



**Formation d'ingénieur en partenariat**

**UV « *Base physiques pour les télécoms* »**

**Module ELP 113**

Responsable : Jacky Ménard

**Modèles de base et fonctions physiques  
pour les télécoms**

**Polycopié de cours**

Auteurs : Bruno Fracasso (OPT) et Alain Péden (MO)

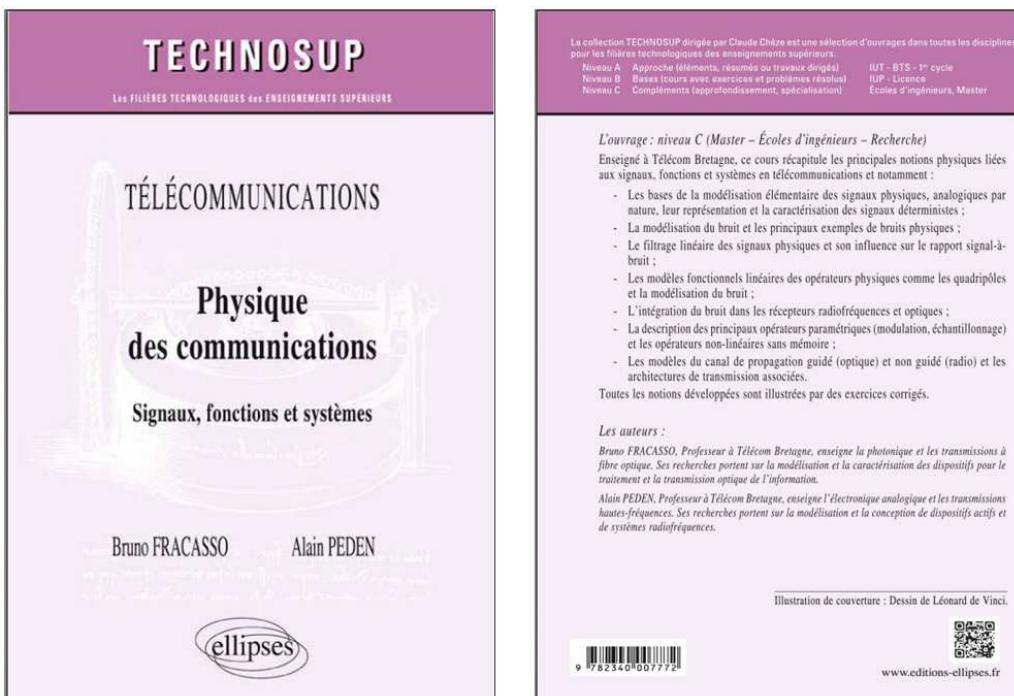
Année 2021

## Note au lecteur

Ce document présente le cours associé à un module d'enseignement de 21 heures (ELP 113), comprenant sept cours, six petites classes, et un bureau d'études. On y aborde les points suivants :

1. définition des représentations de l'information physique sous forme de signaux, de paramètres et de grandeurs physiques,
2. introduction de la notion de bruit physique, sous forme de signal aléatoire,
3. modélisation des transformations physiques subies par l'information dans un système de télécommunications, sous forme de modèles analytiques ou de modèles fonctionnels, d'opérateurs linaires ou non-linéaires.

Dans une version très améliorée, ce polycopié de cours a donné naissance à un livre paru en 2015 aux éditions Ellipses, intitulé "Physique des communications". L'ouvrage reprend les notions développées dans ce cours et les approfondit, en les illustrant avec de nombreux exercices corrigés. Il est disponible à la bibliothèque de l'IMT Atlantique, campus de Brest.



Dans le but d'améliorer ce polycopié et de favoriser les échanges sur les sujets abordés, nous encourageons le lecteur à nous faire parvenir toute remarque de forme ou de fond par courrier électronique aux adresses suivantes :

- o [alain.peden@imt-atlantique.fr](mailto:alain.peden@imt-atlantique.fr)
- o [bruno.fracasso@imt-atlantique.fr](mailto:bruno.fracasso@imt-atlantique.fr)

# Table des matières

<b>1 Modélisation élémentaire des signaux physiques</b>	<b>7</b>
1.1 Rappels sur les grandeurs physiques . . . . .	7
1.1.1 Introduction . . . . .	7
1.1.2 Le système international . . . . .	7
1.2 Signal, bruit et information . . . . .	9
1.2.1 Signal physique . . . . .	9
1.2.2 Une première approche du bruit . . . . .	10
1.2.3 Théorie et traitement des signaux physiques . . . . .	11
1.2.4 Théorie et traitement de l'information . . . . .	11
1.2.5 Modélisation de la réalité physique . . . . .	13
1.3 Représentation et caractérisation des signaux déterministes . . . . .	14
1.3.1 Aspect temporel : puissance et énergie d'un signal . . . . .	14
1.3.2 Rappels : unités logarithmiques - décibels . . . . .	15
1.3.3 Energie et puissance : aspects fréquentiels . . . . .	17
1.3.4 Quid des fréquences négatives ? . . . . .	18
1.3.5 Et les fréquences spatiales ? . . . . .	19
<b>2 Notions de bruit physique</b>	<b>21</b>
2.1 Introduction . . . . .	21
2.1.1 Une première approche . . . . .	21
2.1.2 Types et sources de bruits . . . . .	22
2.2 Modélisation du bruit en physique . . . . .	23
2.2.1 Notion de fonction aléatoire . . . . .	23
2.2.2 Moyenne et variance . . . . .	24
2.2.3 Stationnarité . . . . .	24
2.2.4 Ergodisme . . . . .	25
2.2.5 Puissance d'un signal aléatoire stationnaire . . . . .	26
2.2.6 Bruit blanc . . . . .	27
2.3 Exemples de bruits physiques . . . . .	28
2.3.1 Bruit électronique thermique . . . . .	28
2.3.2 Bruit de grenaille électronique . . . . .	31
<b>3 Filtrage linéaire des signaux physiques</b>	<b>33</b>
3.1 Contexte et définitions . . . . .	33
3.2 Modélisation des Filtres . . . . .	34
3.2.1 Description temporelle (cas d'un signal déterministe) . .	34
3.2.2 Réponse indicielle . . . . .	36
3.2.3 Réponse harmonique . . . . .	36
3.3 Exemples de filtres physiques . . . . .	37
3.3.1 Circuit électrique du premier ordre . . . . .	37
3.3.2 Système mécanique masse-ressort . . . . .	38
3.4 Retard de phase et de groupe d'un filtre . . . . .	39
3.5 Filtrage des signaux aléatoires . . . . .	40

3.5.1	Cas général . . . . .	40
3.5.2	Cas d'un bruit blanc . . . . .	41
3.5.3	Bandé équivalente de bruit . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Modèles fonctionnels des opérateurs physiques</b>	<b>45</b>
4.1	Contexte et définitions . . . . .	45
4.2	Opérateurs linéaires : les quadripôles . . . . .	46
4.2.1	Représentation matricielle des quadripôles . . . . .	46
4.2.2	Quadripôles aux hautes fréquences . . . . .	48
4.2.3	Association de quadripôles . . . . .	51
4.2.4	Détermination des paramètres des matrices . . . . .	51
4.2.5	Caractéristiques particulières des quadripôles passifs . . . . .	53
4.2.6	Quadripôle connecté à son environnement extérieur . . . . .	55
4.3	Bruit dans les quadripôles . . . . .	57
4.3.1	Rappels sur les sources de bruit . . . . .	57
4.3.2	Définition du facteur de bruit . . . . .	57
4.3.3	Définition de la température équivalente de bruit . . . . .	59
4.3.4	Mise en cascade de quadripôles bruyants . . . . .	59
4.4	Puissance de bruit captée par une antenne . . . . .	60
4.5	Puissance de bruit dans un récepteur optique . . . . .	61
4.5.1	A retenir . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Bilan de liaison : calcul du rapport signal à bruit</b>	<b>63</b>
5.1	Introduction . . . . .	63
5.2	Chaînes d'émission et de réception . . . . .	63
5.2.1	Architectures . . . . .	63
5.2.2	Modulations . . . . .	66
5.3	Le canal de transmission . . . . .	70
5.3.1	Cas du canal radio-électrique (voir module ELP 112) . . . . .	70
5.3.2	Cas du canal guidé (voir module ELP112) . . . . .	73
5.4	Calcul du rapport signal à bruit en entrée d'un récepteur . . . . .	74
5.4.1	Généralités . . . . .	74
5.4.2	Cas du récepteur radio . . . . .	74
5.4.3	Cas du récepteur optique . . . . .	76
<b>6</b>	<b>Complément : aux sources des télécommunications</b>	<b>79</b>
6.1	Approche historique . . . . .	79
6.1.1	Introduction . . . . .	79
6.1.2	Aux origines . . . . .	80
6.1.3	Le télégraphe optique . . . . .	81
6.1.4	Le télégraphe électrique . . . . .	82
6.1.5	Le télégraphe parlant . . . . .	83
6.1.6	Du transistor au circuit intégré . . . . .	85
6.1.7	L'émergence des radiocommunications . . . . .	87
6.1.8	Transmission des images . . . . .	88

6.1.9	La transmission par fibre optique . . . . .	90
6.2	Source d'information et support de transmission . . . . .	92
6.2.1	Sources d'information . . . . .	92
6.2.2	Supports de transmission . . . . .	93
6.2.3	Des communications au traitement du signal . . . . .	96
6.2.4	Du système au réseau . . . . .	98



# 1

## Modélisation élémentaire des signaux physiques

### 1.1 Rappels sur les grandeurs physiques

#### 1.1.1 Introduction

Un système physique est décrit par un ensemble de *grandeur physiques* et d'équations reliant ces grandeurs. Par exemple, la force et la masse ( $F = mg$ ) ou le potentiel et l'intensité ( $U = RI$ ). Il existe un certain nombre de grandeurs de base, indépendantes par définition, et qui permettent de décrire toutes les autres grandeurs d'un système (longueur, masse, temps...). Les autres grandeurs sont dites *dérivées* et sont exprimées en fonction des grandeurs de base, le plus souvent sous forme de puissances entières et par des relations algébriques. Par exemple, l'accélération est une grandeur dérivée de la longueur et du temps.

Il ne faut pas confondre la grandeur physique et l'*unité* dans laquelle elle s'exprime. Ainsi, l'expression du travail  $W$  d'une force  $F$  sur une distance  $L$ , i.e.  $W = FL = mgL$  traduit une relation entre grandeurs physiques, qui s'exprime en termes d'unités sous la forme  $1J = 1 \text{ kg} \cdot 1\text{m}^2 \cdot 1\text{s}^{-2}$ . Les grandeurs physiques pour lesquelles tous les exposants des dimensions de base sont égaux à zéro sont dites sans dimension. C'est le cas d'un angle, exprimant le rapport entre deux longueurs.

#### 1.1.2 Le système international

Le système international (S.I.) est formé des sept grandeurs fondamentales du tableau 1.1. Chaque unité reçoit des mesures de référence les plus précises possibles, mais la valeur peut évoluer avec les précisions disponibles de l'époque. Ainsi :

- **1 m** : longueur parcourue dans le vide pendant  $1/299792458$  s. Auparavant, le "mètre étalon" était constitué d'une barre de platine irridié à la température de  $20^\circ \text{C}$ , stockée au Bureau International des Poids et Mesures<sup>1</sup> (BIPM).

