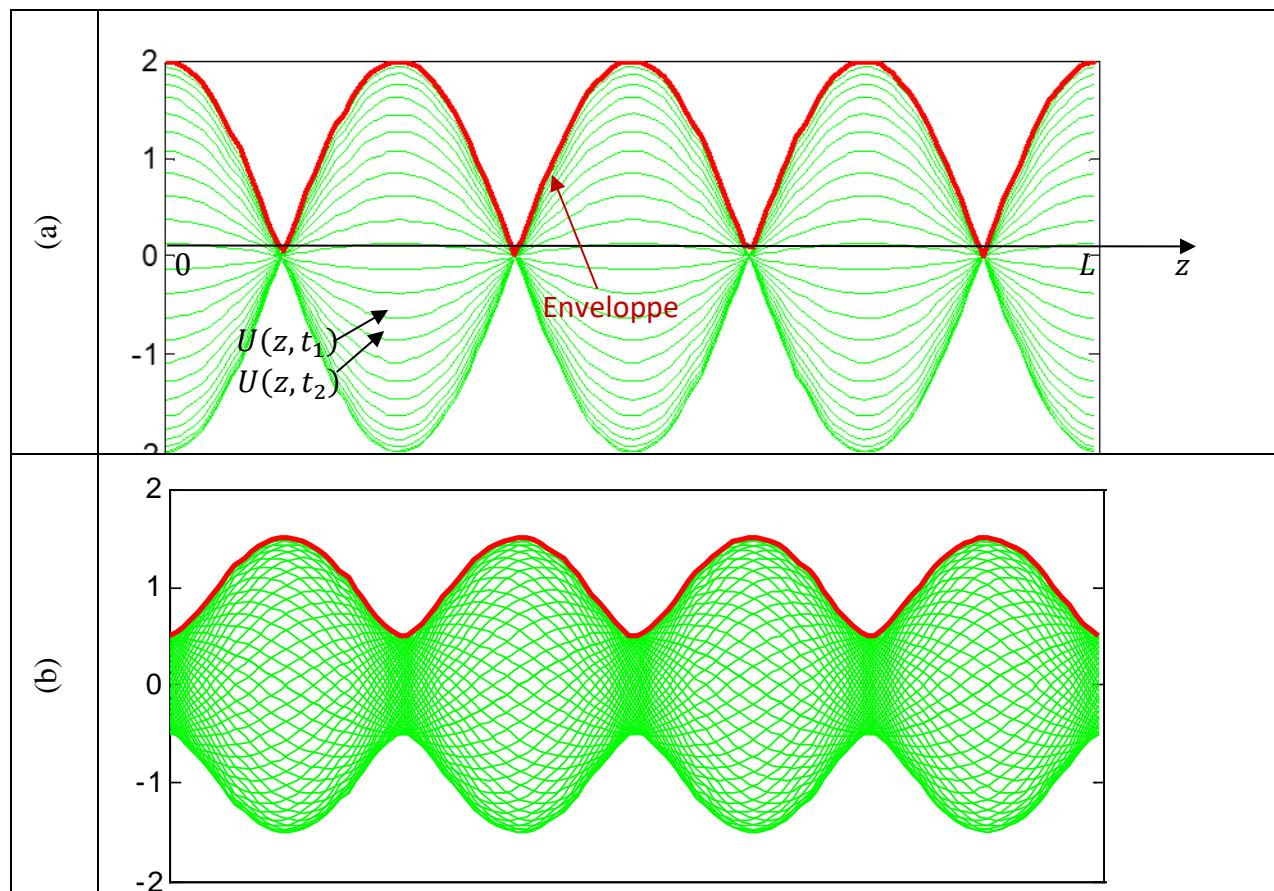
Figure 5 Interface unidimensionnelle

Suivant une notation très répandue, on désigne par a les ondes qui arrivent sur l'interface et par b celles qui la quittent, les indices 1 ou 2 correspondants au milieu de propagation LHI. Les phénomènes de réflexion et de transmission sur l'interface sont alors caractérisés respectivement par les coefficients de réflexion ρ et de transmission ξ tels que :

$$b_1(z_0) = \rho a_1(z_0) \quad (\text{Eq. 16})$$

$$b_2(z_0) = \xi a_1(z_0) \quad (\text{Eq. 17})$$

Onde stationnaire



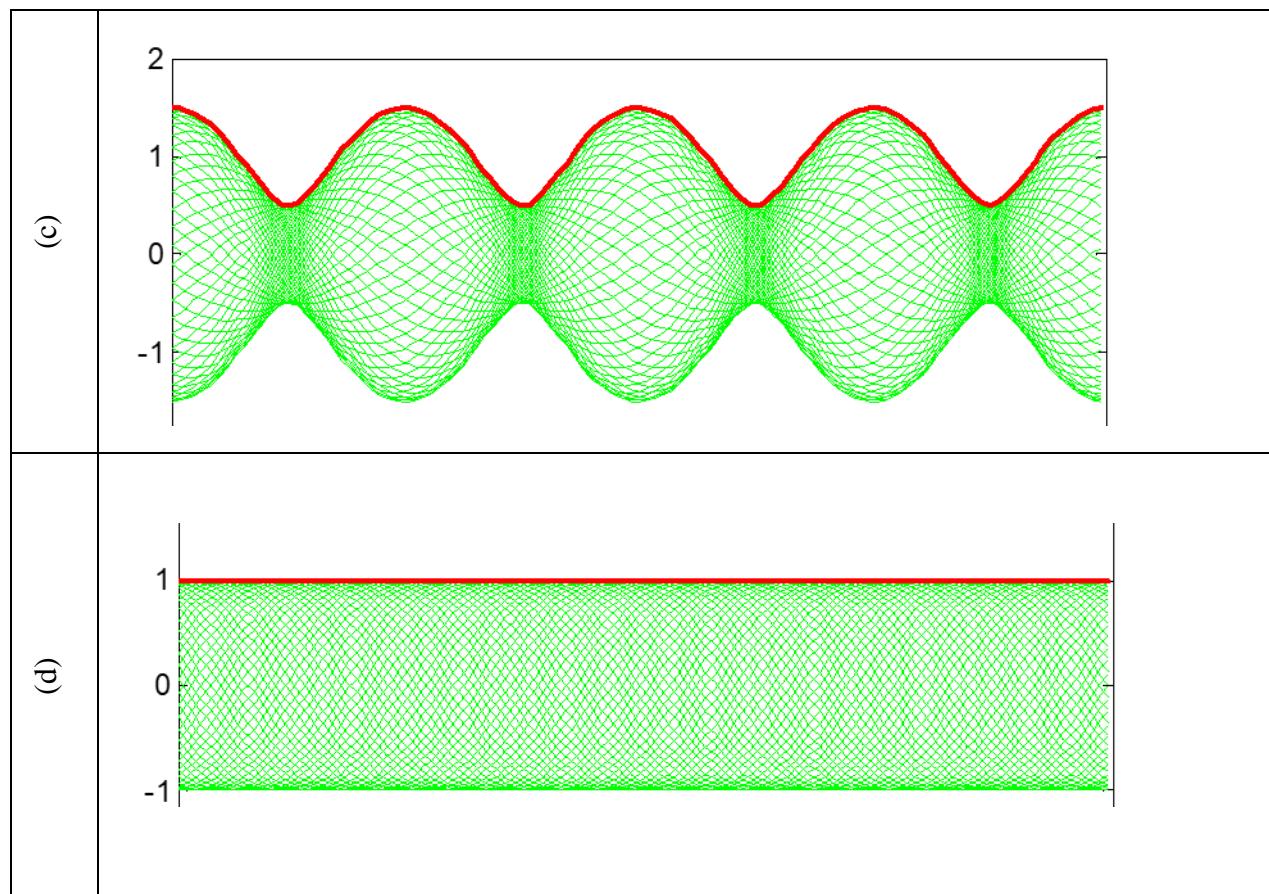


Figure 6 Figures d'ondes stationnaires suivant $\rho =$ (a) 1, (b) -0.5, (c) 0.5, (d) 0

L'onde résultante à la position z dans le milieu 1 est l'onde $u(z) = a_1(z) + b_1(z) = a_1(z) + a_1(z)e^{-jk_1(z_0-z)}\rho e^{-jk_1(z_0-z)} = a_1(z)[1 + \rho e^{-j2k_1(z_0-z)}]$. Cette expression est celle d'une onde stationnaire de période spatiale $\frac{\lambda_1}{2}$, illustrée dans la figure 6 pour $a_1 = 1$ et différentes valeurs possibles de ρ .

L'onde stationnaire semble « vibrer sur place » en fonction du temps. Les figures (a), (b) et (c) font clairement apparaître la période spatiale $\frac{\lambda}{2}$ exprimée analytiquement ci-dessus, tandis que les vibrations restent confinées entre les limites $-E_v(z)$ et $+E_v(z)$. Les maximums sont les lieux d'interférences constructives, tandis qu'elles sont destructives sur les minimums. $E_v(z)$ est appelé « enveloppe » de l'onde stationnaire, de période $\frac{\lambda}{2}$. Avec une réflexion ρ en $z_0 = L$, on a :

$$E_v(z) = |a(z) + b(z)| = |a(z)| |1 + \rho e^{-j2k(L-z)}| \quad (\text{Eq. 18})$$

Indicateurs de stationnarité

La mesure de l'enveloppe est souvent plus facile que celle de toutes les caractéristiques élémentaires des ondes en présence. Le rapport d'onde stationnaire (ROS) est alors l'indicateur de référence pour caractériser le niveau de stationnarité. Il est défini par :

$$\text{ROS} = \frac{\max[E_v(z)]}{\min[E_v(z)]} \quad (\text{Eq. 19})$$

Compte tenu de (Eq. 18) :

$$ROS = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|} \quad (Eq. 20)$$

Cette relation montre que $ROS \in [1, +\infty[$, la valeur 1 correspondant à l'absence de réflexion, donc à la meilleure transmission possible. A l'opposé, une valeur élevée de ROS traduit une mauvaise transmission. En inversant la relation :

$$|\rho| = \frac{ROS-1}{ROS+1} \quad (Eq. 21)$$

On peut donc exprimer la stationnarité directement à partir $|\rho|$. Dans ce cas on le convertit généralement en décibel (dB), échelle très utilisée dans les bilans de liaison et qui procède à partir d'un rapport de puissance⁸, soit :

$$\rho_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{|b(z)|^2}{|a(z)|^2} \right) = 20 \cdot \log_{10} (|\rho|) \quad (Eq. 22)$$

Une erreur fréquente est d'utiliser un facteur 10 au lieu de 20 dans la relation ci-dessus, ce qui est finalement une confusion entre amplitude et puissance.

L'exemple ci-dessous illustre l'évolution du ROS et simultanément de ρ_{dB} en fonction de la fréquence, relevés à l'entrée d'un filtre radiofréquence (lignes microrubans couplées, en médaillon au centre). Pour l'une ou l'autre des courbes, on distingue rapidement l'intervalle de fréquence où la réflexion devient faible, ou de façon équivalente la transmission maximale⁹.

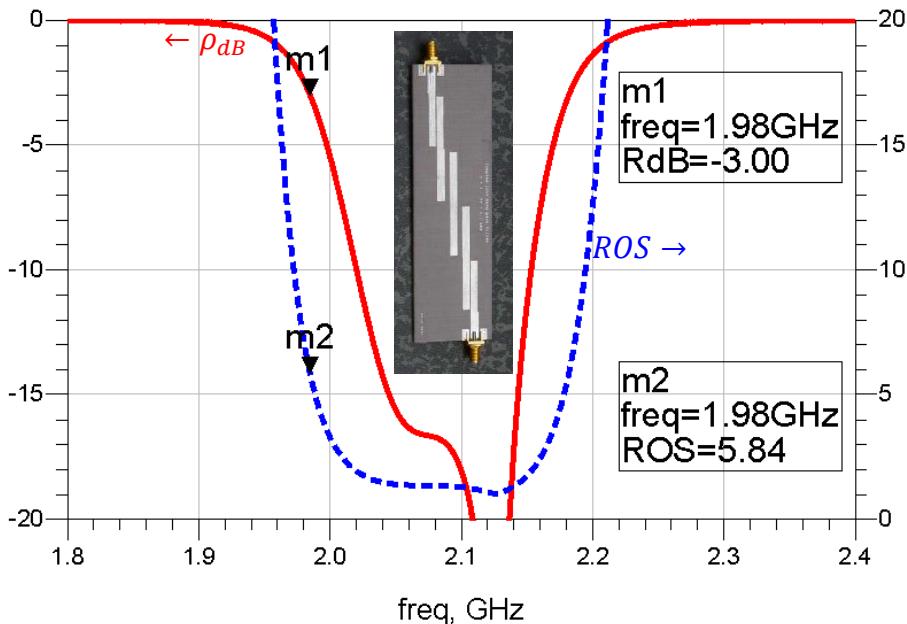


Figure 7 Exemple de variation fréquentielle du ROS et de ρ_{dB}

⁸ $dB \rightarrow 10 \log_{10} \left(\frac{P}{P_{ref}} \right)$

⁹Au centre du graphique entre 2 GHz et 2.2 GHz environ

Le nomogramme suivant met en relation différentes échelles et coefficients classiques des stationnarités :

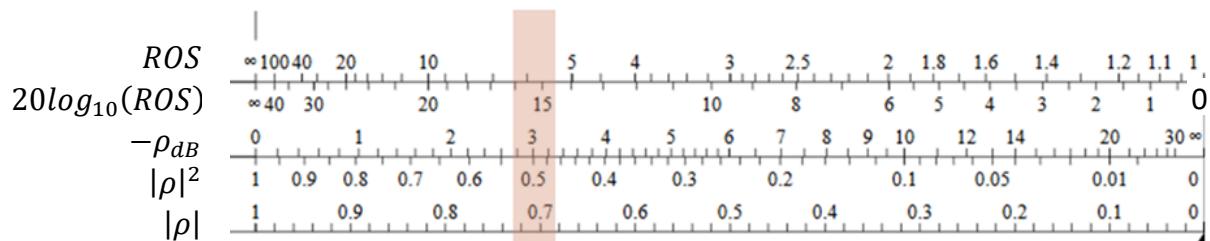


Figure 8 Nomogramme pour la conversion entre indicateurs de stationnarité

Par exemple, on lit que la moitié de la puissance réfléchie ($|\rho|^2 = 0.5$) correspond à $|\rho| \approx 0.7$, $\rho_{dB} \approx -3 dB$ et $ROS \approx 6$, en cohérence avec l'affichage des marqueurs dans la figure 7. L'expression du ROS en dB est moins utilisée.

1.4 (Rappels) Résonance

La propagation d'une onde unidimensionnelle sur une portion composée de segments homogènes donne lieu à l'apparition d'ondes secondaires transmises et réfléchies au niveau des zones de transitions (zones de couplages, de discontinuités...).

A l'intérieur d'un segment particulier, les multiples ondes secondaires se superposent et forment une onde stationnaire. L'enveloppe qui lui est associée dépend des caractéristiques des ondes élémentaires qui la constituent, en amplitude mais aussi en phase. Cette enveloppe atteindra son amplitude maximale quand toutes les phases individuelles des ondes élémentaires a et b seront identiques (maximum des interférences constructives).

La figure ci-dessous illustre le cas d'une configuration symétrique où les transitions et milieux de propagation sont identiques de part et d'autre du segment central :

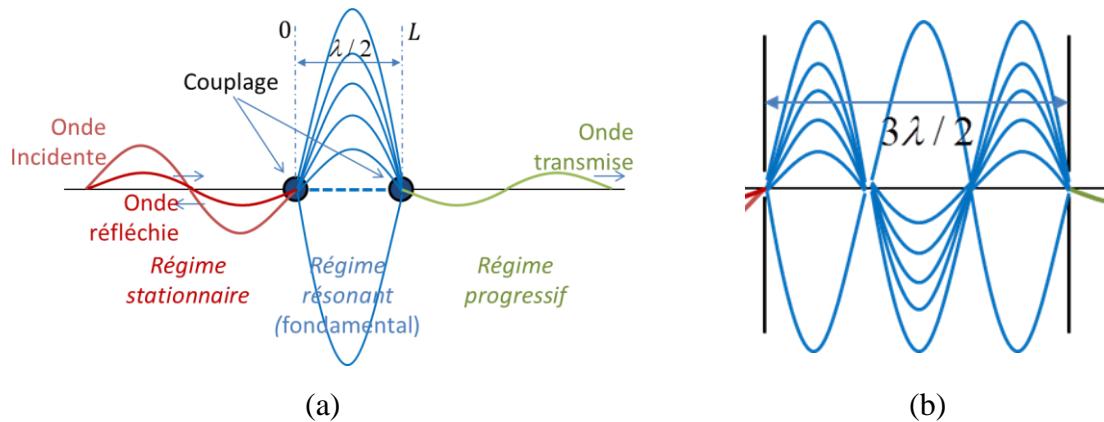


Figure 9 Résonance (a) mode fondamental, (b) mode d'ordre 3

L'origine étant prise à l'entrée de la section résonante, repérons dans le segment central deux ondes successives élémentaires $a''(z)$ et $a'(z)$ qui se superposent en z . Elles sont telles que $a''(z) = a'(z)e^{-jk(L-z)}pe^{-jkl}pe^{-jzk} = a'(z)\rho^2e^{-j2kL}$. Le même raisonnement peut être tenu pour toutes les ondes élémentaires successives, dans le sens direct autant qu'indirect. Considérons l'hypothèse simple ρ purement réel. La condition d'identité des phases $\varphi_{a''} =$

φ_a' implique $2kL = 2n\pi$, n étant un entier non nul quelconque. Cela conduit finalement à la condition de résonance :

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad (\text{Eq. 23})$$

La figure 9 (a) correspond au cas $n = 1$. L'onde stationnaire illustrée est appelé **mode résonant fondamental**. Ce mode et les modes résonants supérieurs font apparaître des figures d'enveloppe qui les distinguent. Ainsi il suffit de compter le nombre de périodes d'enveloppe dans (b) pour en déduire l'ordre 3 du mode supérieur représenté. Il existe ici finalement une infinité de valeurs discrètes de fréquences de résonance $f_{rn} = n \frac{c}{2L}$, c étant la célérité de l'onde sur le segment résonant.

La « forme d'onde » associée à la résonance était déjà mise en évidence par Chladni (1756-1827). Avec un archet de violon dont il ajustait la position, il contrôlait la fréquence de vibration d'une plaque mince et large sur laquelle il avait déposé une fine couche de sable. Les grains étaient piégés sur les minimums (nœuds) de stationnarité, formant des dessins caractéristiques associés à certains mouvements d'archet. On obtient la même chose aujourd'hui avec une plaque soumise à des vibrations dont la fréquence est contrôlée par un moteur¹⁰.

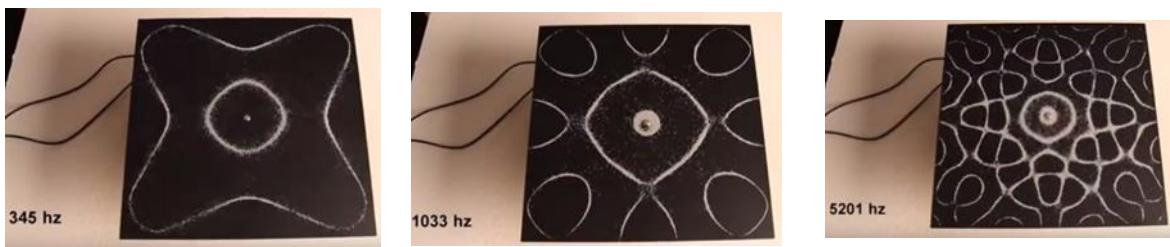


Figure 10 Nœuds d'interférence marqués par des grains de sable sur une plaque vibrante aux fréquences de résonance

Des conditions aux limites plus générales, possiblement dissymétriques, peuvent conduire à des expressions différentes reliant longueur et fréquences de résonance. De même le choix d'une amplitude nulle sur la transition dans la figure 9 constitue un cas particulier de terminaison (celui du court-circuit si l'onde est associée à une tension).

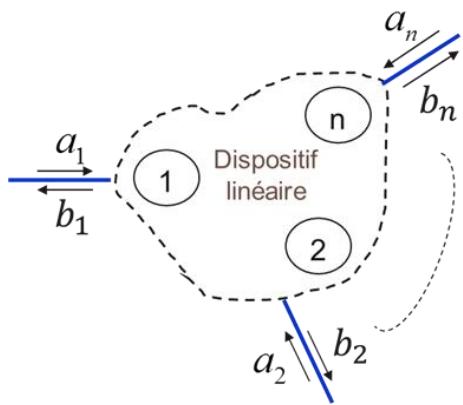
Dans tous les cas, c'est l'identité de phase entre toutes les ondes élémentaires se propageant dans la même direction sur le segment de propagation concerné qui caractérise la situation de résonance.

De très nombreux dispositifs tirent parti du phénomène de résonance (filtres, instruments de musique, IRM, etc...), ou au contraire évitent celui-ci (navires, ponts, bruits des moteurs, etc.).

1.5 (Nouveau) Répartition des ondes

On généralise les coefficients de réflexion et de transmission aux dispositifs à n accès (ou **multipôle**), ceux-ci étant excités par des supports unidimensionnels, comme l'illustre la figure ci-dessous.

¹⁰ <https://youtu.be/wvJAgrUBF4w> (vu le 29 aout 2017)



Eq. 1 Ondes unidimensionnelles aux accès d'un multipôle

La notation a_i désigne alors l'onde située précisément à l'entrée n° i du dispositif. Chaque accès (ou porte, **port**) présente un coefficient de réflexion et un coefficient de transmission le reliant particulièrement à chaque autre accès. Ces coefficients sont finalement regroupés dans la **matrice de répartition** (appelée aussi **matrice S**) qui relie l'ensemble (le vecteur) des ondes incidentes (a) aux ondes sortantes (b) :

$$(b) = (S)(a) \quad (\text{Eq. 24})$$

On utilise couramment le terme de matrice S pour cette matrice de répartition, le S provient du terme anglais *scattering* (*diffusion*), par analogie avec la façon dont une onde est transmise dans des directions multiples au sein de certains milieux de propagation.

Dans le cas d'un **quadripôle** (2 accès), on a donc :

$$\begin{cases} b_1 = s_{11}a_1 + s_{12}a_2 \\ b_2 = s_{21}a_1 + s_{22}a_2 \end{cases} \quad (\text{Eq. 25})$$

En reprenant les notations des équations (Eq. 16) et (Eq. 17), on remarque qu'en l'absence d'une onde provenant de l'accès n° 2 (condition $a_2 = 0$), $s_{11} = \rho$ et $s_{21} = \xi$.

De façon générale pour les multipôles, **les paramètres S sont les coefficients de réflexion et transmission intrinsèques au quadripôle**.

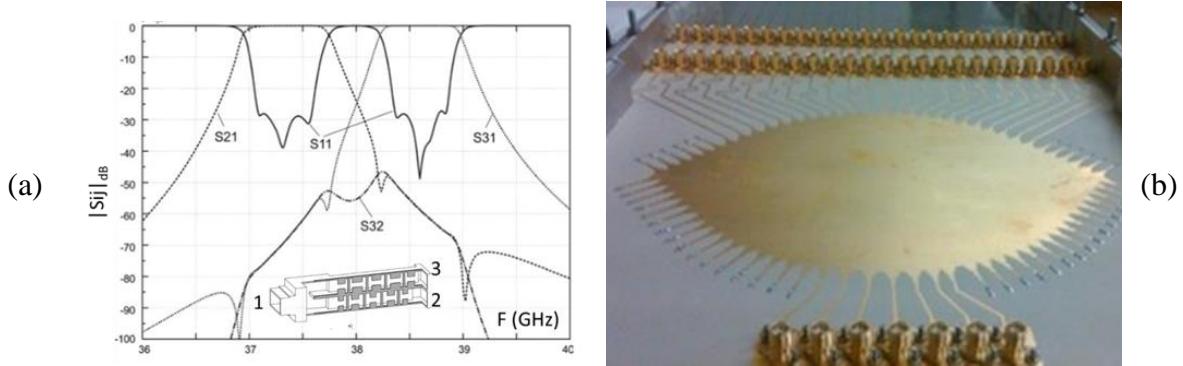
- s_{ii} : coefficient de réflexion intrinsèque sur l'accès i
- $s_{ji}|_{i \neq j}$: coefficient de transmission intrinsèque de i vers j

Ces coefficients peuvent être exprimés en dB, suivant le modèle de (Eq. 22) :

$$s_{ji\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(|s_{ji}|) \quad (\text{Eq. 26})$$

Les coefficients de réflexion et de transmission $\frac{b_j}{a_i}|_{i,j=1..n}$ dépendent de toutes les ondes incidentes. Il faut donc bien noter que $\frac{b_j}{a_i} \neq s_{ji}$ dans le cas général (plusieurs ondes entrent dans le multipôle) ! Dans les usages cependant, il est rare que la mention « intrinsèque » soit précisée quand le coefficient de réflexion ou de transmission est évoqué. Le cas échéant il faut lever toute ambiguïté.

La figure (a) ci-dessous illustre les performances d'un dispositif de séparation de signaux selon la fréquence (duplexer) à partir de ses paramètres (S)¹¹. La (b) montre un répartiteur multivoie pour réseau d'antennes (lentille de Rotman) où le nombre d'accès (chaque fil) est particulièrement élevé !



1.6 (Rappels) Dispersion

Considérons une onde $u(t)$ à partir de la superposition des deux ondes harmoniques $u_1(t)$ et $u_2(t)$ unidimensionnelles progressives et directes, de même amplitude unité mais de fréquences et célérités distinctes repérées par les indices 1 et 2.

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = \cos(\omega_1 t - k_1 z) + \cos(\omega_2 t - k_2 z)$$

$$u(t) = 2 \cdot \cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}z\right] \cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}z\right]$$

En posant $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_m$ et $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \Delta\omega$, il vient :

$$u(t) = 2 \cdot \cos\left[\omega_m\left(t - \frac{z}{v_\varphi}\right)\right] \cos\left[\Delta\omega\left(t - \frac{z}{v_g}\right)\right]$$

$$\text{Avec } v_\varphi = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} \text{ et } v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

Si les ondes sont de fréquences « très proches », on pose $\omega_1 = \omega$ et $\omega_2 = \omega + \Delta\omega \rightarrow \omega + d\omega$. Alors :

$$u(t) = 2 \cdot \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{v_\varphi}\right)\right] \cos\left[d\omega\left(t - \frac{z}{v_g}\right)\right] \quad (\text{Eq. 27})$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} \quad (\text{Eq. 28})$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (\text{Eq. 29})$$

L'expression (Eq. 27) montre que $u(t)$ est une onde harmonique de pulsation ω qui se propage à la célérité v_φ , modulée en amplitude par une onde secondaire de faible pulsation $d\omega$ qui se propage à la célérité v_g . L'illustration ci-dessous met en évidence un tel cas de figure le long de l'axe de propagation, à un instant donné :

¹¹ M. B. Manuilov et K. V. Kobrin, « Waveguide diplexer based on E-plane ridged sections and diaphragms », 2016, p. 1-5.

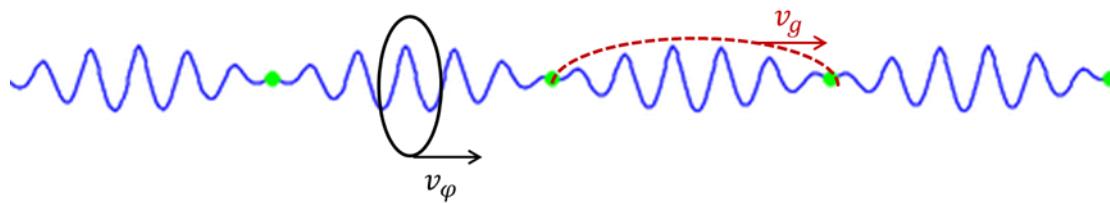


Figure 12 Vitesse de phase et vitesse de groupe

La **vitesse de phase** v_ϕ est celle d'une oscillation élémentaire située à l'intérieur d'un «paquet d'ondes» dont l'enveloppe se déplace à la **vitesse de groupe** v_g .

Du fait des valeurs possiblement différentes de v_ϕ et v_g , les paquets vont progressivement s'allonger avec la distance parcourue, se recouvrant de plus en plus mutuellement. Pour des formes d'ondes modulées typiques des communications, l'étalement spatial des paquets s'accompagnera de leur déformation, compliquant la tâche de reconstitution de l'information à la réception. De plus, le recouvrement entre paquets consécutifs pourra être la source de brouillages. Ce phénomène est bien connu en transmission numérique et porte le nom d'**interférences inter-symboles** (IES/ISI).

Cette déformation provenant spécifiquement des différences entre vitesse de phase et vitesse de groupe est le phénomène de dispersion. Sa bonne prise en compte est essentielle pour obtenir des performances élevées dans les systèmes de transmission modernes.

Analogie

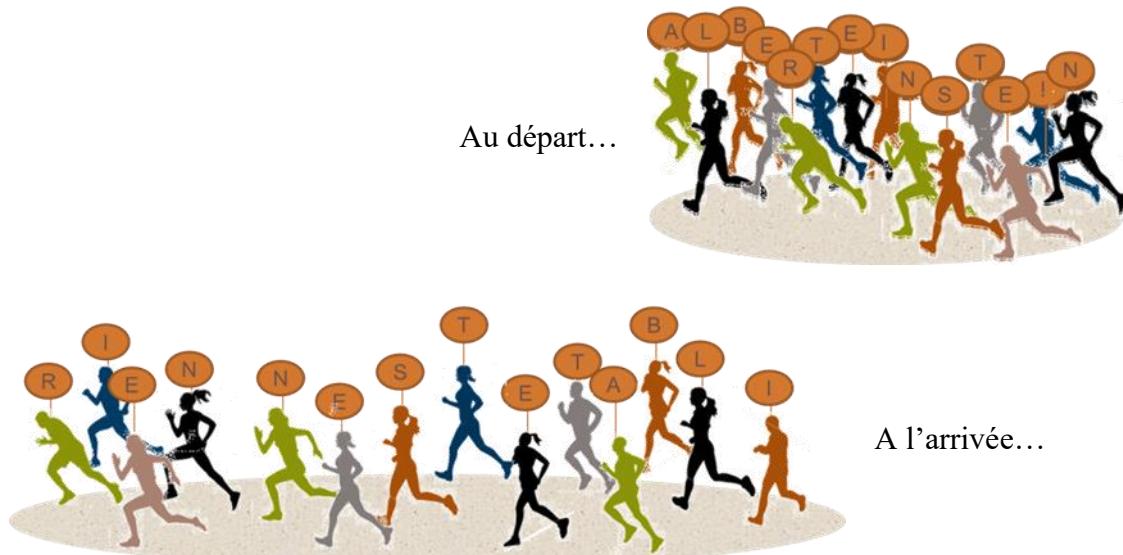


Figure 13 Une analogie « courante » du phénomène de dispersion

Associons chaque coureur à une sinusoïde élémentaire et le groupe à un paquet d'ondes. La phrase associée à l'ordre des lettres au départ risque de devenir incompréhensible à l'arrivée suivant les vitesses de course propres de chaque coureur (analogie vitesse de phase). On constate à l'arrivée que le sens peut même être transformé ! Le groupe possédant sa propre vitesse moyenne (analogie vitesse de groupe), les lettres des coureurs les plus lents pourront aussi se mélanger à celles des coureurs les plus rapides du groupe suivant, comme pour les symboles successifs d'une transmission numérique dans un milieu dispersif.

2 Introduction à la théorie des lignes

Parce que les calculs sont généralement très simplifiés analytiquement (ou numériquement dans des simulateurs), il y a un grand intérêt à modéliser la propagation des ondes¹² par des circuits électriques. Les méthodes de synthèse des circuits peuvent alors être envisagées pour toute sorte de dimensionnement. Mais une perturbation de tension ou de courant sur un noeud impacte le reste du circuit de façon ... instantanée ! Dans la nature par contre, nous savons que toute perturbation se propage à une vitesse finie, même lorsque qu'elle est trop rapide pour notre observation « humaine ». En restituant notamment les conséquences des stationnarités sur des supports unidimensionnels homogènes, la théorie des lignes augmente le pouvoir de modélisation par les circuits électriques. Il est nécessaire d'introduire pour cela le concept d'**onde électrique**, résultat d'un couplage particulier entre une **onde de tension** et une **onde de courant**.

2.1 Ondes dans les circuits électriques

La notion de distance spatiale est étrangère aux concepts de base des circuits électriques, les tensions et courants étant des fonctions des nœuds et du temps uniquement.

La théorie des lignes est une extension de la théorie des circuits. Elle vise à prendre en compte les conséquences fondamentales de la vitesse finie à laquelle une variation de tension/courant¹³ se propage en réalité. Pour cela le concept d'onde associé aux grandeurs de tension v et de courant i est introduit, ainsi que la notion de **ligne de transmission**¹⁴ comme support de leur propagation. Ces ondes obéissent alors individuellement aux équations de D'Alembert à une dimension, rappelées dans la section précédente. A la position x ⁽¹⁵⁾ sur la ligne de transmission, les ondes réduites de tension et courant ont ainsi pour expression générale :

$$v(x, t) = v^+(t) \cdot e^{-jkx} + v^-(t) \cdot e^{+jkx} \quad (\text{Eq. 30})$$

$$i(x, t) = i^+(t) \cdot e^{-jkx} + i^-(t) \cdot e^{+jkx} \quad (\text{Eq. 31})$$

$v^+(t)$ (resp. $v^-(t)$) exprime l'amplitude complexe directe (resp. inverse) selon l'axe x , dépendant du temps suivant le facteur $e^{j\omega t}$.

La ligne de transmission est donc le lieu d'un régime d'ondes stationnaires en tension et en courant, $v(x)$ et $i(x)$ étant reliées par les lois des circuits.

Dans les illustrations de la figure 14, la longueur l de la ligne de transmission est à comparer avec la longueur d'onde λ . Pour l donné, $\frac{l}{\lambda}$ détermine la présence d'ondulations plus ou moins nombreuses associées au régime d'onde stationnaire, selon les conditions aux limites imposées par le générateur d'un côté, la charge Z_L de l'autre.

¹² Pas seulement les ondes électromagnétiques, même si ce sont celles-ci qui profitent le plus souvent de ces modélisations par des circuits électriques

¹³ A comprendre au sens large d'un point de vue physique, car différentes ondes peuvent être modélisées à l'aide de tensions et courants (cf Tableau 7 page 48), pas seulement les ondes électromagnétiques

¹⁴ le terme anglais **stub** est aussi souvent utilisé

¹⁵ On utilisera l'axe de propagation x pour éviter la confusion avec les impédances habituellement notées Z

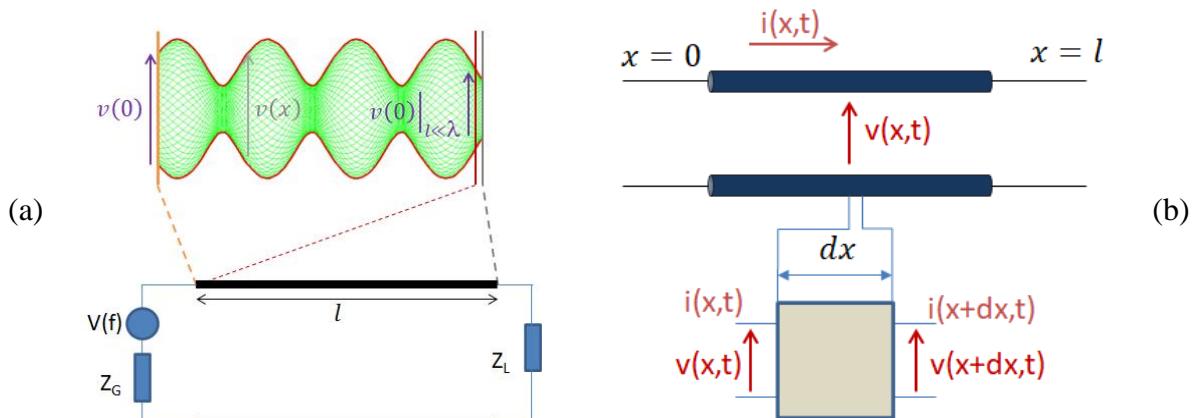


Figure 14 Ligne de transmission (a) stationnarité relativement à l (b) modèle à base de quadripôles représentatif de portions infinitésimales

Si $l \ll \lambda/2$, les variations d'enveloppe seront très faibles en tout point de la ligne. Les différences de tension entre l'entrée et la sortie de la ligne ne seront pas significatives dans ces conditions. Dans le cas contraire, le schéma (b) devra traduire les évolutions des tensions et courants tout le long de la ligne, sous la forme d'une cascade de quadripôles élémentaires identiques associés aux longueurs infinitésimales dx .