---

1. situé au Pavillon de Breteuil, Sèvres, France, site <http://www1.bipm.org>

- **1 kg** : masse du prototype international stocké au BIPM
- **1s** : durée de 9 192 631 770 périodes du rayonnement correspondant à la transition entre deux niveaux hyperfins de base du Césium 133. La définition précédente (approximativement 1/31 556 925,9747 de l'année 1900) posait des problèmes de reproductibilité de la mesure.
- **1A** : courant qui, maintenu dans deux conducteurs de longueur infinie et de section négligeable, placés à 1m de distance dans le vide, produit une force de  $2 \cdot 10^{-7}$  N par mètre linéaire.
- **1K** : 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau (liquide + solide + vapeur) définie sur le diagramme  $P = f(T)$ .
- **1 mol** : quantité d'entités élémentaires identiques contenues dans 0,012 kg de carbone 12.
- **1 cd** : intensité lumineuse dans une direction donnée pour une source émettant un rayonnement monochromatique de fréquence  $540 \cdot 10^{12}$  Hz avec une intensité de radiation de 1/688 W/sr (Watt par steradian).

Grandeur	Unité	Symbole
Longueur	mètre	m
Masse	kilogramme	kg
Quantité de matière	Mole	mol
Temps	Seconde	s
Intensité lumineuse	Candela	cd
Température thermodynamique	Kelvin	K
Courant électrique	Ampère	A

TABLE 1.1 – Grandeur du système international

Un certain nombre d'unités sont dérivées des unités S.I., comme le rappelle le tableau 1.2.

Dans de nombreux cas, des unités de petite valeur sont plus judicieuses à manipuler dans les conditions expérimentales rencontrées. Il existe un système formé par de telles unités, le système CGS<sup>2</sup>, comme illustré par le tableau 1.3.

On rappelle enfin les valeurs des principales constantes fondamentales :

- Constante d'Avogadro :  $N = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Charge élémentaire :  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

2. Abréviation de Centimètre Gramme Seconde

Grandeurs	Nom de l'unité	Symboles	Equivalent S.I.
Force	Newton	N	$\text{m kg s}^{-2}$
Pression	Pascal	Pa	$\text{m}^{-1} \text{kg s}^{-2}$
Energie	Joule	J	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-2}$
Puissance	Watt	W	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-3}$
Fréquence	Herz	Hz	$\text{s}^{-1}$
Charge électrique	Coulomb	C	As
Résistance électrique	Ohm	$\text{W m}^2$	$\text{kg s}^{-3} \text{A}^{-3}$
Potentiel électrique	Volt	V	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-3} \text{A}^{-1}$
Densité de champ magnétique	Tesla	T	$\text{kg s}^{-2} \text{A}^{-1}$
Radioactivité	Becquerel	Bq	$\text{s}^{-1}$

**TABLE 1.2 – Principales unités dérivées des grandeurs du système international**

Grandeurs	Nom de l'unité	Symboles	Equivalent S.I.
Force	dyne	dyn	$\text{cm g s}^{-2}$
Longueur	centimètre	cm	
Energie	erg	erg	$\text{cm}^2 \text{g s}^{-2}$
Masse	gramme	g	

**TABLE 1.3 – système CGS**

- Vitesse de la lumière :  $c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$
- Constante de gravitation :  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
- Constante de Boltzmann :  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$
- Constante de Planck :  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js.}$

Pour toute information complémentaire, on pourra se référer au site très complet du National Institute of Standard and Technology (NIST) situé à l'adresse <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>.

## 1.2 Signal, bruit et information

### 1.2.1 Signal physique

De manière générale, un signal est la représentation physique d'une information qu'il transporte de sa source à une destination. Le mot "signal" vient de signe -signum en latin- qui dénote un objet, une marque, un élément de langage.

Message et signaux subissent des transformations nécessaires à leur transmission (modulation, codage) mais ne sont que les véhicules d'une entité plus fondamentale (mais plus difficilement définissable), l'information, invariante dans ces transformations. Si l'on revient au signal, il constitue la manifestation physique d'une grandeur mesurable telle qu'un courant, une tension, un champ électrique, une force, une température ou une pression. La valeur (instantanée ou moyenne) de cette grandeur mesurable s'exprime en unités du système international. Les signaux seront souvent représentés par des "fonctions" (attention toutefois à ce terme) dépendant d'une variable temporelle  $t$  et/ou de variables spatiales  $(x,y,z)$ . On représentera ainsi :

- une tension électrique (en V) par un signal unidimensionnel temporel,  $v(t)$
- une image fixe par un signal spatial d'éclairement  $i(x,y)$  (en W/m<sup>2</sup>),
- l'amplitude du champ électrique d'une onde électromagnétique progressive par un signal  $s(x,y,z,t)$

Cette liste n'est évidemment pas exhaustive.

### 1.2.2 Une première approche du bruit

Le bruit<sup>3</sup> est défini comme tout phénomène perturbateur gênant l'émission, la transmission, la perception ou l'interprétation d'un signal, par analogie avec les nuisances acoustiques du même nom. Il est utile de distinguer deux types de bruits : les bruits *non-aléatoires* causés par le mélange du signal utile avec d'autres signaux (ex. ronflement secteur à 50 Hz dans les circuits électroniques, rayonnement fossile en radioastronomie) et les bruits *aléatoires*. En général, le bon fonctionnement d'un système (ce terme reste à définir) n'est assuré que si le *niveau* du signal utile, défini par la puissance de signal utile  $P_s$ , dépasse de plusieurs ordres de grandeur celui du bruit  $P_b$ . On utilise alors comme indicateur de contamination le rapport signal-sur-bruit (signal-to-noise ratio, SNR) défini par :

$$\text{SNR} = 10 \log \left( \frac{P_s}{P_b} \right) 10 \log \left( \frac{P_s}{P_b} \right) \quad (1.1)$$

Toutefois, la distinction entre signal et bruit dépend de l'intérêt de l'utilisateur (i.e. le récepteur) : les ondes électromagnétiques d'origine galactique sont du bruit pour un ingénieur en télécommunications par satellites, mais un signal utile pour les radio-astronomes. Quoi qu'il en soit, un signal entaché de bruit reste un signal et les mêmes modèles de description et de traitement s'appliquent à la description du signal utile et à celle des perturbations. Cette discipline commune porte le nom de théorie du signal.

---

3. noise en Anglais

### 1.2.3 Théorie et traitement des signaux physiques

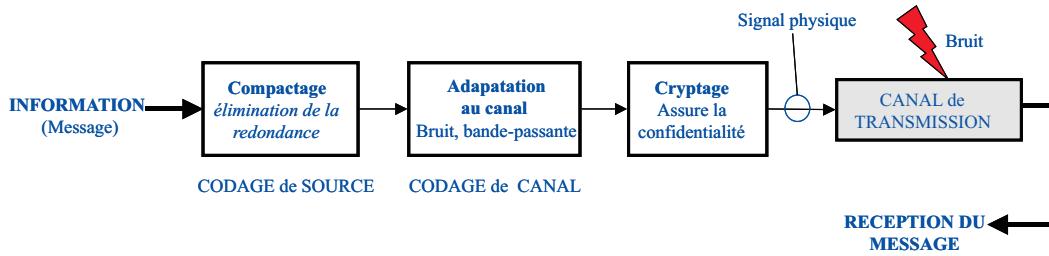
La théorie du signal a pour objectif principal la description mathématique des signaux, permettant de mettre en évidence ses principales caractéristiques : forme temporelle, répartition fréquentielle de l'énergie, puissance moyenne etc... Elle offre également le moyen d'analyser la nature des perturbations subies par les signaux lors de leur passage par les blocs fonctionnels d'une chaîne de traitement ou de transmission de l'information (cf chapitre 7), dispositifs le plus souvent électroniques, mais également optiques, mécaniques, acoustiques ou chimiques. A partir de là, le traitement de signal est une discipline qui, s'appuyant sur les ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliquée, a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs d'information. Ses domaines d'application sont extrêmement variés : télécommunications, métrologie, géophysique, astronomie, surveillance des processus industriels, traitement d'images, acoustique etc... Une branche importante du traitement du signal vise à séparer l'information utile du bruit superposé à l'information utile et ce par différentes techniques d'analyse, de filtrage, de mesure, de détection, d'identification. L'analyse d'un signal consiste à en isoler les composantes essentielles, afin d'en mieux cerner la nature et les origines. La mesure d'un signal, en particulier aléatoire (donc bruité), consiste à estimer la valeur d'une grandeur caractéristique qui lui est associée avec un certain degré de confiance (moyenne, variance etc ...). La synthèse d'un signal consiste à créer un signal de forme donnée en combinant des signaux élémentaires. La modulation et le changement de fréquence sont des procédures essentielles pour adapter un signal aux caractéristiques fréquentielles d'une voie de transmission.

### 1.2.4 Théorie et traitement de l'information

#### Paradigme de Shannon

L'*information* est un mot-clé réservé au processus de communication, i.e. transfert d'un message de sa source à sa destination. La théorie de l'information (parfois identifiée à celle de la communication) est une théorie mathématique des messages, prenant en compte leurs propriétés statistiques et permettant d'évaluer les performances du système de transmission de ces messages en présence de bruit. C'est à C.E. Shannon que l'on doit l'exposé de cette théorie en 1948. Le processus suit une chaîne –appelée paradigme de Shannon– schématisée sur la figure 1.1.

- Le premier étage de la chaîne vise à augmenter la compacité du signal d'entrée -porteur de l'information à transmettre- par élimination de toute redondance inutile (codage de source).
- Le second étage vise à accroître la sécurité de la transmission –en présence de bruits– par incorporation d'une certaine redondance calculée permettant la détection, voire la correction des principales erreurs (codage de canal).



**FIGURE 1.1 – Synoptique d'une chaîne de transmission de l'information (vision simplifiée !)**

- Le troisième étage vise enfin à assurer le secret de la communication (par embrouillage ou cryptage).

Le canal de propagation est une source de bruit pour le signal. Un schéma identique (mais à l'envers) est applicable pour la réception du message.

### Quantité d'information d'une source

Si l'on peut quantifier un signal par une mesure physique, quantifier une information est moins naturel. Cela conduit à voir la source d'information comme émettant un message aléatoire, et à définir la quantité d'information de ce message comme une *mesure de son imprévisibilité*. Shannon a ainsi proposé de mesurer la quantité d'information apportée par la réalisation d'un événement  $\eta$  de probabilité  $P(\eta)$  par la quantité  $h(\eta) = -\log_2[P(\eta)]$ , qui est bien une fonction croissante de l'improbabilité de  $\eta$ . Lorsque le signal de la source est répétitif et obéit à une statistique invariante dans le temps (stationnaire), on définit une quantité moyenne d'information produite par cette source sous forme d'une grandeur (non physique cette fois) appelée *entropie*<sup>4</sup>. Si l'émission de la source est décrite par une suite de symboles indépendants  $\eta_i$  de probabilité  $p_i = P(\eta_i)$ , on définit l'entropie  $H_s$  de la source comme la quantité d'information moyenne associée à chaque symbole, c'est-à-dire :

$$H_s = - \sum_i p_i \log_2[P(\eta_i)] \quad (1.2)$$

### Analogie thermodynamique

L'entropie avait été introduite en 1865 par Clausius pour caractériser l'état de désordre d'un système et permettre de préciser quantitativement le second principe de la thermodynamique : l'entropie d'un système isolé ne peut que croître. Ceci correspond au caractère spontané de l'évolution de l'ordre vers le désordre. La définition microscopique de l'entropie a été donnée en 1872 par Boltzmann :

4. du grec entropē signifiant retour

si  $W$  désigne le nombre d'états microscopiques accessibles<sup>5</sup> au système (pour un état macroscopique donné), alors l'entropie de celui-ci est :

$$S = k \log W \quad (1.3)$$

où  $k$  est la constante de Boltzmann qui s'exprime donc dans la même unité que l'entropie, i.e. en  $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$ . L'entropie mesure ici l'indétermination associée à  $W$  configurations microscopiques également probables, indiscernables à l'échelle macroscopique. Le nombre  $W$  est généralement énorme, l'ordre de grandeur étant  $10^{10^{15}}$ .