La demi-longueur d'onde dans le vide d'un circuit électrique de fréquence 50 Hz est de 3000 km ! Dans ces conditions, le concept de ligne de transmission est évidemment superflu pour calculer les circuits communs dont les pistes métalliques ne mesurent que quelques centimètres. Faire ce calcul aux fréquences d'un smartphone, disons 3 GHz environ ...

2.2 Équations des télégraphistes

Modèle

Considérons le quadripôle suivant ([modèle RLCG](#)) pour modéliser une portion infinitésimale dx de ligne de transmission, prenant en compte un amortissement possible (pertes de propagation sur la ligne) :

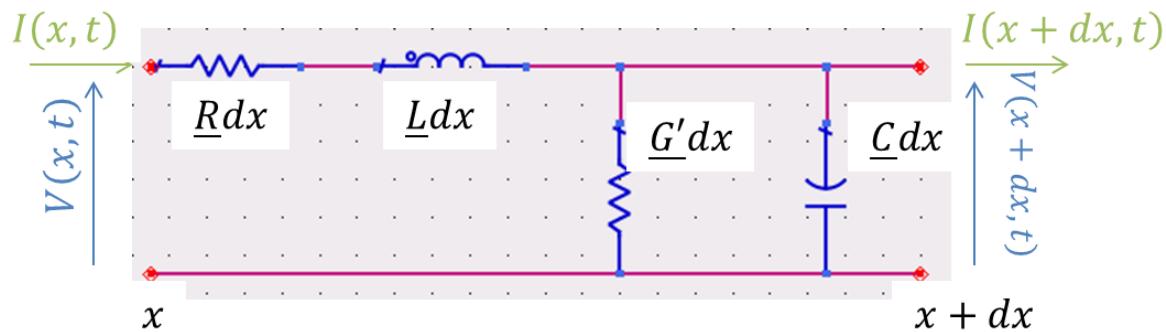


Figure 15 Modèle RLCG pour la ligne de transmission

\underline{R} (Ω/m), \underline{L} (H/m), \underline{G}' (S/m)⁽¹⁶⁾ et \underline{C} (F/m) sont respectivement la résistance, l'inductance, la conductance et la capacité par unité de longueur. Ils constituent les quatre paramètres fondamentaux et intrinsèques de la ligne de transmission.

¹⁶ Le ' est introduit pour éviter la confusion avec $G = \frac{1}{R}$

Mise en équation

La somme des tensions sur une boucle fermée du réseau étant nulle (loi des mailles ou de Kirchhoff en tension, cf. 1.1), on a :

$$V(x, t) - (\underline{R} + j\underline{L}\omega)dx \cdot I(x, t) - V(x + dx, t) = 0 \quad (\text{Eq. 32})$$

La somme des courants sur tout nœud d'interconnexion est nulle également (loi des nœuds ou de Kirchhoff en courant, cf. 1.1), cela donne sur le nœud reliant \underline{L} et \underline{C} :

$$I(x, t) - (\underline{G}' + j\underline{C}\omega)dx \cdot V(x + dx, t) - I(x + dx, t) = 0 \quad (\text{Eq. 33})$$

On limite les développements de Taylor de $V(x + dx, t)$ et de $I(x + dx, t)$ au premier ordre :

$$\begin{cases} V(x, t) - (\underline{R} + j\underline{L}\omega)dx \cdot I(x, t) - [V(x, t) + \partial_x V(x, t)dx] = 0 \\ I(x, t) - (\underline{G}' + j\underline{C}\omega)dx \cdot [V(x, t) + \partial_x V(x, t)dx] - [I(x, t) + \partial_x I(x, t)dx] = 0 \end{cases}$$

En éliminant les termes d'ordre deux qui apparaissent dans la seconde équation, il vient :

$$\partial_x V(x, t) = -(\underline{R} + j\underline{L}\omega) \cdot I(x, t) \quad (\text{Eq. 34})$$

$$\partial_x I(x, t) = -(\underline{G}' + j\underline{C}\omega) \cdot V(x, t) \quad (\text{Eq. 35})$$

Ces deux équations couplées aux dérivées partielles sont appelées **équations des télégraphistes**. Elles relient les variations spatiales et temporelles de la tension et du courant tout le long de la ligne de transmission.

Les équations des télégraphistes présentent une similitude avec des équations issues de divers domaines de la physique, permettant une modélisation basée sur la théorie des lignes. C'est le cas par exemple des équations de Maxwell en régime harmonique et dans un milieu linéaire homogène et vide de charges $\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} \end{cases}$. *On note cependant que dans ces dernières, les grandeurs inconnues sont vectorielles.*

Solutions des équations des télégraphistes

Combinons ∂_x (Eq. 34) et (Eq. 35) pour isoler $V(x, t)$:

$$\partial_x^2 V(x, t) = -(\underline{R} + j\underline{L}\omega)[-(\underline{G}' + j\underline{C}\omega) \cdot V(x, t)] \quad (\text{Eq. 36})$$

On pose :

$$\gamma = \sqrt{(\underline{R} + j\underline{L}\omega)(\underline{G}' + j\underline{C}\omega)} \quad (\text{Eq. 37})$$

Alors :

$$\partial_x^2 V(x, t) - \gamma^2 \cdot V(x, t) = 0 \quad (\text{Eq. 38})$$

On montre que ∂_x (Eq. 35) combiné à (Eq. 34) conduit à la même forme d'équation d'onde, portant cette fois-ci sur $I(x)$. Nous connaissons déjà les solutions stationnaires de ces équations d'onde :

$$V(x, t) = V^+(t)e^{-\gamma x} + V^-(t)e^{\gamma x} \quad (\text{Eq. 39})$$

γ apparaît comme le **facteur de propagation** complexe. $V^+e^{-\gamma x}$ et $V^-e^{\gamma x}$ sont les composantes progressives, respectivement directe et inverse, de l'onde stationnaire en tension $V(x, t)$.

On en déduit $I(x, t)$ à partir de (Eq. 35) et (Eq. 37) :

$$I(x, t) = \frac{-\gamma}{-(R+jL\omega)} V^+(t) e^{-\gamma x} + \frac{\gamma}{-(R+jL\omega)} V^-(t) e^{\gamma x} \quad (\text{Eq. 40})$$

L'onde de courant inverse $I^-(x, t) = -\frac{\gamma}{(R+jL\omega)} V^-(t) e^{\gamma x}$ présente un signe opposé à celui de l'onde de tension progressive correspondante $V^-(t)$.

Comme $V(x, t)$, $I(x, t)$ est une onde stationnaire dont les composantes (directe et inverse) sont reliées aux ondes de tension progressives correspondantes par une impédance Z_c . C'est l'**impédance caractéristique** de la ligne de transmission. Les expressions ci-dessus montrent qu'elle est reliée aux grandeurs linéaires de la ligne par la relation :

$$Z_c = \sqrt{\frac{R+jL\omega}{G'+jC\omega}} \quad (\text{Eq. 41})$$

Par ailleurs, γ étant complexe dans le cas général, on écrit habituellement :

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (\text{Eq. 42})$$

Avec :

- α (Np/m) : **coefficient d'affaiblissement** (ou **constante d'atténuation**)
- β (rad/s) : **constante de (propagation de la) phase**

2.3 Le quadripôle « ligne de transmission idéale »

C'est la ligne de transmission sans pertes. Dans ces conditions $R = G' = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

En comparant alors (Eq. 30) et (Eq. 31) avec (Eq. 39) et (Eq. 40), on constate que la constante de phase β et le nombre d'onde k sont deux grandeurs identiques dans une ligne de transmission. Cela n'est pas vrai pour d'autres supports de propagation (cf. ch. 4).

Il vient pour l'impédance caractéristique :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\text{Eq. 43})$$

La constante de phase β est déduite de (Eq. 37) :

$$\beta = \omega \sqrt{LC} \quad (\text{Eq. 44})$$

La célérité c de (Eq. 10) et (Eq. 11) :

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{Eq. 45})$$

A partir de (Eq. 28) et (Eq. 29), on constate ici que :

$$v_\varphi = v_g = c \quad (\text{Eq. 46})$$

Cette relation concernant le caractère constant et identique des vitesses de phase et de groupe traduit la conservation de la forme de l'onde tout au long de sa propagation. La ligne de transmission idéale est non dispersive (cf. 1.6).

l étant la longueur de la ligne, l'impédance caractéristique Z_c et le déphasage $\theta = \beta l$, sont finalement les deux paramètres essentiels des lignes idéales.

Les schémas électriques les indiquent en précisant la fréquence à laquelle le déphasage est évalué, ce qui suppose une certaine célérité dans la ligne. C'est le cas dans le schéma de gauche ci-dessous où les paramètres Z , E et F pour chaque tronçon élémentaire de ligne correspondent respectivement à l'impédance caractéristique, le déphasage en degré ($E = \frac{\theta}{\pi} 180$), puis finalement la fréquence (1.41 GHz ici) de calcul du déphasage. La célérité c_0 n'est pas explicitement restituée ici, selon un choix qui dépend du contexte.

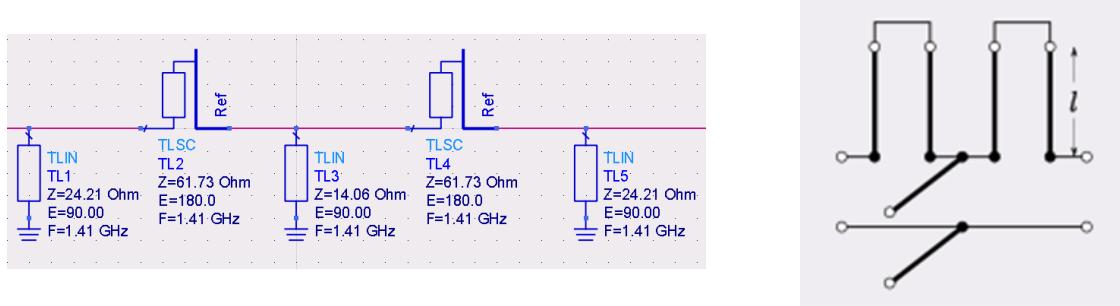


Figure 16 Différentes représentations de la ligne de transmission dans des schémas électriques

On remarque des déphasages de 90° et 180° suivant les lignes du schéma de gauche. Les lignes correspondantes sont nommées respectivement quart d'onde et demi-onde.

Certaines lignes de transmission du schéma de gauche également sont représentées simplement par des dipôles. Ces représentations fréquentes dans les simulateurs (CAO) allègent les schémas, chaque accès est alors référencé relativement à la masse.

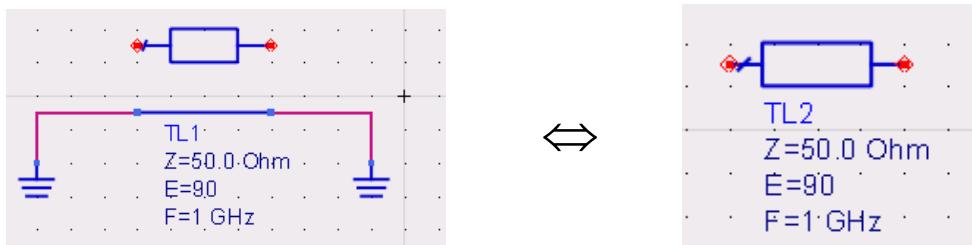


Figure 17 Ligne de transmission représentée par un dipôle dans le simulateur ADS¹⁷

¹⁷ Advanced Design System, Keysight Technologies

2.4 Impédance ramenée en entrée d'une ligne de transmission idéale chargée

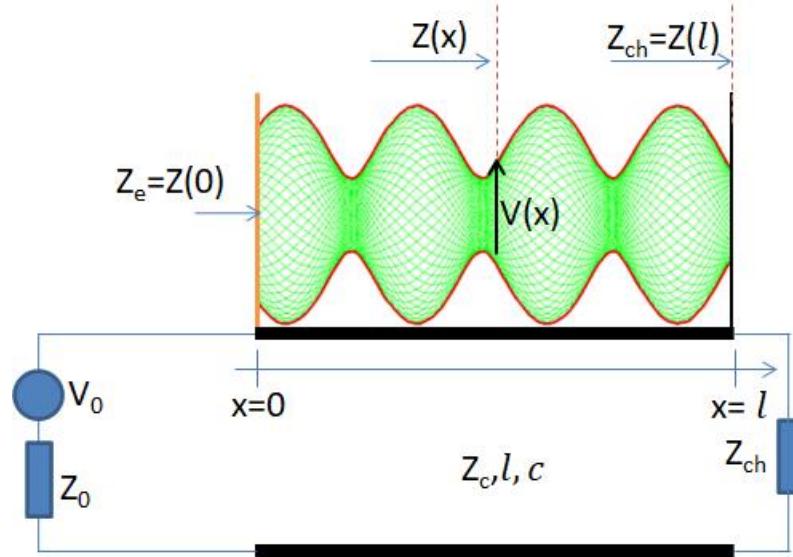


Figure 18 Régime stationnaire et impédance le long d'une ligne de transmission chargée

En tout point de la ligne, l'impédance $Z(x)$ est établie par le rapport entre les ondes stationnaires en tension et en courant (indépendant de t du fait du rapport) :

$$Z(x) = \frac{V(x,t)}{I(x,t)} \quad (\text{Eq. 47})$$

En décomposant suivant les composantes progressives :

$$Z(x) = \frac{V^+(x,t)e^{-j\beta x} + V^-(x,t)e^{j\beta x}}{\frac{1}{Z_c}(V^+(x,t)e^{-j\beta x} - V^-(x,t)e^{j\beta x})} \quad (\text{Eq. 48})$$

L'onde directe et celle indirecte sont liées par la condition qu'impose Z_{ch} à l'extrémité de la ligne :

$$Z_{ch} = \frac{V(l,t)}{I(l,t)} = Z_c \frac{V^+(0,t)e^{-j\beta l} + V^-(0,t)e^{j\beta l}}{V^+(0,t)e^{-j\beta l} - V^-(0,t)e^{j\beta l}} = Z_c \frac{1 + \frac{V^-(0,t)}{V^+(0,t)} e^{2j\beta l}}{1 - \frac{V^-(0,t)}{V^+(0,t)} e^{2j\beta l}} \quad (\text{Eq. 49})$$

Leur rapport à l'extrémité $x = l$ est le coefficient de réflexion ρ sur la charge :

$$\rho = \frac{V^-(0,t)e^{j\beta l}}{V^+(0,t)e^{-j\beta l}} = \frac{V^-(0,t)}{V^+(0,t)} e^{2j\beta l} \quad (\text{Eq. 50})$$

D'une part (Eq. 49) fait apparaître le rapport¹⁸ $Z_{ch} = \frac{Z_{ch}}{Z_c}$ tel que :

$$Z_{ch} = \frac{1+\rho}{1-\rho} \quad (\text{Eq. 51})$$

Ou de façon équivalente en inversant la relation :

$$\rho = \frac{Z_{ch}-1}{Z_{ch}+1} \quad (\text{Eq. 52})$$

¹⁸ La notation avec minuscule et soulignement \underline{z} utilisée ici vise à renforcer la distinction avec la majuscule Z , minuscules et majuscules étant habituellement et respectivement associées aux impédances normalisées (sans unité) et non normalisées (en Ω).

D'autre part (Eq. 48) peut être reformulée :

$$Z(x) = Z_c \frac{1+\rho e^{2j\beta(x-L)}}{1-\rho e^{2j\beta(x-L)}} \quad (\text{Eq. 53})$$

De façon générale, le rapport d'une impédance particulière relativement à une impédance de référence est appelé **impédance réduite**. \underline{Z}_{ch} est donc l'impédance réduite associée à la charge (Z_{ch}), l'impédance caractéristique Z_c de la ligne étant celle utilisée pour la normalisation. En adoptant une notation similaire d'impédance réduite $\underline{z}(x)$ le long de la ligne et tirant parti de (Eq. 53), on déduit :

$$\underline{z}(x) = \frac{1 + \frac{\underline{Z}_{ch} - 1}{\underline{Z}_{ch} + 1} e^{2j\beta(x-L)}}{1 - \frac{\underline{Z}_{ch} - 1}{\underline{Z}_{ch} + 1} e^{2j\beta(x-L)}} \quad (\text{Eq. 54})$$

En entrée de la ligne et après simplification, on obtient l'expression de $\underline{z}_e = \underline{z}(x=0)$:

$$\underline{z}_e = \frac{\underline{Z}_{ch} + j \tan(\beta L)}{1 + j \underline{Z}_{ch} \tan(\beta L)} \quad (\text{Eq. 55})$$

Cette relation constitue la **formule de l'impédance ramenée (réduite, ne pas oublier qu'ici les impédances sont normalisées relativement à Z_c)**. Elle joue un rôle très important dans de nombreuses applications des lignes de transmission.

La tension V et le courant I en sortie de générateur ne seront pas modifiés si la ligne de transmission chargée est remplacée par l'impédance \underline{z}_e .

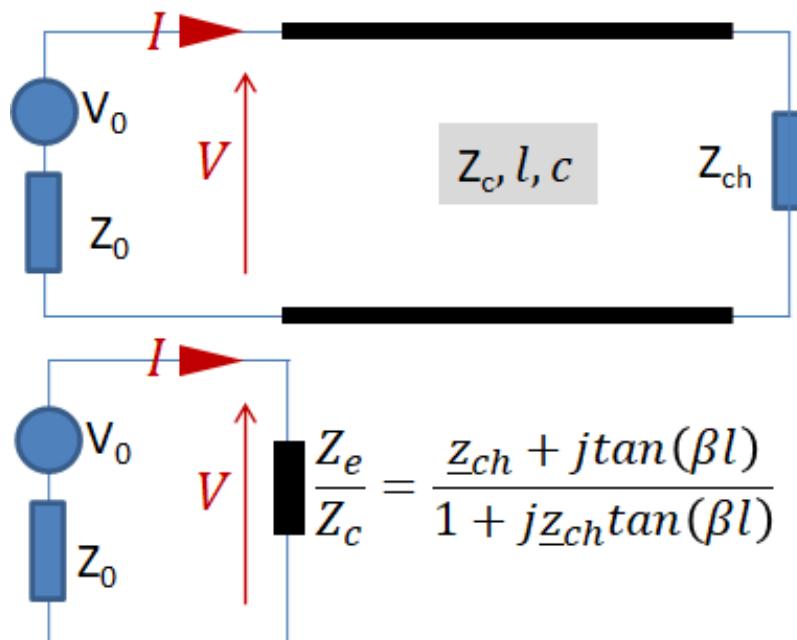


Figure 19 Impédance équivalente à celle ramenée à l'entrée d'une ligne

Pour une longueur de ligne L fixée, il existe toujours une fréquence suffisamment basse pour que le produit $\beta l = 2\pi \frac{l}{\lambda} \approx 0$, de telle sorte que $\tan(\beta l)$ devient négligeable devant \underline{Z}_{ch} . L'équation (Eq. 55) montre alors que $\underline{z}_e \rightarrow \underline{Z}_{ch}$. On retrouve finalement la théorie des circuits classique lorsque toutes les longueurs de lignes vérifient la condition $l \ll \lambda$.

L'équation (Eq. 52) montre que la réflexion sur la charge Z_{ch} est d'autant plus faible que celle-ci est proche de Z_c . La condition $\rho = 0$ correspond à une transmission parfaite entre la ligne et la charge. Elle se produit sur une ligne idéale lorsque $Z_c = Z_{ch}$. C'est la **condition d'adaptation**¹⁹. Dans le cas de la ligne idéale (sans pertes) et du fait de (Eq. 43), on remarque que la condition d'adaptation ligne/charge ne peut être satisfaite que pour une impédance de charge purement réelle.

Le même raisonnement vaut à l'entrée de la ligne. Dans la figure 19, la condition de transfert de puissance maximum entre le générateur et la charge est $Z_0 = Z_c = Z_{ch}$ (**circuit adapté**).

Par exemple, l'impédance associée à une antenne de réception TV hertzienne standard en France est $Z_0 = 75\Omega$. Le récepteur TV présente une impédance d'entrée adaptée, soit $Z_{ch} = 75\Omega$ également. La liaison antenne/récepteur TV est typiquement réalisée au travers d'un câble coaxial. Les rayons de ses conducteurs et les propriétés électriques de l'isolant doivent donc être choisis pour fixer l'impédance caractéristique Z_c de ce câble coaxial à 75Ω ²⁰.

2.5 Abaque de Smith

Construction

L'équation (Eq. 52) établit la correspondance entre le coefficient de réflexion $\rho = \rho_r + j\rho_i$ et l'impédance de charge réduite $\underline{Z}_{ch} = r_{ch} + jx_{ch}$. Cette correspondance est traduite graphiquement sur l'**abaque de Smith**. Ce dernier présente diverses propriétés qui facilitent la conception des circuits faisant intervenir des lignes de transmission.

$$\rho_r + j\rho_i = \frac{r_{ch} + jx_{ch} - 1}{r_{ch} + jx_{ch} + 1} \quad (\text{Eq. 56})$$

On en déduit les relations entre les composantes complexes de ρ et de \underline{Z}_{ch} :

$$\left(\rho_r - \frac{r_{ch}}{1+r_{ch}}\right)^2 + (\rho_i)^2 = \left(\frac{1}{1+r_{ch}}\right)^2 \quad (\text{Eq. 57})$$

$$(\rho_r - 1)^2 + \left(\rho_i - \frac{1}{x_{ch}}\right)^2 = \left(\frac{1}{x_{ch}}\right)^2 \quad (\text{Eq. 58})$$

Il s'agit d'équations de cercles $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R_0^2$, R_0 étant le rayon, x_0 et y_0 les coordonnées du centre. L'équation (Eq. 57) engendre des cercles résistifs centrés sur l'axe réel dans le plan complexe ρ . De façon analogue, (Eq. 58) ne fait intervenir que la partie imaginaire de \underline{Z}_{ch} . Elle génère donc des cercles inductifs ou capacitifs selon le signe positif ou négatif de x_{ch} , centrés le long d'un axe imaginaire passant par le point (1,0). On trouvera en annexe²¹ un exemple pratique d'abaque de Smith.

¹⁹ En onde de tension ici, il peut exister d'autres conditions d'adaptation suivant le contexte : en puissance, en bruit...

²⁰ Cf. figure 31 et (Eq. 114)

²¹ Dans la version imprimée de ce document seulement. On pourra télécharger une version pdf sur l'espace numérique du cours.

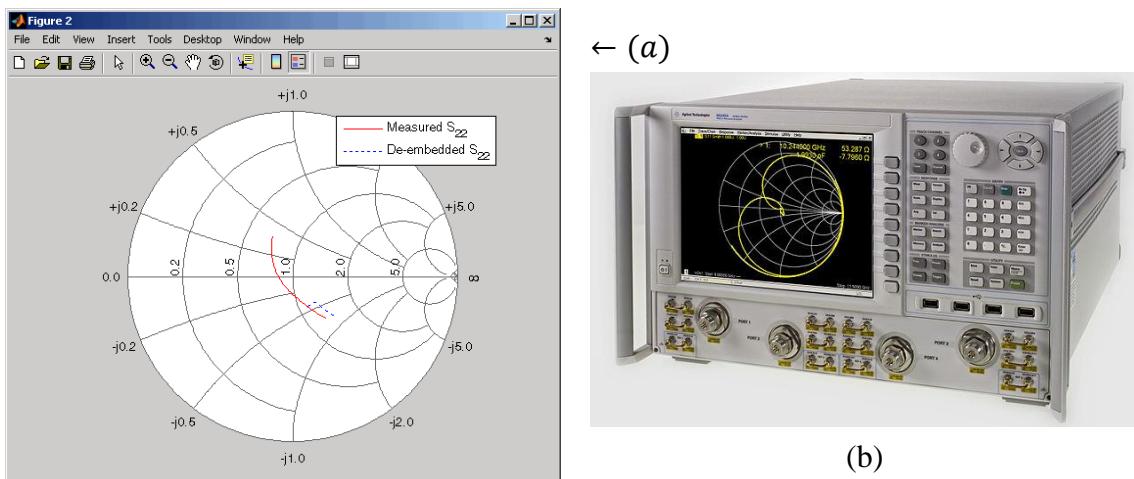


Figure 20 Abaque de Smith, (a) en simulation (Matlab), (b) en mesure (analyseur de réseaux vectoriel)

Remarque : en préservant l'orthogonalité entre les lieux $r_{ch} = \text{cste}$ et $x_{ch} = \text{cste}$, l'abaque de Smith constitue une transformation conforme entre ρ et \underline{z}_{ch} .

Lectures élémentaires sur l'abaque

Les différentes échelles de l'abaque facilitent le placement d'une charge quelconque, soit en partant de son coefficient de réflexion associé ρ , soit à partir de son impédance réduite \underline{z} . La figure suivante souligne l'utilisation de ces échelles. On peut y lire $\rho = 0.52e^{-j120^\circ}$ en correspondance avec $\underline{z} = 0.4 - j0.5$, le signe négatif de la partie imaginaire provenant d'une position dans le demi-plan inférieur de l'abaque. On relève également un ROS = 3.2 sur l'échelle du bas. En supposant une impédance de référence standard $Z_0 = 50\Omega$, on obtient donc $Z = \underline{z} \cdot Z_0 = (20 - j25)\Omega$, soit l'équivalent d'une résistance $R = 20\Omega$ en série avec une capacité C telle que $\frac{1}{j(2\pi f)C} = -j25\Omega$ à la fréquence f considérée.

On note que tous les points d'impédances situées en périphérie de l'abaque correspondent à une réflexion totale ($|\rho| = 1$), tandis que le point central exprime la **condition d'adaptation** ($|\rho| = 0$). On remarque également les positions d'impédances en **court-circuit (CC)** en périphérie à gauche ($\rho = -1$) et en **circuit ouvert (CO)** ($\rho = +1$) à droite.

Le coefficient de réflexion associé à ρ ($y = \frac{1}{\underline{z}} = \frac{1/\underline{z}-1}{1/\underline{z}+1} = -\rho(\underline{z})$) est donc obtenu par symétrie centrale à partir de \underline{z} ²². Dans l'exemple ci-dessous on relève graphiquement $y = 1 + j1.2$.

²² Certaines versions d'abaque intègrent une représentation des cercles de conductances et de susceptances (parties réelles et imaginaires des admittances, cf. vocabulaire p4) permettant une lecture directe des valeurs d'admittances. En perdant en lisibilité du fait de la quantité de cercles affichés, ils gagnent à éviter le placement de points symétriques utiles lors de certaines déterminations.

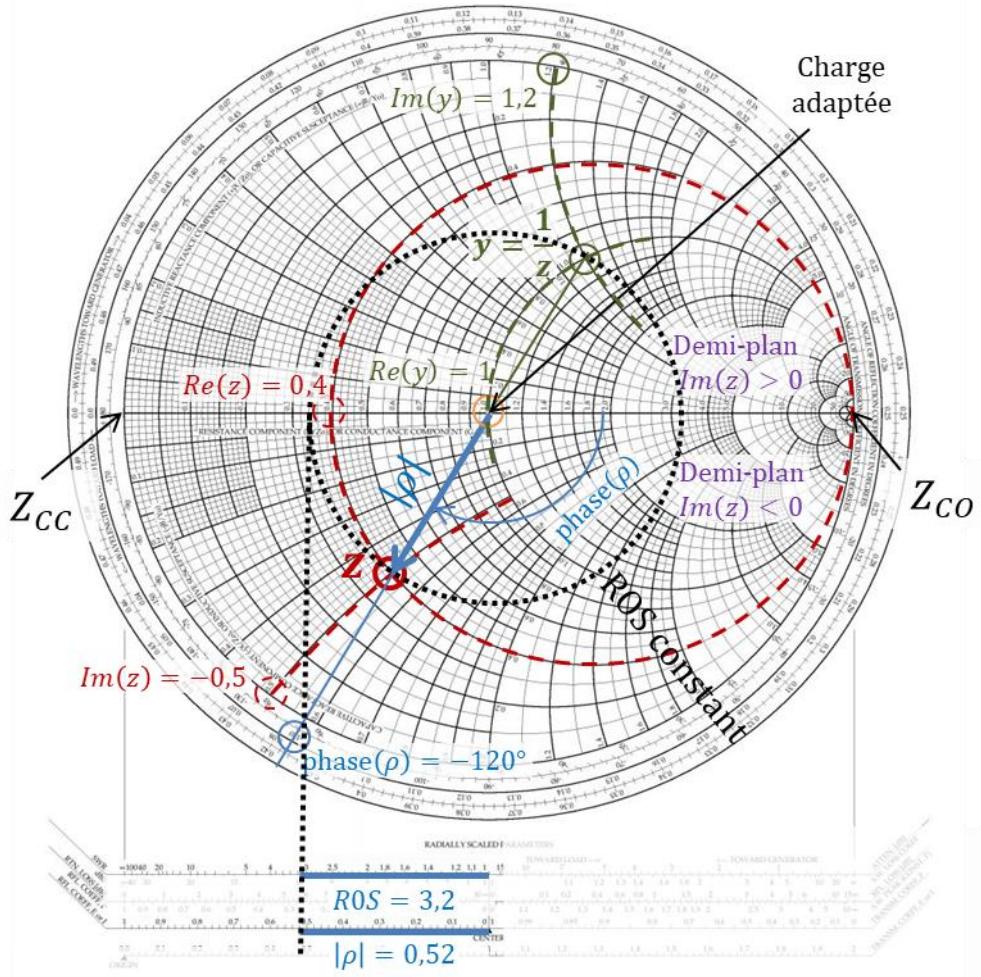


Figure 21 Lectures de base sur l'abaque de Smith

Lectures complémentaires

Considérant une ligne de transmission chargée de longueur l , l'équation (Eq. 53) détermine la valeur d'impédance $\underline{z}(x)$ en tout point d'une ligne. Suivant l'exemple de (Eq. 52), on lui associe un coefficient de réflexion $\rho(x)$ tel que :

$$\rho(x) = \frac{\underline{z}(x) - 1}{\underline{z}(x) + 1} = \rho(l)e^{j2\beta(x-l)} \quad (\text{Eq. 59})$$

Considérons une nouvelle position décalée d'une distance Δ vers le générateur. Nous avons :

$$\rho(x - \Delta) = \rho(l)e^{j2\beta(x-\Delta-l)} = e^{-j2\pi\left(\frac{\Delta}{\lambda/2}\right)}\rho(x) \quad (\text{Eq. 60})$$

Seules les phases différentes distinguent $\rho(x - \Delta)$ et $\rho(x)$. En conséquence la position de $\rho(x - \Delta)$ provient d'une rotation de $\rho(x)$ autour du centre de l'abaque, correspondant à un déphasage de $-2\pi\left(\frac{\Delta}{\lambda/2}\right)$ de l'onde progressive. Le signe négatif exprime une rotation dans « le sens des aiguilles d'une montre ». Finalement toutes les valeurs possibles de $\rho(x \pm \Delta)$ sont obtenues par rotation de la position $\rho(x)$ autour du centre de l'abaque. Le sens de rotation est horaire si le plan de référence est déplacé vers le générateur²³, antihoraire si le

²³ Ou de façon équivalente dans le sens rétrograde des ondes sur la ligne

déplacement est vers la charge²⁴. Le lieu de toutes les positions possibles de $\rho(x)$ est le cercle à ROS constant²⁵. Un tour complet est obtenu lors d'un déplacement sur la ligne de $\lambda/2$. La périodicité de l'enveloppe stationnaire est identique à celle de l'abaque.

Des erreurs assez fréquentes proviennent de la confusion entre l'angle géométrique de rotation θ sur l'abaque et le déphasage Φ associé à l'onde progressive sur la ligne de transmission : $\theta = 2\pi \rightarrow \phi = \pi$ (un tour complet sur l'abaque \rightarrow un déphasage de π pour une onde progressive sur la ligne), soit $\theta = 2\phi$.

Pratique

dans les versions d'abaque de ce cours, deux échelles graduées de 0 à 0.5 situées en périphérie expriment l'effet des déplacements Δ directement en fonction de λ (cf. exemple figure 22). L'une ou l'autre est à choisir selon la direction de déplacement et selon les commodités de lecture.

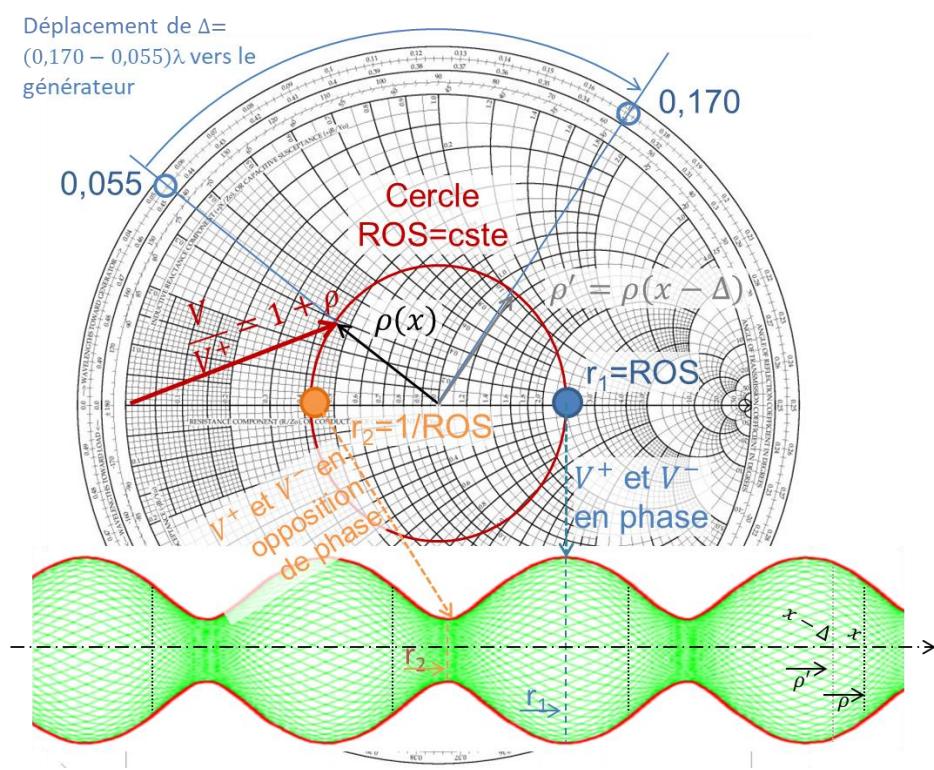


Figure 22 ROS et changement de plan de référence sur l'abaque de Smith

Sur l'abaque de Smith, la distance entre la position CC et $\rho(x)$ est $1 + |\rho(x)|$. En conséquence l'intersection du cercle ROS avec la partie positive de l'axe réel est $1 + |\rho(x)|$. Cela correspond à un maximum de l'enveloppe stationnaire (cf. 1.3). Sur cette position, $z(x) = r_1 = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$, expression qui se confond alors avec celle du ROS ! De façon similaire, l'intersection avec la partie négative de l'axe réel est $1 - |\rho(x)|$, minimum de l'enveloppe stationnaire, avec $z(x) = r_2 = \frac{1 - |\rho|}{1 + |\rho|} = \frac{1}{ROS}$.

²⁴ C'est-à-dire dans le sens direct (x croissants)

²⁵ Suivant (Eq. 19), le ROS est indépendant de la position considérée sur la ligne de transmission. Il ne dépend que du Max et du Min de l'enveloppe stationnaire, donc des conditions aux extrémités.

Une lecture du ROS est donc possible en traçant le cercle à ROS constant passant par $\rho(x)$ et centré sur l'abaque. L'intersection de l'axe réel avec le cercle à ROS constant affiche le ROS du côté positif (≈ 2.5 sur la figure 22) et son inverse du côté négatif.

Les quelques propriétés de l'abaque de Smith qui viennent d'être présentées trouvent des applications nombreuses, par exemple pour l'adaptation de circuits ou pour la mesure de charges.



Figure 23 Ligne coaxiale fendue HP 806B (3 à 12 GHz) et chariot mobile, support de mesure d'ondes stationnaires par sonde

2.6 Application : adaptation simple stub

La méthode du simple stub est l'une de celles qui permet d'adapter un générateur d'impédance interne réelle Z_0 quelconque à une charge complexe Z_{ch} donnée, pour une fréquence f choisie. Nous voyons ci-après que cette adaptation est parfaite à cette fréquence en théorie. Elle repose sur la détermination des phases $\phi_1 = \beta l_1$ et $\phi_2 = \beta l_2$ de deux lignes de transmission idéales (sans pertes), le stub parallèle pouvant être terminé par un court-circuit (CC) ou par un circuit ouvert (CO). Nous illustrons ici le cas avec CC :

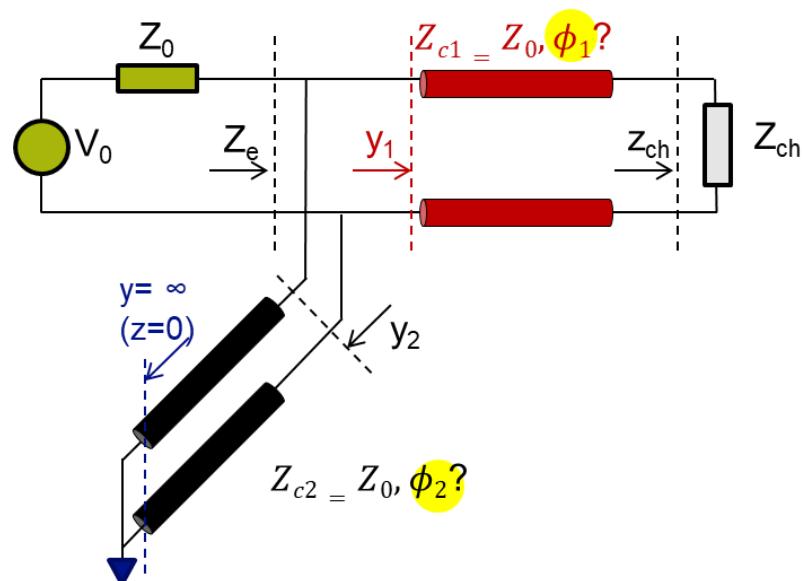


Figure 24 Schéma de principe pour l'adaptation simple stub (ici avec terminaison CC)

Le montage sera parfaitement adapté si $\rho_e = 0$, ce qui suivant (Eq. 52) doit correspondre à $Z_e = Z_0$. La puissance active maximale étant alors absorbée par Z_e sans pouvoir être dissipée dans les lignes (puisque elles sont sans pertes), elle est nécessairement transmise à la charge Z_{ch} . A l'entrée de la première ligne et suivant les règles de bases de composition des circuits (Eq. 5), cela correspond à la condition :

$$y_e = y_1 + y_2 = 1 \quad (\text{Eq. 61})$$

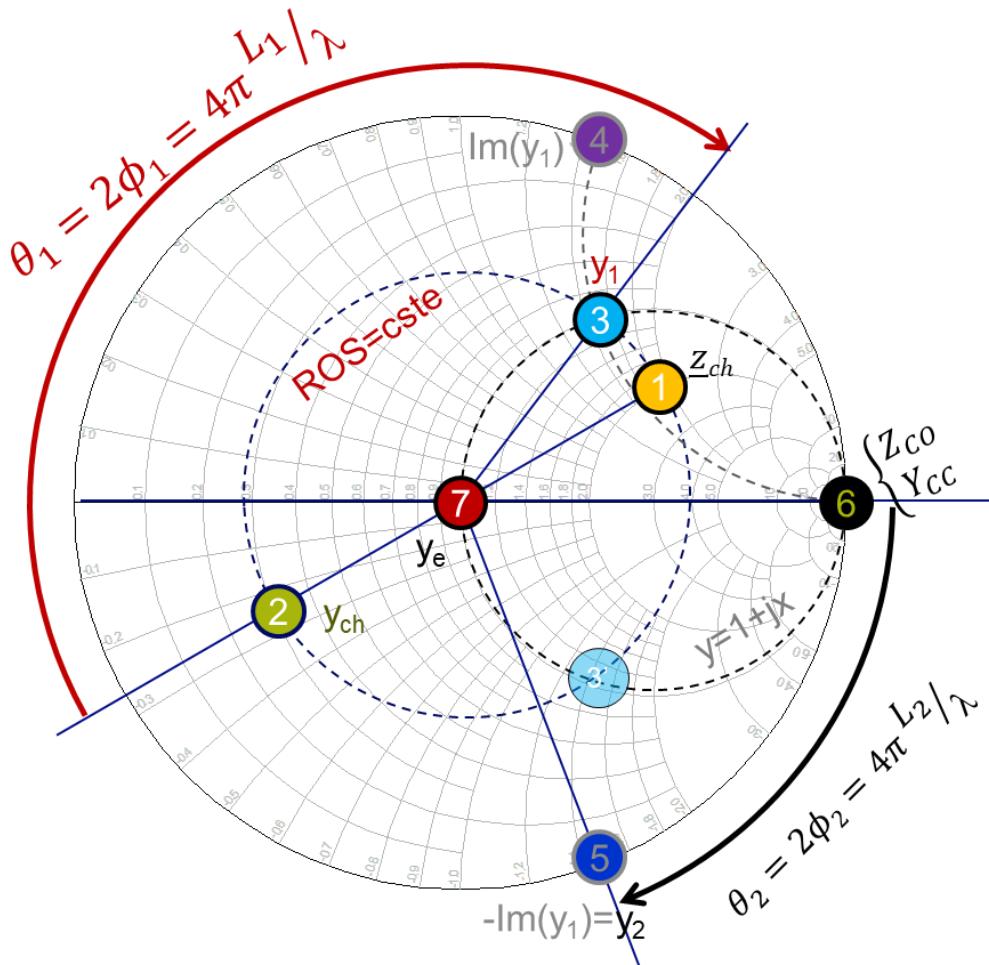
L'admittance y_2 étant forcément imaginaire²⁶, on peut introduire le réel x_s tel que :

$$y_2 = jx_s \Rightarrow y_1 = 1 - jx_s \quad (\text{Eq. 62})$$

En conséquence y_1 se trouve forcément sur le cercle équi-conductance²⁷ passant par le centre de l'abaque ($r = 1$).

D'autre part, selon (Eq. 60), y_1 est le transformé de y_{ch} par rotation horaire θ_1 autour du centre de l'abaque proportionnellement au déphasage, avec $\theta_1 = 2\phi_1^{28}$.

Pour déterminer la solution, il suffit donc suivre les étapes qui suivent l'illustration suivante :



²⁶ Il n'y a aucune charge réelle branchée à l'extrémité de la ligne et celle-ci est sans pertes

²⁷ Le cercle équi-conductance unité correspond au tracé du cercle équi-résistance unité quand le raisonnement se fait suivant les admittances.

²⁸ Revoir l'explication à ce sujet p26

1. Positionner l'impédance réduite \underline{Z}_{ch}
2. En déduire par symétrie centrale le point figuratif de y_{ch}
3. Faire tourner ce point autour du centre jusqu'à une intersection²⁹ avec le cercle $1 + jx$. C'est la position y_1 . L'angle de rotation θ_1 est proportionnel au déphasage ϕ_1 de la ligne tel que $\theta_1 = 2\phi_1 = 2\beta l_1$, ce qui détermine l_1 . Une échelle dédiée en périphérie d'abaque permet généralement la lecture de l_1 en fonction de λ sans passer par l'angle.
4. Placer le point jx en périphérie de l'abaque
5. En déduire le point conjugué $jx_s = -jx$ figuratif de y_2
6. Comme dans l'étape 3, l'angle $\theta_2 = 2\phi_2 = 2\beta l_2$ exprime la transformation par rotation autour du centre de l'abaque la position $y = (CC)$ ³⁰ jusqu'au point précédent, ce qui détermine finalement l_2 .

²⁹ On peut choisir la première, mais il y a une infinité de solutions possibles, dont deux dans l'intervalle d'une seule rotation complète

³⁰ Ce point repéré « 6 » figure tout autant l'admittance réduite CC que l'impédance réduite CO

3 Rappels et compléments ondes électromagnétiques

L'électromagnétisme classique³¹ issu de la théorie de J.C. Maxwell connaît des succès qui participent à la transformation du monde depuis plus de 150 ans. Elle trouve des applications aussi nombreuses qu'importantes, notamment dans les domaines des communications et de l'énergie. Ce chapitre propose des rappels et compléments de quelques fondamentaux d'électromagnétisme nécessaire à l'étude des ondes électromagnétiques guidées du chapitre suivant. Comme pour le chapitre 1, il appartient au lecteur d'y consacrer plus ou moins de temps selon le parcours et les souvenirs des formations antérieures. Ceux qui n'ont quasiment pas rencontré ces notions auparavant y trouveront un moyen de rattrapage, à condition d'y consacrer le temps nécessaire.

3.1 (Généralités) Quelques repères historiques



1678 : *Christiaan Huygens* (1629-1695) expose une théorie ondulatoire de la lumière qui permet d'interpréter la double réfraction que l'on observe dans certains minéraux cristallisés d'Islande, tandis que la théorie corpusculaire d'*Isaac Newton* qui domine largement à cette époque est en échec pour expliquer ce phénomène.



1801 : *Thomas Young* (1773-1829) réalise sa célèbre expérience des interférences créées au travers de deux fentes, ce qui démontre la nature ondulatoire de la lumière. Il apporte également une contribution majeure aux fondements de l'optique physiologique.



1815 : *Augustin Fresnel* (1788-1827) pose les bases d'une théorie vibratoire de la lumière. Ses travaux sur la polarisation démontreront le caractère transverse des vibrations lumineuses. Il est particulièrement renommé pour ses recherches sur les lentilles optiques.



1820 : *Hans Christian Ørsted* (1777-1851) met en évidence la relation électricité / magnétisme. *André-Marie Ampère* (1775-1836) développe les travaux et contribue de façon majeure aux fondements de l'électrodynamique.



1821 : *Michael Faraday* (1791-1867) réalise le premier prototype de moteur électrique. Parmi ses découvertes figure notamment l'induction électromagnétique.



1845 : *Gustav Kirchhoff* (1824-1887) est encore étudiant quand il établit les lois fondamentales des circuits électriques. Ses travaux marqueront l'électrodynamique, la physique du rayonnement (il a introduit le corps noir) et l'élasticité.

³¹ Au sens où les énergies et dimensions dont il est question ici rendent inutiles d'avoir à considérer les comportements et propriétés quantiques des ondes électromagnétiques.



1864 : [James Clerk Maxwell](#) (1831-1879) présente ses équations sur les champs électromagnétiques et leurs interactions avec la matière. Sa théorie macroscopique unifie magistralement les phénomènes de l'électricité, du magnétisme et de la lumière.



1887 : [Heinrich Rudolf Hertz](#) (1857-1894). Après avoir découvert la photoélectricité et réalisé le premier faisceau hertzien dès 1886, il démontre expérimentalement que la lumière est une onde électromagnétique.



1902 : [Hendrik Lorentz](#) (1853-1928) obtient le prix Nobel en reconnaissance de contributions majeures sur le magnétisme, les forces et le rayonnement électromagnétiques.



1905 : [Albert Einstein](#) propose une explication de l'effet photoélectrique sur laquelle butte la théorie de J.C. Maxwell, en associant les concepts de « particules de lumière » et de « quantum d'énergie ». Il en sera récompensé par le prix Nobel en 1921.



[Marie Skłodowska-Curie](#) (1867-1934) est physicienne et chimiste. Pour ses recherches sur les rayonnements ionisants dont elle subira les conséquences tragiques, elle est la première femme à obtenir un prix Nobel. Elle en obtiendra finalement deux. Son succès et celui de celles qui la suivront interpellent sur la quasi-absence mémorielle des savantes de l'électromagnétisme.

Depuis 1873, les phénomènes de lumière, d'électricité et de magnétisme ont été unifiés par Maxwell dans sa théorie des ondes électromagnétiques [1]. Il s'agit d'une théorie macroscopique, dans le sens où elle est valable à des échelles suffisamment grandes par rapport aux dimensions interatomiques (les forces de cohésion n'ont pas besoin d'être introduites explicitement). Sa portée est apparue considérable du fait de ses capacités à expliquer quantité d'observations réelles, autant qu'à prédire précisément le résultat d'expériences très diverses. Les contributions de cette théorie à l'évolution technologique de nos sociétés sont majeures. Elle inspire et soutient aujourd'hui encore de nombreuses innovations.

3.2 (Rappels) Forces et champs électromagnétiques

Comment se représenter les forces et champs électromagnétiques, tandis qu'ils échappent à notre perception humaine directe ? Essayons une analogie maritime : la carte des vents (d'origine dominante thermique solaire) combinée à celle des courants marins (d'origine dominante gravitationnelle lunaire) produit une force résultante agissant sur un bateau, force qui évolue avec sa trajectoire à la surface de l'eau... s'il n'est solidement pas amarré à une bouée. De façon analogue, la carte des champs électriques (dus aux charges fixes environnantes) et celle des champs magnétiques (dus aux charges en déplacement, c'est-à-dire des courants électriques) créent une force résultante qui s'exerce sur une charge donnée et conditionne son éventuelle trajectoire... si elle n'est pas retenue par des forces plus grandes encore, comme les forces de cohésion au sein des atomes.

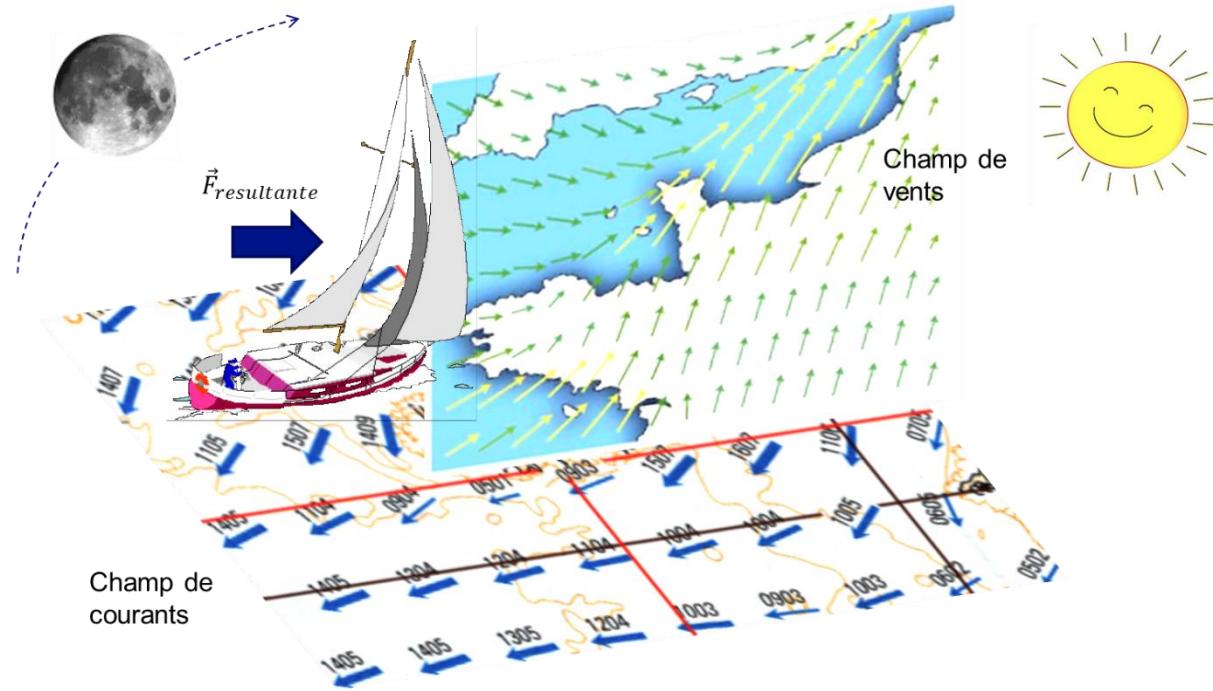


Figure 25 Champs et forces

De façon (très) résumée, les observations et expériences ont progressivement mis en évidence l’existence des forces électromagnétiques qui s’exercent naturellement entre des particules chargées, attractives ou répulsives selon leurs signes opposés ou identiques. Les caractéristiques de ces forces (intensité, direction) dépendent de la répartition spatiale des charges ($\propto 1/r^2$ entre 2 charges élémentaires fixes) et de leur quantité, mais aussi de leur éventuel déplacement et des propriétés électromagnétiques macroscopiques du milieu.

En l’absence de tout déplacement des charges environnantes, Le **champ électrique** \vec{E} traduit les influences combinées des forces électriques (ou de Coulomb) en un point. Si on y mettait une charge électrique q , elle subirait une **force électrique** $\vec{F}_e = q\vec{E}$. \vec{E} est donc une force par unité de charge. Cependant personne n’a observé de charge magnétique élémentaire dans la nature. En 1905, A. Einstein a interprété la force magnétique comme un effet relativiste lié à des configurations particulières de déplacements des charges électriques (par exemple au niveau des atomes des matériaux magnétiques). Ces comportements complexes sont restitués globalement par le **champ magnétique**, responsable de la **force magnétique** $\vec{F}_m = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$ qui s’exerce sur la charge q qui se déplace à la vitesse \vec{v} . Ajoutée à la force électrique, on obtient la force EM totale : c’est la **force de Lorentz**.

En résumé, tant que les distances d’interactions sont grandes devant les dimensions interatomiques, les cartes des champs électriques et magnétiques variables avec le temps déterminent la force électromagnétique totale (Lorentz) qui s’exercerait sur une charge selon sa position. L’onde électromagnétique est la propagation dans l’espace d’une perturbation des champs électromagnétiques, comme l’onde marine est la propagation d’une perturbation du champ de pression à l’interface entre l’air et l’eau.

3.3 (Rappels) Grandeurs et paramètres électromagnétiques

Equations de Maxwell

Nous considérons ici la forme locale des équations de Maxwell dans un milieu LHI et en régime harmonique :

$$\begin{cases} \nabla \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B} & (a) \\ \nabla \wedge \vec{H} = j\omega \vec{D} + \vec{J} & (b) \\ \nabla \vec{D} = \rho_v & (c) \\ \nabla \vec{B} = 0 & (d) \end{cases} \quad (Eq. 63)$$

Où les grandeurs sont

- \vec{E} : champ (d'excitation) électrique (V/m)
- \vec{H} : champ (d'excitation) magnétique (A/m)
- \vec{D} : (champ de) déplacement électrique (As/m²)
- \vec{B} : (champ d') induction magnétique (T ou Vs/m²)
- \vec{J} : densité (surfacique) de courant (A/m²)
- ρ_v : densité (volumique) de charges (As/m³)

On déduit la loi de conservation de la charge électrique à partir de $\nabla \cdot (b)$ et (c) :

$$\nabla \cdot \vec{J} = -j\omega \rho_v \quad (Eq. 64)$$

Paramètres constitutifs de la matière

Les différentes grandeurs dans les équations de Maxwell ne sont pas toutes indépendantes, certaines étant directement reliées par les propriétés électromagnétiques macroscopiques du milieu³² : la **permittivité diélectrique** ϵ (F/m), la **perméabilité magnétique** μ (H/m) et la **conductivité électrique** σ (S/m), inverse de la **résistivité** ρ_R ($\Omega \cdot m$). On a les relations constitutives suivantes :

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} & (a) \\ \vec{B} = \mu \vec{H} & (b) \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho_R} \vec{E} & (c) \end{cases} \quad (Eq. 65)$$

Une présentation détaillée de ces paramètres peut être retrouvée dans [2].

Par commodité algébrique et par convention, ϵ et μ s'expriment généralement avec des parties imaginaires négatives et relativement aux propriétés du vide (indice 0 dans les notations). Ceci donne les expressions suivantes en régime harmonique :

$$\begin{cases} \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon_0 (\epsilon'_r - j\epsilon''_r) & (a) \\ \mu = \mu_0 \mu_r = \mu' - j\mu'' = \mu_0 (\mu'_r - j\mu''_r) & (b) \end{cases} \quad (Eq. 66)$$

$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} F/m$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m$ sont les constantes électriques du vide. L'indice r indique la grandeur relative (par rapport au vide). On utilise principalement les grandeurs relatives pour indiquer les propriétés électriques des matériaux et milieux diverses.

³² L'élaboration de ces paramètres macroscopiques à partir des lois microscopiques à l'échelle de la matière est établie dans la discipline nommée « Physique statistique », à laquelle contribua également J.C. Maxwell

Fondamentalement, tous les paramètres constitutifs des milieux varient avec les conditions (température, fréquence, etc.) dans des proportions plus ou moins notables selon ces dernières. Les parties imaginaires ϵ'' et μ'' expriment la conversion d'énergie entre l'onde et le milieu de propagation (par échauffement thermique principalement). La conductivité σ traduit également un échange d'énergie responsable du déplacement des électrons libres lorsqu'ils existent (dans les métaux, dans les plasmas, dans l'eau de mer...).

Dans les milieux amagnétiques ($\mu_r = 1$) que l'on considère essentiellement dans ce document et qui sont les milieux très habituels des supports de propagation, l'ensemble des pertes est finalement caractérisé par le **facteur de pertes** $\tan\delta^{33}$.

$$\tan\delta = \frac{\omega\epsilon'' + \sigma}{\omega\epsilon'} \quad (\text{Eq. 67})$$

Tableau 1 Permittivité diélectrique et tangente de pertes pour quelques isolants

Matériau	F (GHz)	ϵ_r'	$\tan\delta (25^\circ\text{C})$
Verre (pyrex)	3	4,82	$5,4 \cdot 10^{-3}$
Porcelaine	0,1	5,04	$7,8 \cdot 10^{-3}$
Téflon	10	2,08	$4 \cdot 10^{-4}$
Silicium	10	11,9	$4 \cdot 10^{-3}$

Par exemple Un modèle classique de l'évolution de la permittivité diélectrique relative complexe dans les liquides avec la fréquence est celui de Debye, indiqué ci-dessous (pour l'ordre 1) :

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_s - \epsilon_\infty}{1 + j\omega\tau} \quad (\text{Eq. 68})$$

Les permittivités statique ϵ_s et asymptotique ϵ_∞ sont les valeurs limites aux fréquences nulle et infinie, τ est le temps de relaxation. Ces paramètres sont extraits des courbes d'évolution fréquentielles associées à ϵ_r comme celles de l'eau salée suivante dont la partie réelle présente une permittivité diélectrique relative statique particulièrement forte, proche de 80, une relaxation voisine de 4 GHz et une permittivité relative asymptotique de 5.

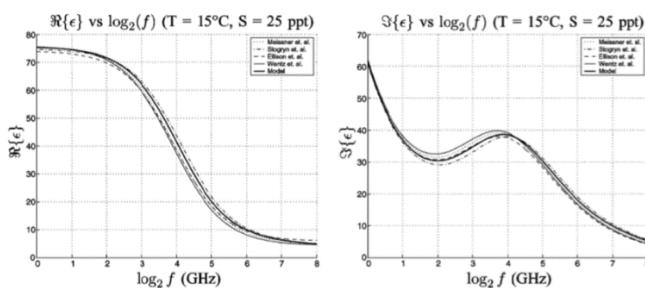


Figure 26 Evolutions fréquentielles complexe de ϵ_r pour l'eau salée (34)

³³ En combinant (Eq. 63) (b) et (Eq. 65) (c), on obtient $\nabla \times \vec{H} = j\omega\vec{D} + \vec{J} = j\omega\epsilon'(1 - j\tan\delta)\vec{E}$

³⁴ R. Somaraju et J. Trumper, « Frequency, Temperature and Salinity Variation of the Permittivity of Seawater », Antennas Propag. IEEE Trans. On, vol. 54, no 11, p. 3441-3448, 2006.

La conductivité σ traduit l'aptitude au déplacement des charges libres dans les matériaux conducteurs. Dans les métaux usuels, $\sigma \gg \epsilon''$.

Les métaux usuels se comportent comme des filtres passe-haut à très haute fréquence de coupure, de l'ordre de plusieurs dizaines de THz. Dans la gamme de fréquence des ondes électromagnétiques non ionisantes, on confond alors la conductivité d'un matériau métallique avec sa conductivité statique σ_s .

Le modèle de Drude est classique des variations fréquentielles de la conductivité des métaux usuels. On constate la relaxation associée au paramètre τ , correspondant au comportement passe-haut indiqué ci-dessus.

$$\sigma = \sigma_s \frac{1}{1-j\omega\tau} \approx \sigma_s \quad (\text{Eq. 69})$$

Tableau 2 Conductivité statique de métaux courants

Conducteur	σ_s (S/m) @ 25°C
Etain	$0,700 \cdot 10^7$
Aluminium	$3,816 \cdot 10^7$
Or	$4,098 \cdot 10^7$
Cuivre	$5,813 \cdot 10^7$
Argent	$6,173 \cdot 10^7$

Dans un contexte d'ingénierie, les propriétés électriques vont orienter le choix de certains matériaux. La sélection entre différentes options devra alors considérer également les autres propriétés physiques qui conditionnent les comportements vis-à-vis des contraintes mécaniques, de la dilatation thermique, du comportement au vieillissement, etc... Au-delà des aspects physiques et indépendamment du fait qu'ils ne rentrent pas dans le périmètre de ce cours, il est essentiel d'y intégrer également les indicateurs d'impacts écologiques et sociétaux en combinaison avec les considérations financières.

3.4 (Rappels et compléments) Ondes entre milieux différents

Bilan des puissances (théorème de Poynting)

Considérons un volume V LHI fermé par une surface S_V :

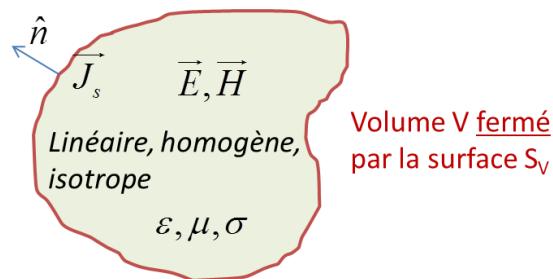


Figure 27 Volume pour le théorème de Poynting

Dans V , les énergies moyennes électrique W_e et magnétique W_m sont associées aux champs correspondant par les relations :

$$W_e = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{4} \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{D}^* dV \right) \quad (\text{Eq. 70})$$

$$W_m = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{4} \iiint_V \vec{H} \cdot \vec{B}^* dV \right) \quad (\text{Eq. 71})$$

Elles sont l'analogue des énergies potentielle et cinétique dans le domaine mécanique, les différentes formes pouvant être alternativement adoptées sous l'effet du travail effectué par les forces en présence.

Le **théorème de Poynting** établit le bilan des puissances dans ce contexte très général³⁵ :

$$P_G = P + (P_L = P_\sigma + P_\varepsilon + P_\mu) + 2j\omega(W_m - W_e) \quad (\text{Eq. 72})$$

La puissance P_G générée par les sources internes à V est répartie de la façon suivante :

- La puissance P échangée au travers de la surface S_V (sur certaines parties elle peut éventuellement entrer dans V , sur d'autres elle peut en sortir)
- La puissance P_L dissipée dans le milieu (pertes joules P_σ , diélectriques P_ε , magnétiques P_μ , certaines ou toutes pouvant être négligeables)
- La puissance stockée (éventuellement), exprimée par le terme imaginaire

La **densité de puissance** associée à une onde EM est la partie réelle du **vecteur phaseur**³⁶ de Poynting \vec{S} :

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* \quad (\text{Eq. 73})$$

La puissance électromagnétique totale portée par une onde qui traverse une surface S_V est déduite du flux du vecteur de Poynting à travers de cette surface :

$$P = \frac{1}{2} \iint_{S_V} \vec{E} \times \vec{H}^* \overrightarrow{dS_V} \quad (\text{Eq. 74})$$

La partie réelle de cette puissance est la puissance active portée par l'onde.

En reliant terme à terme les puissances aux grandeurs électromagnétiques fondamentales, la relation générale de Poynting (Eq. 72) devient :

$$-\frac{1}{2} \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J}_S^* dV = \frac{1}{2} \iint_{S_V} \vec{E} \times \vec{H}^* \overrightarrow{dS_V} + \frac{\sigma}{2} \iiint_V |\vec{E}|^2 dV + \frac{\omega}{2} \iiint_V (\varepsilon'' |\vec{E}|^2 + \mu'' |\vec{H}|^2) dV + j \frac{\omega}{2} \iiint_V (\mu' |\vec{H}|^2 - \varepsilon' |\vec{E}|^2) dV \quad (\text{Eq. 75})$$

Conditions aux interfaces

Soit la surface de séparation entre deux milieux LHI, sur laquelle sont établies des densités surfaciques de charge ρ_s et de courant \vec{J}_s :

³⁵ surface S_V fermée ou partiellement ouverte, présence ou absence de sources internes, milieux avec ou sans pertes, etc..., la démonstration détaillée peut être consultée dans [3]

³⁶ Vecteur phaseur : vecteur avec des composantes complexes

Milieu 2 : ϵ_{r2}, μ_{r2}

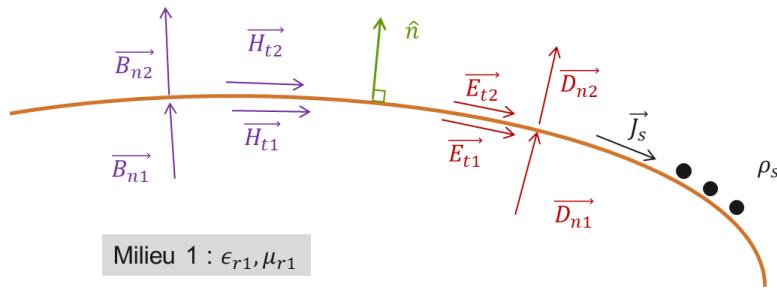


Figure 28 Définition des grandeurs EM à l'interface entre deux milieux

On établit (cf. annexe 4.3) les relations générales suivantes :

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s & (a) \\ \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 & (b) \\ (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \wedge \hat{n} = \vec{0} & (c) \\ (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \wedge \hat{n} = \vec{J}_s & (d) \end{cases} \quad (Eq. 76)$$

Les interfaces entre un milieu diélectrique et le métal d'une part, entre deux matériaux diélectriques d'autre part sont les plus courantes dans les supports de transmission.

A l'interface entre deux diélectriques, on a $\vec{J}_s = \vec{0}$. On extrait alors de (c) et (d) :

$$\begin{cases} \vec{E}_{T1} = \vec{E}_{T2} & (a) \\ \vec{H}_{T1} = \vec{H}_{T2} & (b) \end{cases} \quad (Eq. 77)$$

Les champs tangentiels électriques et magnétiques sont continus à l'interface entre deux diélectriques

Les charges libres étant accumulées sur la périphérie d'un conducteur idéal ($\sigma = \infty$) en présence d'un champ électrique externe à celui-ci, ses champs électriques internes sont nuls. Considérant l'hypothèse d'un milieu 2 parfaitement conducteur³⁷, (Eq. 76) (c) devient :

$$\vec{E}_{T1} = \vec{0} \quad (Eq. 78)$$

Le champ électrique tangentiel est nul à la surface d'un conducteur parfait.

Cette situation est l'analogie de celle d'une tension V sur un court-circuit ($V = 0$), aussi les surfaces sur lesquelles la condition ci-dessus est remplie sont appelées « surfaces de **court-circuit électrique (CCE)** ».

Par analogie aussi, on désigne par « **court-circuit magnétique (CCM)** » la condition correspondante pour le champ magnétique :

$$\vec{H}_T = \vec{0} \quad (Eq. 79)$$

Le champ tangentiel magnétique est nul sur une surface CCM.

Des interfaces naturelles associées à cette condition n'existent pas, mais elle apparaît dans certains contextes, par exemple les plans de symétrie électromagnétique (cf. 4.4).

3.5 (Rappels) Onde électromagnétique plane

On considère un milieu LHI infini vide de charges ($\sigma = 0$) et sans pertes (ϵ_r et μ_r réels).

³⁷ L'acronyme PEC (Perfect Electric Conductor) est fréquemment utilisé

Les équations de Maxwell deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} & (a) \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} & (b) \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 & (c) \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0 & (d) \end{array} \right. \quad (Eq. 80)$$

En combinant l'identité vectorielle générale $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$ avec $\nabla \times (a, b)$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E} = 0) - \Delta \vec{E} = -j\omega\mu(\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E}) & (a) \\ \nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla(\nabla \cdot \vec{H} = 0) - \Delta \vec{H} = j\omega\epsilon(\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}) & (b) \end{array} \right. \quad (Eq. 81)$$

Il en découle l'[équation de Helmholtz](#) :

$$\Delta \vec{U} + k^2 \vec{U} = \vec{0} \quad (Eq. 82)$$

Dans cette équation, \vec{U} correspond à \vec{E} ou \vec{H} , $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$. Cette équation présente une similitude avec l'équation de D'Alembert (Eq. 7), mais l'inconnue est ici une grandeur vectorielle. Par identification avec le nombre d'onde $k = \frac{\omega}{c}$, la célérité c de l'onde électromagnétique est donc reliée aux paramètres électriques du milieu de propagation :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} \quad (Eq. 83)$$

$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \approx 3.10^8 \text{ m/s}$ est la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide.