### 1.2.5 Modélisation de la réalité physique

Les signaux que l'on utilise sont des grandeurs scalaires ou vectorielles, et servent à modéliser une réalité qui ne nous est accessible que via les mesures que l'on peut faire. Ainsi, en électrostatique, il est difficile de vouloir représenter une distribution de charge  $\rho(r)$  ayant une valeur définie en chaque point, dans la mesure où tout expérimentateur est incapable de déterminer  $\rho$  pour tout  $r$ . Non seulement, il faudrait une infinité de mesures, mais tout appareil de mesure ne peut donner que l'effet produit sur lui par les charges situées dans un voisinage non nul du point considéré. En réalité, l'expérimentateur accède indirectement à la distribution de charges par ses *propriétés*, c'est-à-dire toute une famille de grandeurs (scalaires) telles que le potentiel  $V_0$  à l'origine ou l'énergie électrostatique totale  $U_{\text{tot}}$ , respectivement définis par :

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(r)}{r} \, d\tau \quad \text{et} \quad U_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \rho(r)V(r) \, d\tau \quad (1.4)$$

où  $d\tau$  désigne un élément de volume. On est ainsi amené à considérer une distribution de charge non pas comme une fonction  $\rho(r)$  définie en tout point, mais comme une fonctionnelle (ou une distribution), c.-à.-d. comme un opérateur faisant correspondre le résultat d'une mesure à une fonction d'intégration, dite *fonction test*. Ainsi, dans les exemples ci-dessus, on peut écrire  $\langle \rho, 1/r \rangle = 4\pi\varepsilon_0 V_0$  et  $\langle \rho, V \rangle = 2U_{\text{tot}}$ .

De manière générale, le recours aux distributions (à la place des fonctions) permettra de modéliser au mieux la réalité physique. Leur justification et les développements mathématiques sous-jacents sont dus au mathématicien (et humaniste !) français Laurent Schwartz. On renvoie le lecteur au module MTS101 pour une présentation de synthèse sur le sujet.

---

5. La mécanique statistique postule que tous les états accessibles d'un système en équilibre sont équiprobables.

## 1.3 Représentation et caractérisation des signaux déterministes

On rappelle dans cette partie les principales propriétés des signaux dits "déterministes", dont on connaît la valeur à chaque instant et/ou en chaque point de l'espace. Ils ne présentent donc pas de caractère aléatoire. Ils présentent toutefois un intérêt limité en télécommunications, dans la mesure où ils ne véhiculent aucune information.

### 1.3.1 Aspect temporel : puissance et énergie d'un signal

On note  $s(t)$  la valeur instantanée du signal considéré. Sa **puissance instantanée** est  $P_s(t) = |s(t)|^2$ . En électronique, selon que  $s$  désigne une tension ou un courant, l'unité de puissance est le Volt carré ( $V^2$ ), l'Ampère carré ( $A^2$ ) ou le Watt (W, mesuré aux bornes d'une résistance de  $1\ \Omega$ ).

La **valeur moyenne** et la **valeur quadratique moyenne** de  $s$  sur une durée  $T$  sont égales respectivement à :

$$s_m = \frac{1}{T} \int_T s(t) dt \quad \text{et} \quad s_{qm} = \frac{1}{T} \int_T |s(t)|^2 dt \quad (1.5)$$

On définit la **valeur efficace** de  $s$  par  $s_{eff} = \sqrt{s_{qm}}$ , que l'on désigne encore par valeur "RMS" (Root Mean Square).

Lorsque ces quantités existent, l'**énergie partielle** et l'**énergie totale** du signal sont respectivement définies par :

$$E_{[t_1, t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt \quad \text{et} \quad E_{tot} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \quad (1.6)$$

Ces quantités s'expriment en Joules (J). La puissance instantanée  $P_s(t)$  vue plus haut correspond par conséquent à une *densité temporelle d'énergie* (en J/s ou W). On rappelle que la puissance dissipée aux bornes d'un dipôle électrique résistif est  $P_s(t) = v(t)i(t) = R i^2(t)$  (en W). L'énergie dissipée (en J) sur l'intervalle de temps  $[t_1, t_2]$  est donnée par

$$E_{[t_1, t_2]} = R \int_{t_1}^{t_2} |i(t)|^2 dt \quad (1.7)$$

Les signaux périodiques ne sont pas à énergie totale finie. De manière générale, les systèmes physiques présentant un régime transitoire à décroissance rapide sont représentés par des signaux à énergie totale finie (ou de carré sommable). De même, on définit la **puissance moyenne** d'un signal par :

$$\overline{P}_{[t_1, t_2]} = \frac{E_{[t_1, t_2]}}{t_2 - t_1} \quad \text{et} \quad P_{moy} = \lim_{t_1, t_2 \rightarrow \infty} \overline{P}_{[t_1, t_2]} \quad (1.8)$$

Un signal *périodique* est à puissance moyenne finie, correspondant à la puissance moyenne sur une période. De manière générale, les systèmes physiques présentant un régime permanent (signal et bruit) sont à puissance moyenne finie. On déduit de ce qui précède que les signaux à énergie totale finie sont à puissance moyenne nulle. Ce sont des signaux physiquement réalisables. A l'inverse, une puissance moyenne finie implique une énergie totale infinie.

### 1.3.2 Rappels : unités logarithmiques - décibels

Pour les calculs de puissance et de qualité de signal en électronique, acoustique, électromagnétisme, optique etc,... on utilise souvent une définition à base de logarithmes. Les raisons principales en sont les suivantes :

- les puissances du signal utile, mais aussi des perturbations, mesurées tout au long de la transmission varient dans des proportions très importantes (par exemple du W au nW) et deviennent plus aisément manipulables en unités logarithmiques ;
- la représentation du comportement fréquentiel d'un système linéaire (tel qu'un filtre) possède des asymptotes rectilignes en unités logarithmique (diagramme de Bode) ;
- l'utilisation des valeurs logarithmiques permet d'additionner gains et atténuations rencontrés sur une transmission, lors d'une opération appelée "bilan de liaison" (voir Chapitre 5).

On distinguera les deux cas suivants :

- a) **Gain** (ou atténuation) d'un élément de transmission. Il s'exprime en "décibels" (dB) par le rapport :

$$G_{\text{db}} = 10 \log \frac{P_s}{P_e} \quad (1.9)$$

où  $P_s$  et  $P_e$  désignent les niveaux de puissances d'entrée et de sortie (exprimés en Watts) dans le dispositif. Ainsi un câble métallique transmettant un signal en atténuant son niveau de puissance d'un facteur 20 présentera une atténuation de 13 dB, ou un gain de -13 dB.

- b) **Puissance relative** par à une valeur de référence  $P_{\text{ref}}$ . Elle s'exprimera par

$$P_{\text{dB}} = 10 \log \frac{P}{P_{\text{ref}}} \quad (1.10)$$

où  $P$  est la puissance considérée en Watt. Pour une puissance de référence  $P_{\text{ref}} = 1\text{W}$ , la puissance relative  $P_{\text{dB}}$  sera exprimée en "dBW". Si la puissance de référence  $P_{\text{ref}}$  vaut 1 mW, la puissance relative  $P_{\text{dB}}$  sera exprimée en "dBm". Bien évidemment, 1 dBW = 30 dBm et 1 dBm = -30 dBW.

▷ **Remarque 1.** Attention ! On écrit trop souvent (et à tort) une puissance en dBW en omettant le "W", de sorte que l'on confond les dB de gain et les dB de puissance (cas a) et b) ci-dessus).

▷ **Remarque 2.** Ne pas hésiter à "combiner" les dB de gain et les dB relatifs. Partant de la relation  $P_s = GP_e$  représentant l'amplification d'une puissance linéaire d'entrée  $P_e$ , on a :

$$10 \log \left( \frac{P_s}{1\text{mW}} \right) = 10 \log \left( G \cdot \frac{P_e}{1\text{mW}} \right) \quad \text{soit donc} \quad P_s^{\text{dBm}} = G^{\text{dB}} + P_e^{\text{dBm}}$$

Ainsi, un signal de puissance -3 dBm (0,5 mW) à l'entrée d'un amplificateur de gain 23 dB ( $\times 200$  en linéaire) génère un signal de sortie de puissance  $P_s^{\text{dBm}} = -3+23 = 20 \text{ dBm} = (100 \text{ mW ou } -10 \text{ dBW})$ .

▷ **Remarque 3.** Lorsqu'on évalue la qualité d'une transmission en télécommunications, un indicateur utile est le rapport signal-sur-bruit (SNR ou S/N) défini comme le rapport (en décibels) entre la puissance du signal utile et la puissance du bruit venant perturber la transmission.

Par ailleurs, l'utilisation de grandeurs logarithmiques ne se limite pas à la puissance. On pourra ainsi exprimer en dB un temps (2000 s = 33 dBs), une bande-passante (10 MHz = 70 dBHz) ou une quantité d'argent (35 k€ = 45,4 dB€).

Enfin et comme on le verra par la suite, la constante de Boltzmann ( $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ ) sera le plus souvent utilisée en télécommunications sous sa forme logarithmique, donnée par -228,6 dBW/Hz/K. Considérant la valeur de la température ambiante  $T_0 = 290K = 24,6 \text{ dBK}$ , on peut évaluer l'expression  $kT_0 = -228,8 + 24,6 = -204 \text{ dBW/Hz} = \mathbf{-174 \text{ dBm/Hz}}$ , représentant la densité spectrale de puissance de bruit lié à l'agitation électronique dans un conducteur à la température ambiante.

▷ **Remarque 4.** Le tableau ci-dessous rassemble quelques approximations numériques utiles. Les équivalents linéaires des valeurs en dB sont précis à moins de 1%.

Lin.	Log.	Lin.	Log.	Lin.	Log.
1	0 dB	1,25	1 dB		-1,5 dB
2	3 dB	$\sqrt{2}$	1,5 dB	0,5	
4	6 dB	$\pi/2$	2 dB		0,5 dB
8	9 dB	$\pi$	5 dB	3	*
10	10 dB	$2\pi$	8 dB	12	
5	7 dB	$4\pi$	11 dB	$5\sqrt{2}$	
2,5	4 dB	$8\pi$	14 dB	9,5	

**EXERCICE.** Remplir les cases vides du tableau précédent à l'aide des seules informations présentes dans le reste du tableau (donc sans l'aide d'une calculette...!).

▷ Aide :  $2\sqrt{2}/\pi \approx 0,9$

### 1.3.3 Energie et puissance : aspects fréquentiels

Les signaux à énergie totale finie constituent une classe importante de signaux physiquement réalisables. Le théorème de *Parseval-Plancherel* traduit la conservation de l'énergie (totale) dans les domaines temporels et fréquentiel :

$$E_{\text{tot}} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{S}(\nu)|^2 d\nu \quad (1.11)$$

où  $\hat{S}$  désigne la transformée de Fourier<sup>6</sup> du signal  $s$  (qui est déterministe). Le terme  $|\hat{S}(\nu)|^2$  s'identifie donc à la **densité spectrale d'énergie** de  $s$ . Ce point peut être complété en remarquant que l'égalité de Parseval traduit une **auto-corrélation** du signal  $s$  avec lui-même<sup>7</sup>. Plus généralement le produit de corrélation entre deux signaux  $r$  et  $s$  est défini par :

$$(r \otimes s)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(u)s^*(u-t)du \quad (1.12)$$

où  $s^*$  désigne le signal conjugué complexe de  $s$ . Il faut ici ne pas confondre ce produit de corrélation avec le *produit de convolution*, qui fera intervenir le terme  $s(t-u)$  et non  $s(u-t)$ .