Chaque composante cartésienne de \vec{E} ou \vec{H} est affectée par l'équation d'Helmholtz de façon similaire à E_x :

$$\partial_x^2 E_x + \partial_y^2 E_x + \partial_z^2 E_x + k^2 E_x = 0 \quad (Eq. 84)$$

La solution de cette équation est recherchée à partir de la [méthode de séparation des variables](#)³⁸, en posant :

$$E_x = f(x)g(y)h(z) \quad (Eq. 85)$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (Eq. 86)$$

L'équation (Eq. 84) peut alors être reformulée de la façon suivante :

$$\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} + \frac{h''}{h} + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 \quad (Eq. 87)$$

C'est une somme de 3 équations d'ondes unidimensionnelles indépendantes pour chaque axe. Par exemple pour f :

$$f'' + k_x^2 f = 0 \quad (Eq. 88)$$

Chacune présente sa solution stationnaire suivant son axe spécifique. En l'absence d'onde rétrograde³⁹, il vient $E_x = F e^{-jk_x x} G e^{-jk_y y} H e^{-jk_z z}$, où F , G et H sont les constantes d'intégration que l'on factorise en $E_{0x} = FGH$. On pose le vecteur position :

$$\vec{r} = x. \hat{x} + y. \hat{y} + z. \hat{z} \quad (Eq. 89)$$

³⁸ Ce qui revient à considérer le caractère indépendant de la propagation suivant les différents axes du repère

³⁹ pour alléger les écritures, le cas général est traité identiquement

Et le vecteur d'onde :

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \quad (\text{Eq. 90})$$

E_x prend alors une forme très simple :

$$E_x = E_{0x} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (\text{Eq. 91})$$

Le même raisonnement est répété sur l'ensemble des composantes de \vec{E} . Avec $\vec{E}(r=0) = E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y} + E_{0z} \hat{z}$. Il conduit à l'expression de l'**onde plane** (directe), solution de l'équation de Helmholtz :

$$\vec{E}(r) = \vec{E}(0) e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (\text{Eq. 92})$$

$\nabla \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}(0) e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = 0$. \vec{k} est donc orthogonal au champ électrique.

$$\text{On a aussi } \vec{H} = \frac{-1}{j\omega\mu} \nabla \times \vec{E} = \frac{+1}{j\omega\mu} \vec{E} \times \nabla e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = \frac{1}{j\omega\mu} \vec{E} \times \left[-j \left(\vec{k} = \frac{\omega}{c} \cdot \hat{k} \right) \right] e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{E} \times \hat{k} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Les champs de l'onde plane sont donc reliés de la façon suivante :

$$\vec{E} = \eta \vec{H} \wedge \hat{k} \quad (\text{Eq. 93})$$

\vec{E} , \vec{H} et \hat{k} forment un trièdre direct : les champs électrique et magnétique sont orthogonaux entre eux et au vecteur d'onde, ce dernier étant orienté dans la direction de propagation. Ainsi l'onde plane présente une configuration d'**onde transverse électromagnétique (TEM)**.

Par ailleurs les amplitudes des champs électriques et magnétiques sont reliées par un terme homogène à une impédance. C'est l'**impédance d'onde**.

Pour une onde électromagnétique quelconque, l'impédance d'onde est très généralement définie comme le rapport entre ses composantes transverses.

On a donc ici :

$$Z = \frac{\|\vec{E}_T\|}{\|\vec{H}_T\|} \quad (\text{Eq. 94})$$

Les ondes TEM ont une impédance d'onde identique à l'**impédance intrinsèque du milieu** η :

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (\text{Eq. 95})$$

L'impédance Z d'une onde TEM dans un milieu LHI est donc aussi l'impédance intrinsèque de ce milieu. Dans le cas du vide $Z_0 = \eta_0$:

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi \approx 377 \Omega \quad (\text{Eq. 96})$$

En l'absence de pertes dans le milieu, ϵ et μ sont purement réels et l'impédance intrinsèque aussi. L'idée peut paraître surprenante qu'une impédance soit associée à un milieu de propagation, le vide par exemple : il n'y a aucune dissipation de puissance de l'onde électromagnétique dans un milieu sans pertes ! En fait l'onde plane traverse des surfaces orthogonales à la direction de propagation de proche en proche, continûment. Suivant le théorème de Poynting (cf. p41), l'impédance d'onde est donc à interpréter comme la figuration de la puissance échangée entre ces surfaces.

On remarque également que les champs électriques et magnétiques de l'onde plane sont en phase.

L'onde électromagnétique à symétrie sphérique dans ce milieu a une expression très proche de celle de l'onde plane. La différence provient de sa décroissance d'amplitude par divergence, en $\frac{1}{r}$ (cf. 1.2). C'est l'**onde localement plane sphérique** qui a une grande importance dans l'étude du rayonnement des antennes. D'autres lois de divergence existent également (onde cylindrique, etc...).

3.6 (Optionnel) Atténuation de l'onde plane

On considère ici le cas habituel d'un milieu qui présente des pertes par conduction ($\sigma \neq 0$) et diélectriques ($\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$). Partant de (Eq. 63), on calcule :

$$\begin{cases} \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}) & (a) \\ \nabla \wedge \vec{H} = j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'')\vec{E} + \sigma\vec{E} = j\omega\varepsilon'\vec{E} + \vec{J}_D + \vec{J}_C & (b) \end{cases} \quad (Eq. 97)$$

\vec{J}_C est la densité de courant de conduction (liée aux charges). \vec{J}_D est appelée densité de courant de déplacement. Elle est associée aux pertes diélectriques. En combinant (a) et (b) :

$$\Delta\vec{E} + \omega^2\mu\varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\vec{E} = \vec{0} \quad (Eq. 98)$$

Il s'agit d'une forme particulière de l'équation d'Helmholtz (Eq. 82) si on pose :

$$-\gamma^2 = \omega^2\mu\varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) \quad (Eq. 99)$$

La solution est similaire à celle de l'onde plane (Eq. 92), mais avec une **constante de propagation** γ qui n'est pas purement imaginaire. En supposant une direction z pour l'onde :

$$\vec{E} = \vec{E}(0)e^{-\gamma z} \quad (Eq. 100)$$

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (Eq. 101)$$

α (Np/m) est la **constante d'atténuation** et $e^{-\alpha z}$ le **facteur d'atténuation** qui traduit l'amortissement de l'onde avec la distance z parcourue. β (rd/m) est la **constante de phase** identique au nombre d'onde dans ce contexte de milieu LHI infini.

Milieu bon conducteur

C'est un milieu où les pertes par conduction dominent largement les pertes diélectriques⁴⁰, soit $\sigma \gg \omega\varepsilon$. Il résulte l'expression simplifiée de la constante de propagation γ :

$$\gamma \approx (1 + j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} \quad (Eq. 102)$$

La célérité $c = \frac{\omega}{\Im(\gamma)} = \frac{\omega}{\beta}$ de cette onde est donc :

$$c = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad (Eq. 103)$$

Cette expression évolue proportionnellement à \sqrt{f} . Un milieu bon conducteur est donc fortement dispersif.

⁴⁰ $-\gamma^2 = \omega^2\mu\varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) = \omega^2\mu\varepsilon\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\left(\frac{\omega\varepsilon}{\sigma} - j\right) \approx \omega\mu\sigma(-j)$

Plus la conductivité est élevée, plus l'affaiblissement de l'onde est important. Une conductivité théorique infinie correspond à l'absence totale de propagation dans le milieu. L'**épaisseur de peau** δ exprime la distance caractéristique de pénétration de l'onde dans un bon conducteur. Elle est établie lors d'une division de l'amplitude de l'onde par e , soit :

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (\text{Eq. 104})$$

L'épaisseur de peau diminue très rapidement et dans les mêmes proportions avec la fréquence et la conductivité. Le tableau ci-dessous montre que la pénétration des ondes est réduite à quelques microns dans les métaux standards à 1 GHz.

Tableau 3 Epaisseur de peau et célérité électromagnétique dans des métaux à 1 GHz

Matériau	$\sigma (S/m) @ 20^\circ\text{C}$	$\delta (\mu\text{m}) @ 1 \text{ GHz}$	$\frac{c}{c_0} \times 10^6 @ 1 \text{ GHz}$
Etain	$7,000 \cdot 10^6$	6,016	126
Aluminium	$3,816 \cdot 10^7$	2,576	54
Or	$4,098 \cdot 10^7$	2,486	52
Cuivre	$5,813 \cdot 10^7$	2,088	44
Argent	$6,173 \cdot 10^7$	2,026	42

Dans ces conditions la densité de courant associée est essentiellement localisée en périphérie du conducteur. On traduit cette situation par la **résistance de surface** R_s :

$$R_s = \frac{1}{\sigma\delta} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \quad (\text{Eq. 105})$$

Diélectriques usuels

Ce sont des milieux amagnétiques ($\mu_r = 1$) isolants ($\sigma = 0$) où les pertes restent assez faibles ($\tan\delta \ll 1$). En conséquence $\epsilon'' \ll \epsilon'$. Partant de (Eq. 67) et (Eq. 99), il vient :

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{\epsilon'\mu_0(1 - j\tan\delta)} \approx j\omega\sqrt{\epsilon'\mu_0}\left(1 - \frac{1}{2}j\tan\delta\right) \quad (\text{Eq. 106})$$

Par identification et compte tenu de $k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$:

$$\alpha = \frac{1}{2}k \cdot \tan\delta \quad (\text{Eq. 107})$$

$$\beta = \sqrt{\epsilon'} \cdot k_0 = n \cdot k_0 = k \quad (\text{Eq. 108})$$

$n = \sqrt{\epsilon'_r}$ est l'**indice du milieu**, k_0 le nombre d'onde dans le vide. On exprime la constante d'atténuation en dB/m , soit :

$$\alpha_{\text{dB}/m} = 10\log_{10}\left[\frac{|E(0)e^{-\alpha z}|^2}{|E(0)e^{-\alpha(z+1)}|^2}\right] = 91n \cdot f_{\text{GHz}} \tan\delta \quad (\text{Eq. 109})$$

$\alpha_{\text{dB}/m}$ augmente donc en même proportion avec l'indice, la fréquence et $\tan\delta$. Quelques valeurs particulières sont indiquées ci-dessous :

Tableau 4 Atténuation dans quelques milieux diélectriques

Matériau	f_{GHz}	ϵ_r'	$\tan\delta \cdot 10^3 @ 25^\circ C$	$\alpha_{dB/m}$
Téflon	10	2,04	0,4	0,5
Alumine	10	9,5-10	0,3	0,8
Céramique (A-35)	3	5,60	4,1	2,6
Verre (Pyrex)	3	4,82	5,4	3,2
Nylon (610)	3	2,84	12,0	5,5
Eau douce ($20^\circ C$)	1	76,7	157,0 !!!	≈ 125

On note les pertes considérables qui apparaissent pour l'onde TEM dans l'eau douce dès 1 GHz, mais l'hypothèse $\tan\delta \ll 1$ n'est plus tout à fait respectée dans ce cas limite. L'atténuation augmente encore dans l'eau salée du fait des pertes supplémentaires⁴¹.

Un système Wi-Fi à 2,4 GHz aurait une portée d'environ 10 cm dans l'eau de mer, si son antenne était conçue pour ce milieu. Il ne gagnerait que 1 cm de portée supplémentaire chaque fois que sa puissance d'émission serait multipliée par 10⁴² !

⁴¹ Pertes par conduction, liées aux ions dans ce milieu

⁴² F. Le Pennec & al. "2.4 GHz Radio Transmission Measurements in a Basin filled with Sea Water". OCOSS 2013, Oct 2013, Nice, France. [\(hal-01006047\)](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01006047/)

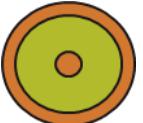
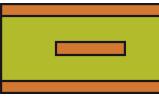
4 Guides d'ondes électromagnétiques

Dans la partie 2, nous avons introduit la théorie des lignes comme une extension de celle des circuits électriques, ceci permettant de tenir compte d'effets qui résultent de la vitesse finie à laquelle une perturbation se propage. Nous savons désormais comment en tirer parti pour adapter un générateur haute fréquence à une charge d'impédance quelconque. Ce n'est là qu'une toute première illustration d'intérêt pratique ! Mais comment en tirer parti pour des ondes « naturelles » décrites à partir de leurs équations physiques ? Avec quels avantages et limitations ? Nous allons ici étudier cette question à partir d'exemples de guides d'ondes électromagnétiques, en constatant que la vitesse de la lumière dans le vide devient alors parfois... une limite basse ! Nous verrons aussi que les « rebonds » diverses d'une onde le long d'un conduit peuvent être résumés dans un modèle unidimensionnel qu'on adaptera aux circuits pour permettre une ingénierie performante. Les notions de modes de propagation qui seront introduites concernent tout autant les ondes acoustiques, que celles qui vont vibrer les cordes ou qui déforment des poutres, et pourquoi pas gravitationnelles ?

4.1 Guides électromagnétiques standards

Un guide est caractérisé par une section droite et des propriétés électriques invariantes dans tout plan orthogonal à l'axe de propagation. On distingue les guides à plusieurs conducteurs disjoints séparés par un diélectrique homogène, le caractère ouvert ou fermé (entouré de métal) et dans ce cas, le caractère homogène ou inhomogène des matériaux présents. Ce tableau illustre quelques réalisations classiques :

Tableau 5 Guides standards - Classification

N°	Section droite (Air - Métal – Diélectrique)	Nom du guide	Type « ligne » ⁴³	Ouvert/Fermé ⁴⁴	Homogène / inhomogène
1		Bifilaire (bifilar line)	Oui	O	H
2		Coaxial (coaxial line)	Oui	F	H
3		A plans parallèles (parallel plate)	Oui	F	H
4		Triplaqué (stripline)	Oui	F	H

⁴³ Guide à mode fondamental TEM ou quasi-TEM, dont le modèle électrique est une ligne de transmission en condition standard d'utilisation. Le terme « ligne de transmission » ou plus simplement « ligne » est aussi communément utilisé par assimilation pour désigner ce type de guide (cf 4.2).

⁴⁴ Les guides ouverts sont le plus souvent inhomogènes, aussi la classification adoptée dans ce tableau pour cette catégorie concerne la partie du guide indépendamment du milieu externe (l'air typiquement)

N°	Section droite (Air - Métal - Diélectrique)	Nom du guide	Type « ligne » ⁴³	Ouvert/Fermé ⁴⁴	Homogène / inhomogène
5		Microruban (microstrip line)	Oui	O	I
6		A fente (slot line)	Oui	O	I
7		Coplanaire (coplanar waveguide)	Oui	O	I
8		Guide rectangulaire (standard, nervuré)	Non	F	H
9		Guide circulaire (elliptique)	Non	F	H
10		Guide rectangulaire chargé	Non	F	I
11		Guide diélectrique non radiatif (NRD)	Non	F	I
12		Guide diélectrique (rectangulaire, circulaire)	Non	O	H
13		Guide image	Non	O	H
14		Fibre optique à saut d'indice	Non	O	I

La fibre optique, le câble coaxial, la ligne microruban sont parmi les plus répandus. Loin d'être exhaustif, ce tableau introduit la grande diversité des guides de propagation électromagnétiques utilisés. Ils sont sélectionnés suivant différents critères d'ingénierie (bande de fréquence, pertes, dispersion, coût, intégration technologique, etc.).

4.2 Guidage par trajet longitudinal

Effet des conducteurs longitudinaux sur la propagation d'une onde plane uniforme

On insère deux plaques métalliques parallèles l'une à l'autre, de façon orthogonale au champ électrique d'une onde plane uniforme :

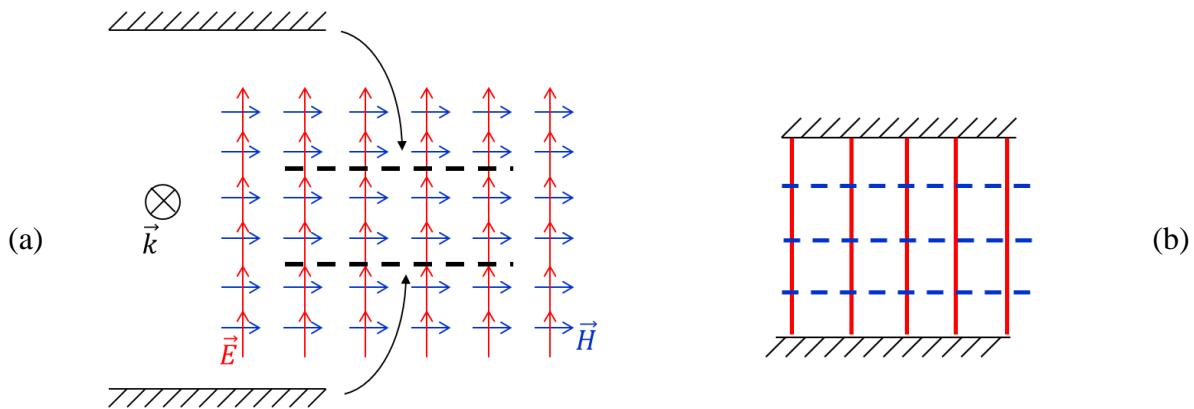


Figure 29 Plaques parallèles métalliques (a) dans un champ d'ondes EM planes uniformes (b) lignes de champs

La portion de champ isolée entre les deux plaques ainsi positionnées reste inchangée, car la condition aux limites imposée par le métal (CCE) est sans effet sur l'onde compte tenu de sa polarisation⁴⁵. Nous voyons donc qu'une telle structure, appelée guide plan parallèle, permet la propagation d'une onde plane uniforme polarisée orthogonalement aux plaques.

Dans la figure suivante, on a réduit la largeur d'une des plaques métalliques (a), les lignes de champs électriques (tangentielles à \vec{E}) vont progressivement s'écartier sur les bords du conducteur supérieur. Par ailleurs les lignes de champs magnétiques (en pointillés) vont se refermer autour de lui. Ce changement de forme aura finalement modifié la distribution des intensités des champs (l'onde n'est plus uniforme), sans affecter le caractère transverse des champs propagés.

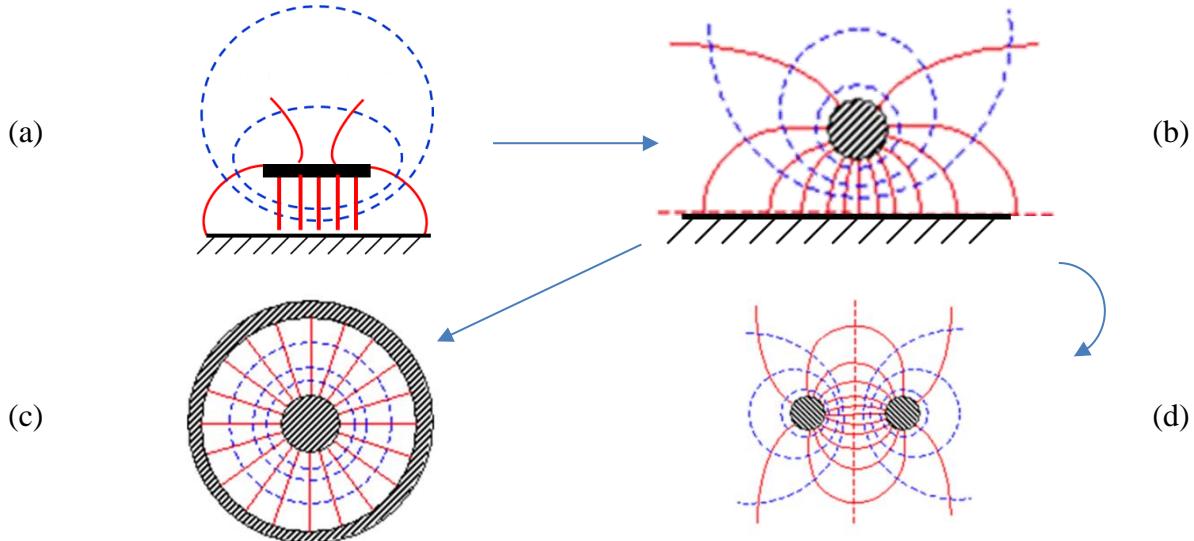


Figure 30 (a) Ligne microruban homogène, (b) modifiée, (c) coaxiale, (d) bifilaire

Dans (b), on modifie la forme du conducteur supérieur de (a), sans grand changement sur les champs EM. On enroule alors le plan métallique inférieur autour du conducteur circulaire dans (c), faisant apparaître le **guide coaxial** bien connu⁴⁶. Partant de (b) on peut également disposer

⁴⁵ C'est-à-dire la direction du champ électrique. Une rotation à 90° des champs changerait totalement la situation

⁴⁶ On note au passage la symétrie cylindrique des lignes de champ EM

un conducteur supplémentaire symétriquement sur le plan parfaitement métallique inférieur (d'épaisseur infinitésimale), puis supprimer ce dernier pour faire apparaître la [ligne bifilaire](#).

On voit donc qu'une onde EM plane se propageant le long de deux conducteurs quelconques parallèles peut toujours exister. La forme des conducteurs et leur distance de séparation imposent une concentration spatiale généralement non uniforme des champs. Une telle onde plane guidée entre deux conducteurs parallèles est appelée mode transverse électromagnétique (TEM).

Nous allons voir ci-dessous que les guides qui propagent ces ondes TEM peuvent être modélisés simplement par des lignes de transmission (cf. 2.3) dans les conditions habituelles d'utilisation⁴⁷. Aussi et par assimilation, de tels guides sont souvent désignés par le terme **lignes de transmission**.

Plus généralement $n+1$ conducteurs parallèles dans un milieu homogène⁴⁸ permettent la propagation de n modes TEM ayant des cartes de champs différentes.

Paramètres linéaires des guides à onde TEM

Les paramètres linéaires des lignes de transmission « réelles » sont obtenus à partir d'une mise en correspondance des grandeurs énergétiques électromagnétiques et circuit, reliant ainsi les champs électriques et magnétiques aux courants et tensions [4]–[9].

Tableau 6 Relations champs EM / tensions- courants

Par unité de longueur	EM	Circuit
Energie magnétique stockée moyenne W_m	$\frac{\mu'}{4} \iint_S \vec{H} \cdot \vec{H}^* dS$	$\frac{1}{4} L I ^2$
Energie électrique stockée moyenne W_e	$\frac{\epsilon'}{4} \iint_S \vec{E} \cdot \vec{E}^* dS$	$\frac{1}{4} C V ^2$
Puissance P_σ dissipée au niveau des conducteurs	$\frac{R_s}{2} \int_{c_1+c_2} \vec{H} \cdot \vec{H}^* dl$	$\frac{1}{2} R I ^2$
Puissance P_ε dissipée dans le diélectrique	$\frac{\omega \varepsilon''}{2} \iint_S \vec{E} \cdot \vec{E}^* dS$	$\frac{1}{2} G' V ^2$

Le courant étant lié à une circulation du champ magnétique et la tension à une intégrale du champ électrique, les relations montrent des correspondances qui dépendent des distributions spatiales des champs EM. Puisque les paramètres linéaires circuits ne dépendent pas de la fréquence, il est souvent plus simple de les déterminer en régime statique (à fréquence nulle).

⁴⁷ en situation de fonctionnement mono mode du guide, cf 4.3

⁴⁸ ou pouvant être considéré comme homogène, c'est-à-dire quasi-homogène

L'application de ces relations aux lignes usuelles donne des résultats remarquables. En effet, les paramètres linéaires s'expriment simplement à partir des propriétés électriques et de facteurs de forme⁴⁹ F et F_σ ⁵⁰. On a les expressions générales suivantes :

$$\underline{L}(H/m) = \mu F \quad (\text{Eq. 110})$$

$$\underline{C}(F/m) = \epsilon' / F \quad (\text{Eq. 111})$$

$$\underline{G}'(S/m) = \omega \epsilon'' / F \quad (\text{Eq. 112})$$

$$\underline{R}(\Omega/m) = F_\sigma R_s \quad (\text{Eq. 113})$$

R_s étant l'impédance de surface déjà définie page 46 dans (Eq. 105).

On remarque notamment les correspondances $\underline{L} \leftrightarrow \mu$ et $\underline{C} \leftrightarrow \epsilon'$.

Quelques expressions des facteurs de forme sont indiquées ci-dessous pour des lignes classiques.

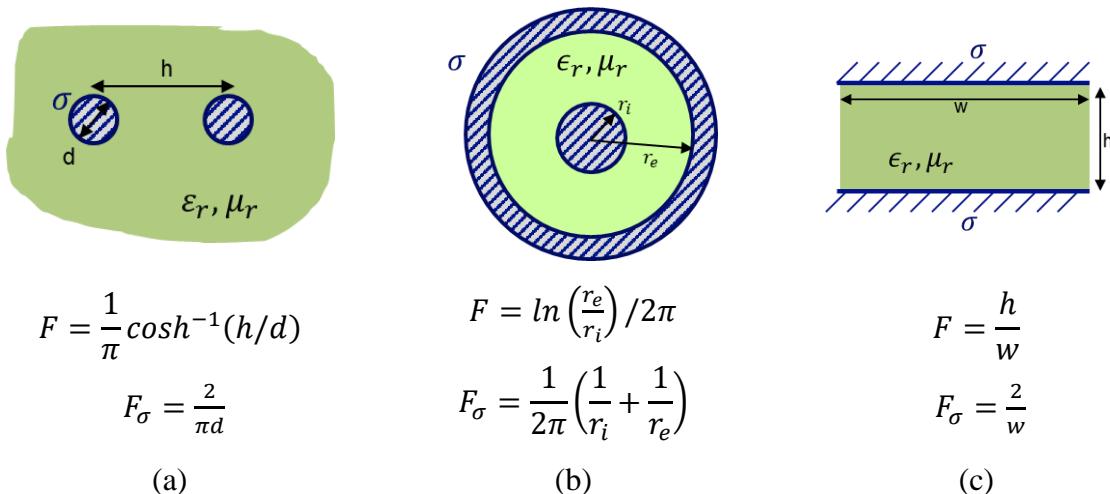


Figure 31 Facteurs de forme pour a) la ligne bifilaire, b) la ligne coaxiale, c) le guide à plans parallèles

L'augmentation de F (et de F_σ) avec la distance de séparation entre les conducteurs entraîne celle de \underline{L} , ainsi que la réduction de \underline{C} et de \underline{G}' . L'augmentation des contours des conducteurs réduit F_σ et par suite \underline{R} .

Modèle du guide sans pertes à onde TEM

L'absence de pertes diélectriques se traduit par $\epsilon'' = 0$, soit $\underline{G}' = 0$ selon (Eq. 112). De même l'absence de pertes métalliques correspond à $\sigma \rightarrow \infty$, soit $R_s = 0$ suivant (Eq. 105), puis $\underline{R} = 0$ selon (Eq. 113). Dans ces conditions, l'expression de l'impédance caractéristique est établie à l'aide de (Eq. 43) et des formules précédentes pour les paramètres linéaires :

$$Z_c = \sqrt{\frac{\underline{L}}{\underline{C}}} = F \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} = F \eta \quad (\text{Eq. 114})$$

On retrouve ici l'impédance intrinsèque du milieu η qui avait été définie dans (Eq. 95). L'impédance caractéristique du guide à mode TEM est donc le produit 1) du facteur de forme

⁴⁹ c'est-à-dire qui ne dépendent que de la géométrie et des dimensions de la ligne concernée

⁵⁰ On voit que la connaissance de F_σ est inutile dans le cas où les pertes sont négligées

qui est lié uniquement à la géométrie et aux dimensions du guide, 2) de l'impédance du milieu de propagation, liée uniquement aux propriétés électriques du milieu homogène dans le guide.

L'impédance caractéristique d'un guide EM à mode TEM est donc égale à l'impédance du milieu dans le guide, pondérée par son facteur de forme F.

Le déphasage d'un tel guide de longueur l est $\Phi = \beta l$, β étant déduit de l'expression de la constante de phase en fonction des paramètres linéaires (Eq. 44), soit :

$$\beta = \omega \sqrt{LC} = \omega \sqrt{\mu \epsilon'} \quad (\text{Eq. 115})$$

Le guide d'ondes sans pertes à mode TEM est donc non dispersif⁵¹, la célérité c de l'onde dans ce guide est identique à celle de l'onde plane dans un milieu homogène infini sans conducteurs, de caractéristiques usuelles $\mu = \mu_0$ et $\epsilon' = \epsilon_0 \epsilon_r$.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon'}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c_0}{n} \quad (\text{Eq. 116})$$

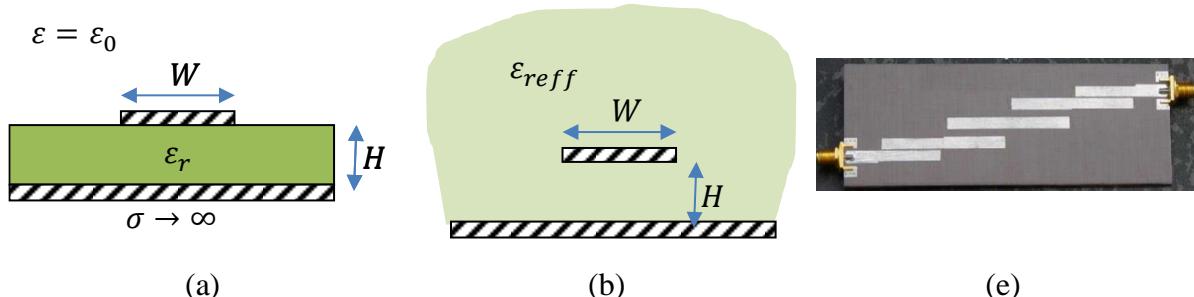
Le modèle circuit complet associé à un guide propageant une onde TEM est celui d'une ligne de transmission. Dans les cas usuels, il est entièrement établi à partir des relations (Eq. 114) et (Eq. 115), sur la base de sa permittivité diélectrique relative ϵ_r , et du facteur de forme F .

Guides à ondes quasi-TEM

L'absence de dispersion donne beaucoup d'intérêt aux guides à ondes TEM, mais les technologies de ces guides présentent des inconvénients selon le contexte.

Par exemple les câbles coaxiaux bon marché subissent de fortes pertes lorsque les fréquences dépassent quelques GHz. Les lignes bifilaires perdent toute leur énergie par rayonnement à la moindre courbure en hautes fréquences également. Les guides plans parallèles présentent divers problèmes d'intégration...

L'utilisation de lignes microrubans (cf. figure 30-a) intervient couramment dans les circuits en technologie planaire mono ou multicouches. Cependant les substrats⁵² créent des milieux de propagation inhomogènes (air environnant + les couches de propriétés diélectriques possiblement différentes).



⁵¹ Tant que les propriétés électriques intrinsèques des matériaux peuvent être considérées comme constantes sur la bande de fréquence, ce qui est très généralement le cas des guides d'ondes radiofréquence

⁵² Plaques diélectriques utilisées pour supporter les pistes métalliques

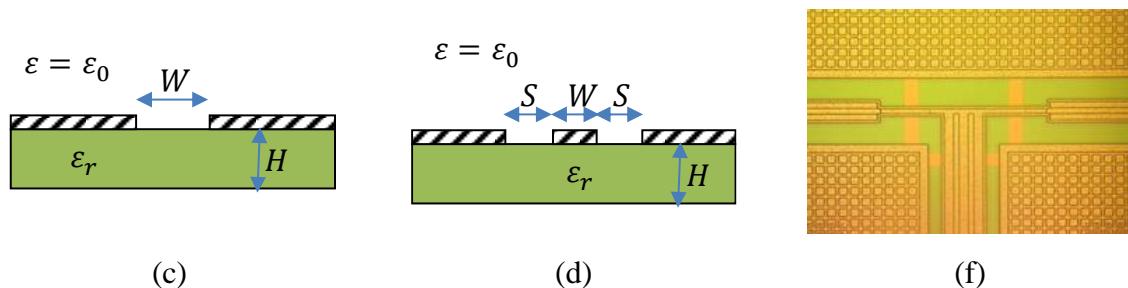


Figure 32 Circuits planaires (a) microruban, (b) microruban modèle quasi-statique, (c) fente, (d) coplanaire, (e) Filtre microruban radiofréquence, (f) transition coplanaire microélectronique 60 GHz

A condition que la fréquence ne soit « pas trop grande » (hypothèse quasi-statique), le milieu inhomogène des circuits planaires peut être remplacé par un milieu homogène équivalent, appelé **milieu effectif**. L'onde propagée n'est plus parfaitement plane, elle est **quasi-TEM**.

Par exemple la propagation sur une longueur l est identique dans la ligne microruban illustrée dans la figure 30 (a) et celle figure 30 (b), sous réserve que ε_{ref} soit correctement relié à ε_r , W et H .

Le modèle d'Hammerstad ci-dessous est simple et classique pour déterminer entièrement les paramètres de ces lignes microrubans, à condition de respecter les limites d'utilisation⁽⁵³⁾ :

$$\varepsilon_{ref} \approx \frac{1+\varepsilon_r}{2} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_r - 1}{\sqrt{1 + 10 \frac{H}{W}}} \quad (\text{Eq. 117})$$

$$Z_c \approx \begin{cases} \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_{ref}}} \ln \left(\frac{8H}{W} + \frac{W}{4H} \right) & \frac{W}{H} \leq 1 \\ \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_{ref}} \left[\frac{W}{H} + 1.393 + 0.667 \ln \left(\frac{W}{H} + 1.444 \right) \right]} & \frac{W}{H} \geq 1 \end{cases} \quad (\text{Eq. 118})$$

Avec $W = 1\text{mm}$, $H = 635\text{ }\mu\text{m}$, $\varepsilon_r = 2.1$ (matériau téflon), (Eq. 117) donne $\varepsilon_{ref} = 1.737$, (Eq. 118) (b) conduit à $Z_c = 77\Omega$. D'autres modèles existent⁽⁵⁴⁾, quasi-statiques ou prenant en compte la variabilité fréquentielle de ε_{ref} et de Z_c (modèles dispersifs⁽⁵⁵⁾).

Lignes de transmission multiphysiques

Différents domaines de la physique des ondes font apparaître des équations identiques à celles des lignes de transmission. De telles analogies sont recherchées car elles permettent de bénéficier des nombreux apports de la théorie des lignes, facilitant la modélisation et les études (analyse, dimensionnement).

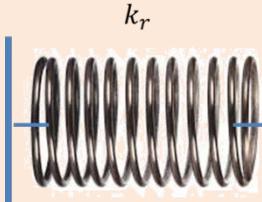
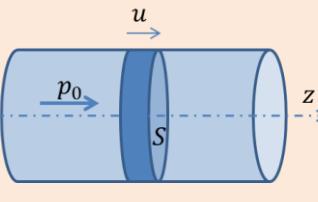
A titre d'illustration, le tableau ci-dessous indique les correspondances dans le cas du déplacement d'une masse liée à un ressort et dans celui de la propagation d'une onde acoustique dans un fluide compressible.

⁵³ E. O. Hammerstad, « Equations for Microstrip Circuit Design », in 1975 5th European Microwave Conference, 1975, p. 268-272.

⁵⁴ Certains sont accessibles à partir d'internet <https://www.eeweb.com/tools/microstrip-impedance>

⁵⁵ M. Kirschning et R. H. Jansen, « Accurate model for effective dielectric constant of microstrip with validity up to millimetre-wave frequencies », Electron. Lett., vol. 18, no 6, p. 272, 1982.