En exprimant la relation précédente (1.12) dans le domaine fréquentiel pour  $r = s$ , on montre assez facilement que la transformée de Fourier de  $s \otimes s$  n'est autre que la densité spectrale d'énergie  $|\hat{S}(\nu)|^2$  évoquée plus haut (Théorème de Wiener-Khintchine). Cette propriété fondamentale sera utilisée pour caractériser les *signaux aléatoires* (ou *bruits*). On établit au passage que l'énergie totale du signal  $s$  (supposée finie) s'exprime comme  $E_{\text{tot}} = [s \otimes s](0)$ .

En reprenant l'exemple de l'énergie dissipée aux bornes d'un dipôle électrique résistif [le signal  $s(t)$  est alors une tension mesurée  $v(t)$ ] :

$$E_{\text{tot}} = \int_{-\infty}^{+\infty} P_s(t)dt = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} v^2(t)dt = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{V}^2(\nu)d\nu \quad (1.13)$$

où  $\hat{V}$  désigne la transformée de Fourier du signal de tension  $v$ . Par conséquent, la quantité  $\hat{V}^2/R$  s'exprime en J/Hz.

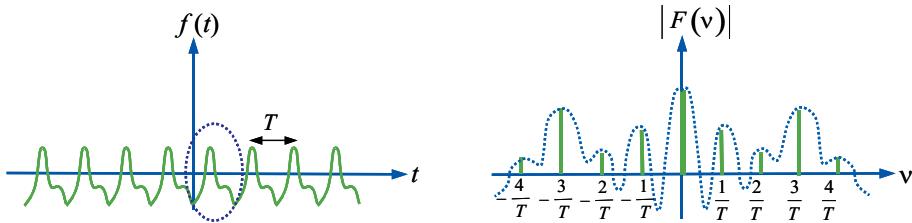
Si l'on considère le signal périodique représenté sur la figure 1.2a, nous savons

---

6. définie par  $\hat{S}(\nu) = \int_R s(t) \exp(-2i\pi\nu t) dt$

7. Puisqu'un produit de signaux dans le domaine temporel équivaut à une convolution dans le domaine fréquentiel, et inversement.

(justifié dans les cours de MTS 101 et MTS102) que son contenu spectral (donné par la TF) se présente sous forme de raies harmoniques, comme illustré sur la figure 1.2b.



**FIGURE 1.2 – a)** signal périodique : répétition d'un motif élémentaire (gauche) et b) spectre de raies d'un signal périodique (droite)

Le formalisme des distributions permet d'exprimer le signal périodique et son spectre fréquentiel :

$$s(t) = s_T(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT), \quad \text{soit} \quad \hat{S}(\nu) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{s}_T\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(\nu - \frac{k}{T}\right) \quad (1.14)$$

où le symbole "\*" désigne le produit de convolution de deux distributions. On déduit des expressions précédentes la puissance moyenne du signal :

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \quad (1.15)$$

$$\text{avec } c_k = \frac{1}{T} \hat{s}_T\left(\frac{k}{T}\right).$$

### 1.3.4 Quid des fréquences négatives ?

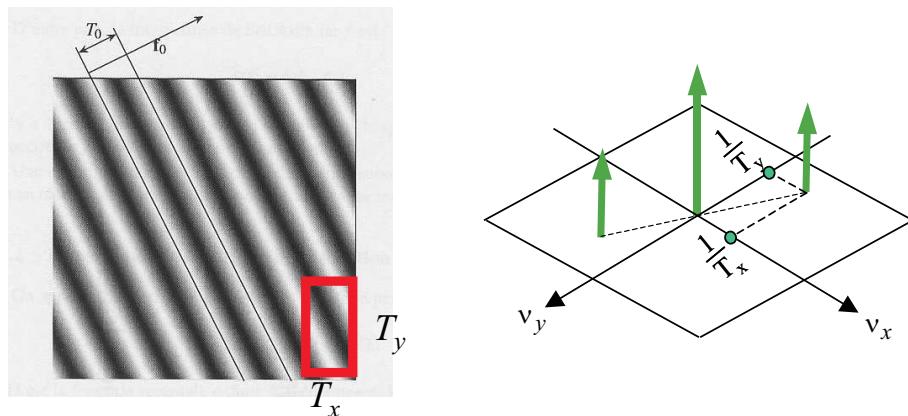
Si l'on revient à la définition de base d'une fréquence, on doit considérer un signal périodique (temporel par exemple) de période  $T_0$ , et constater que sa fréquence est  $\nu_0 = 1/T_0$ . Elle constitue donc une grandeur positive. Mais si l'on utilise la Transformation de Fourier pour passer dans l'espace dit "fréquentiel", alors on introduit une fréquence légèrement différente : c'est la variable  $\nu$  conjuguée du temps, au sens de la TF. Pour évaluer la différence entre ces deux notions de la fréquence, on peut se ramener au cas simple d'un signal sinusoïdal réel,  $f(t) = \cos 2\pi\nu_0 t$ , dont la fréquence "usuelle" est  $\nu_0$ . L'identité  $f(t) = \frac{1}{2}(\exp 2i\pi\nu_0 t + \exp -2i\pi\nu_0 t)$  indique qu'il y a en fait les deux fréquences "de Fourier"  $+\nu_0$  et  $-\nu_0$  dans  $f(t)$ . Ces deux valeurs opposées sont nécessaires pour obtenir un signal réel.

Les deux notions deviennent alors équivalentes si l'on associe au signal réel

$\cos 2\pi\nu_0 t$  le signal complexe<sup>8</sup>  $\exp(2i\pi\nu_0 t)$  de fréquence (de Fourier) positive. Par décomposition harmonique (de Fourier), le raisonnement précédent devient valable pour tout signal réel  $x(t)$  auquel on associe le signal complexe défini par  $x_c(t) = x(t) + \mathcal{H}[x(t)]$ , où  $\mathcal{H}$  désigne ici la transformée de Hilbert, définie plus loin. Ce terme rajouté va en quelque sorte "effacer" les fréquences négatives par une opération de filtrage (qui se révèle non réalisable, car non causal).

### 1.3.5 Et les fréquences spatiales ?

Le cas d'un signal sinusoïdal évoqué précédemment peut être étendu aux signaux à deux dimensions tels que les images : on parle alors de fréquence spatiale. La figure 1.3.a en fournit une représentation sous forme d'une "mire sinusoïdale", utilisée classiquement pour mesurer la qualité des instruments d'optiques, les écrans ou les capteurs d'image. Le signal généré par cette mire sinusoïdale



**FIGURE 1.3 – La mire sinusoïdale :** a) exemple d'un signal spatial bidimensionnel (gauche) et b) son spectre spatial (droite)

peut s'écrire sous la forme :

$$m(x,y) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos 2\pi \left[ \frac{x}{T_x} + \frac{y}{T_y} \right] \right) \quad (1.16)$$

où  $T_x$  et  $T_y$  sont les périodes spatiales de la mire (exprimées en mètre ou en millimètre) suivant les deux dimensions. Ici, on a une fonction réelle et positive, car correspondant à un rapport de facteurs de transmission [en éclairement lumineux ( $\text{W/m}^2$ )]. Les fréquences spatiales de la fonction "mire" (au sens de Fourier) sont alors fournies<sup>9</sup> par la Transformation de Fourier (bidimensionnelle)

8. Ce dernier correspond au signal analytique associé à  $f$ .

9. On pourra démontrer cette relation (1.17) à titre d'exercice.

de  $m$ , conduisant à :

$$\hat{M}(\nu_x, \nu_y) = \frac{1}{2}\delta(\nu_x, \nu_y) + \frac{1}{4}\delta\left(\nu_x - \frac{1}{T_x}\right) \cdot \delta\left(\nu_y - \frac{1}{T_y}\right) + \frac{1}{4}\delta\left(\nu_x + \frac{1}{T_x}\right) \cdot \delta\left(\nu_y + \frac{1}{T_y}\right) \quad (1.17)$$

En posant  $\nu_x^0 = 1/T_x$  et  $\nu_y^0 = 1/T_y$  (valeurs exprimées en  $\text{m}^{-1}$ ), on a donc trois fréquences spatiales situées en  $(0,0)$ ,  $(\nu_x^0, \nu_y^0)$  et  $(-\nu_x^0, -\nu_y^0)$  et représentées sur la figure 1.3.b.

\*\*\*

## • **Ce qu'il faut retenir du chapitre**

- a) La liste des grandeurs du système international, la valeur des trois constantes fondamentales des télécoms : Boltzmann, Planck et vitesse de la lumière dans le vide
- b) La première définition d'un bruit et du rapport signal-sur-bruit, relation (???)
- c) La manipulation des unités logarithmiques, dB, dBm, dBW ...
- d) Les définitions de l'énergie et de la puissance d'un signal, relations (1.5) à (1.8)
- e) Les définitions fréquentielles de l'énergie et de la puissance d'un signal.

# 2

## Notions de bruit physique

### 2.1 Introduction

Contrairement aux phénomènes physiques générant des signaux déterministes, il existe de nombreuses sources de signaux pour lesquelles les grandeurs observées ne peuvent être liées par des lois simples aux conditions initiales et aux "mécanismes moteurs". C'est le cas du lancement d'un dé, de la position d'une molécule de gaz dans une enceinte fermée, ou de l'évolution de la température et de la pression au sein d'une perturbation météorologique.

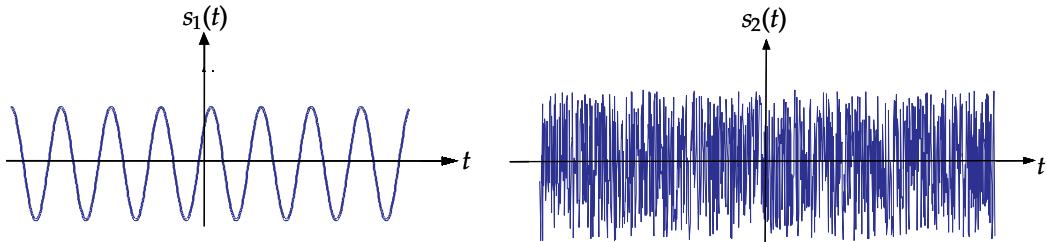
Un exemple que nous considérerons par la suite est celui du bruit (de tension) dans un circuit électronique : si l'on essaie de relier la valeur instantanée de la tension de bruit au mouvement des électrons (à l'origine de ce bruit), nous nous retrouvons en face d'un problème insoluble, ceci pour des raisons théoriques (quelle est l'incertitude sur la position d'un électron dans un semi-conducteur ?) et pratiques (nombre d'équations simultanées à traiter, méthode de résolution). Si nous voulons toutefois faire intervenir ce bruit quantitativement -ne serait-ce que pour calculer un rapport signal-sur-bruit-, il faudra le caractériser par des grandeurs autres que sa valeur instantanée : on devra utiliser ses **caractéristiques statistiques**.

L'étude rigoureuse des signaux aléatoires -encore appelés fonctions aléatoires ou processus stochastiques- est hors du propos de ce cours. Elle fait l'objet d'une série de présentations au sein de la majeure MTS. Nous en présentons toutefois une introduction nécessaire à la manipulation des bruits physiques les plus importants. On suppose implicitement que les notions de base en probabilités et variables aléatoires sont connues du lecteur.

#### 2.1.1 Une première approche

On part de deux exemples simples représentés sur la figure 2.1. Le signal de gauche est fourni par un générateur de fréquences "pures", défini à tout instant par l'expression  $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ . Il peut ainsi être considéré comme un signal déterministe possédant une amplitude  $A$ , une pulsation  $\omega$  et une phase  $\varphi$  à  $t = 0$ . Ce signal apparaît comme extrêmement régulier et prévisible, dans la mesure où son observation sur un intervalle de temps égal à sa période suffit à le déterminer en chaque point, même en dehors des limites de la figure. Il n'empêche que ce

signal "déterministe" ne contient aucune information.