Tableau 7 Equivalences lignes multiphysiques

Configuration	Masse / ressort	Onde acoustique dans un tube de fluide compressible
Illustration		
Paramètres	Masse m Raideur k_r	Masse volumique de gaz ρ_g Coefficient de compression linéaire χ
Equivalent tension	Force mécanique f	Pression p_0
Equivalent courant	Déplacement de masse $\partial_t u$	Déplacement du gaz $\partial_t u$
Inductance linéique L	m	ρ_g
Capacité linéique C	$\frac{1}{k_r}$	$\frac{1}{\chi}$

4.3 Guidage par trajets obliques

Reconsidérons le guide plan parallèle déjà présenté dans la Figure 29, où les champs sont invariants dans tout plan orthogonal aux plaques métalliques. L'onde à l'intérieur du guide ne dépend donc que des deux dimensions x et z , le plan correspondant est présenté ci-dessous :

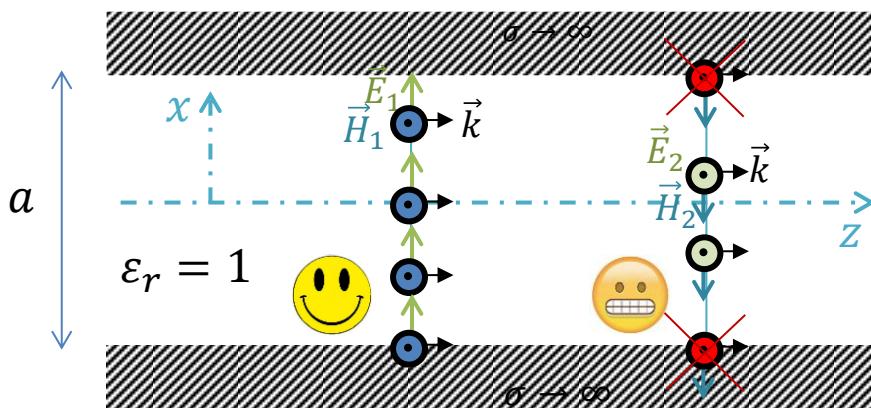


Figure 33 Onde plane suivant deux polarisations dans un plan de coupe longitudinal du guide à plans parallèles

Au centre l'onde plane uniforme polarisée verticalement (champ E_1 selon x) respecte parfaitement les conditions aux limites sur le métal : la composante tangentielle du champ électrique est nulle sur un conducteur parfait. Ce n'est pas le cas de l'onde à droite compte tenu de sa polarisation (champ E_2 orienté orthogonalement au plan du schéma). Celle-ci ne

peut donc pas se propager dans un tel guide. Considérons maintenant deux trajets obliques symétriques ayant cette même polarisation selon y :

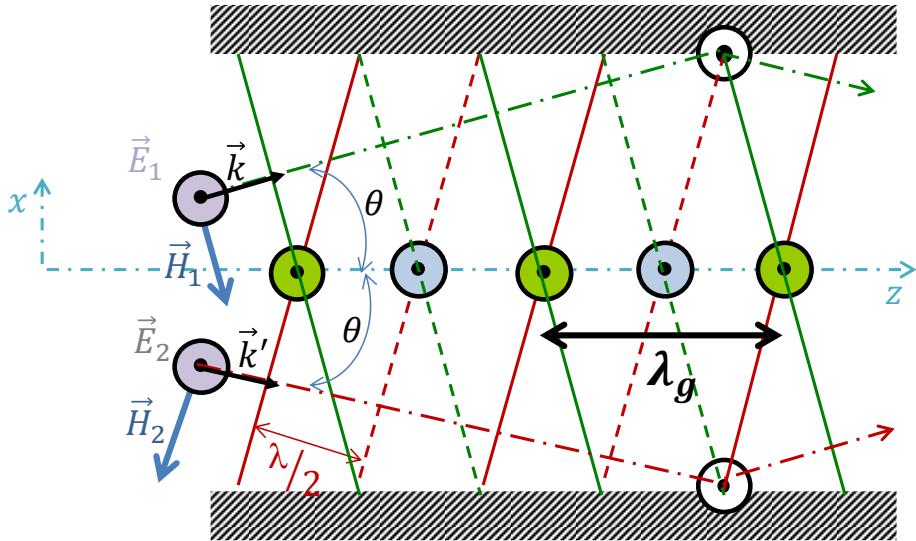


Figure 34 Ondes complémentaires dans un plan de coupe du guide à plans parallèles

La longueur d'onde choisie entraîne la superposition des fronts d'onde positifs et négatifs juste sur les bords du guide, pouvant permettre l'annulation du champ électrique total et par suite, le respect des conditions aux limites. En considérant $E_1(0) = E_2(0) = E_0$ ⁵⁶, le champ total⁵⁷ E_T en $\vec{r} = (x, z)$ est :

$$E_T(\vec{r}) = E_1(\vec{r}) + E_2(\vec{r}) = E_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} + E_0 e^{-j\vec{k}' \cdot \vec{r}} \quad (\text{Eq. 119})$$

Avec $\vec{k} = k(\sin(\theta), \cos(\theta))$ et $\vec{k}' = k(-\sin(\theta), \cos(\theta))$:

$$E_T(\vec{r}) = E_0 \left[e^{-j\frac{\omega}{c}(x \sin \theta + z \cos \theta)} + e^{-j\frac{\omega}{c}(-x \sin \theta + z \cos \theta)} \right] \quad (\text{Eq. 120})$$

$$E_T(\vec{r}) = 2E_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega}{c} \sin \theta \cdot x\right) e^{-j\frac{\omega}{c} \cos \theta \cdot z} \quad (\text{Eq. 121})$$

On reconnaît la forme d'une onde unidimensionnelle progressive et directe $E(0)e^{-j\beta z}$, d'amplitude $E(0) = 2E_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega}{c} \sin \theta \cdot x\right)$ et de constante de phase $\beta = \frac{\omega}{c} \cos \theta$.

Les conditions aux limites sur le métal imposent $E_T(\vec{r})|_{x=\pm\frac{a}{2}} = 0$, faisant apparaître une infinité d'angles θ_m :

$$\cos\left(\frac{\omega}{c} \sin \theta_m \cdot \frac{a}{2}\right) = 0 = \cos\left[(2m+1)\frac{\pi}{2}\right] \quad (\text{Eq. 122})$$

$$\sin \theta_m = (2m+1) \frac{\lambda_0}{2a} \quad (\text{Eq. 123})$$

En injectant cette relation dans (Eq. 121) et en remplaçant le \cos dans l'exponentielle :

$$E_{Tm}(\vec{r}) = 2E_0 \cdot \cos\left[(2m+1)\frac{\pi}{a} \cdot x\right] e^{-j\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left[\frac{(2m+1)\pi}{a}\right]^2} \cdot z} \quad (\text{Eq. 124})$$

⁵⁶ On suppose ici des champs équi-amplitudes et équi-phases à l'origine

⁵⁷ Projection du vecteur \vec{E}_T sur l'axe y car dans la figure la polarisation est invariante suivant y

Alors qu'un trajet rectiligne suivant l'axe du guide est impossible pour cette polarisation parallèle aux plaques métalliques, des trajets complémentaires associés à des angles θ_m bien spécifiques peuvent produire des ondes élémentaires résultantes propagatives selon z. Ce sont les modes de propagation, unidimensionnels et dispersifs (forme $E_m(0)e^{-j\beta_m z}$). Leur longueur d'onde $\lambda_{gm} = \frac{2\pi}{\beta_m}$ est plus grande que celle λ_0 des trajets. Leur amplitude $E_m(0)$ exprime une stationnarité parfaite dans le plan transverse du guide.

Avec les identifications suivantes :

$$E_m(0) = 2E_0 \cdot \cos \left[(2m + 1) \frac{\pi}{a} \cdot x \right] \quad (\text{Eq. 125})$$

$$\beta_m = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left[(2m + 1) \frac{\pi}{a}\right]^2} \quad (\text{Eq. 126})$$

A chaque mode est donc associé un angle θ_m particulier qui varie avec la fréquence selon la relation (Eq. 123). La figure 34 montre que la limite pour θ_m est 90° , ce qui implique :

$$f \geq (2m + 1) \frac{c_0}{2a} \quad (\text{Eq. 127})$$

L'égalité dans cette relation est obtenue pour des fréquences f_{cm} . Avec la polarisation considérée, il existe donc les fréquences limites f_{cm} en dessous desquelles seuls les modes d'indice $m' < m$ peuvent se propager. Ces fréquences sont les fréquences de coupure des modes. La plus basse des fréquences de coupure de tous les modes possibles est la fréquence de coupure du guide⁵⁸. Le premier mode supérieur satisfaisant l'équation (Eq. 126) a une fréquence de coupure :

$$f_{c0} = \frac{c_0}{2a} \quad (\text{Eq. 128})$$

Où de façon équivalente en considérant la longueur d'onde :

$$\lambda_{c0} = 2a \quad (\text{Eq. 129})$$

Le premier mode à pouvoir se propager dans un guide est appelé mode fondamental. L'intervalle de fréquence compris entre les fréquences de coupure du mode fondamental et du premier mode supérieur est la bande monomode. Cette bande de fréquence est particulièrement intéressante car elle empêche la dispersion inter-modale qui proviendrait des trajectoires de longueurs différentes de modes multiples. Chaque mode subit par ailleurs une dispersion intra-modale liée aux variations de l'angle θ (cf. figure 34) avec la fréquence, sauf le mode TEM (s'il existe) qui suit l'axe longitudinal du guide (trajectoire la plus courte).

Par exemple avec $a = 15 \text{ cm}$, le premier mode supérieur répondant à l'équation (Eq. 126) du guide à plans parallèles pourra apparaître à partir de la fréquence $f_{c0} = 1 \text{ GHz}$. La même équation montre que d'autres modes pourront apparaître à partir de 3 GHz , 5 GHz , etc... Une étude systématique de tous les modes du guide est cependant nécessaire pour montrer que la

⁵⁸ Pour le guide à plans parallèles, elle est nulle du fait que l'onde à polarisation orthogonale aux plaques peut se propager quelle que soit la fréquence

largeur de la bande monomode couvre le continu (0 Hz pour le mode TEM) jusqu'à 1 GHz (apparition du mode supérieur TE_1 , mais aussi TM_1 ⁵⁹).

Un mode excité dans un guide en dessous de sa fréquence de coupure est atténué très rapidement. En effet sa constante de phase devient purement imaginaire $\beta = j\alpha$. Considérant α purement réel et positif, le facteur de propagation est $e^{-\alpha z}$. Le mode est alors qualifié d'**évanescents**.

Les modes supérieurs, propagatifs et évanescents, sont excités typiquement au niveau des sources et des zones de discontinuité⁶⁰. L'atténuation des modes évanescents suivant l'axe de propagation existe même en l'absence totale de pertes dans le guide. Leur décroissance exponentielle caractéristique n'est pas le fait d'un transfert d'énergie onde/matériau.

4.4 Nomenclature et caractéristiques des modes

Sur le bord du guide dans la figure 34, les champs des trajets sont toujours en opposition de phase afin d'annuler la composante tangentielle du champ électrique. Dans le même temps cela produit une composante longitudinale pour le champ magnétique \vec{H}_m associé au mode m .

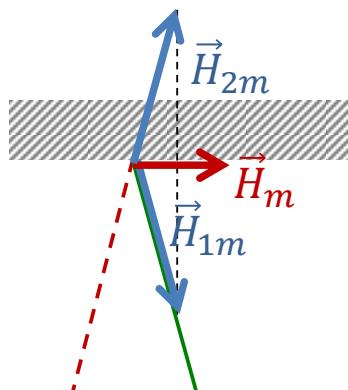


Figure 35 Champ magnétique longitudinal résultant \vec{H}_m dans le guide

Relativement à l'axe du guide, les champs magnétiques de ce mode ne sont plus transverses. Les trajets élémentaires pour lesquels les champs électriques sont polarisés selon y engendrent des modes supérieurs qui sont tous **transverses électriques (TE)**, tandis que le mode fondamental est TEM. Avec une hypothèse de polarisation du champ électrique selon x au lieu de y , on montre que les modes correspondants sont alors **transverses magnétiques (TM)**⁶¹.

L'amplitude du champ électrique dans (Eq. 125) est une forme stationnaire selon x dont l'ordre augmente avec m . On désigne les solutions correspondantes en faisant apparaître cet ordre de stationnarité en indice, comme reporté dans la figure 36. A partir d'hypothèses de champs

⁵⁹ Les modes TM_m n'étant pas mis en évidence ici. Une méthode d'étude systématique des modes appelée « traitement guide d'onde » sera menée en TD.

⁶⁰ Entre deux guides différents, à l'extrémité d'un guide, à l'endroit où se trouve une déformation interne, au niveau de la zone d'excitation...

⁶¹ Dans ce cas c'est le champ électrique qui possède des composantes selon x et z .

électriques des trajets en opposition de phase à l'origine, on montre de même l'existence de modes TE à symétries impaires associés cette fois à des ordres de stationnarité pairs. Une nomenclature similaire est établie pour les modes TM_q .

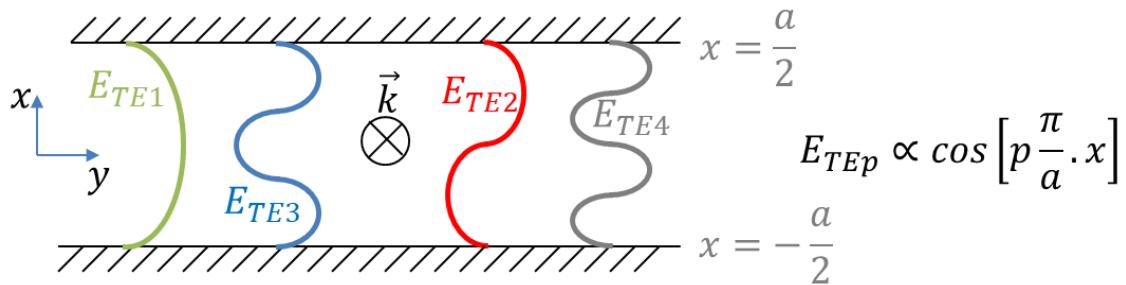


Figure 36 Amplitude stationnaire transverse des champs électriques des modes TE_p

Cas du guide rectangulaire

On désigne habituellement la largeur a et la hauteur b . Les conditions aux limites rendent ici impossibles la propagation d'un mode TEM, tandis que des solutions TE_n (resp. TM_n) orthogonales aux solutions TE_m (resp. TM_m) précédentes deviennent évidemment possibles⁶². De plus des modes TE (resp. TM) issus de trajets obliques à la fois selon x et selon y peuvent aussi exister. Ce sont les modes TE_{mn} (resp. TM_{mn}), qui présentent m « demi-ondulations » (cf. figure 36) parfaitement stationnaires selon a et n selon b ⁶³.

Grâce à la méthode du traitement guide d'ondes, l'étude systématique des modes peut être menée pour les guides canoniques⁶⁴ [10]. L'application de cette méthode au guide rectangulaire permet d'établir sa [relation de dispersion](#), généralisant (Eq. 126) :

$$\beta_{mn} = \sqrt{\left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]} \quad (\text{Eq. 130})$$

Diagramme de dispersion

Tracé à partir de la relation de dispersion, le [diagramme de dispersion](#) relie β_{mn} et la fréquence :

⁶² En remplaçant a par b dans les relations du guide à plans parallèles, si l'axe de vibration est y

⁶³ Les modes d'indices suivants ne peuvent pas exister dans le guide rectangulaire : TE_{00} , TM_{m0} , TM_{0n}

⁶⁴ Comme les guides métalliques creux à plans parallèles, rectangulaire, circulaire, etc...

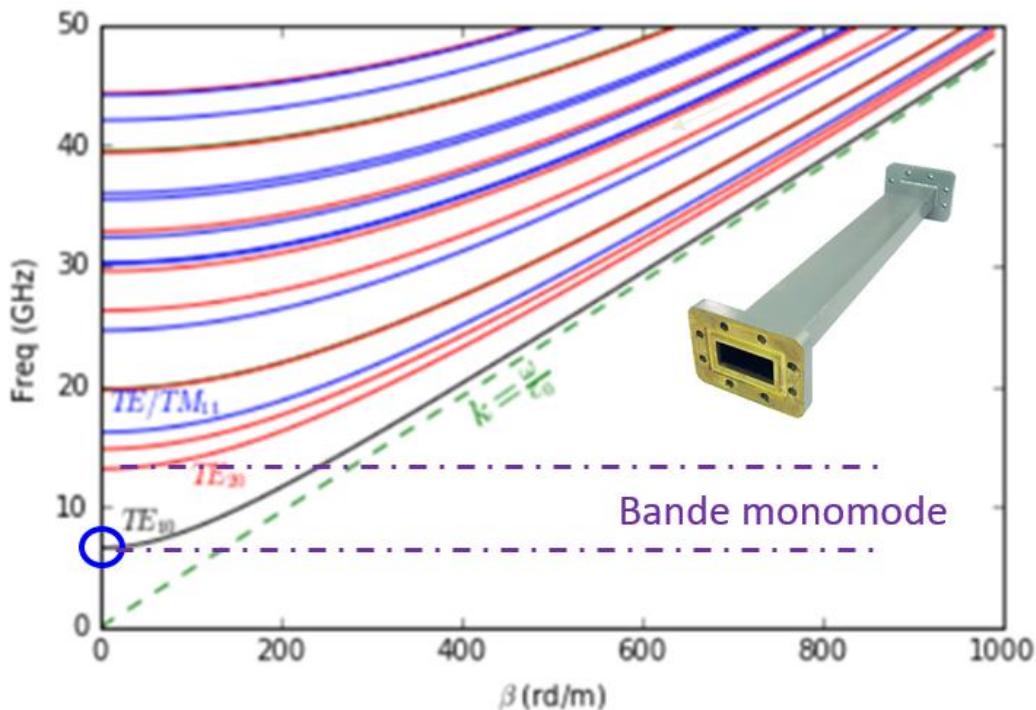


Figure 37 Diagramme de dispersion du guide rectangulaire en bande X (8-12,4 GHz), a=22.86 mm et b=10.16mm

Toutes les courbes du graphique tendent progressivement vers la droite $k = \frac{\omega}{c_0}$ (milieu vide et infini). Ceci correspond à des trajets élémentaires de plus en plus alignés avec l'axe du guide et une réduction associée des dispersions intramodales. Cependant celles-ci sont élevées pour tous les modes juste après les fréquences de coupure. En effet la différence entre la pente de la tangente aux courbes (vitesse de groupe $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta}$) et la pente de la droite passant par l'origine (vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{\beta}$) y est la plus importante. On note également que les vitesses de phase sont toujours supérieures à c_0 , en cohérence avec l'augmentation de la longueur d'onde illustrée figure 34. Il est impossible que ce soit le cas des vitesses de groupe⁶⁵.

Tous les modes TE_{mn} et TM_{mn} de mêmes indices sont confondus dans le diagramme car ils ont la même relation de dispersion. De tels modes sont appelés **modes dégénérés**. On ne peut les distinguer qu'à partir des cartographies différentes de leurs champs électromagnétiques. On a par exemple pour les modes TE_{11} et TM_{11} du guide rectangulaire :

⁶⁵ Ce serait une situation non physique car v_g est la vitesse de déplacement de l'énergie, elle ne peut pas être plus grande que c_0 !

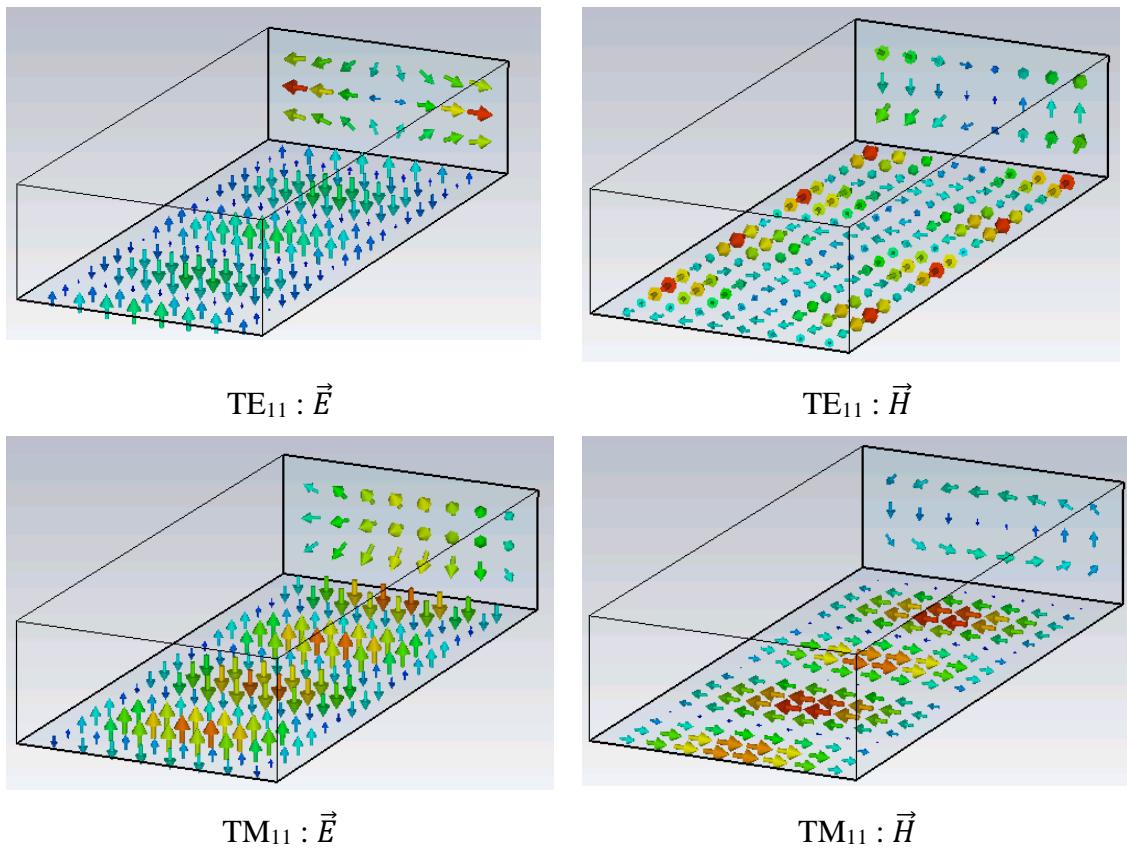


Figure 38 Champs instantanés des modes TE_{11} et TM_{11} dégénérés

Cartes des champs

Les expressions des champs étant établies⁶⁶, il devient possible de représenter les vecteurs des champs électriques et magnétiques associés aux différents modes, selon la fréquence et le guide concerné⁶⁷. Les figures suivantes sont obtenues facilement de nos jours à partir de puissants logiciels de CAO électromagnétiques⁶⁸, mais leur calcul analytique est très accessible dans le cas des guides simples comme le guide rectangulaire.

⁶⁶ à partir du traitement guide d'ondes ou en tirant parti de méthodes numériques adaptées (cf Michel NEY, « Simulation électromagnétique : outils de conception », Tech. Ing. Electron., no 4(E1030), 2006.)

⁶⁷ Les vecteurs évoluent également avec le temps sur une période, du fait du facteur $e^{j\omega t}$

⁶⁸ Tels que ceux utilisés au sein de IMT-Atlantique, comme ici le logiciel commercial Dassault/CST-Microwave studio (<https://www.3ds.com>)

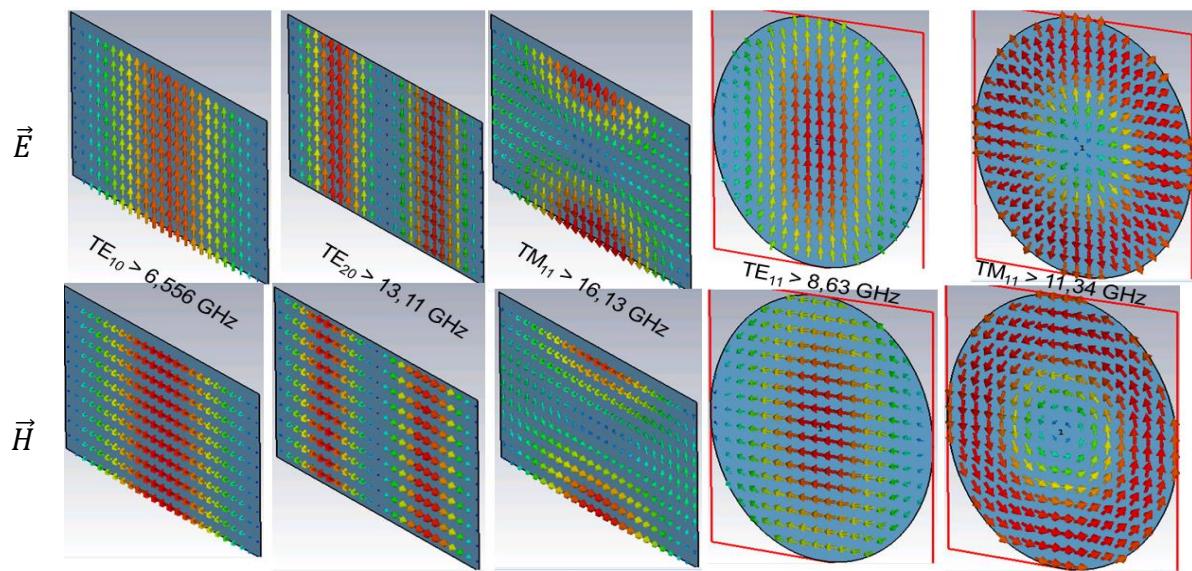


Figure 39 Cartes des champs transverses de quelques premiers modes des guides rectangulaires ($a=22.86$ mm et $b=10.16$ mm, bande X 8-12.4 GHz) et circulaires (bande 10-11 GHz, $r=10.12$ mm)

On observe que les indices 0 correspondent à une invariance des champs selon la hauteur pour le guide rectangulaire. Le tracé de la répartition longitudinale des champs complète de telles cartographies transverses, comme dans la figure 38.

Les modes représentés ont tous des symétries, du fait de la géométrie de leurs guides. Cela se traduit par des champs pairs ou impairs relativement au plan de symétrie, selon les modes et selon leurs composantes.

Les plans de symétries sont des CCM pour les modes à champs électriques pairs et des CCE pour ceux à champ magnétique pairs.

Le mode TM_{11} du guide circulaire présente une symétrie cylindrique. Son champ magnétique étant intense sur les bords du guide, il induit un courant de surface qui pourra engendrer plus de pertes thermiques que le mode TE_{11} de ce même guide. On note par ailleurs que ce mode TE_{11} a une orientation arbitraire. Elle peut être obtenue à partir d'une combinaison linéaire de deux modes TE_{11} orthogonaux quelconques. Un tel mode est appelé « **mode polarisé** ».

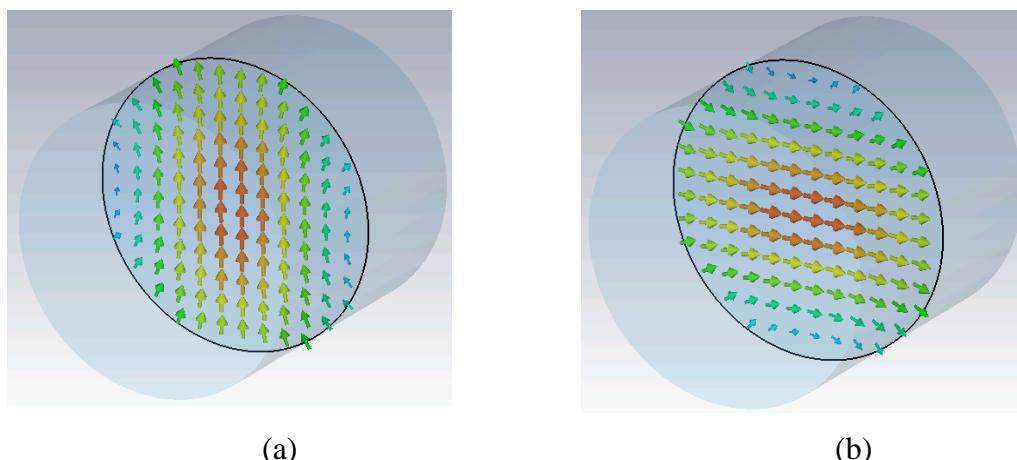


Figure 40 Mode TE_{11} polarisé dans le guide métallique circulaire creux (a) vertical, (b) horizontal

Autres nomenclatures

Certains guides à section droite inhomogène⁶⁹ possèdent des modes dont les composantes H_z et E_z existent simultanément, on les appelle alors **modes hybrides** ou HE_{mn} .

Dans d'autres guides⁷⁰, les nomenclatures LSE (LSM)⁷¹ désignent des modes dont les champs électriques (magnétiques) sont entièrement contenus dans un plan de section droite longitudinale.

Les fibres optiques présentent certains modes qui ont quasiment la même relation de dispersion et qu'il est très difficile d'exciter séparément. Ils se propagent essentiellement ensemble. Ces combinaisons sont appelées improprement « **modes LP** » (Linearly Polarized). Par exemple le « mode » LP_{11} est la superposition des modes TE_{01} et HE_{21}

Aux longueurs d'onde de l'optique, une caméra permet d'observer les taches de lumières caractéristiques des stationnarités transverses, comme dans la figure 41 (b). Par ailleurs la relation de dispersion dans ce contexte (figure 41 (a)) est plutôt exprimée par l'indice effectif n_{eff} en fonction de la fréquence normalisée $v = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$, n_1 et n_2 étant respectivement les indices des matériaux du cœur et de la gaine de la fibre.

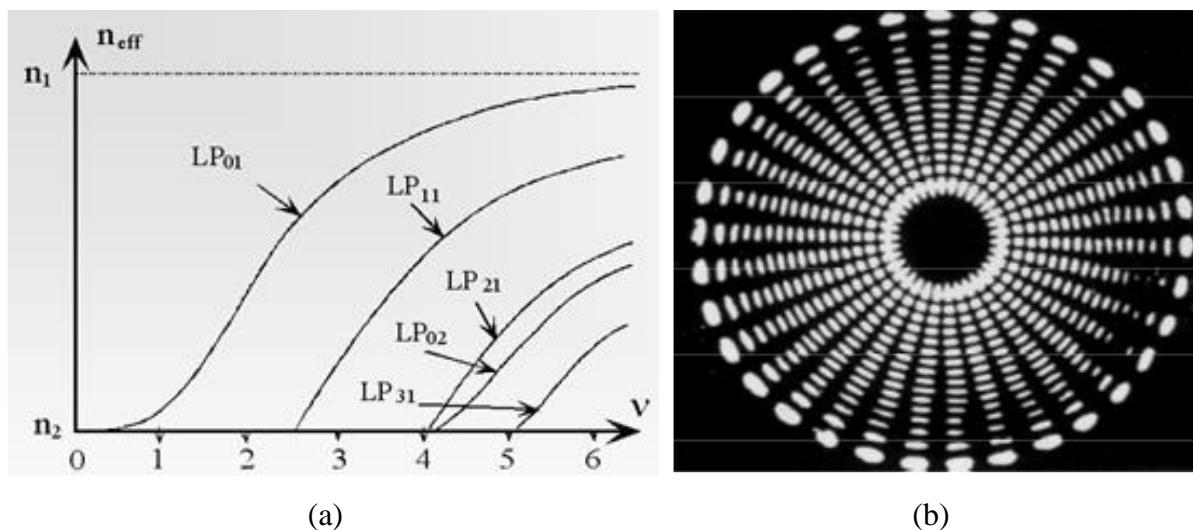


Figure 41 Modes LP dans les fibres optiques (a) diagramme de dispersion, (b) mode $\text{LP}_{17,16}$

On peut noter dans le diagramme de dispersion l'augmentation de l'indice effectif avec v , donc avec la fréquence. Ceci traduit une concentration du champ de plus en plus importante au cœur de cette fibre à saut d'indice, l'indice de cœur n_1 étant supérieur à celui n_2 de la couche périphérique. La concentration du champ dans les couches de plus fort indice avec la fréquence est générale. Cela permet un tracé intuitif approximatif de la relation de dispersion dans un guide contenant plusieurs matériaux diélectriques, en suivant progressivement les asymptotes correspondant à la propagation dans chaque milieu infini considéré isolément.

⁶⁹ Par exemple un barreau diélectrique cylindrique homogène entouré d'air

⁷⁰ Par exemple le guide diélectrique non radiatif (NRD) qui est un guide à plans parallèles avec un tube diélectrique à section droite rectangulaire situé entre les deux plaques métalliques

⁷¹ LS correspond à « Longitudinal section »

Théorème de complétude

De façon générale, les guides possèdent une infinité de modes. Tout champ EM d'un guide peut toujours être décomposé selon une combinaison linéaire des modes de propagation de ce guide.

4.5 Mode fondamental

Appelé aussi **mode dominant**. C'est celui qui a la plus petite fréquence de coupure. Les dispositifs sont souvent dimensionnés pour que ce mode soit le seul à pouvoir se propager, empêchant toute dispersion intermodale. Ses caractéristiques sont donc d'une importance particulière. Pour le guide rectangulaire, celui qui a la plus petite fréquence de coupure est le mode TE_{10} (lorsque $a > b$).

- Fréquence de coupure :

$$f_{c10} = \frac{c}{2a} \quad (Eq. 131)$$

- Longueur d'onde de coupure :

$$\lambda_{c10} = 2a \quad (Eq. 132)$$

- Constante de phase :

$$\beta_{10} = \frac{\pi}{a} \sqrt{\left(\frac{f}{f_{c10}}\right)^2 - 1} \quad (Eq. 133)$$

- Bande de fréquence monomode :

$$\Delta f = \frac{c}{2} \min\left(\frac{1}{a}, \frac{a-b}{ab}\right) \quad (Eq. 134)$$

- Expressions détaillées des composantes des champs en $z = 0$ ⁽⁷²⁾. H_0 est une constante d'intégration et l'origine du repère est choisie au centre du guide :

$$E_x = 0 \quad (Eq. 135)$$

$$E_y = j\omega\mu \frac{a}{\pi} H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \quad (Eq. 136)$$

$$E_z = 0 \quad (Eq. 137)$$

$$H_x = -j\beta_{10} \frac{a}{\pi} H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \quad (Eq. 138)$$

$$H_y = 0 \quad (Eq. 139)$$

$$H_z = H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \quad (Eq. 140)$$

Le mode TE_{10} ne possède donc que 3 composantes de champs non nulles : E_y , H_x et H_z . Elles sont illustrées pour un état de phase donné (les champs évoluant en $e^{j\omega t}$) ci-dessous, projetées sur des plans transverse et longitudinal du guide.

⁷² Pour une position z quelconque il faut multiplier chaque composante par $e^{-j\beta_{10}z}$

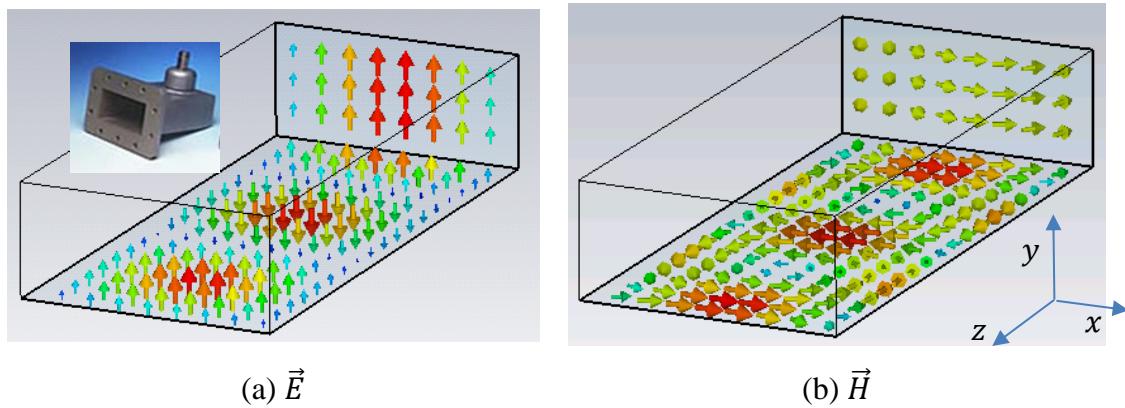


Figure 42 Champs instantanés du mode TE₁₀

Comme l'illustre l'image incrustée en médaillon à gauche, une sonde coaxiale disposée sur la face supérieure au centre du guide permet d'exciter le mode TE_{10} par couplage électrique, sur la position où \vec{E} est à son maximum. De façon générale, la recherche des conditions favorables au couplage entre des structures différentes bénéficie de la connaissance détaillée de la carte des champs des modes utilisés.