**FIGURE 2.1 – Cas d'un signal déterministe (gauche) et d'un signal aléatoire, ou bruit (droite)**

Le signal de la figure 2.1b est obtenu à partir de l'amplification de la tension aux bornes d'une résistance "ouverte" (non connectée à un générateur). Les multiples fluctuations visibles – dues à l'agitation thermique des électrons dans le composant – semblent imprédictibles et non exprimables sous une forme explicite telle que le signal de la figure 2.1a. Toutefois, on a le sentiment que la valeur moyenne temporelle de ce signal est nulle. Si l'on répète l'expérience sur  $N$  résistances identiques, les signaux  $s_i(t)$  mesurés au cours du temps seront différents, mais présenteront la même valeur moyenne nulle. On caractérise ainsi de manière "déterministe" un phénomène aléatoire. Et ce n'est pas tout. Pour ce type de signal, on ne peut pas faire d'étude sur la transformée de Fourier, car elle est également aléatoire ; par contre, sa *densité spectrale de puissance* sera déterministe. C'est donc ce type de représentation spectrale qui sera utilisé pour l'étude des bruits.

### 2.1.2 Types et sources de bruits

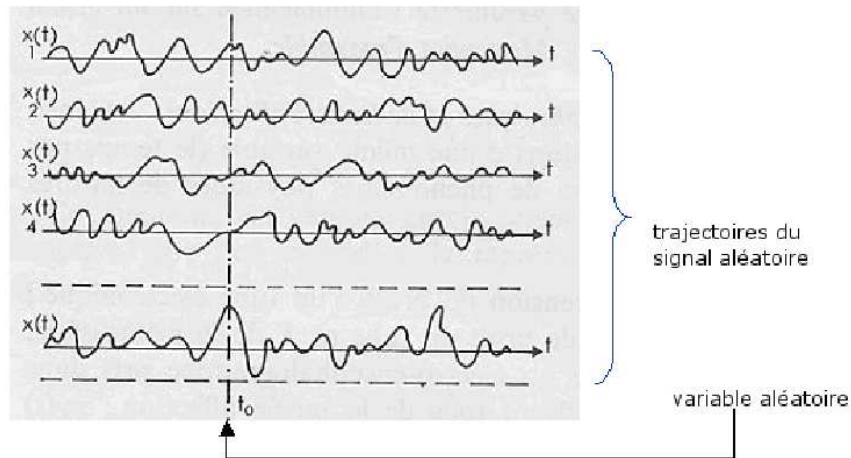
On peut distinguer deux grandes classes de bruit. En premier lieu, les perturbations à caractère purement aléatoire qui viennent se superposer au signal utile sous une forme essentiellement additive : c'est le cas vu ci-dessus du bruit thermique dans les résistances électriques, mais également le "bruit de fluctuation" de l'atmosphère pour les images astronomiques. On trouve ensuite les mécanismes d'interférences (accidentelles) du signal utile avec d'autres signaux parasites qui ne sont pas considérés comme des bruits aléatoires. L'exemple typique est le phénomène de diaphonie (crosstalk) en téléphonie, où une communication est polluée par un résidu provenant d'une voie téléphonique adjacente. Le même phénomène se produit en électro-acoustique lorsque le filtrage des tensions d'alimentation des modules d'amplification est insuffisant, produisant en bout de chaîne un effet de ronflement des haut-parleurs. De manière similaire, on pourra distinguer deux types de sources de bruit. Tout d'abord celles qui sont internes au système physique générant le signal utile, créant un bruit propre indépendant du milieu extérieur. C'est le cas des bruits de fond et des perturbations

impulsionnelles dans les circuits électroniques. Ces sources de bruit sont en général difficile, voire impossible à éliminer. On trouve ensuite des sources de bruit externes au système physique et agissant sur celui-ci par influence (perturbations atmosphériques, électromagnétiques etc....)

## 2.2 Modélisation du bruit en physique

### 2.2.1 Notion de fonction aléatoire

Modéliser un signal sous la forme d'une fonction aléatoire (ou processus stochastique) permet de prendre en compte l'aspect statistique des signaux. Une fonction aléatoire est une fonction  $x$  dont la forme dépend de la réalisation d'un événement élémentaire, noté généralement  $\omega$ , dans un ensemble fondamental, noté  $\Omega$ . Le cas le plus fréquent est celui où la variable est le temps :  $x(\omega, t)$ . Ainsi, la mesure de la tension de bruit thermique aux bornes d'une résistance est représentée par une fonction aléatoire  $V(\omega, t)$ . Cela veut dire qu'une autre réalisation de la même expérience (mesure de tension) donnera une fonction différente  $V(\omega', t)$ . A titre d'illustration, la figure 2.2 représente les différentes réalisations



**FIGURE 2.2 –** différentes réalisations d'un signal aléatoire

(ou trajectoires) d'une fonction aléatoire  $x(\omega, t) = x_\omega(t)$ . Si l'on réalise maintenant une "coupe" verticale des trajectoires en considérant les valeurs prises par  $x$  pour  $t = t_0$ , on obtient une variable aléatoire  $x_w(t_0)$ . Autre exemple, l'intensité lumineuse générée par une camera CCD lorsque le champ objet est uniforme (on filme une image "grise") sera bruitée, chaque réalisation étant représentée par la fonction aléatoire  $I(x_i, y_j, \omega)$ , où  $x_i$  et  $y_j$  désignent les coordonnées spatiales du pixel  $(i, j)$ .

### 2.2.2 Moyenne et variance

Pour deux instants d'observation  $t_0$  et  $t_1$  d'un signal aléatoire, les quantités  $x(\omega, t_0)$  et  $x(\omega, t_1)$  sont des variables aléatoires pour lesquelles on peut définir une *moyenne*, une *variance* et une *co-variance*. Ainsi, sur l'exemple de la figure 2.2, on définira une valeur moyenne d'ensemble de  $x$  par la quantité :

$$\bar{x}(t_0) = \text{E}[x(\omega, t_0)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_0) \quad (2.1)$$

Notons que la moyenne d'ensemble est un paramètre *déterministe*, dit d'ordre 1, car elle ne fait intervenir qu'un seul instant d'échantillonnage du processus. On peut dès à présent se demander si il y a équivalence entre la moyenne définie par 2.1 et la moyenne temporelle d'une réalisation du processus, dans la mesure où cette dernière est généralement plus simple à mesurer pour un signal physique. Ce point sera évoqué par la suite.

On définit de même la *variance* du signal aléatoire  $x$  par la quantité :

$$\sigma_x^2(t_0) = \text{E}[(x(t_0) - \bar{x}(t_0))^2] = \text{E}[x^2(t_0)] - \bar{x}^2(t_0) \quad (2.2)$$

A partir de là, on peut introduire à l'ordre 2, la *fonction de covariance* de  $x$  par

$$\Gamma_x(t_1, t_2) = \text{E}[x(t_1)x(t_2)] - \bar{x}(t_1)\bar{x}(t_2) \quad (2.3)$$

On vérifie que bien sûr que  $\sigma_x^2(t) = \Gamma_x(t, t)$

### 2.2.3 Stationnarité

Pour un grand nombre de phénomènes physiques, on peut admettre que les moyennes et variances ne dépendent pas de l'instant considéré. Ces paramètres, une fois mesurés à l'instant  $t = t_0$  peuvent être considérés valables à n'importe quel instant du signal. Bien qu'étant lui-même très variable, ses caractéristiques statistiques ont une valeur constante, donc prévisible. Ceci indique donc une stabilité de la structure des phénomènes générateurs de signaux ou des sources de dégradations.

Il existe plusieurs degrés de stationnarité. Le signal aléatoire  $x(\omega, t)$  (que l'on peut noter simplement  $x(t)$  pour alléger l'écriture) sera dite stationnaire au *sens strict* si ses propriétés "fondamentales", i.e. sa densité de probabilité et ses moments d'ordre supérieur ne dépendent pas de  $t$ . Toutefois, dans la quasi totalité des cas rencontrés, on se limitera à des signaux stationnaires au *second ordre*, pour lesquels les caractéristiques statistiques du premier ordre (moyenne et variance) et de second ordre (covariance) sont indépendantes de l'instant d'observation<sup>1</sup>. Dans ce dernier cas, la fonction de covariance définie précédemment vérifie :

$$\Gamma_x(t_1, t_2) = \Gamma_x(t_1 - t_2) \quad (2.4)$$

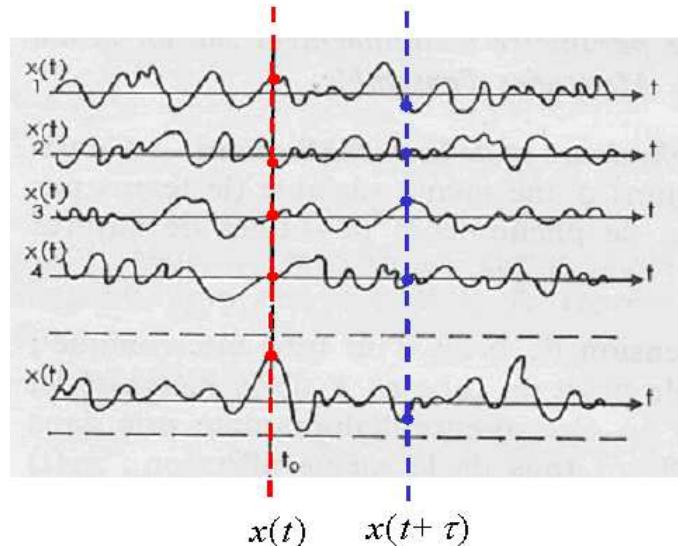
---

1. Cette propriété est plus faible que la stationnarité au sens strict.

Dans la suite, on rencontrera essentiellement des bruits stationnaires *centrés*, c'est-à-dire de moyenne d'ensemble (la coupe verticale de la figure 2.2) nulle. On caractérisera alors le signal par sa fonction d'*autocorrélation* définie par :

$$\Gamma_x(\tau) = E[x(t)x(t + \tau)] = E[x(0)x(\tau)] \quad (2.5)$$

Comme l'illustre la figure 2.3, cela revient à comparer l'ensemble des valeurs prises par la grandeur physique à l'instant  $t$  avec celles prises par elle-même à un instant décalé de  $\tau$ . Cela permet en quelque sorte de voir -au moins qualitativement-



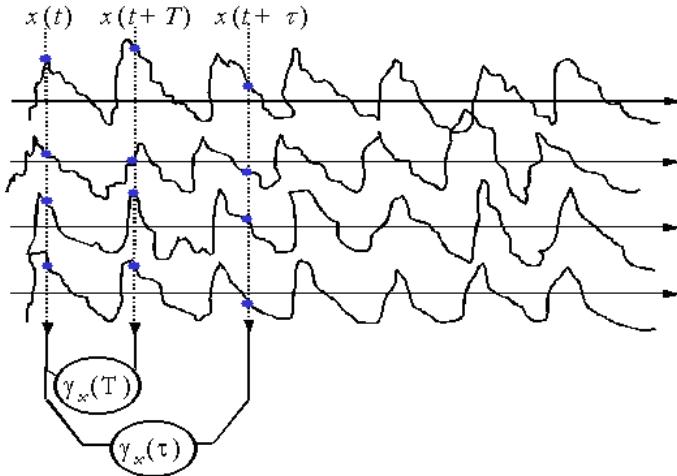
**FIGURE 2.3 – instants de corrélation d'un processus aléatoire stationnaire**

en quoi le signal à un instant donné est influencé par ce qui s'est passé précédemment à un instant  $\tau$ .

On voit apparaître une relation avec le mécanisme physique générant le signal, lié à la mémoire du processus. Si par exemple,  $x$  présente une périodicité  $T$  (figure 2.4), chaque fois que le décalage  $\tau$  sera égal à un nombre entier de fois la période  $T$ , on aura un maximum de "ressemblance" entre  $x(t)$  et  $x(t + T)$ , donc un maximum de la fonction de corrélation  $\Gamma_x$  pour cette valeur  $\tau = T$ .

## 2.2.4 Ergodisme

Dans beaucoup de cas, il est plus commode de calculer des moyennes *temporelles* plutôt que des moyennes d'ensemble (au sens des probabilités). Très souvent en effet, on a accès à l'histoire d'une grandeur physique sur une durée relativement longue, plutôt qu'à un grand nombre de valeurs obtenues sur des réalisations différentes du processus. En général, l'accès aux moyennes d'ensemble est impossible. Les résultats obtenus dans les deux cas sont-ils alors les mêmes ?



**FIGURE 2.4 – maximum de la fonction de corrélation d'un signal aléatoire "quasi-périodique"**

On peut montrer (hors de propos ici !) que l'équivalence est obtenue dès lors que l'on a affaire à un signal stationnaire dit "*ergodique*". Ainsi, l'ergodicité de la moyenne et de la fonction d'autocorrélation sont représentées par les égalités :

$$E[x(t)] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad \text{et} \quad \Gamma_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt \quad (2.6)$$

Dans le cas d'un signal physique à variables d'espace ( $x,y,z$ ), la moyenne temporelle est remplacée par une moyenne spatiale. Dans l'exemple de la caméra CCD, la moyenne se fera sur les valeurs détectées pour l'ensemble des pixels du capteur.

## 2.2.5 Puissance d'un signal aléatoire stationnaire

La puissance instantanée d'un signal aléatoire se définit -pour une réalisation donnée  $\omega$ - de manière identique à la puissance d'un signal déterministe, à savoir  $P_x(t,\omega) = |x(t,\omega)|^2$ . La mesure de cette puissance n'a toutefois pas un grand intérêt pratique, puisqu'elle est elle-même une grandeur aléatoire. A l'inverse, la caractéristique fondamentale d'un signal aléatoire sera sa densité spectrale de puissance. Cette dernière est donnée (et on l'admettra) par la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du processus. Ce résultat important en théorie du signal porte le nom de théorème de Wiener-Khintchine. Il s'écrit donc :

$$\Gamma_x(\tau) \stackrel{\mathcal{T}\mathcal{F}}{=} \bar{\gamma}_x(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_x(\tau) \exp(-2i\pi\nu\tau) d\tau = B_x(\nu) \quad (2.7)$$

où  $B_x(\nu)$  désigne la *densité spectrale de puissance* du signal aléatoire, qui est une fonction déterministe. On a ainsi une définition unique d'une densité spectrale de

puissance, que le signal soit déterministe ou aléatoire, ou encore une combinaison des deux. De cette manière, la puissance moyenne d'un signal aléatoire stationnaire centré (de moyenne nulle) se calculera par

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} B_x(\nu) \, d\nu = \Gamma_x(0) \quad (2.8)$$

où la valeur  $\Gamma_x(0) = E[x^2(t)]$  (car le signal  $x$  est à moyenne nulle) n'est autre que la variance  $\sigma_x^2$ .

On retiendra donc la propriété fondamentale : **la puissance moyenne d'un signal aléatoire stationnaire et centré est égale à sa variance.**

## 2.2.6 Bruit blanc

Un signal aléatoire est un bruit dit *blanc* quand sa densité spectrale de puissance moyenne est constante, par analogie avec le spectre de la lumière blanche qui est approximativement constant sur tout le domaine visible. Ainsi, si  $B(\nu) = B_0 = \text{cste}$ , la fonction d'autocorrélation d'un bruit blanc est  $\Gamma_x(\tau) = B_0\delta(\tau)$ . Cela signifie qu'il n'y a aucune corrélation -donc aucune *mémoire*- entre ce qui se passe aux instants  $t$  et  $t + \tau$ . Un tel modèle est bien sûr théorique car sa puissance moyenne serait infinie. En pratique, un bruit observé n'est jamais blanc, dans la mesure où un capteur ou un instrument de mesure a toujours une bande-passante limitée, c.-à-d. qu'il ne peut pas réagir à des variations de fréquence arbitrairement élevées. Le spectre explorable a donc une largeur fréquentielle finie : le bruit observé n'est donc blanc qu'à l'intérieur de la bande-passante du système de mesure. On parlera tout de même de bruit blanc chaque fois que sa densité spectrale de puissance sera constante à l'intérieur de la bande-passante du système de mesure. Si cette condition n'est pas entièrement satisfaite, on parlera de bruit *rose* (= bruit blanc tronqué).

Un bruit blanc est dit *Gaussien* lorsque la loi (ou densité) de probabilité de la variable aléatoire  $x(t)$  est la loi *normale*  $G(x, \sigma)$  définie par

$$G(x, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^2 \, d\nu \quad (2.9)$$

La figure 2.5 donne une idée concrète d'un bruit blanc Gaussien, où une réalisation  $x(t)$  du processus est échantillonnée plus ou moins finement sur un "boulier" imaginaire (schéma de gauche). Cet échantillonnage correspond aux différents niveaux pris par le signal. Une "image" de la densité de probabilité est obtenue instantanément en basculant le boulier de  $90^\circ$ , fournissant une répartition, ou "histogramme", des niveaux pris par le signal aléatoire. Le bruit blanc Gaussien se rencontre très souvent en physique, lorsque le signal est la superposition d'un grand nombre de signaux élémentaires. Ceci est une conséquence du théorème de la limite centrale.

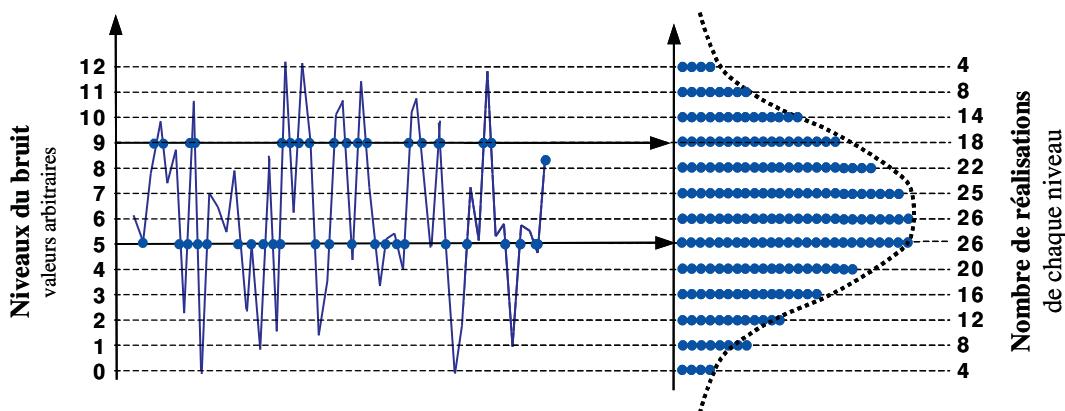


FIGURE 2.5 – Deux représentations d'un bruit blanc Gaussien : une réalisation (gauche) et son histogramme des valeurs (droite)

## 2.3 Exemples de bruits physiques

On considérera par la suite des signaux physiques centrés, la présence d'une valeur moyenne non nulle n'apportant aucune information statistique.

### 2.3.1 Bruit électronique thermique

A température ambiante, les trajectoires des électrons libres d'un matériau conducteur sont soumises à des chocs contre le réseau solide d'ions positifs, leur permettant de se déplacer dans le réseau cristallin. Le déplacement de ces électrons est aléatoire (mouvement Brownien) et on le qualifie d'agitation (ou bruit) thermique. On parle également de bruit de résistance, ou bruit Johnson, du nom du physicien J.B. Johnson<sup>2</sup> qui l'a mis en évidence en 1927<sup>3</sup>. L'étude théorique a été faite la foulée par Nyquist<sup>4</sup>, et ses formules ont été vérifiées expérimentalement (à mieux que 1%) par de nouvelles mesures de Johnson. Voici quelques éléments de cette modélisation, illustrant les notions vues dans ce chapitre.

#### Modélisation

Si l'on considère une résistance court-circuitée par un conducteur extérieur (sans résistance), l'absence de force électromotrice dans le circuit fait que la vitesse moyenne des électrons est nulle. Cette vitesse moyenne est vectorielle : cela signifie qu'en moyenne, un électron revient à son point de départ. Ce qui importe

2. John Bertrand Johnson (1887-1970) était un ingénieur-physicien d'origine Suédoise, qui travaillait alors aux laboratoires de la Bell Telephone Company

3. J.B. Johnson "Thermal agitation of electricity in conductors, Physical Review, vol. 32, pages 97-109 (1928)

4. H. Nyquist "Thermal agitation of electric charges in conductors, Physical Review, vol. 32, pages 110-113 (1928)

toutefois est la vitesse quadratique moyenne<sup>5</sup>, notée  $\langle v^2 \rangle$  : ainsi, la translation suivant un axe  $x$  d'un électron est un degré de liberté du gaz électronique à l'équilibre thermique, et l'énergie cinétique moyenne correspondant à ce degré de liberté est  $E = \frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}kT$ , où  $k$  désigne la constante de Boltzmann et  $T$  la température<sup>6</sup>. Localement, la vitesse d'un électron et l'intensité sont liées par une relation du type  $i(t) = -\beta ev(t)$ , où  $\beta$  est un paramètre dépendant de la configuration géométrique du conducteur et  $e$  la charge de l'électron (en valeur absolue). La densité spectrale de puissance de l'intensité générée par un seul électron est ainsi  $B_i(\nu) = \beta^2 e^2 B_v(\nu)$ , où  $B_v(\nu)$  est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de la vitesse  $\Gamma_v(\tau)$ . On admettra que cette dernière est donnée par  $\Gamma_v(\tau) = \langle v^2 \rangle \exp(-\alpha|\tau|)$ , menant, par transformée de Fourier à :

$$B_v(\nu) = \frac{2 \langle v^2 \rangle}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 + 4\pi^2 \left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^2} \quad (2.10)$$

où  $\alpha$  est le nombre de chocs subis par l'électron par unité de temps. Aux températures usuelles, la constante  $\alpha$  est de l'ordre de  $10^{12} \text{ s}^{-1}$ , et donc, à l'intérieur de la bande-passante des circuits électroniques, on a  $\nu/\alpha \ll 1$ , de sorte que  $B_v(\nu) \simeq 2 \langle v^2 \rangle / \alpha$ . On en déduit donc :

$$B_i(\nu) = \frac{2kT(\beta e)^2}{m\alpha} \quad (2.11)$$

Si l'on reprend le cas particulier d'un résistor court-circuité de longueur  $L$  et de section  $S$ , nous aurons  $\beta = 1/L$ . Quand il y a  $N$  électrons dans le volume du résistor, les variances des courants liés à chaque électron s'additionnent (on l'admettra, car ce sont processus indépendants), de sorte que l'on obtient la densité spectrale de puissance de l'intensité totale sous la forme

$$B_I(\nu) = \frac{2ne^2S}{m\alpha L} kT \quad (2.12)$$

où  $n = N/LS$  désigne la densité volumique d'électrons. On peut enfin montrer (mais on l'admettra) que la résistance  $R$  du résistor est égale à  $m\alpha L/ne^2 S$ , de sorte que finalement :

$$\boxed{B_I(\nu) = \frac{2kT}{R}} \quad (2.13)$$

Cette densité spectrale de puissance moyenne de bruit en intensité s'exprime en  $\text{A}^2/\text{Hz}$ . Pour l'expression du bruit en tension, on a  $U(t) = RI(t)$ , de sorte que  $\Gamma_U(\tau) = R^2 \Gamma_I(\tau)$  et  $B_U(\nu) = R^2 B_I(\nu)$ , soit

$$\boxed{B_U(\nu) = 2kTR} \quad (2.14)$$

---

5. autrement dit, la moyenne du carré de la vitesse

6. à température ambiante ( $T = 290 \text{ K}$ ), le produit  $kT$  vaut environ  $4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$  (ou  $\text{W/Hz}$ ), soit -174 dBm/Hz

Cette densité spectrale de puissance moyenne de bruit en tension s'exprime en  $\text{V}^2/\text{Hz}$ .