4.6 (Optionnel) Pertes de propagation des modes

L'atténuation linéique dans le guide dépend de la répartition des champs EM et des pertes dans les matériaux, par effet joule dans la très grande majorité des cas. Les pertes dans le guide métallique rectangulaire creux ne proviennent que de la conductivité finie σ des parois métalliques. Elles dépendent alors des courants induits par les modes sur ces mêmes parois. Nous avons vu que la carte des champs est différente pour chaque mode, les courants correspondant le sont donc aussi et finalement les pertes de puissance portée par l'onde.

Une expression approchée de l'atténuation pour le mode TE_{10} du guide métallique rectangulaire creux est présentée ci-dessous [3] :

$$\alpha_c(Np/m) = \frac{R_s}{a^3 b \beta_{10} k \eta} (2b\pi^2 + a^3 k^2) \quad (Eq. 141)$$

On note la proportionnalité à R_s , la résistance de surface qui avait été définie en (Eq. 105). La courbe ci-dessous illustre cette relation pour différents guides rectangulaires :

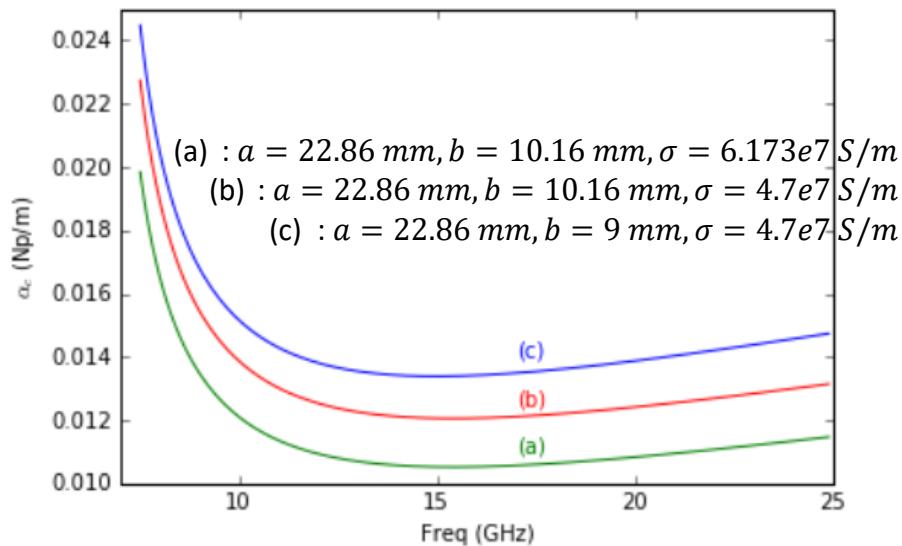


Figure 43 Exemple de pertes conductrices dans le guide rectangulaire (a) alliage d'argent (b et c) alliage de cuivre

Le comportement « classique » illustré par ces courbes est caractérisé par de très fortes pertes pour les fréquences immédiatement supérieures à la coupure. Cela s'explique par des trajets obliques très resserrés, proches de l'orthogonalité par rapport à l'axe de propagation (cf. 4.3). Les réflexions sur les parois sont alors très nombreuses, chacune contribuant à une perte d'énergie. On observe ensuite un minimum, puis une remontée progressive liée à l'augmentation de la résistance de surface du métal avec la fréquence (Eq. 105) . La configuration (a) avec une plus grande conductivité présente moins d'atténuation que (b). Elle est aussi plus favorable que (c) compte tenu d'une hauteur de guide plus importante dans (a). L'augmentation de cette dernière provoque cependant une diminution de la fréquence de coupure du premier mode supérieur, réduisant la bande de fréquence monomode. Le compromis « grande largeur de bande monomode » et « faibles pertes » qui caractérise les guides normalisés est $\frac{b}{a} = 2.25$. On le vérifie pour les guides du commerce, par exemple en bande X (8 et 12.4 GHz) où $a = 22.85 \text{ mm}$ et $b = 10.16 \text{ mm}$. La bande monomode avec ces dimensions étant comprise entre 6.57 et 13.12 GHz, les signaux en bande X bénéficient de pertes et d'une dispersion réduites.

4.7 (Optionnel) Mode de référence

Tous les champs EM des modes sont définis proportionnellement à une constante d'intégration, par exemple H_0 dans (Eq. 135) à (Eq. 140). On peut donc toujours introduire un nombre complexe a_m tel que $\overrightarrow{U_m} = a_m \overrightarrow{u_m}$ ⁷³. $\overrightarrow{u_m}$ est alors un champ de référence et a_m l'onde réduite, suivant l'exemple déjà introduit dans la section « Onde de référence et onde réduite », page 12.

La puissance P_m transportée par le mode est calculée à partir du flux du vecteur de Poynting au travers de la surface de section droite S du guide :

$$P_m = \frac{1}{2} \iint_S \overrightarrow{E_m} \wedge \overrightarrow{H_m}^* \overrightarrow{dS} \quad (\text{Eq. 142})$$

Qui devient donc :

$$P_m = |a_m|^2 \left\{ \frac{1}{2} \iint_S \overrightarrow{e_m} \wedge \overrightarrow{h_m}^* \overrightarrow{dS} \right\} \quad (\text{Eq. 143})$$

On peut toujours appliquer la normalisation suivante :

$$\left| \frac{1}{2} \iint_S \overrightarrow{e_m} \wedge \overrightarrow{h_m}^* \overrightarrow{dS} \right| = 1 \quad (\text{Eq. 144})$$

La puissance active transportée par un mode propagatif ainsi normalisé est $|a_m|^2$.

Pour un mode évanescents, cette puissance devient $\pm j|a_m|^2$. Le caractère imaginaire exprime un stockage d'énergie (dans la zone de décroissance rapide du champ), pas un transport.

4.8 (Optionnel) Matrice S généralisée

Dans le cas plus général, chaque accès $i \in [1..I]$ étant caractérisé par M_i modes entrants et N_i modes sortants, on a :

⁷³ $\overrightarrow{U_m}$ désignant le champ électrique ou magnétique du mode d'ordre m , qu'on peut toujours faire correspondre à deux indices secondaires. Par exemple $\overrightarrow{E_{TE23}}$ dans le guide rectangulaire pour le mode TE d'indices 23.

$$b_{in} = \sum_{j=1..I} \sum_{m=1..M_j} s_{ijmn} a_{jm} \quad (\text{Eq. 145})$$

Cette relation linéaire peut être présentée sous la même forme matricielle $(b) = (S)(a)$ que (Eq. 24). Dans ce contexte (S) est appelée **matrice S (ou de répartition) généralisée**, du fait de la prise en compte des modes multiples à chaque accès. Chaque paramètre s_{ijmn} est le coefficient de couplage spécifique qui relie le mode entrant d'ordre m sur l'accès j au mode sortant d'ordre n sur l'accès i . Le dispositif est entièrement caractérisé lorsque tous ses paramètres complexes s_{ijmn} de la matrice S généralisée sont identifiés.

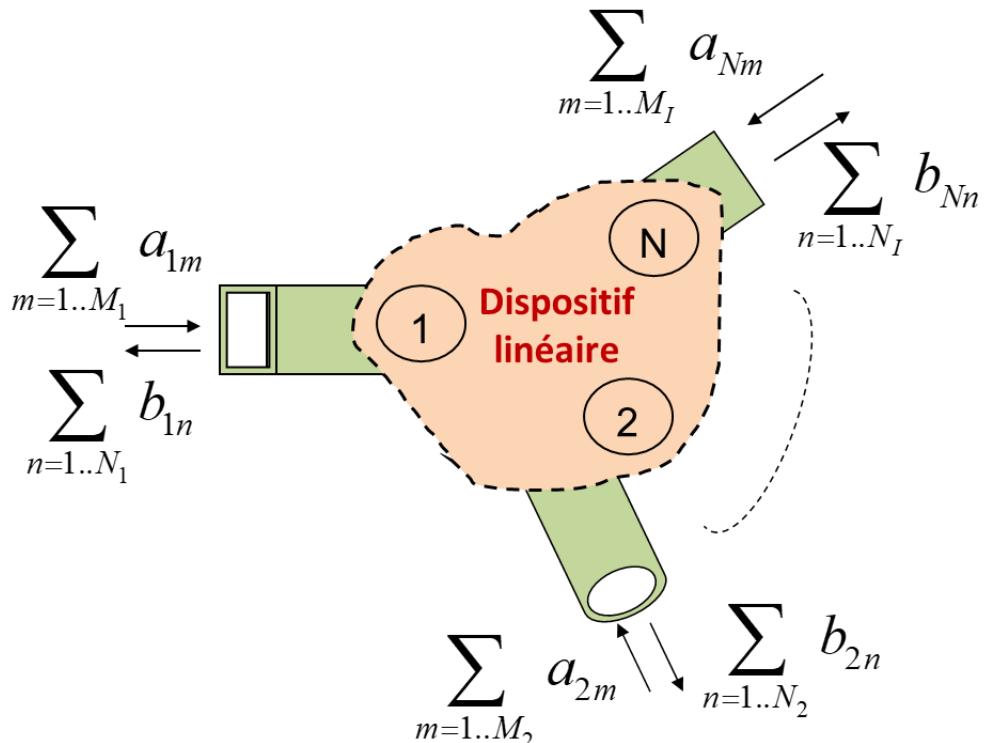


Figure 44 Ondes réduites généralisées

Un exemple de dispositif multimodes est le polariseur en guide illustré figure 45.

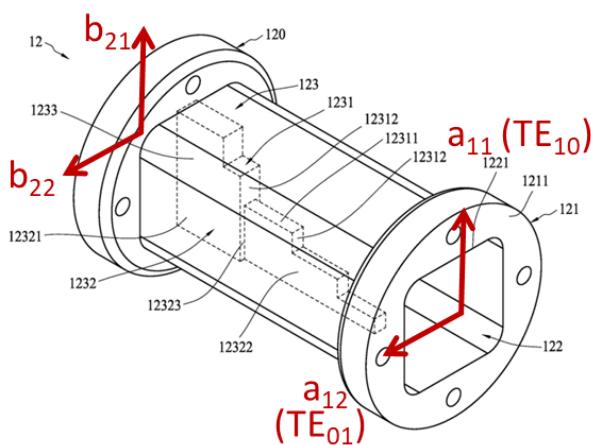


Figure 45 Polariseur en guide

La propagation de deux modes orthogonaux TE_{10} et TE_{01} dans le guide selon des célérités longitudinales différentes, ici grâce aux « marches » au milieu du guide, accroît leur déphasage

relatif avec la longueur parcourue. Les modes pouvant être excités par une sonde coaxiale oblique en entrée, on montre que si leur déphasage relatif est de 90° en sortie de polariseur, le champ électrique résultant tourne sur lui-même en tout point de la section transverse du guide. L'onde résultante peut alors être utilisée pour alimenter une antenne à polarisation circulaire (cf. cours ondes rayonnées).

4.9 (Optionnel) Orthogonalité des modes

La présence de modes multiples est à prendre en compte dans la puissance complexe totale P_t transportée dans un guide, suivant le flux du vecteur de Poynting $P_t = \frac{1}{2} \iint_S \vec{E} \times \vec{H}^* d\vec{S}$ (Eq. 74). En décomposant les champs sur la base des modes du guide :

$$P_t = \frac{1}{2} \iint_S \left(\sum a_m \vec{e}_m \right) \wedge \left(\sum a_n^* \vec{h}_n^* \right) \cdot d\vec{S} \quad (\text{Eq. 146})$$

$$\sum a_m a_n^* \left(\frac{1}{2} \iint_S \vec{e}_m \wedge \vec{h}_n^* \cdot d\vec{S} \right) \quad (\text{Eq. 147})$$

De façon générale pour les guides fermés sans pertes, on vérifie la propriété d'**orthogonalité des modes** :

$$\vec{e}_m \wedge \vec{h}_n^* = \vec{0} \text{ quand } m \neq n \quad (\text{Eq. 148})$$

Cette relation montre que la puissance active totale dans le guide est répartie sur la totalité des modes propagatifs et uniquement sur ceux-ci :

$$Re(P_t) = \sum_{\text{modes propagatifs}} |a_m|^2 \quad (\text{Eq. 149})$$

Les propriétés particulières qui en découlent concernant les paramètres S ne sont pas développées dans ce document, mais elles sont très utiles dans le dimensionnement des dispositifs. On pourra les trouver dans [3] ou dans [10] par exemple.

4.10 Modélisation circuit de guides interconnectés

La transition entre deux guides est généralement à l'origine d'une déformation des champs autour de la discontinuité. Les conditions aux limites imposent l'égalité des composantes tangentielles des champs totaux juste à l'interface (cf. annexe 4.3).

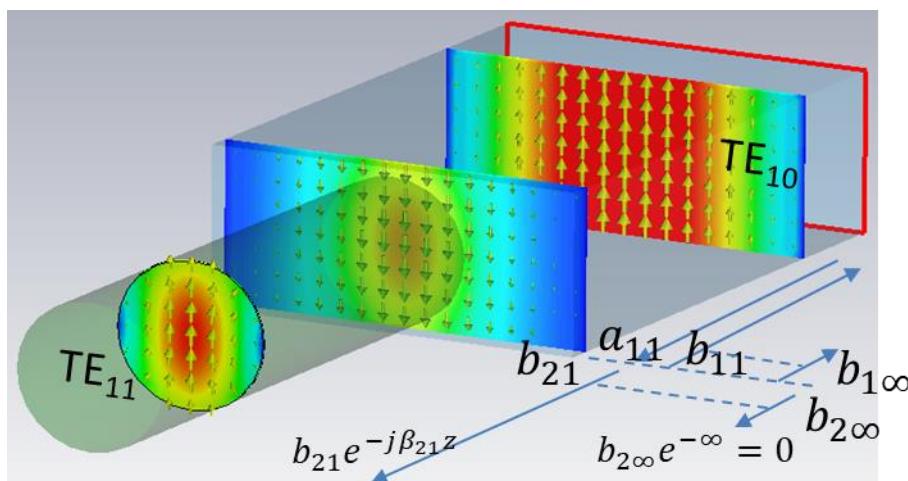


Figure 46 Discontinuité brutale entre un guide rectangulaire et un guide circulaire

A la jonction des guides, on observe une figure de champ « intermédiaire » relativement aux modes dominants, TE_{10} pour le guide rectangulaire et TE_{11} pour le guide circulaire. Une infinité

de modes évanescents sont produits par cette discontinuité de chaque côté⁷⁴. Au-delà de la distance nécessaire à l'atténuation des modes supérieurs⁷⁵, tout se passe comme si un changement brutal d'amplitude et de phase avait eu lieu entre le mode incident a_{11} et les modes propagatifs générés (b_{11} réfléchi et b_{21} transmis).

Pourvu que les distances l_1 et l_2 des guides soient suffisantes pour avoir affaiblis les modes évanescents, il est donc possible de modéliser cet ensemble par des lignes de transmission⁷⁶ reliées par un quadripôle exprimant les changements brusques sur la transition. Ce quadripôle peut être caractérisé par des paramètres S , ou par un circuit équivalent qui présenterait ces paramètres.

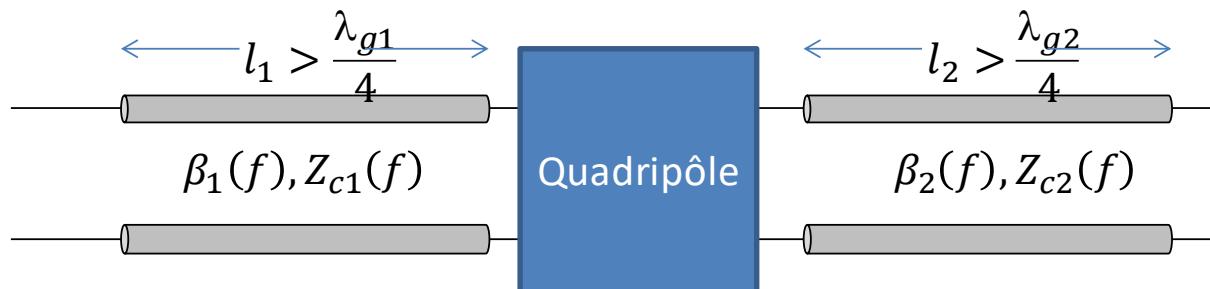


Figure 47 Modèle circuit associé à la jonction de deux guides monomodes

Le même raisonnement s'applique à des obstacles dans un guide. Les modèles ci-dessous illustrent quelques configurations classiques de la littérature scientifique pour le guide rectangulaire.

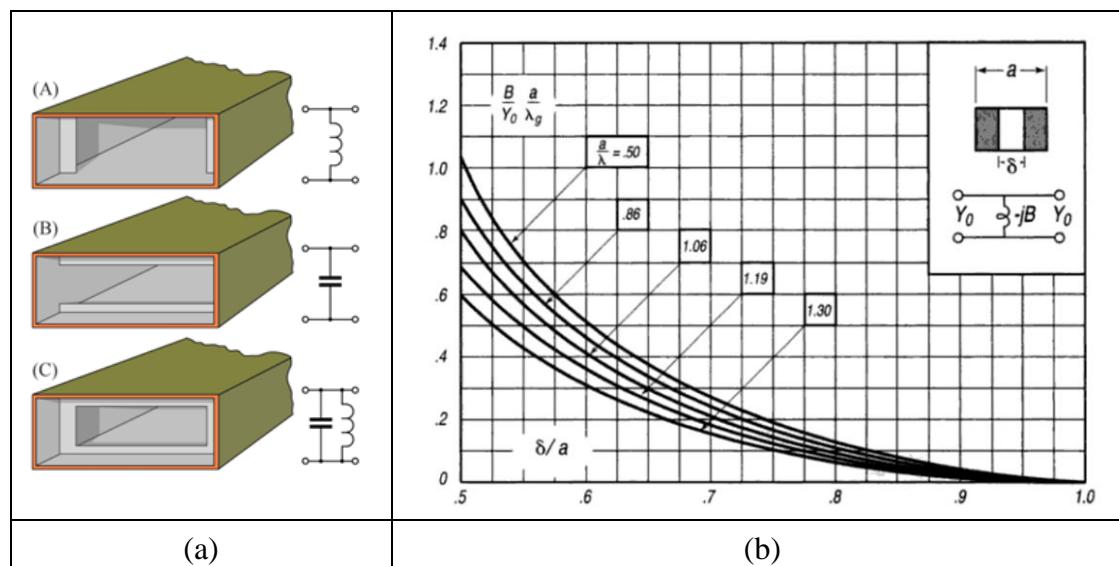


Figure 48 Modèle de transitions en guide (a) configurations (b) schéma équivalent

De façon plus générale, un dispositif construit à partir d'un assemblage de guides pourra être modélisé à l'aide de guides élémentaires et de modèles de discontinuité appropriés.

⁷⁴ Modes supérieurs d'ondes réduites b_{22} jusqu'à $b_{2\infty}$ dans le guide circulaires, b_{12} jusqu'à $b_{1\infty}$ dans le guide rectangulaire

⁷⁵ Typiquement assez courte et proche de $\frac{\lambda_g}{4}$

⁷⁶ Suivant les guides concernés, les modèles de lignes devront intégrer la variabilité fréquentielle de β et Z_c avec la fréquence (lignes dispersives). Ce sera le cas pour tous les guides dont les modes dominants sont non TEM.

L'exemple représentatif ci-dessous illustre le cas de lignes microrubans assemblées pour constituer un filtre de fréquence passe-bas. La géométrie complète est représentée en (a). (b) est le modèle circuit qui permet la simulation de ses paramètres S présentés en (c). Il favorise ensuite une optimisation rapide des performances directement à partir des dimensions, aboutissant finalement à une réalisation (d). La distance est ici suffisante pour garantir une extinction des modes évanescents entre les différentes discontinuités. Dans le cas contraire, le modèle peut manquer de précision⁷⁷. Une modélisation plus complexe est alors nécessaire, par exemple à l'aide d'un simulateur électromagnétique.

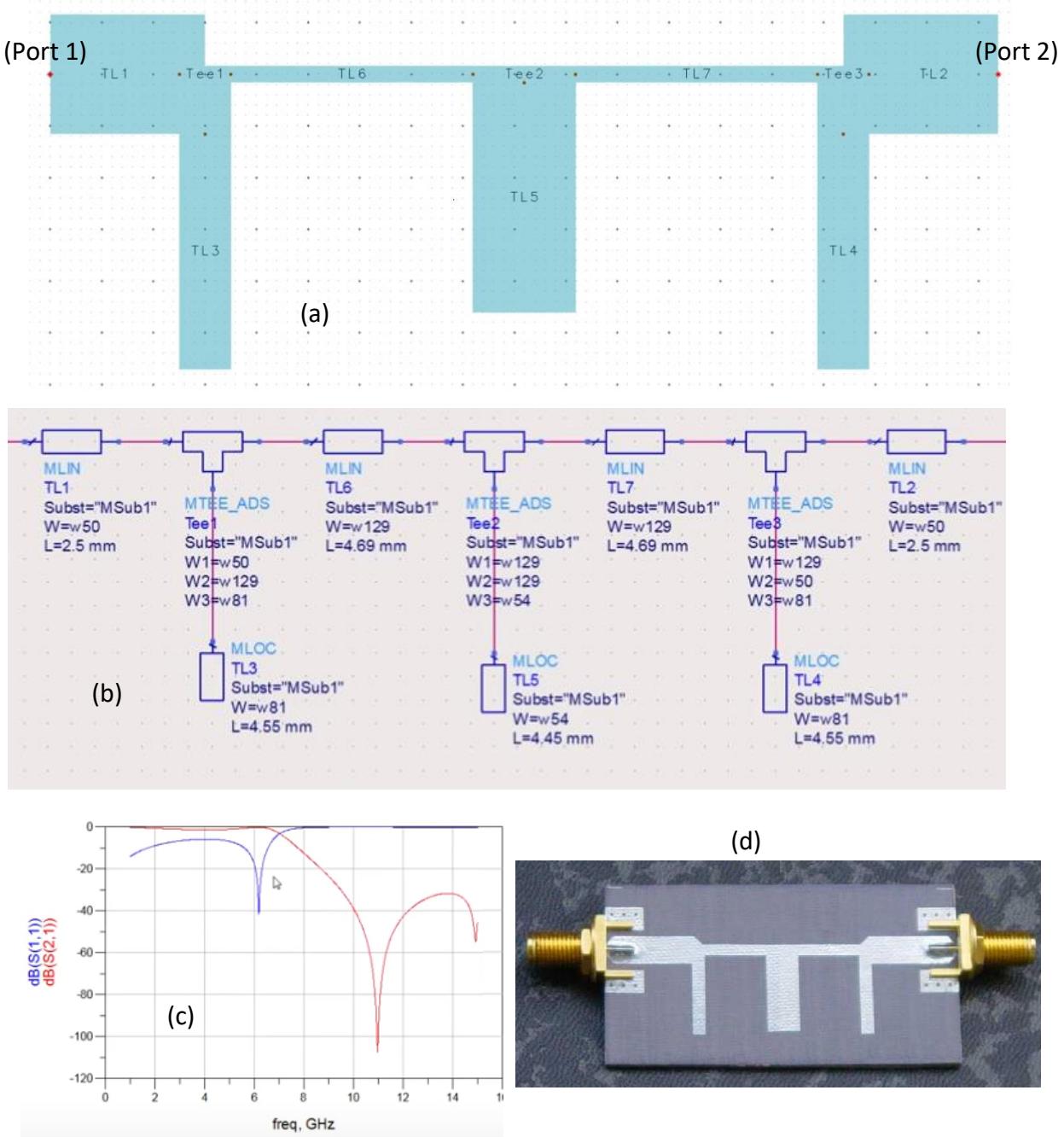


Figure 49 Filtre passe-bas en technologie microruban (a) empreinte physique, (b) modèle circuit, (c) paramètres S simulés (d) réalisation finale avec connectique coaxiale

⁷⁷ A cause de couplages entre modes évanescents de différentes discontinuités

Travaux dirigés

Sujet du TD1 : Adaptation par stub

Mots clés

Abaque de Smith. Impédance réduite – Admittance réduite - Coefficient de réflexion - Rapport d'ondes stationnaires (ROS) – Impédance ramenée - Stub - Adaptation.



Prévoir un *compas* pour la séance

Introduction

L'objectif de cet exercice est de se familiariser avec l'utilisation de l'abaque de Smith et ses principales propriétés, puis d'utiliser cet abaque pour améliorer l'efficacité énergétique dans l'étage radiofréquence d'un smartphone multistandards (figure 1 en annexe).

Les réponses aux question 2 et 3 ne sont pas indispensables pour traiter la question 4.

Question n° 1

Soit $Z_A = 10 + j47.5 \Omega$ l'impédance ramenée à l'entrée de l'antenne à la fréquence $f_0 = 1950 \text{ MHz}$ (fréquence UMTS issue de la bande n°1 IMT-2000). Sachant que l'impédance de normalisation est $Z_0 = 50 \Omega$, situer ce point sur l'abaque fourni en annexe (figure 2) et reportez le sur l'abaque vierge (cf. annexe). Déterminer le coefficient de réflexion et le *ROS* associés à ce point.

Question n° 2

Pourquoi l'utilisation d'une simple ligne de transmission d'impédance caractéristique $Z_C = Z_0$ (impédance interne du générateur et de normalisation) pour relier le circuit d'alimentation et l'antenne n'est-elle pas optimale ?

Question n° 3

Le smartphone intégrant l'antenne présente une autonomie de 2H en mode « téléchargement de photos vers le cloud ». En considérant la puissance issue de l'antenne comme source de consommation très dominante⁷⁸, estimatez la plus grande autonomie possible dans ce mode d'utilisation.

Question n° 4

Proposer et dimensionner à l'aide de l'abaque de Smith une solution simple à base de lignes de transmission idéales pour obtenir un fonctionnement optimal à la fréquence d'étude. On fera l'hypothèse ici que les stubs en court-circuit sont à éviter au regard de la technologie envisagée ensuite.

⁷⁸ D'autres postes de consommation sont à considérer plus rigoureusement et à mettre en perspective du type d'utilisation du smartphone (affichage, CPU, RAM ...). Voir par exemple : Carroll, Aaron & Heiser, Gernot. (2010). An Analysis of Power Consumption in a Smartphone. Proc. 2010 USENIX conf., USENIX Assoc.. (en ligne : https://www.usenix.org/legacy/event/usenix10/tech/full_papers/Carroll.pdf)

Question n° 5

Une réalisation en technologie planaire d'indice effectif $n_{eff} = 2$ est envisagée.

- a) Calculer la longueur physique des lignes de transmission.
- b) Le circuit d'adaptation doit être inséré entre l'antenne et son générateur, mais ses dimensions sont plus faibles que celles qui séparent ces deux éléments. Que proposez-vous ?
- c) Peut-on déduire sans calculs supplémentaires le dimensionnement d'un circuit d'adaptation avec la même méthode mais pour une autre fréquence de cette même antenne ?
- d) Quelles sont les limitations de l'approche utilisée ?

Annexes TD1

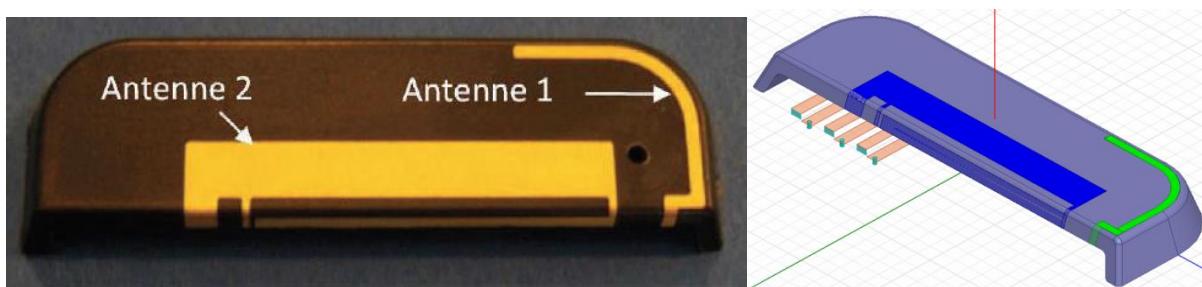


Figure 1 Antennes métalliques imprimées (prototypes ST Microelectronics Crolles) suivant le procédé laser LDS sur un élément support de Smartphone multi bandes⁷⁹

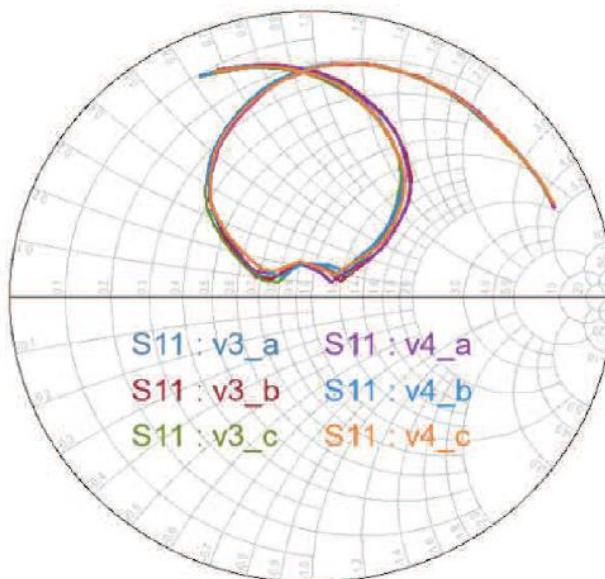
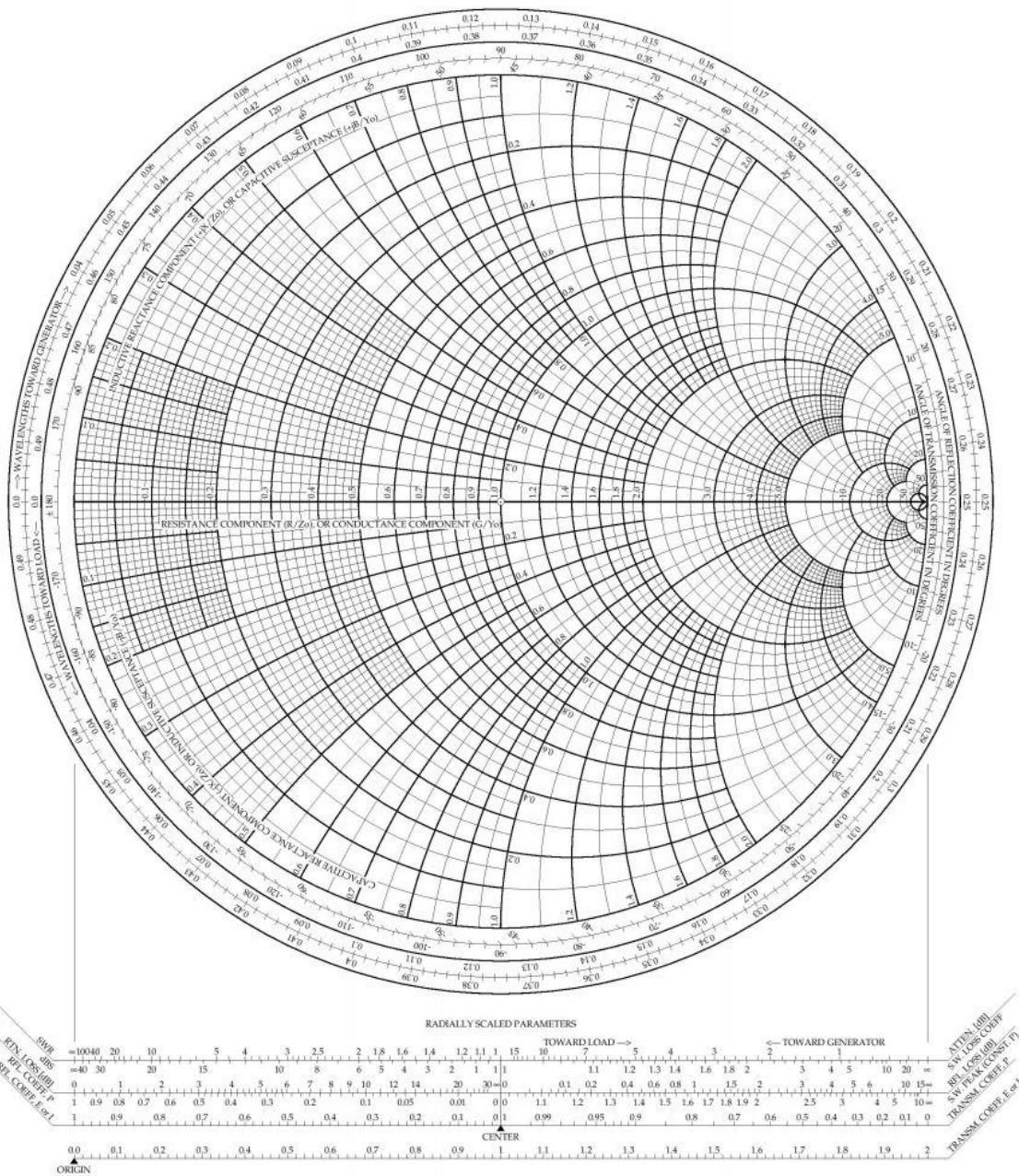


Figure 2 Variation avec la fréquence de la réponse en réflexion d'une des antennes sur 6 prototypes

⁷⁹ Florence Sonnerat, « Développement d'antennes innovantes pour les terminaux mobiles 4G tenant compte de l'interaction avec l'utilisateur : solutions circuits et antennes envisageables ». Thèse Télécom Bretagne, Université de Bretagne Occidentale, 3 octobre 2013

The Complete Smith Chart

Black Magic Design



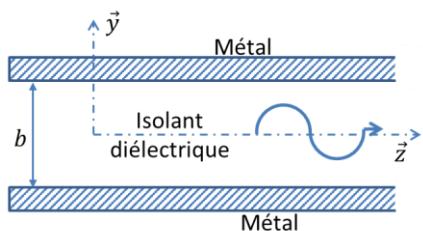
Sujet du TD2 : Atténuation et distorsions de l'onde guidée

Mots clés

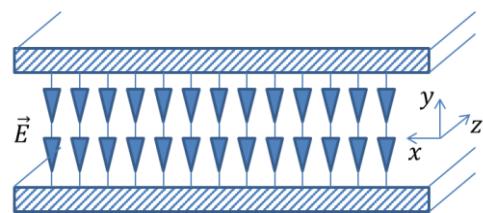
Atténuation linéique – Variabilité fréquentielle des propriétés EM – Trajets et modes - Dispersion - Fréquence de coupure - Facteur de propagation - Vitesses de phase et de groupe

Introduction

Au cours de leur propagation dans les guides, les ondes peuvent subir des déformations plus ou moins importantes, parfois jusqu'à empêcher totalement leur exploitation. Cet exercice introduit l'étude de différents mécanismes fondamentaux qui interviennent dans ces déformations. On étudie ici un modèle de guide à deux dimensions, avec différentes hypothèses sur les conditions aux limites et les propriétés EM du milieu de propagation LHI (linéaire, homogène et isotrope suivant les situations réelles les plus classiques).



(a) Modèle



(b) Guide plan parallèle

Figure 3 Modèle du guide d'ondes 2D et exemple de guide EM réel associé

On suppose que le signal associé à l'onde d'excitation est constitué d'une somme de I sinusoïdes telles que sur la position de référence O , on a : $E(0, t) = \sum_{i=1}^I a_i e^{j\omega_i t}$, $a_i = |a_i| e^{j\varphi_i}$. On adopte une répartition croissante $\omega_{i+1} > \omega_i$.