### **Remarques :**

1. L'expression précédente est liée à la définition de la Transformée de Fourier. Dans le cas présent, on utilise des bornes d'intégration de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Cette définition est dite *bilatérale*. Si l'on se limite à des fréquences positives (TF monolatérale), on aura :

$$B_I(\nu) = \frac{4kT}{R} \quad \text{et} \quad B_U(\nu) = 4kTR \quad (2.15)$$

2. Dans le cas d'une impédance quelconque  $Z$ , le raisonnement ci-dessus n'est valable que pour la partie réelle (résistive)  $R$  de l'impédance. En outre, on considère également que cette partie réelle dépend en général de la fréquence  $\nu$ , de sorte que l'on écrira  $B_U(\nu) = 2kTR(\nu)$ .
3. La distribution statistique du bruit thermique (courant ou tension) est Gaussienne, car l'effet global résulte de la somme d'une multitude de perturbations élémentaires.

### **Puissance de bruit thermique**

Pour connaître la puissance moyenne totale de bruit disponible dans un résistor, il suffit de tenir compte de la bande-passante limitée  $[0, \Delta\nu]$  du circuit de détection, et l'on a :

$$P_U = \int_0^{\Delta\nu} B_U(\nu) \, d\nu = 4kTR\Delta\nu \quad (2.16)$$

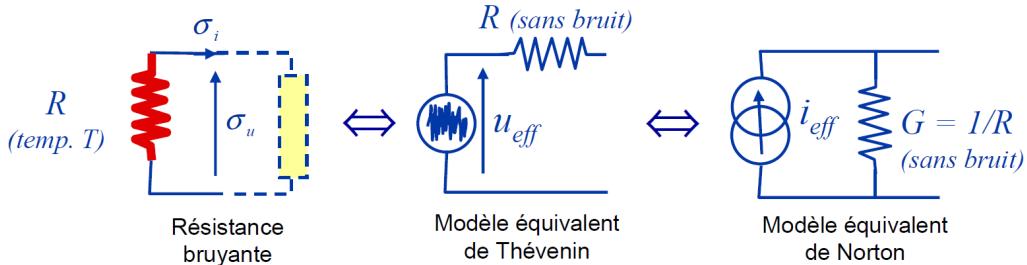
et cette quantité n'est autre que  $\Gamma_U(0) = \text{E}[U^2(t)] = \sigma_U^2$  (i.e. la variance  $\sigma_U^2$  de la tension de bruit, on l'a vu à la relation 2.8). La relation  $\sigma_U^2 = 4kTR\Delta\nu$  est connue sous le nom de *relation de Nyquist*. On a une relation similaire pour la puissance moyenne de bruit en intensité, égale à la variance de courant de bruit :

$$P_I = \sigma_I^2 = \frac{4kT\Delta\nu}{R} \quad (2.17)$$

*Exemple* : si l'on considère une résistance  $R = 1 \text{ M}\Omega$  à la température  $T = 300 \text{ K}$ , on mesurera dans une bande de fréquences  $\Delta\nu = 100 \text{ kHz}$  une puissance de bruit en tension de  $P_U = \sigma_U^2 = 1,7 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2$ . La *tension efficace de bruit* correspondante sera  $u_{\text{eff}} = \sqrt{\sigma_U^2} = 41 \mu \text{ V}$ .

### **Schémas équivalents d'une résistance bruyante**

On peut établir les schémas équivalents de Thévenin et de Norton en considérant la résistance bruyante comme une source de tension ou de courant aléatoires suivant les statistiques ci-dessus et ayant  $R$  comme résistance interne (ou



**FIGURE 2.6** – schémas équivalents de sources de tension et de courant de bruit pour une résistance bruyante. Les sources idéales ne sont pas polarisées.

$G = 1/R$  comme conductance interne). La figure 2.6 illustre ces représentations. Les valeurs efficaces  $u_{\text{eff}}$  de la tension à vide et  $i_{\text{eff}}$  du courant de court-circuit dans la bande fréquentielle considérée sont données par :

$$i_{\text{eff}} = 2\sqrt{\frac{kT\Delta\nu}{R}} \quad (\text{en A}) \quad \text{et} \quad u_{\text{eff}} = 2\sqrt{kTR\Delta\nu} \quad (\text{en V}) \quad (2.18)$$

### 2.3.2 Bruit de grenaille électronique

Le bruit de *grenaille*<sup>7</sup> résulte des fluctuations statistiques du nombre de porteurs de charge (électrons ou trous) qui génèrent un courant en traversant une barrière de potentiel (jonction dans un semi-conducteur, émission thermoélectronique et photoélectrique).

On peut, en première approximation, considérer le flux de porteurs comme une suite aléatoire d'impulsions de courant représentées par des impulsions (plus précisément des percussions) de Dirac dont chacune a un poids correspondant à la charge  $e$  d'un électron. L'expression du courant généré est ainsi :

$$I(t) = e \sum_k \delta(t - t_k) \quad (2.19)$$

où les  $t_k$  sont les instants aléatoires de passage de chaque porteur à travers la barrière de potentiel. Ce processus est un processus de *Poisson* : la probabilité de passage pendant  $dt$  est égale à  $\alpha dt$  ( $\alpha$  est le nombre de passages par unité de temps). Si l'on calcule la fonction d'autocorrélation de l'intensité, on trouve  $\Gamma_I(\tau) = E[I(t) \cdot I(t + \tau)] = (e\alpha)^2 + e^2\alpha\delta(t)$ . Le terme  $I_0 = \alpha e$  correspond à la valeur moyenne du courant<sup>8</sup>. La transformée de Fourier de l'expression précédente conduit à la densité spectrale de puissance en courant :  $B_I(\nu) = I_0^2\delta(\nu) + eI_0$ . Le

7. en Anglais *shot noise*, littéralement bruit "d'impact"

8. ou composante continue

deuxième terme correspond aux fluctuations du courant dû à l'effet de grenaille, dont on vérifie bien qu'il dépend du courant moyen (au contraire du bruit thermique, qui existe indépendamment de la présence d'un courant de conduction). On prendra ainsi  $B_I(\nu) = eI_0$  (densité bi-latérale) ou  $B_I(\nu) = 2eI_0$  (densité uni-latérale), quantité exprimée en  $\text{A}^2/\text{Hz}$ . La puissance du courant de bruit de grenaille obtenue pour une largeur de bande  $\Delta\nu$  vaut donc (en  $\text{A}^2$ ) :

$$\sigma_{I_g}^2 = 2eI_0\Delta\nu \quad (2.20)$$

Cette expression fondamentale en communications optiques est connue sous le nom de *relation de Schottky* (1918). On en déduit que le bruit de grenaille est un bruit blanc, et l'on admettra, tout comme pour le bruit thermique, qu'il suit une statistique Gaussienne, non centrée, de loi (ou densité) de probabilité :

$$P(I = i) = \frac{1}{\sigma_{I_g}^2 \sqrt{2\pi}} \exp \left[ \frac{(i - I_0)^2}{2\sigma_{I_g}^2} \right] \quad (2.21)$$

Tout comme pour le bruit thermique, on peut utiliser un schéma de Norton équivalent, i.e. une barrière "sans bruit" en parallèle avec un générateur aléatoire de courant, de variance  $\sigma_{I_g}^2$ .

\*\*\*

## • Ce qu'il faut retenir du chapitre

- a) La première définition (élémentaire) d'un signal aléatoire, de sa moyenne et de sa variance ;
- b) La définition de la fonction d'autocorrélation d'un signal aléatoire centré et stationnaire au second ordre, relation (2.5) ;
- c) La définition de la puissance moyenne d'un signal aléatoire stationnaire et centré, ainsi que sa densité spectrale de puissance moyenne, relations (2.7) et (2.8) ;
- d) Les définitions des densités spectrales de puissance (courant et tension) de bruits thermiques, de grenaille et les schémas équivalent d'une résistance bruitée (p. 31).

# 3

## Filtrage linéaire des signaux physiques

Ce chapitre va traiter de la modélisation d'un système physique dont la loi entrée-sortie est gérée par un opérateur linéaire et invariant, encore appelé filtre. On s'intéressera dans un premier temps aux signaux déterministes continus, pour introduire ensuite le filtrage des signaux aléatoires (ou bruits).

### 3.1 Contexte et définitions

Les opérateurs, fonctions et systèmes étudiés dans ce cours sont principalement des applications des domaines de l'électricité, de l'électronique et de l'optoélectronique. D'une manière générale, l'électronique et l'optoélectronique, qui ont l'électricité comme énergie de base, s'intéressent à la production de signaux qui représentent une information qu'il faut transmettre et utiliser, comme par exemple, dans le cas d'un contrôle à distance (mise en route télécommandée,...) ou d'une transmission de données (télécommunications,...). La représentation des relations analytiques (mathématiques) entre la (les) grandeur(s) d'entrée et de sortie se fait par l'intermédiaire d'une boîte noire définie par un opérateur fonctionnel  $\mathcal{R}$ , schématisé sur la figure . Les grandeurs ou signaux manipulés par ces

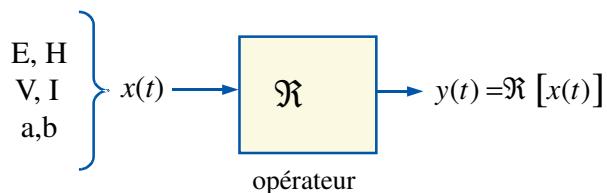


FIGURE 3.1 – Schéma de principe d'un opérateur physique.

opérateurs seront des grandeurs électriques (courant  $I$ , tension  $V$ , champ électromagnétique  $E$  et/ou  $H$ , ondes tension/courant  $a$  et  $b$ ) et différents types (ou classes) d'opérateurs de base peuvent être définis :

- les opérateurs linéaires invariants (retard pur, filtrage, moyennage), que l'on regroupera sous la dénomination générale de *filtres*. On reviendra sur ce cas

dans ce chapitre 3.

- les opérateurs non-linéaires sans mémoire, ou amnésiques, tels que des *redresseurs*, des *limiteurs* ou des *écrêteurs* de signal (chapitre 4)
- les opérateurs paramétriques, tels que les *multiplicateurs*, *modulateurs*, ou *échantillonneurs*, que l'on retrouvera souvent dans les systèmes de transmission de l'information (chapitre 5).

Un opérateur élémentaire est un système physique qui effectue sur le signal un traitement représenté par une opération mathématique dans le domaine temporel ou le domaine fréquentiel, et est par principe unidirectionnel. Les signaux peuvent être quelconques (transitoire, aléatoire continu, discret,...) ou purement sinusoïdaux. Les signaux dits *analogiques* sont des signaux continus du domaine temporel ou spatial, par opposition aux signaux *numériques* qui sont discrets. On écrira par exemple :  $y(t) = \mathcal{R}[x(t)]$  pour des signaux analogiques et  $y(t_k) = \mathcal{R}x(t_k) = y_k$  pour des signaux discrets où  $y_k$  représente alors un échantillon de  $y(t)$  à l'instant  $t_k$ . S'il y a plusieurs grandeurs d'entrée  $x_i (i = 1, \dots, n)$ , l'opérateur est *multivariable*.