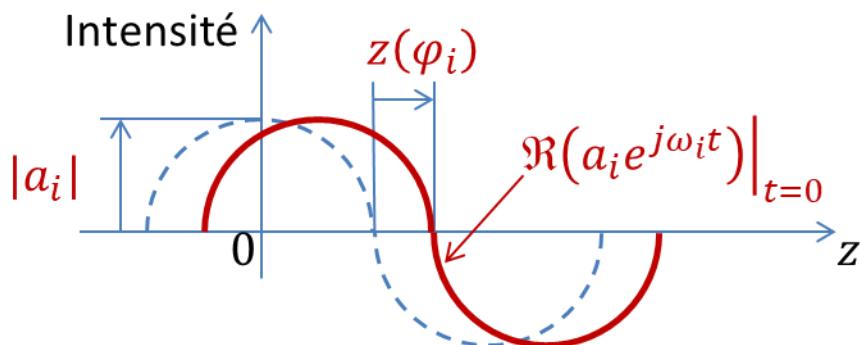


Figure 4 Une des composantes harmoniques du signal d'excitation

Question n° 6

On considère la propagation selon l'axe z dans le guide d'une onde EM plane (onde unidimensionnelle). La célérité c et les pertes linéaires α (Np/m) sont ici supposées constantes dans le milieu de propagation.

- Exprimer le signal en z en fonction du signal d'excitation $E(0, t)$. Quelle est la déformation à la distance L dans ces conditions ?

- b) Le câble coaxial P804298 (Figure 6 en annexe) présente un affaiblissement linéique de 0.5 dB/m à 200 MHz. Commentaires. Quelle est la relation entre α et l'affaiblissement linéique en dB ?

Question n° 7

La vitesse de propagation c de l'onde dans le milieu d'indice réel n s'exprime à partir de la célérité des ondes EM dans le vide c_0 , suivant la relation $c = c_0/n$.

Cependant, nous considérons ici la nature complexe de n et son évolution avec la fréquence suivant le modèle proposé en annexe. Ici α n'est pas fixé « a priori » comme cela était le cas dans la question précédente, mais nous allons voir la façon dont la nature complexe de n contribue à α .

- Interpréter les paramètres n_s , n_∞ et $\omega_x = 2\pi f_x$ du modèle proposé en annexe
- Exprimer le signal reçu à la distance $z = L$ en fonction des parties réelle et imaginaire de l'indice. En quoi l'affaiblissement peut-il affecter l'allure de l'onde ?
- On considère ici les cas où l'atténuation est négligeable. Quelle est la déformation de l'onde lorsque 1) $\omega_I \ll \omega_x$, 2) $\omega_I \gg \omega_x$, 3) $\omega_x \in [\omega_1, \omega_I]$ - Exprimer et interpréter $v_i = c_0/\Re(n_i)$ dans ce dernier cas

Question n° 8

Dans cette question, les parois du guide imposent l'annulation des ondes sur leurs bords (cas du champ électrique tangentiel sur un métal infiniment conducteur), l'intérieur du guide étant l'air ($c \approx c_0$).

Par ailleurs, considérant une onde ae^{-jkz} qui se propage suivant l'axe z , on adopte ici l'expression plus générale $ae^{-j\vec{k}.\vec{r}}$, où \vec{k} est le vecteur d'onde de module k orienté dans la direction de propagation et \vec{r} est le vecteur position.

- Suivant la figure 5, montrer que la superposition des deux trajets obliques $E^+(x, z) = Ae^{-j\vec{k}.\vec{r}(\theta)}$ et $E^-(x, z) = Ae^{-j\vec{k}.\vec{r}(-\theta)}$, conduit à une onde résultante unidimensionnelle suivant z , appelée « mode de propagation », $E_m(x, z) = F_m(x)e^{-j\beta_m z}$ (m étant un entier que l'on introduira à partir des conditions aux limites).

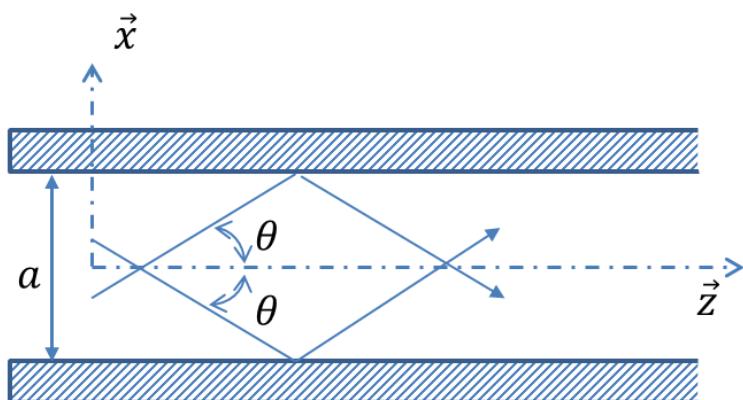


Figure 5 Trajets obliques symétriques

- b) Représenter qualitativement le diagramme de dispersion $\omega(\beta_m)$ en faisant apparaître et en interprétant les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g .
- c) Commenter la propagation selon une longueur L dans ce guide dans le cas d'une excitation par $E(0, t) = \sum_{i=1}^I a_i e^{j\omega_i t}$ lorsque 1) $f_I < f_c = \frac{c_0}{2a}$, 2) $f_I > f_c$ et $f_I < 3f_c$, 3) $f_I < f_c$ et $f_I > 3f_c$, 4) $f_I \gg f_c$

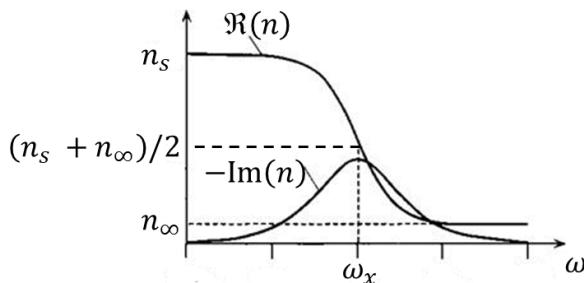
Question n° 9 : Bilan

Parmi les phénomènes suivants qui affectent les signaux transportés dans un guide d'ondes, indiquer ceux qui n'ont pas été étudiés dans cet exercice.

- 1 - L'affaiblissement lié à la dissipation d'énergie réduit l'intensité de l'onde. De plus il déforme son allure temporelle si cet affaiblissement varie significativement avec la fréquence.
- 2 - La variation avec la fréquence de la célérité dans le milieu induit un étalement temporel qui déforme le signal transmis et entraîne des recouvrements (IES) : c'est la dispersion du milieu (ou dispersion matériau si le milieu est constitué d'un matériau homogène).
- 3 - Des phénomènes de coupure partielle ou totale du signal d'excitation (effet de filtrage fréquentiel passe-haut), selon le rapport dimensions du guide / longueur d'onde.
- 4 - La variation continue avec la fréquence de l'angle des trajets d'ondes particuliers (formant un « mode de propagation ») induit une « dispersion intra-modale » dont l'effet sur la déformation des signaux est similaire à celui de la dispersion du milieu.
- 5 - Une propagation multimode (d'autant plus de combinaisons de trajets élémentaires avec des angles différents que la fréquence est élevée) qui crée autant de répliques étaillées dans le temps du signal d'origine, chacune étant affectée de sa propre dispersion. C'est la dispersion intermodale.
- 6 - La saturation lorsque les milieux de propagation sont non linéaires, qui déforme les signaux par écrêtage et induit en conséquence un étalement spectral du signal transporté.
- 7 - L'anisotropie de certains milieux (ionosphère, plasmas, matériaux ferrites...), qui induit une vitesse de propagation de l'onde qui dépend de sa direction de propagation, entraînant un phénomène de dispersion spatiale.
- 8 - L'inhomogénéité éventuelle des milieux, qui affecte la célérité et donc également la dispersion, parfois de façon bénéfique (cas des fibres à gradient d'indice).

Annexes du TD2

REFERENCE DU CABLE	CONDUCTEUR CENTRAL			DIELECTRIQUE CELOFLOL®	DOUBLE TRESSE	GAINES EXT. (g/m)		MASSE NOM. (g/m)	z_ζ (Ω)	CAPACITE MAXI (pF/m)	ATTEN. MAXI		SERIES DE CONNECTEURS UTILISES
	NATURE	COMPOS.	\varnothing NOM.	\varnothing (mm)	NATURE	NATURE	\varnothing MAXI (mm)				dB/m	FREQUENCE	
P812817	SPC	19 x 0,102	0,51	1,35	SPC	FEP	2,40	13	50	100	0,50	200 MHz	SMA Contacts coaxiaux taille 16 pour connecteurs suivant MIL-C-38999
P805311	SPC	19 x 0,160	0,80	2,10	SPC	FEP	3,05	20	50	85	0,77 1,14 1,40 1,60 2,60	1 GHz 2 GHz 3 GHz 5 GHz 8 GHz	SMA Contacts coaxiaux taille 8 pour connecteurs suivant MIL-C-38999
P803859	SCWS	7 x 0,102	0,30	1,30	SPC	FEP	2,40	12	75	60	0,30 0,65	200 MHz 400 MHz	SMA Contacts coaxiaux taille 16 pour connecteurs suivant MIL-C-38999
P804298	SCA	7 x 0,102	0,30	1,35	SPC	FEP	2,50	15	75	60	0,50	200 MHz	SMA Contacts coaxiaux taille 16 pour connecteurs suivant MIL-C-38999
P804151	SPC	19 x 0,102	0,51	2,30	SPC	FEP	3,70	35	75	60	0,30	400 MHz	SMA Contacts coaxiaux taille 8 pour connecteurs suivant MIL-C-38999

Figure 6 Caractéristiques de câbles coaxiaux⁸⁰Modèle d'indice complexeFigure 7 Modèle fréquentiel (Debye 1^{er} ordre)

Le modèle est exprimé par $n = n_\infty + \frac{n_s - n_\infty}{1 + j\frac{\omega}{\omega_x}}$, $n_s \geq n_\infty$ et ω_x étant des paramètres réels positifs.

En séparant parties réelles et imaginaires : $n = \frac{(n_s + n_\infty \Omega^2)}{1 + \Omega^2} - j \frac{(n_s - n_\infty) \Omega}{1 + \Omega^2}$, avec $\Omega = \frac{\omega}{\omega_x}$

Il s'agit d'un cas particulier du modèle de Cole-Cole de 1^{er} ordre $\varepsilon_r = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + (j\frac{\omega}{\omega_x})^{1-m}}$

classique de la permittivité diélectrique relative complexe ε_r de nombreux matériaux diélectriques et dont l'étude détaillée est hors sujet ici. $m = 0$ conduit au modèle de Debye de 1^{er} ordre, utilisé là où les interactions dipolaires sont faibles (observé surtout dans les liquides, plus rarement dans les solides).

Remarque : l'utilisation du modèle de Debye pour l'indice $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ alors qu'il s'applique généralement à ε_r n'est justifié dans cet exercice que pour faciliter les calculs.

⁸⁰ www.axon-cable.com/publications/COAX_FR.pdf

Sujet du TD3-4 : Etude d'un guide planaire pour l'optique intégrée

Mots clés

Guide ouvert – Equation d’Helmholtz - Composantes de champs - Conditions aux limites - Modes - Diagramme de dispersion – Dimensionnement monomode

Introduction

Les guides utilisés en optique intégrée sont généralement formés d'une couche diélectrique d'indice $n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}}$, prise en sandwich entre deux autres couches d'indice $n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}}$ plus faible que n_1 . La lumière va, comme pour la fibre optique, être guidée dans la couche dont l'indice est le plus grand donc dans la couche n_1 .

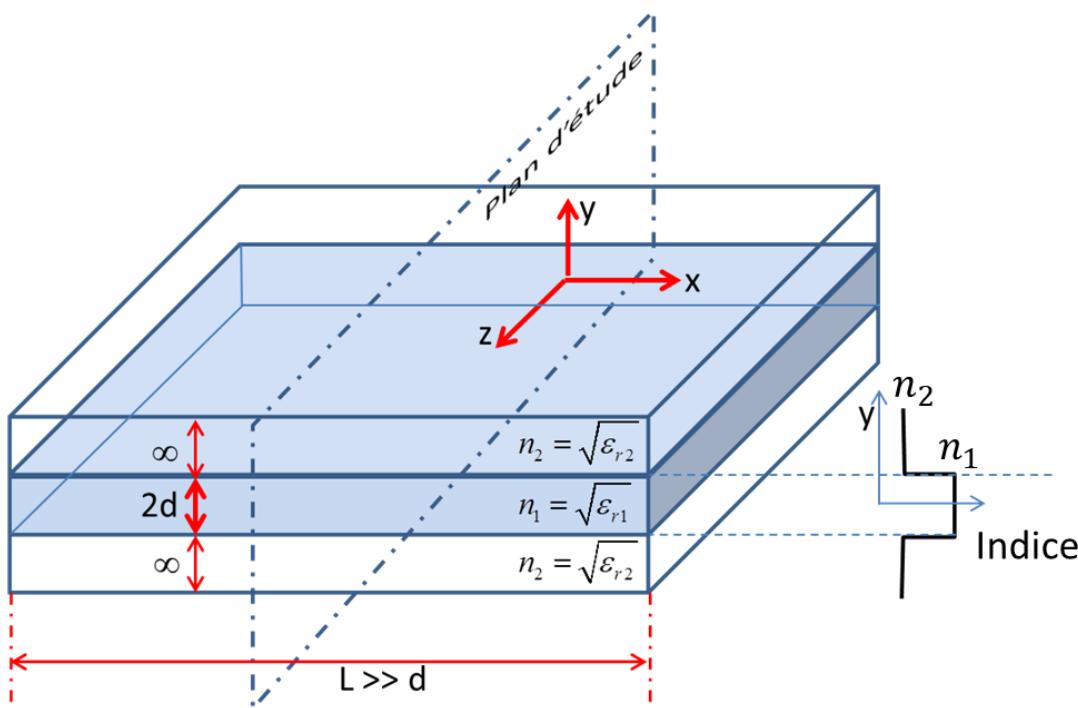


Figure 1 Repères pour l'étude du guide optique intégré

Cette couche a une épaisseur très faible devant les autres dimensions Le mode fondamental de cette structure ne va donc quasiment pas dépendre de la direction Ox.

Première hypothèse : les champs EM sont indépendants de la variable x

Les couches inférieure et supérieure ont une épaisseur telle qu'aux fréquences de travail, les champs aux interfaces avec l'air sont quasiment nuls.

Seconde hypothèse : les deux couches d'indice $n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}}$ ont une épaisseur infinie

Le guide est envisagé sous sa forme canonique, c'est-à-dire sans prendre précisément en compte différents paramètres liés à sa réalisation pratique et qui ont une influence de deuxième ordre sur les ondes guidées (pas de pertes, pas de variabilité des propriétés EM avec la fréquence, interfaces parfaitement lisses et parallèles à z).

Troisième hypothèse : le guide est idéalisé

En bénéficiant des trois hypothèses, l'étude se ramène à celle des modes de propagation du guide à deux dimensions (2D) ci-dessous.

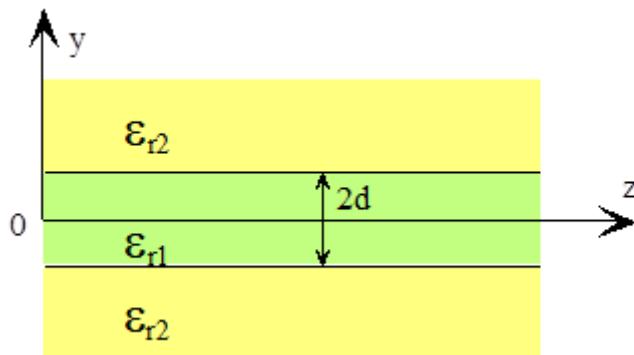


Figure 2 Plan d'étude

Etude préliminaire

Question n° 10

Etablir les équations d'ondes unidimensionnelles associées aux composantes longitudinales E_{iz} et H_{iz} , $i = 1, 2$ correspondant aux différents milieux considérés

Question n° 11

Donner les solutions de ces équations après les avoir simplifiées en tirant parti du caractère guidé des ondes étudiées et en mettant en évidence les propriétés de symétries du guide

Etude des solutions paires (en E_z)

Question n° 12

Donner l'expression des solutions paires en E_z . Illustrer schématiquement $E_z(y)$ et $H_z(y)$ pour les solutions paires et impaires étudiées. Commentaires.

Question n° 13

En tirant parti des relations entre les composantes transverses et longitudinales en annexe, établir l'expression des composantes de champs transverses

Question n° 14

Exprimer les conditions de continuité des champs et en extraire un système linéaire dont les constantes d'intégration E_{0i} et H_{0i} sont les inconnues. Présenter ce système sous forme matricielle.

Question n° 15

Discuter les solutions du système matriciel (sans les déterminer) et en déduire leur répartition en deux grandes catégories

Question n° 16

Etablir une équation caractéristique spécifique à chacune des catégories précédentes qui relie $y = Kd$ à $x = \delta d$. De quelles équations et inconnues dispose-t-on pour identifier les relations de dispersion ?

Question n° 17

Quel est le mode pair fondamental ? Peut-il conduire le continu ? Tracer approximativement sa courbe de dispersion.

Question n° 18

Comment construire la structure pour réaliser un guide optique monomode à la longueur d'onde $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$? Sachant que le milieu 1 est en silice dopée ($n_1 = 1.47$) et le milieu 2 en silice ($n_2 = 1.45$) calculer l'épaisseur de la couche active

Question n° 19

L'étude des modes impairs montrerait que les modes pTE_m et iTM_m de mêmes indices ont la même fréquence de coupure, le champ iTM_0 étant polarisé selon y . A quelle condition un fonctionnement monomode du guide peut-il être envisagé dans ces conditions ?

Annexe du TD3-4

Expression des composantes transverses des champs dans le guide en fonction des composantes longitudinales (repère cartésien).

Compte tenu de l'absence de charges libres dans les matériaux du guide, les équations de Maxwell en régime harmonique prennent la forme simplifiée :

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} \\ \nabla \vec{E} = 0 \\ \nabla \vec{H} = 0 \end{cases}$$

La dépendance en z des champs $\vec{U} = \vec{E}$ ou \vec{H} dans le guide est liée uniquement au facteur de propagation. On peut donc écrire pour l'onde progressive :

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} U_x(x, y) \\ U_y(x, y) \\ U_z(x, y) \end{pmatrix} e^{-j\beta z}$$

Toutes les dérivées par rapport à z se transforment donc en multiplication par $-j\beta$. En injectant cette expression dans les équations rotationnelles précédentes, on obtient :

$$\begin{cases} \partial_y E_z + j\beta E_y = -j\omega\mu H_x & (a) \\ j\beta E_x + \partial_x E_z = j\omega\mu H_y & (b) \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x = -j\omega\mu H_z & (c) \\ \partial_y H_z + j\beta H_y = j\omega\epsilon E_x & (d) \\ j\beta H_x + \partial_x H_z = -j\omega\epsilon E_y & (e) \\ \partial_x H_y - \partial_y H_x = j\omega\epsilon E_z & (f) \end{cases}$$

Avec $k^2 - \beta^2 = k_T^2$, nous pouvons combiner respectivement (d) et (b), (e) et (a), (a) et (e) et finalement (b) et (d), pour extraire les relations reliant les composantes transverses aux composantes longitudinales :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = \frac{-j}{k_T^2} (\beta \cdot \partial_x E_z + \omega \mu \cdot \partial_y H_z) \\ E_y = \frac{j}{k_T^2} (-\beta \cdot \partial_y E_z + \omega \mu \cdot \partial_x H_z) \\ H_x = \frac{j}{k_T^2} (\omega \varepsilon \cdot \partial_y E_z - \beta \cdot \partial_x H_z) \\ H_y = \frac{-j}{k_T^2} (\omega \varepsilon \cdot \partial_x E_z + \beta \cdot \partial_y H_z) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \\ (c) \\ (d) \end{array}$$

Ces relations doivent être adaptées pour les autres systèmes de coordonnées (on utilisera le repère cylindrique dans un barreau diélectrique à section droite circulaire, dans une fibre optique...)

Glossaire

Les descriptions suivantes n'ont pas la précision ni le caractère exhaustif des définitions d'un dictionnaire. Elles visent néanmoins à faciliter la bonne compréhension et assimilation du vocabulaire spécifique utilisé dans le cours.

Terme	Importance	Description
Abaque de Smith	Essentiel	Représentation graphique qui facilite la lecture croisée entre coefficients de réflexion (amplitude et phase) et impédances réduites (parties réelles et imaginaires). Ses propriétés favorisent la conception de nombreux circuits impliquant des lignes de transmission.
Adaptation (condition d')	Standard	Condition pour adapter un circuit (cf. "circuit adapté").
Bande d'adaptation	Complément	Intervalle des fréquences satisfaisant un ou des critères d'adaptation donnés. Par exemple la bande d'adaptation à 10 dB d'un circuit désigne les fréquences où le coefficient de réflexion en entrée reste inférieur à -10 dB.
CAO	Complément	Conception assistée par ordinateur, en référence aux logiciels devenus quasi-incontournables dans les démarches d'ingénierie moderne. L'automatisation des calculs n'y remplace jamais le besoin d'une bonne compréhension et de réflexion de l'utilisateur.
Carte des champs	Essentiel	Représentation spatiale des vecteurs de champs EM, par exemple dans le plan de section droite d'un guide pour illustrer un mode de propagation.
CCE (court-circuit électrique)	Essentiel	Condition de tension nulle sur le nœud d'un circuit. Par analogie, condition de champ électrique tangentiel nul sur une surface. C'est la condition naturelle sur un matériau de très forte conductivité (métal parfait ou excellent conducteur).
CCM (court-circuit magnétique)	Standard	Court-circuit magnétique : condition de champ magnétique tangentiel nul sur une surface. Elle n'existe pas dans la nature mais on en tire parti dans la modélisation, sur les plans de symétrie dans les guides par exemple.
Célérité	Prérequis	Analogue de la vitesse mais pour une onde, sans déplacement de matière.

Terme	Importance	Description
Cercle à ROS constant	Standard	Lieu circulaire centré sur l'abaque de Smith. Tous les points de ce cercle partagent la même amplitude du coefficient de réflexion. Sur une ligne de transmission adaptée à son circuit d'alimentation, le ROS est fixé par la charge en sortie. Le point figuratif d'une position quelconque de cette ligne sur l'abaque de Smith est alors dans le cercle associé à ce ROS.
Champ électrique \vec{E}	Essentiel	Appelé aussi champ électrique d'excitation. Force par unité de charge en un point, créée par les charges immobiles environnantes.
Champ magnétique \vec{H}	Essentiel	Appelé aussi champ magnétique d'excitation. Grandeur de référence liée à la force par unité de charge en un point créée par les courants environnants.
Champ de déplacement ou d'induction électrique \vec{D}	Complément	Grandeur liée au champ d'excitation électrique \vec{E} par les propriétés diélectriques macroscopiques du milieu $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$
Champ d'induction magnétique \vec{B}	Complément	Grandeur liée au champ d'excitation magnétique \vec{H} par les propriétés magnétiques macroscopiques du milieu $\vec{B} = \mu \vec{H}$
Circuit adapté	Standard	En termes d'onde, un circuit est adapté à sa source d'excitation lorsqu'il n'y a pas d'onde réfléchie en retour vers celle-ci. La charge bénéficie alors de la plus grande puissance que peut lui délivrer la source. Le point correspondant à l'adaptation est au centre de l'abaque de Smith.
CO (circuit ouvert)	Standard	Circuit ouvert : condition de courant nul entre deux noeuds distincts d'un circuit. Le point d'impédance infinie correspondant est tout à fait à droite de l'axe réel sur l'abaque de Smith.
CC (court circuit)	Standard	Court circuit : condition de tension nulle sur le nœud d'un circuit. Le point d'impédance nulle correspondant est tout à fait à gauche de l'axe réel sur l'abaque de Smith.

Terme	Importance	Description
Coaxial (guide ou ligne)	Standard	Technologie de guide très répandue dont la section droite est constituée de deux conducteurs métalliques circulaires concentriques séparés par un isolant diélectrique. Son mode fondamental est TEM (non dispersif). Ses pertes augmentent rapidement avec la fréquence, ce qui limite son utilisation à quelques GHz généralement.
Coefficient d'affaiblissement α	Standard	Synonyme de constante d'atténuation
Coefficient de réflexion ρ	Prérequis	Pour une onde unidimensionnelle, c'est le coefficient qui relie l'onde rétrograde à l'onde directe dont elle est issue, du fait des conditions à l'extrémité du support de propagation.
Conducteur parfait	Essentiel	Ou « métal parfait » (PEC pour "perfect electric conductor"). Sa conductivité est infinie, il ne présente donc aucune perte et son épaisseur de peau est nulle quelle que soit la fréquence.
Conductivité électrique σ	Prérequis	Propriété électrique qui traduit la mobilité des charges libres dans un milieu donné. Elle est nulle dans un isolant parfait, tandis qu'elle est infinie dans le métal parfait.
Constante d'atténuation α	Standard	Synonyme de coefficient d'affaiblissement (linéique). Partie réelle de la constante de propagation γ .
Constante de (propagation de la) phase β	Essentiel	Partie imaginaire de la constante de propagation γ . Elle est identique au nombre d'onde k pour un mode TEM, mais pas pour un mode TE ou TM.
Constante de propagation γ	Essentiel	$\gamma = \alpha + j\beta$, coefficient du facteur de propagation $e^{\mp\gamma z}$ qui exprime l'affaiblissement et le déphasage dû au retard (ou à l'avance pour un signe positif) de l'onde suivant la position z .
Coulomb (force de)	Complément	Force subie par une charge en un point du fait des charges immobiles environnantes
dB (décibel)	Standard	Unité très utilisée dans les systèmes linéaires car elle met en évidence la contribution additive ou soustractive de chaque élément d'un bilan de liaison. De façon générale, la conversion en dB est obtenue par $10 \cdot \log_{10}$ d'un rapport de puissance

Terme	Importance	Description
Demi-onde (ligne)	Complément	Ligne de transmission dont la longueur est une demi-longueur d'onde à la fréquence de calcul. Il s'agit typiquement d'une ligne résonante.
Directe (onde)	Prérequis	Onde qui se propage dans le sens du repère choisi, à l'inverse de l'onde rétrograde (ou indirecte). Typiquement elle s'éloigne de la source d'excitation.
Dispersion	Essentiel	Déformation liée à l'étalement temporel d'une forme d'onde avec la distance parcourue, du fait des célerités différentes de ses composantes harmoniques.
Dispersion (diagramme de)	Essentiel	Représentation cartésienne $\beta = f(\omega)$ qui met en évidence la relation entre la fréquence et la constante de phase. Une courbe linéaire passant par l'origine sur ce diagramme traduit l'absence de dispersion (onde TEM).
Dispersion intermodale	Standard	Part de la dispersion dont l'origine est la répartition d'énergie sur plusieurs modes.
Dispersion intramodale	Standard	Part de la dispersion spécifique au mode considéré.
Divergence spatiale	Prérequis	"Etalement" spatial d'une onde avec l'éloignement de sa source origine. De façon générale un guide d'ondes empêche la divergence.
EM	Prérequis	Electromagnétique
Enveloppe d'onde stationnaire	Essentiel	Courbe le long de l'axe de propagation qui délimite les maximum d'intensité de vibration de l'onde stationnaire.
Épaisseur de peau δ	Standard	Profondeur caractéristique de la pénétration d'une onde EM plane arrivant sous incidence normale dans un milieu conducteur. Quelques microns typiquement pour les métaux usuels aux longueurs d'onde centimétriques. Dans les guides standards, elle diminue avec l'augmentation de la fréquence et de la conductivité.
Équation de D'Alembert	Essentiel	Equation d'onde historique, où les variations spatiales et temporelles d'ordre 2 d'une onde sont simplement reliées par le carré de sa célerité. Sa solution générale est l'onde stationnaire.

Terme	Importance	Description
Équation de Helmholtz	Standard	Forme vectorielle d'équations d'ondes unidimensionnelles, déduite des équations de Maxwell. Elle porte uniquement sur les champs électrique ou magnétique, alors que ceux-ci sont couplés dans les équations de Maxwell.
Équations de Maxwell	Essentiel	Équations fondamentales de la physique pour les phénomènes électromagnétiques macroscopiques (à une échelle « suffisamment » grande devant les dimensions interatomiques).
Équations des télégraphistes	Essentiel	Équations couplées, l'une reliant la variation spatiale de la tension à celle temporelle du courant, l'autre faisant l'inverse.
Évanescent (mode)	Standard	Mode dont la fréquence est inférieure à celle de sa coupure. Ses champs EM décroissent exponentiellement suivant l'axe du guide, sans que cette décroissante soit due à une dissipation de puissance dans le milieu. Ils apparaissent typiquement autour des discontinuités des guides.
Facteur d'atténuation $e^{-\alpha z}$	Standard	Facteur qui exprime l'affaiblissement du champ dans le guide, sous l'effet des pertes et/ou d'un régime évanescent.
Facteur de forme F	Complément	Coefficient caractéristique, fonction de la géométrie et des dimensions uniquement. De tels coefficients interviennent par exemple pour relier les grandeurs linéaires aux propriétés EM du milieu de propagation dans les lignes de transmission réelles.
Facteur de pertes $\tan \delta$	Complément	Coefficient caractéristique de l'ensemble des pertes par dissipation thermique qui affectent l'onde dans un guide.
Facteur de propagation $e^{-\gamma z}$	Essentiel	Facteur par lequel il faut multiplier les champs EM d'un mode guidé en $z = 0$ pour établir leurs expressions à une position z quelconque.
Force magnétique	Complément	Force subie par une charge en un point du fait des courants environnants.
Fréquence de coupure f_c	Essentiel	Pour un mode, c'est la fréquence de transition entre les régimes évanescent et propagatif. Pour un guide il s'agit de la plus petite fréquence de coupure de tous ses modes.

Terme	Importance	Description
Guide d'ondes	Essentiel	De façon commune, structure dont la forme et les propriétés physiques sont invariantes sur la section droite et tout le long d'un axe de propagation rectiligne. L'onde est sans divergence le long de cet axe (infini). Elle est une combinaison linéaire des modes de propagation excités.
Guide canonique	Complément	Guide idéalisé où les matériaux sont sans pertes. L'étude des modes dans les guides réels commence par celle du guide canonique associé.
Guide rectangulaire	Standard	Raccourci pour guide rectangulaire métallique creux, technologie classique (avec les guides circulaires et d'autres) pour les longueurs d'ondes EM centimétriques et millimétriques. Ce guide est toujours dispersif (il ne possède pas de mode TEM).
Harmonique (onde)	Prérequis	Onde dont l'évolution temporelle est sinusoïdale.
Homogène (milieu)	Prérequis	Dont les propriétés ne varient pas selon la position dans le milieu considéré. Dans le cas contraire le milieu est inhomogène, pouvant être homogène par sous-domaines ou continûment inhomogène.
Impédance caractéristique Z_c	Essentiel	Paramètre de base d'une ligne de transmission, qui est le rapport entre l'onde de tension et l'onde de courant de l'onde purement progressive (directe ou indirecte) sur cette ligne.
Impédance d'onde	Complément	Pour une onde EM, rapport entre les amplitudes des champs transverses électrique et magnétique.
Impédance de charge	Standard	Rapport entre l'onde stationnaire de tension et l'onde stationnaire de courant à la sortie de la ligne de transmission.
Impédance intrinsèque (d'un milieu)	Standard	$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$, identique à l'impédance de l'onde plane EM dans le milieu LHI possédant les paramètres électriques ϵ et μ .
Impédance ramenée $Z(x)$	Standard	Rapport entre l'onde stationnaire de tension et l'onde stationnaire de courant à la position x considérée sur la ligne de transmission.
Impédance réduite z	Essentiel	Rapport entre l'impédance considérée et une impédance de référence (typiquement celle de la source d'excitation ou l'impédance caractéristique d'une ligne).

Terme	Importance	Description
Indice n_i (réfractif d'un milieu i)	Prérequis	$n_i = \sqrt{\epsilon_{ri}}$, propriété EM d'un milieu, souvent préférée à la permittivité diélectrique relative dans le domaine de l'optique.
Isotrope (milieu)	Prérequis	Dont les propriétés ne varient pas selon la direction de propagation. C'est le cas dans la plupart des guides. Dans le cas contraire, le milieu est anisotrope.
LHI	Prérequis	Linéaire, homogène isotrope : propriétés des milieux les plus classiques dans les guides
Ligne de transmission	Essentiel	Composant élémentaire non dispersif qui permet de prendre en compte les phénomènes de stationnarité dans les circuits électriques. Par extension, guide d'ondes qui possède un mode TEM ou quasi-TEM. Un tel guide a néanmoins des modes supérieurs, comme tout guide. En présence de modes non-TEM, un modèle de ligne dispersive peut être utilisé, sous conditions, dans les circuits électriques.
Linéique (paramètre)	Standard	Paramètre par unité de longueur. Dans une ligne de transmission, l'impédance caractéristique ne dépend que des paramètres linéiques, pas de sa longueur.
Longueur d'onde λ	Prérequis	Plus petite distance entre deux états de phase identiques (deux maximums par exemple) d'une onde harmonique progressive le long de l'axe de propagation.
Longueur d'onde de coupure λ_c	Essentiel	Longueur d'onde associée à la fréquence de coupure.
Longueur d'onde guidée λ_g	Essentiel	Longueur d'onde associée à un mode (généralement le fondamental) dans un guide.
Lorentz (force de)	Prérequis	Somme des forces électriques (de Coulomb) et magnétique.
Matrice de répartition	Essentiel	Matrice des coefficients complexes S_{ij} qui relient les ondes unidimensionnelles sortantes (b_j) et entrantes (a_i) aux accès d'un réseau linéaire. Les accès étant adaptés, S_{ii} est le coefficient de réflexion à l'accès i , tandis que S_{ij} est le coefficient de transmission de j vers i .
Matrice S	Essentiel	Synonyme de matrice de répartition (S pour « scattering »).

Terme	Importance	Description
Microruban (guide ou ligne)	Standard	Ligne réalisée en technologie planaire, très classique des circuits électriques hautes fréquences. Elle consiste en un substrat isolant, métallisé sur sa face inférieure (plan de masse), sur le dessus duquel est gravée la ligne de transmission (ou d'autres motifs dans le cas général des circuits microrubans). Ce guide n'est pas dispersif aux fréquences d'utilisation standards (mode quasi-TEM).
Mode de propagation	Essentiel	Solution élémentaire de propagation dans un guide. Un mode est caractérisé par sa relation de dispersion et sa carte des champs. Tout champ EM d'un guide peut être représenté comme une combinaison linéaire de ses modes de propagation.
Mode de référence	Standard	Mode dont les intensités des champs sont fixées pour que sa puissance soit calibrée, typiquement à 1W. Les champs EM d'un mode quelconque sont le produit de ceux de son mode de référence par son onde réduite.
Mode fondamental	Essentiel	Ou dominant. Mode de propagation qui a la plus petite fréquence de coupure. Les guides sont généralement conçus pour qu'aux fréquences souhaitées, seul ce mode soit propagatif afin d'empêcher les phénomènes de dispersion intermodale.
Modes dégénérés	Complément	Modes qui partagent la même courbe de dispersion $\beta = f(\omega)$, mais qui se différencient par leurs cartes des champs.
Modes supérieurs	Standard	Modes dont les fréquences de coupure sont plus élevées que celle du mode fondamental. Ils existent dans tous les guides mais les dimensions et propriétés électriques empêchent généralement leur propagation aux fréquences d'opération (ce sont alors des modes évanescents).
Monomode (guide)	Standard	Situation classique d'un guide dont seul le mode fondamental est propagatif aux fréquences considérées.
Multimode (guide)	Standard	Se dit d'un guide qui n'est pas monomode.

Terme	Importance	Description
Nombre d'onde k	Prérequis	Pulsion spatiale de l'onde le long de l'axe de propagation, à l'image de la pulsation ω vis-à-vis du temps, les deux contribuant à la phase de l'onde progressive ($\omega t \pm kz$) pour une propagation unidimensionnelle selon z . On lui associe le vecteur d'onde $\vec{k} = k\hat{k}$, \hat{k} étant le vecteur unitaire dans la direction de propagation.
Nombre d'onde transverse k_T	Standard	C'est la composante du vecteur d'onde projetée sur le plan orthogonal à la direction de propagation. Il intervient dans l'équation de Helmholtz dans le guide.
Onde de référence	Standard	Onde physique à partir de laquelle est déterminée l'onde réduite utilisée dans les modèles unidimensionnels.
Onde plane (EM)	Prérequis	Onde EM élémentaire non divergente. Dans un guide on la désigne plutôt par onde ou mode TEM. Dans un milieu LHI infini, ses propriétés sont favorables aux manipulations algébriques : \vec{E} , \vec{H} et \vec{k} forment un trièdre direct, \vec{E} et \vec{H} sont reliés par l'impédance du milieu, etc...
Onde progressive (OP)	Prérequis	Onde dont toutes les composantes harmoniques suivent la même direction.
Onde réduite	Essentiel	Nombre complexe qui constitue le modèle le plus simple des ondes harmoniques dans les réseaux linéaires. L'amplitude et la phase sont établies relativement à une « onde de référence », choisie pour profiter de « bonnes propriétés » lors des études.
Onde stationnaire	Prérequis	Combinaison de deux ondes progressives de directions opposées suivant un axe donné.
Orthogonalité des modes	Standard	Propriété qui implique que la puissance totale transportée dans un guide est répartie et transportée de façon indépendante par les différents modes propagatifs excités.
Perméabilité magnétique μ	Standard	Propriété électrique du milieu de propagation qui relie le champ magnétique d'induction au champ magnétique d'excitation : $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

Terme	Importance	Description
Permittivité diélectrique (absolue ϵ , relative ϵ_r)	Essentiel	Propriété électrique du milieu de propagation qui relie le champ électrique de déplacement au champ électrique d'excitation : $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$. La permittivité diélectrique relative ϵ_r est le rapport entre la permittivité diélectrique absolue ϵ du milieu considéré et celle du vide ϵ_0 : $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$.
Polarisation (mode)	Prérequis	Propriété d'orientation des vecteurs de champ EM, typiquement celui du champ électrique. Certains modes présentent deux états de polarisation indépendants possibles, comme le mode TE ₁₁ dans un guide métallique creux à section droite circulaire. C'est une propriété également présente des ondes gravitationnelles, mais absente des ondes mécaniques.
Port	Complément	Synonyme d'accès (un quadripôle possède 2 ports).
Poynting (théorème de)	Standard	Relation qui établit le bilan des puissances à partir d'un volume fermé de forme quelconque où les propriétés EM sont homogènes.
Propagatif (mode)	Essentiel	Mode dont la fréquence est supérieure à celle de coupure.
Quart d'onde (ligne)	Complément	Ligne dont la longueur est un quart de la longueur d'onde à la fréquence de calcul. L'impédance ramenée à son entrée est proportionnelle à l'inverse de celle à sa sortie.
Quasi-TEM	Essentiel	Mode dont la composante suivant l'axe du guide est négligeable, permettant des modélisations simplifiées à base de lignes de transmission et d'un milieu homogène équivalent (milieu effectif).
Résistance de surface R_s	Complément	Résistance par unité de surface qui traduit l'affaiblissement de propagation d'une onde (pertes thermiques) dans un milieu de conductivité finie. Elle caractérise les pertes métalliques lorsque la profondeur de peau est négligeable (hautes fréquences).
Résistivité ρ	Standard	Inverse de la conductivité.
Rétrograde (onde, mode)	Standard	Qui se propage dans le sens inverse à la direction du repère.

Terme	Importance	Description
ROS	Essentiel	Rapport d'onde stationnaire, c'est le rapport entre le maximum et le minimum de l'enveloppe de l'onde stationnaire. Dans un guide (ou une ligne de transmission) adapté à son générateur, il ne dépend que des conditions de charge à son extrémité.
S_{11}, S_{21}	Essentiel	Coefficients de la matrice de répartition (matrice S). Lorsque tous ses accès sont adaptés, S_{11} est le coefficient de réflexion sur l'accès (ou port) 1, S_{21} celui de transmission du port 1 vers le port 2.
Stub	Standard	Anglicisme utilisé parfois à la place de ligne de transmission.
TEM (onde)	Essentiel	Transverse électromagnétique : dont les champs sont orthogonaux à la direction de propagation.
Transverse électrique (TE, mode)	Essentiel	Onde EM dans un guide d'axe z avec $E_z = 0$ mais $H_z \neq 0$
Transverse magnétique (TM, mode)	Essentiel	Onde EM dans un guide d'axe z avec $H_z = 0$ mais $E_z \neq 0$
Vecteur d'onde \vec{k}	Standard	Vecteur dans la direction de propagation de l'onde plane dont le module est le nombre d'onde k .
Vecteur de Poynting \vec{S}	Prérequis	$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \wedge \vec{H}^*$ en régime harmonique, sa partie réelle correspond à la densité de puissance de l'onde EM. Son flux au travers d'une surface détermine la puissance qui traverse celle-ci.
Vitesse de groupe v_g	Essentiel	$\frac{\partial \omega}{\partial \beta}$, vitesse de propagation de l'énergie transportée par l'onde, variable dans un guide dispersif. Elle est toujours inférieure ou égale à celle de l'onde EM dans le vide (c_0)
Vitesse de phase v_ϕ	Essentiel	ω/β , variable dans les guides dispersifs. C'est la vitesse à laquelle semble se déplacer une sinusoïde à l'intérieur d'un paquet d'ondes. C'est aussi celle à laquelle se déplace un extremum de stationnarité provenant de l'interférence des trajets qui forment un mode dans un guide. Elle peut selon le contexte tendre vers l'infini !

Index

- abaque de Smith, 28, 29, 30, 31, 32
adaptation (condition d'), 28, 29, 32
admittance, 9
CCE, 42
célérité, 17, 19, 24, 43, 45, 46
 cercle à ROS constant, 31, 32
champ électrique, 37
champ magnétique, 37
circuit adapté, 28
circuit ouvert (CO), 29
coefficient d'affaiblissement, 24
condition d'adaptation, 28
conductance, 9
conductivité électrique, 38
constante d'atténuation, 24, 45
constante de (propagation de la) phase, 24
constante de phase, 24, 45
constante de propagation, 45
court-circuit (CC), 29
court-circuit magnétique (CCM), 42
demi-onde (ligne), 25
densité de puissance, 41
diagramme de dispersion, 59
directe (onde), 11
dispersion, 63, 64, 66
dispersion inter-modale, 57
dispersion intra-modale, 57
enveloppe, 14
enveloppe d'onde stationnaire, 17
équation de Helmholtz, 43
équations des télégraphistes, 23
évanescence (mode), 66
facteur d'atténuation, 45
facteur de pertes, 39
facteur de propagation, 24
force de Lorentz, 37
force électrique, 37
force magnétique, 37
fréquence, 12
fréquence de coupure, 40, 57, 64, 66
générateur de Norton, 9
générateur de Thévenin, 9
guide circulaire, 62, 68
guide coaxial, 50
guide rectangulaire, 59, 60, 61, 62, 64, 65, 68, 69
homogène, 10
impédance caractéristique, 24, 25, 27, 28
impédance d'onde, 44
impédance de charge, 28
impédance intrinsèque (d'un milieu), 44
impédance ramenée, 27
impédance réduite, 27, 29
indice du milieu, 46
indirecte (onde), 12
interférences inter-symboles, 20
inverse, 12
isotrope, 10
LHI (linéaire, homogène, isotrope), 10, 38, 40, 41, 42
ligne bifilaire, 51
ligne de transmission, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 30, 51
linéaire, 10
longueur d'onde, 12
matrice de répartition, 18
matrice de répartition généralisée, 67
matrice S, 18
matrice S généralisée, 67
microruban, 15, 49, 50, 53, 70
milieu effectif, 54
mode de propagation, 57
mode de référence, 66
mode dégénéré, 60
mode dominant, 64
mode évanescence, 58
mode HE, 63
mode hybride, 63
mode LP, 63
mode polarisé, 62
mode résonant, 17
mode supérieur, 57
modes (orthogonalité), 68
multipôle, 17
nombre d'onde, 12, 24, 43, 46
 onde de courant, 21, 24, 87
 onde de tension, 21, 24, 87
 onde électrique, 21

- onde plane, 44, 45
- onde progressive, 11
- onde réduite, 12
- onde réduite généralisée, 67
- onde sphérique, 45
- onde stationnaire, 17, 24
- onde TEM, 44, 47
- onde transverse électromagnétique, 51
- paquet d'ondes, 20
- peau (épaisseur de), 46
- période, 12
- perméabilité magnétique, 38
- permittivité diélectrique, 38, 39
- polarisation circulaire, 68
- polariseur, 67
- port (d'un dispositif), 17
- Poynting (théorème de), 40, 41, 44
- pulsation, 12
- quadripôle, 18
- quart d'onde (ligne), 25
- réactance, 9
- relation de dispersion, 59
- résistance, 9
- résistance de surface, 46, 65, 66
- résistivité, 38
- rétrograde (onde), 12
- RLCG (modèle), 22
- ROS, 14, 29, 31, 32
- stationnaire (onde), 11
- substrat, 53
- susceptance, 9
- TEM (quasi), 54
- transverse électrique (TE), 58
- transverse électromagnétique (TEM), 44
- transverse magnétique (TM), 58
- vecteur d'onde, 12, 44, 105
- vecteur de Poynting, 41, 66, 68
- vitesse de groupe, 20, 60
- vitesse de phase, 20, 60

Références générales

- [1] J.C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, Clarendon press., vol. 1 et 2. Oxford, England, 1873.
- [2] Richard Phillips Feynman, Robert Leighton, et Matthew Sands, *Le cours de physique de Feynman*, Dunod., vol. Electromagnétisme 1 & 2. 2015.
- [3] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 3^e éd. Wiley, 2004.
- [4] Sophocles J. Orfanidis, « Electromagnetic Waves and Antennas ». <https://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/> (consulté le oct. 03, 2019).
- [5] G. Dubost, *Propagation des ondes électromagnétiques : exercices avec solutions, rappels théoriques, applications aux guides et fibres optiques*, 2e édition revue et augmentée. Paris Milan Barcelone: Masson, 1989.
- [6] G. O. Boudouris, *Circuits pour ondes guidées: théorie, réalisations et applications*. Paris: Dunod, 1975.
- [7] P. F. Combes, *Micro-ondes. cours et exercices 2, 2,*. Paris: Dunod, 1997.
- [8] C. Vassallo, *Théorie des guides d'ondes électromagnétiques*. Paris: Eyrolles, 1985.
- [9] Ph. Gelin, N. Caillère, Propagation guidée, Cours Telecom Bretagne, 2010.
- [10] F. Gardiol et J. Neirynck, *Hyperfréquences*. Paris: Dunod, 1987.

Tables

Table des figures

Figure 1 Exemple de schéma électrique	7
Figure 2 Générateurs équivalents (a) circuit linéaire quelconque (b) générateur de Thévenin (c) générateur de Norton	9
Figure 3 Onde unidimensionnelle (a) le long d'une corde - 1D, (b) richochet-2D, (c) Bang acoustique-3D	10
Figure 4 Trajectoires rectilignes d'ondes unidimensionnelles u_1 et u_2	11
Figure 5 Interface unidimensionnelle	13
Figure 6 Figures d'ondes stationnaires suivant $\rho =$ (a) 1, (b) -0.5, (c) 0.5, (d) 0	14
Figure 7 Exemple de variation fréquentielle du ROS et de pdB	15
Figure 8 Nomogramme pour la conversion entre indicateurs de stationnarité.....	16
Figure 9 Résonance (a) mode fondamental, (b) mode d'ordre 3	16
Figure 10 Nœuds d'interférence marqués par des grains de sable sur une plaque vibrante aux fréquences de résonance	17
Figure 11 (a) paramètres de répartition d'un duplexer en guide (3 accès), (b) répartiteur multivoie.....	19
Figure 12 Vitesse de phase et vitesse de groupe	20
Figure 13 Une analogie « courante » du phénomène de dispersion.....	20
Figure 14 Ligne de transmission (a) stationnarité relativement à l (b) modèle à base de quadripôles représentatif de portions infinitésimales.....	22
Figure 15 Modèle RLCG pour la ligne de transmission	22
Figure 16 Différentes représentations de la ligne de transmission dans des schémas électriques.....	25
Figure 17 Ligne de transmission représentée par un dipôle dans le simulateur ADS	25
Figure 18 Régime stationnaire et impédance le long d'une ligne de transmission chargée ...	26
Figure 19 Impédance équivalente à celle ramenée à l'entrée d'une ligne.....	27
Figure 20 Abaque de Smith, (a) en simulation (Matlab), (b) en mesure (analyseur de réseaux vectoriel).....	29
Figure 21 Lectures de base sur l'abaque de Smith	30
Figure 22 ROS et changement de plan de référence sur l'abaque de Smith	31
Figure 23 Ligne coaxiale fendue HP 806B (3 à 12 GHz) et chariot mobile, support de mesure d'ondes stationnaires par sonde.....	32
Figure 24 Schéma de principe pour l'adaptation simple stub (ici avec terminaison CC)	32
Figure 25 Champs et forces.....	37
Figure 26 Evolutions fréquentielles complexe de ϵ_r pour l'eau salée ().....	39
Figure 27 Volume pour le théorème de Poynting.....	40
Figure 28 Définition des grandeurs EM à l'interface entre deux milieux	42
Figure 29 Plaques parallèles métalliques (a) dans un champ d'ondes EM planes uniformes (b) lignes de champs	50
Figure 30 (a) Ligne microruban homogène, (b) modifiée, (c) coaxiale, (d) bifilaire	50

Figure 31 Facteurs de forme pour a) la ligne bifilaire, b) la ligne coaxiale, c) le guide à plans parallèles	52
Figure 32 Circuits planaires (a) microruban, (b) microruban modèle quasi-statique, (c) fente, (d) coplanaire, (e) Filtre microruban radiofréquence, (f) transition coplanaire microélectronique 60 GHz	54
Figure 33 Onde plane suivant deux polarisations dans un plan de coupe longitudinal du guide à plans parallèles	55
Figure 34 Ondes complémentaires dans un plan de coupe du guide à plans parallèles	56
Figure 35 Champ magnétique longitudinal résultant H_m dans le guide.....	58
Figure 36 Amplitude stationnaire transverse des champs électriques des modes TE_p	59
Figure 37 Diagramme de dispersion du guide rectangulaire en bande X (8-12,4 GHz), $a=22.86$ mm et $b=10.16$ mm	60
Figure 38 Champs instantanés des modes TE_{11} et TM_{11} dégénérés	61
Figure 39 Cartes des champs transverses de quelques premiers modes des guides rectangulaires ($a=22.86$ mm et $b=10.16$ mm, bande X 8-12.4 GHz) et circulaires (bande 10-11 GHz, $r=10.12$ mm)	62
Figure 40 Mode TE_{11} polarisé dans le guide métallique circulaire creux (a) vertical, (b) horizontal	62
Figure 41 Modes LP dans les fibres optiques (a) diagramme de dispersion, (b) mode $LP_{17,16}$	63
Figure 42 Champs instantanés du mode TE_{10}	65
Figure 43 Exemple de pertes conductrices dans le guide rectangulaire (a) alliage d'argent (b et c) alliage de cuivre	65
Figure 44 Ondes réduites généralisées	67
Figure 45 Polariseur en guide.....	67
Figure 46 Discontinuité brutale entre un guide rectangulaire et un guide circulaire	68
Figure 47 Modèle circuit associé à la jonction de deux guides monomodes	69
Figure 48 Modèle de transitions en guide (a) configurations (b) schéma équivalent	69
Figure 49 Filtre passe-bas en technologie microruban (a) empreinte physique, (b) modèle circuit, (c) paramètres S simulés (d) réalisation finale avec connectique coaxiale	70
Figure 1 Antennes métalliques imprimées (prototypes ST Microelectronics Crolles) suivant le procédé laser LDS sur un élément support de Smartphone multi bandes.....	72
Figure 2 Variation avec la fréquence de la réponse en réflexion d'une des antennes sur 6 prototypes.....	72
Figure 3 Modèle du guide d'ondes 2D et exemple de guide EM réel associé	74
Figure 4 Une des composantes harmoniques du signal d'excitation	74
Figure 5 Trajets obliques symétriques	75
Figure 6 Caractéristiques de câbles coaxiaux	77
Figure 7 Modèle fréquentiel (Debye 1 ^{er} ordre).....	77
Figure 1 Repères pour l'étude du guide optique intégré.....	78
Figure 2 Plan d'étude	79
Figure 3 Interface générale entre deux milieux LHI sans charges volumiques.....	102
Figure 4 Volume et surface de calcul	102
Figure 5 Surface et contour de calcul.....	103

Figure 6 Projection du vecteur d'onde sur les axes du guide 105

Table des tableaux

Tableau 1 Permittivité diélectrique et tangente de pertes pour quelques isolants.....	39
Tableau 2 Conductivité statique de métaux courants	40
Tableau 3 Epaisseur de peau et célérité électromagnétique dans des métaux à 1 GHz	46
Tableau 4 Atténuation dans quelques milieux diélectriques.....	47
Tableau 5 Guides standards - Classification.....	48
Tableau 6 Relations champs EM / tensions- courants	51
Tableau 7 Equivalences lignes multiphysiques	55

Annexes

4.1 Ecritures mathématiques

Les expressions des opérateurs ci-dessous sont à adapter pour les repères non cartésiens.

- $|a|$, a^* et φ_a : module (ou amplitude), conjugaison et argument (ou phase) du nombre complexe a
- $a(x)$: onde (réduite) à la position x
- \hat{e} : Vecteur unitaire suivant le vecteur \vec{e}
- ∂_x : notation abrégée de la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial_x}$
- ∂_x^2 : notation abrégée de la dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à x , soit $\frac{\partial^2}{\partial_x^2}$
- $\overrightarrow{U_T}(\overrightarrow{U_n})$: composante tangentielle (normale) du vecteur \vec{U}
- $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$: opérateur nabla ∇ et son expression en repère cartésien
- ∇U : notation abrégée de $\nabla \cdot U$, gradient d'une fonction scalaire U : $\nabla U = \partial_x U \hat{e}_x + \partial_y U \hat{e}_y + \partial_z U \hat{e}_z$
- $\nabla \vec{A}$: notation abrégée de $\nabla \cdot \vec{A}$, divergence du vecteur \vec{A} : $\nabla \vec{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z$
- $\vec{A} \wedge \vec{B}$: produit vectoriel des vecteurs \vec{A} et \vec{B} : $\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin(\widehat{\vec{A}, \vec{B}})$
- $\nabla \wedge \vec{A}$: rotationnel du vecteur \vec{A} : $\nabla \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}$,

souvent noté $\nabla \times \vec{A}$ dans les documents anglo-saxons

- ΔU : laplacien de la fonction scalaire U : $\Delta U = \partial_x^2 U + \partial_y^2 U + \partial_z^2 U$
- $\Delta \vec{A}$: laplacien du vecteur \vec{A} : $\Delta \vec{A} = (\nabla \cdot \nabla) \vec{A} = \Delta A_x \hat{e}_x + \Delta A_y \hat{e}_y + \Delta A_z \hat{e}_z$
- Δ_T : laplacien transverse $\Delta_T U = \partial_x^2 U + \partial_y^2 U$ ou $\Delta_T \vec{A} = \Delta A_x \hat{e}_x + \Delta A_y \hat{e}_y$
- \propto : proportionnel à

4.2 Grandeurs et notations

- f (Hz) : fréquence
- $\lambda(\lambda_0)$ (m) : longueur d'onde dans le milieu (dans le vide)
- λ_g (m) : longueur d'onde guidée
- λ_c (m) : longueur d'onde de coupure
- v_φ (m/s) : vitesse de phase
- v_g (m/s) : vitesse de groupe

- ω (rd/s) := $2\pi f$, pulsation temporelle de l'onde
- T (s) : période (temporelle)
- f_0 (Hz) : fréquence de résonance et/ou d'étude selon le contexte
- ω_0 (rad/s) : pulsation de résonance et/ou d'étude selon le contexte
- Q (Q_0) : facteur de qualité (à la résonance)
- BP : bande passante
- k_0 (m^{-1}) : nombre d'onde des ondes électromagnétiques dans le vide
- k (m^{-1}) : nombre d'onde dans le milieu
- k_T (m^{-1}) : nombre d'onde transverse
- $\vec{k}(\vec{k}_0)$ (m^{-1}) : vecteur d'onde dans le milieu (dans le vide)
- c_0 (m/s) := $3 \cdot 10^8$, célérité des ondes électromagnétiques dans le vide
- c (m/s) : célérité des ondes électromagnétiques dans le milieu
- β (rad/m) : constante de (propagation de la) phase
- α (Np/m) : constante d'atténuation
- γ (m^{-1}) := $\alpha + j\beta$ constante de propagation
- $v(x)$ (V) : tension à la position x
- $i(x)$ (A) : courant à la position x
- \vec{J} (A/m^2) : densité (surfique) de courant
- $E_v(x)$: enveloppe de l'onde à la position x
- $Z(x)$ (Ω) : impédance ramenée à la position x
- $Y(x) = \frac{1}{Z(x)}$ (S) : admittance ramenée à la position x
- Z_0 : impédance de référence ou de normalisation
- $\underline{z}(x)$ (Ω) := $Z(x)/Z_0$ impédance réduite relativement à Z_0 à la position x
- Z_c (Ω) : impédance caractéristique d'une ligne de transmission
- R, L, C, G (Ω, H, F, S) : respectivement résistance, inductance, capacité et conductance linéaires
- Z_{ch} (Ω) : impédance de charge
- Z_e (Ω) : impédance d'entrée
- $\rho = \rho_r + j\rho_i$: coefficient de réflexion
- ρ_s (C/m^2) : densité surfacique de charges
- ρ_v (C/m^3) : densité volumique de charges
- ρ_R ($\Omega \cdot m$) : résistivité, inverse de la conductivité
- ρ_{dB} (dB) : coefficient de réflexion en dB

- t : coefficient de transmission
- ROS : rapport d'onde stationnaire
- RL (dB) : Return Loss ($= -\rho_{dB}$)
- a_i (b_i) : onde réduite incidente (réfléchie) sur l'accès i
- s_{ij} : paramètre de la matrice de répartition (S) d'un multipôle. Il relie l'onde sortante b_j sur l'accès j à l'onde entrante a_i sur l'accès i
- q (C) : charge électrique
- \vec{F} (N) : force
- \vec{E} (V/m) : champ électrique
- \vec{H} (A/m) : champ (d'excitation) magnétique
- \vec{J} : densité de courant (\vec{J}_s (A/m²) de surface, \vec{J}_v (A/m³) de volume)
- \vec{B} (T ou Vs/m²) : induction magnétique
- \vec{D} (As/m²) : déplacement (ou induction) électrique
- η (η_0) (Ω) : impédance intrinsèque du milieu (du vide $\approx 377\Omega$)
- σ_s (S/m) : conductivité statique
- σ (S/m) : conductivité
- $\mu_r := \mu'_r - j\mu''_r = \mu/\mu_0$, perméabilité magnétique relative complexe
- $\varepsilon_r := \varepsilon'_r - j\varepsilon''_r = \varepsilon/\varepsilon_0$, permittivité diélectrique relative complexe
- $\tan\delta$: facteur de pertes
- R_s (Ω) : résistance de surface
- δ (m) : épaisseur de peau
- W_e (W_m) (J) : énergie moyenne électrique (magnétique)
- \vec{S} (W/m²) : vecteur de Poynting
- P (W) : puissance
- P_c (W) : puissance dissipée par conduction (pertes conductrices)
- P_d (W) : puissance dissipée dans le milieu diélectrique (pertes diélectriques)
- TEM : transverse électromagnétique
- TE_{mn} (TM_{mn}, HE_{mn}, LP_{mn}) : mode transverse électrique (transverse magnétique, hybride, linéairement polarisé) d'ordre mn

4.3 Conditions électriques générales à l'interface entre deux milieux

Grandeurs et orientations sur la frontière entre deux milieux quelconques :

Milieu 2 : ϵ_{r2}, μ_{r2}

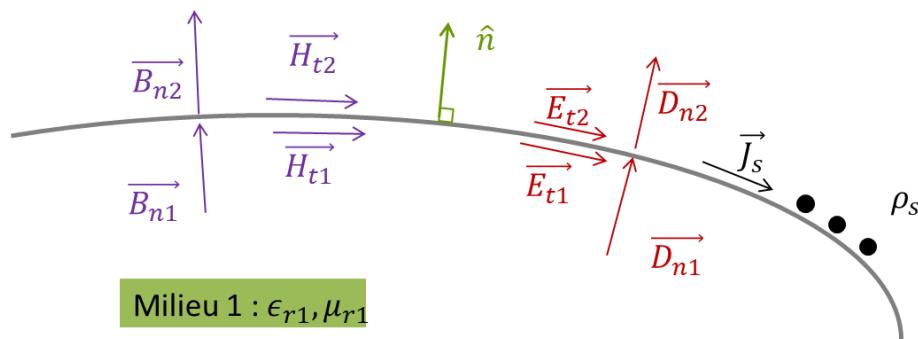


Figure 3 Interface générale entre deux milieux LHI sans charges volumiques

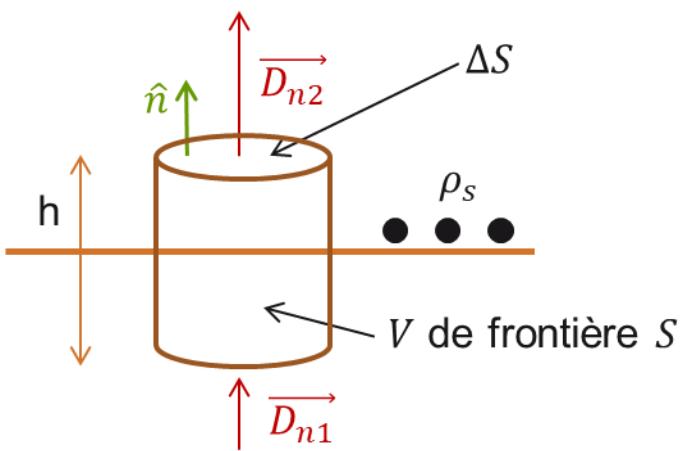


Figure 4 Volume et surface de calcul

$$\nabla \vec{D} = \rho \text{ (Théorème de Gauss)}$$

Application du théorème d'Ostrogradski :

$$\int_V \nabla \vec{D} \, dV = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \, dV$$

A la limite :

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow S_{Lat} \rightarrow 0 : \Delta S D_{n2} - \Delta S D_{n1} = \Delta S \rho_s$$

On en déduit :

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s$$

Entre deux diélectriques, la densité surfacique de charges libres est nulle, on a alors

$$\rho_s = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n}$$

La même démarche est suivie à partir de $\nabla \vec{B} = 0$ (Maxwell) :

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

Ces deux équations conduisent aux conditions suivantes en l'absence de charges de surface et entre deux milieux amagnétiques :

$\vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2}$ (Composantes tangentielles identiques pour le champ électrique)

$\vec{D}_{n1} = \vec{D}_{n2}$ (Composantes normales identiques pour le déplacement électrique)

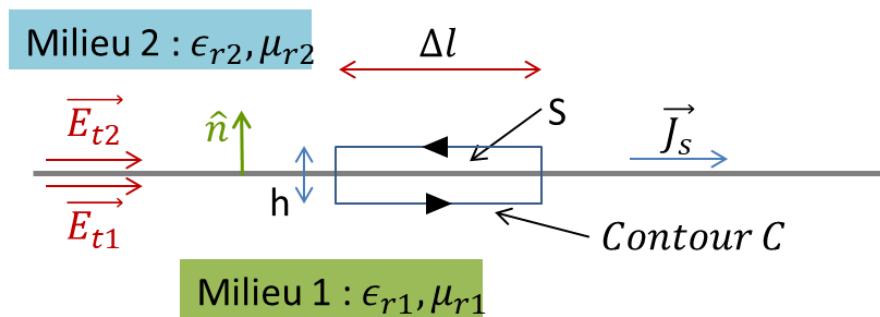


Figure 5 Surface et contour de calcul

$$\nabla \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{B} \text{ (Maxwell)} \Rightarrow \left(\iint_S \nabla \wedge \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{C} \right) = -j\omega \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

A la limite $h \rightarrow 0 \Rightarrow S \rightarrow 0$ L'intégrale sur \vec{B} s'annule celle sur le contour de \vec{E} conduit à $\Delta l \cdot \vec{E}_{t1} - \Delta l \cdot \vec{E}_{t2} = 0$

Soit $\vec{E}_{t1} = \vec{E}_{t2}$: les champs électriques tangentiels sont égaux de part et d'autre de l'interface. Cette relation peut être aussi exprimée de la façon suivante :

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \wedge \hat{n} = \vec{0}$$

En conséquence, puisque le champ électrique est nul dans un métal parfait, le champ tangentiel est nul à sa surface

Suivant la même démarche et à partir de $\nabla \wedge \vec{B} = -j\omega \vec{E} + \vec{J}$ (Maxwell) :

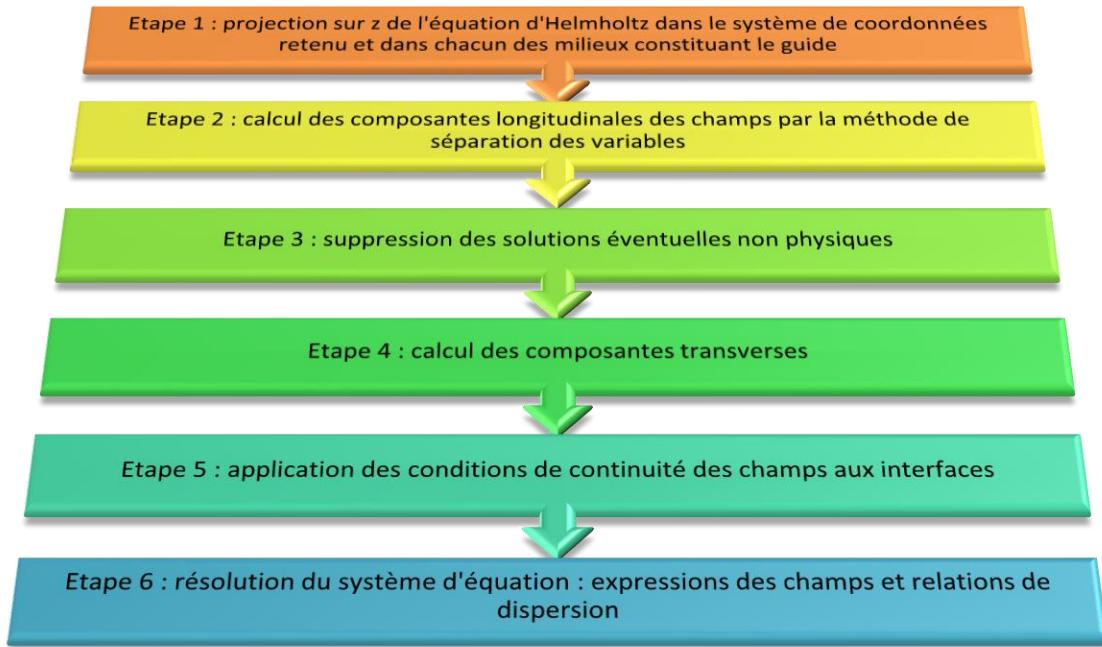
$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \wedge \hat{n} = -\vec{J}_s$$

En l'absence de courants de surface, typiquement sur l'interface entre deux milieux diélectriques, $\vec{J}_s = \vec{0}$ et $\vec{H}_{t1} = \vec{H}_{t2}$

A l'interface diélectrique métal parfait : $\vec{H}_1 \wedge \hat{n} = \vec{J}_s$

4.4 Méthode d'étude systématique des modes non TEM

Pour les guides canoniques (interfaces correspondant aux surfaces de coordonnées, conditions aux limites invariantes sur chaque interface, milieux idéalisés sans pertes).



Soit \vec{U} le champ électrique ou magnétique dans le milieu diélectrique du guide sans pertes. On peut toujours le décomposer sous la forme $\vec{U} = [\overrightarrow{U_T(x,y)} + \overrightarrow{U_z(x,y)}] e^{-j\beta z}$. En injectant dans les équations de Maxwell (simplifiées par l'absence de charges et de courants), on obtient :

$$\begin{cases} \partial_y E_z + j\beta E_y = -j\omega\mu H_x & (a) \\ j\beta E_x + \partial_x E_z = j\omega\mu H_y & (b) \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x = -j\omega\mu H_z & (c) \\ \partial_y H_z + j\beta H_y = j\omega\epsilon E_x & (d) \\ j\beta H_x + \partial_x H_z = -j\omega\epsilon E_y & (e) \\ \partial_x H_y - \partial_y H_x = j\omega\epsilon E_z & (f) \end{cases} \quad (Eq. 150)$$

En combinant respectivement (d) et (b), (e) et (a), (a) et (e) et finalement (b) et (d), les relations reliant les composantes transverses aux composantes longitudinales sont extraites pour un repère cartésien :

$$\begin{cases} E_x = \frac{-j}{k_T^2} (\beta \cdot \partial_x E_z + \omega\mu \cdot \partial_y H_z) & (a) \\ E_y = \frac{j}{k_T^2} (-\beta \cdot \partial_y E_z + \omega\mu \cdot \partial_x H_z) & (b) \\ H_x = \frac{j}{k_T^2} (\omega\epsilon \cdot \partial_y E_z - \beta \cdot \partial_x H_z) & (c) \\ H_y = \frac{-j}{k_T^2} (\omega\epsilon \cdot \partial_x E_z + \beta \cdot \partial_y H_z) & (d) \end{cases} \quad (Eq. 151)$$

Où on a posé :

$$k_T^2 = k^2 - \beta^2 \quad (Eq. 152)$$

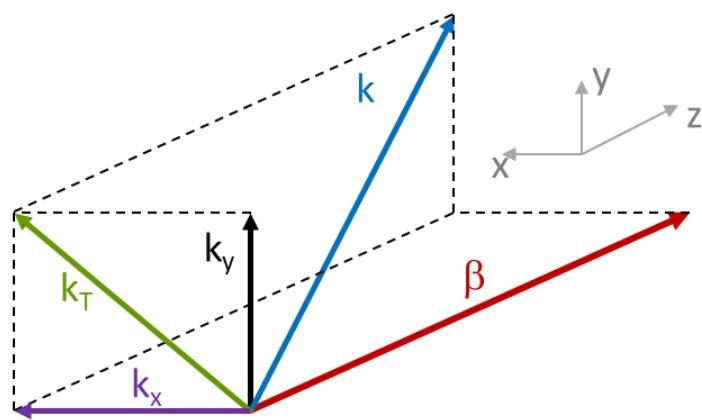


Figure 6 Projection du vecteur d'onde sur les axes du guide

4.5 Abaques de Smith pour les déterminations

The Complete Smith Chart

Black Magic Design