## 3.2 Modélisation des Filtres

### 3.2.1 Description temporelle (cas d'un signal déterministe)

Pour ne pas alourdir l'exposé, on se place dans le cas élémentaire de signaux continus à variable temporelle. L'expression du signal de sortie  $y(t)$  de l'opérateur physique schématisé sur la figure 3.1 va faire intervenir une fonction  $h$  dite *réponse impulsionnelle*<sup>1</sup> du système, dans l'expression intégrale suivante :

$$y(t) = \int_{+\infty}^{-\infty} h[t, \tau, x(\tau)] d\tau \quad (3.1)$$

Bien entendu, ce cas est très (trop ?) général et correspond à une transformation *non-linéaire* de la grandeur d'entrée, puisque la réponse impulsionnelle  $h$ , définie comme la réponse du système à une percussion de Dirac  $\delta_t$ , dépend de l'amplitude de ce signal de percussion et de son instant d'émission  $t$ .

Cette double dépendance disparaît dans le cas d'une transformation définie par :

$$y(t) = \int_{+\infty}^{-\infty} x(\tau) h(t, \tau) d\tau \quad (3.2)$$

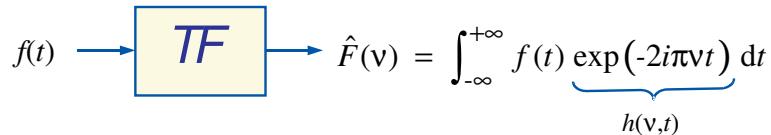
Nous sommes ici dans le cas d'une *réponse linéaire*, qui ne dépend plus que de l'instant d'émission  $t$  de la percussion en entrée. Cette situation s'exprime encore par le fait que la réponse du système à deux signaux d'entrée  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$  s'écrit :

$$\mathcal{R}[\lambda e_1(t) + \mu e_2(t)] = \lambda \mathcal{R}[e_1(t)] + \mu \mathcal{R}[e_2(t)] \quad (3.3)$$

---

1. et l'on parlera indifféremment de réponse *impulsionnelle* ou de réponse *percussionnelle*, bien que cette dernière soit plus adaptée ici.

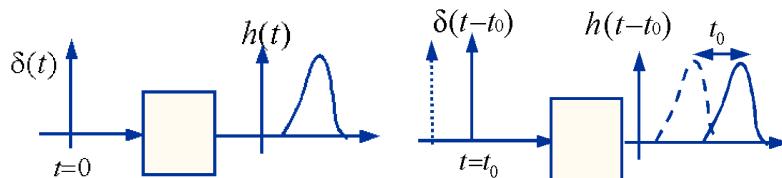
Toutefois, dans le cas d'un système linéaire, mais *non-stationnaire* on peut avoir affaire à une variation de cette réponse en fonction du temps, i.e.  $h(t_1, \tau) \neq h(t_2, \tau)$ . Ce serait le cas d'un filtre électrique dont les caractéristiques évoluent en fonction du temps, suite à une variation de température. Un autre exemple est celui du "transformateur de Fourier", comme schématisé dans le cas unidimensionnel sur la figure 3.2. Un exemple physique de transformateur de Fourier



**FIGURE 3.2 – Le "Transformateur de Fourier", vu comme un système linéaire non-invariant dans le temps.**

est l'espace libre, siège du *phénomène de diffraction* pour les ondes électromagnétiques. La distribution d'amplitude complexe  $G(x',y')$  du champ électromagnétique diffracté "à l'infini" par une ouverture rayonnante de distribution d'amplitude complexe  $g(x,y)$  est  $G = TF(g)$ . L'ouverture rayonnante en question peut-être par exemple une antenne, un mur d'immeuble ou une source lumineuse de dimension finie.

Lorsque la réponse du système ne dépend plus de l'instant d'émission de la percussion (ni de l'amplitude de cette percussion), comme schématisé sur la figure 3.3, on parle de système linéaire et invariant ou *filtre linéaire*. La relation



**FIGURE 3.3 – Invariance temporelle de la réponse percusionnelle  $h$  d'un filtre linéaire**

entrée/sortie s'écrit alors sous une forme bien connue :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = h * x \quad (3.4)$$

où le symbole  $*$  désigne l'opération de convolution<sup>2</sup>. Les physiciens ont coutume d'appeler la réponse  $h$  vérifiant (3.4) *fonction de Green*.

2. cette notion est détaillée dans le cours de mathématiques pour le signal du module MTS101.

### 3.2.2 Réponse indicelle

En pratique, la réalisation d'une percussion de Dirac  $\delta_t$  n'est pas gérable physiquement. On considère alors en entrée une excitation de type "saut" de Heaviside, noté  $Y(t)$  dans le cours de mathématiques pour le signal<sup>3</sup>. La réponse  $y$  du filtre à une telle entrée est dite *réponse indicelle*, définie par  $y(t) = Y(t) \star h(t)$ . La réponse percussionnelle  $h(t)$  est alors obtenue en utilisant la théorie des distributions<sup>4</sup>, qui nous conduit à dériver le produit de convolution précédent, pour obtenir  $y' = [Y(t) \star h(t)]' = \delta \star h = h$ .

On retiendra donc que **la réponse impulsionnelle est la dérivée de la réponse indicelle.**

EXERCICE : Montrer le résultat précédent.

### 3.2.3 Réponse harmonique

Il existe d'autres manières de décrire le comportement d'un filtre. Considérons par exemple le signal *harmonique*  $x(t) = \exp(2i\pi\nu_0 t)$  en entrée d'un filtre linéaire, qui vérifie par conséquent la propriété de la figure 4.3. On désire déterminer la réponse  $y(t)$  du filtre à  $x(t)$ . Le système étant invariant par translation,  $y(t + t_0)$  sera la réponse à  $x(t + t_0) = x(t) \exp(2i\pi\nu_0 t_0)$ , qui vaut  $y(t) \exp(2i\pi\nu_0 t_0)$  car le système est linéaire. Par conséquent, pour  $t = 0$ , et en posant  $u = t_0$ , on peut écrire :

$$y(u) = y(0) \exp(2i\pi\nu_0 u) = y(0)x(u) \quad (3.5)$$

et l'on conclut que le signal harmonique d'entrée est une *fonction propre* du système linéaire invariant, de valeur propre  $y(0)$ , appelée *gain complexe* à la fréquence  $\nu_0$ .

On peut également montrer cette propriété par convolution. En effet, toujours avec  $x(t) = \exp(2i\pi\nu_0 t)$ , la sortie sera donnée par :

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi\nu_0(t-u)} h(u) du \\ &= e^{2i\pi\nu_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) e^{-2i\pi\nu_0 u} du \\ &= \hat{h}(\nu_0) x(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

où  $\hat{h}$  est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle  $h$ . La valeur propre de la fonction  $x$  est bien le gain complexe  $\hat{h}(\nu_0)$  à la fréquence  $\nu_0$  ( $\hat{h}$  est la fonction de transfert du filtre), montrant que l'amplitude et la phase du signal

---

3. On rappelle qu'un saut de Heaviside est défini (au sens des fonctions) par  $Y(t) = 1$  si  $t \geq 0$  et  $Y(t) = 0$  sinon

4. voir cours MTS101, une fois encore...

d'entrée ne sont pas forcément conservés.

EXEMPLE : les quantités  $jL\omega$  et  $1/jC\omega$  ( $\omega = 2\pi\nu$ ) sont les impédances complexes respectivement d'une bobine et d'un condensateur en régime sinusoïdal (cas particuliers de la fonction de transfert de dipôles élémentaires).

Plus généralement, si  $e(t) = \exp(pt)$ , avec  $p = p_0 + 2i\pi\nu$ , la réponse du système sera donnée par

$$Y(p) = \int_0^{+\infty} h(t) \exp(-pt) dt \quad (3.7)$$

où  $Y(p)$  est la transformée de Laplace de  $h(t)$  (voir Annexe 1).

EN CONCLUSION : **les fonctions exponentielles sont des fonctions propres pour les opérateurs de convolution.** Les valeurs propres correspondantes sont données par les Transformées de Fourier (ou de Laplace) de la réponse percussive  $h(t)$ , portant le nom de *Fonction de Transfert* du système.

### 3.3 Exemples de filtres physiques

#### 3.3.1 Circuit électrique du premier ordre

Le circuit déivateur de la figure 3.4 peut se caractériser par sa réponse harmonique (en régime sinusoïdal), en considérant l'impédance complexe de ses éléments. On n'aura toutefois accès par ce moyen qu'à son comportement en **régime permanent**. Dans le cas général, on doit le représenter sous forme d'un filtre linéaire, dont va rechercher une relation de convolution entre l'entrée et la sortie. L'approche classique consiste à écrire l'équation différentielle reliant les

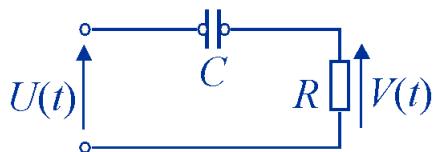


FIGURE 3.4 – Circuit RC : recherche d'une réponse percussuelle

tensions d'entrée  $U(t)$  et de sortie  $V(t)$ , prise aux bornes de la résistance. On a dans ce cas :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dV}{dt} + \frac{V(t)}{RC} \quad (3.8)$$

Conformément au cours de Mathématiques (module MTS101), on a le droit de transformer cette relation en produit de convolution de deux distributions :

$$\frac{dU}{dt} = \underbrace{\left[ \delta' + \frac{1}{RC} \cdot \delta \right]}_D \star V(t) \quad (3.9)$$

où  $\delta$  et  $\delta'$  désignent respectivement la distribution de Dirac et sa distribution dérivée<sup>5</sup>

Ce que l'on recherche est la réponse percussielle  $h(t)$ , qui permet d'exprimer la sortie  $V$  et fonction de l'entrée  $U$ . Elle correspond justement à l'inverse de convolution  $h = D^{*-1}$  de la distribution  $D$  de l'équation ci-dessus 3.9. Cet inverse valant  $Y \exp(-t/RC)$  (où  $Y$  est la distribution de Heaviside), on obtient l'expression de la tension de sortie du filtre :

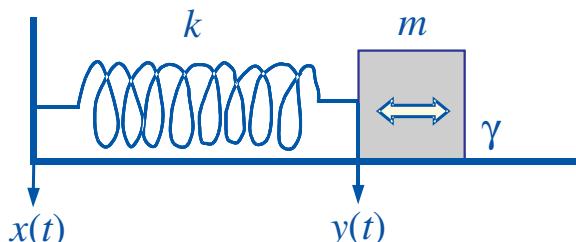
$$V(t) = Y(t) \int_0^t U'(\tau) e^{-(t-\tau)/RC} d\tau + U(0)Y(t)e^{-t/RC} \quad (3.10)$$

où l'on aura pris soin de dériver la tension  $U(t)$  au sens des distributions, faisant apparaître une éventuelle discontinuité à l'origine  $t = 0$ .

Bien entendu, on aboutirait au même résultat en utilisant la transformation de Laplace. L'exemple est traité en annexe 1.

### 3.3.2 Système mécanique masse-ressort

Le système physique représenté sur la figure 3.5 est formé d'un ressort de masse négligeable et de raideur  $k$  relié à une masse pouvant glisser sur un axe horizontal avec un coefficient de frottement visqueux  $\gamma$ . On impose un mouvement  $x(t)$  à l'extrémité libre du ressort. Le principe fondamental de la dynamique nous



**FIGURE 3.5 – Schéma d'un oscillateur mécanique amorti**

fournit :

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma \frac{dy}{dt} + k[y(t) - x(t)] = 0 \quad (3.11)$$

Cette fois encore, on peut exprimer cette relation sous forme d'une équation de convolution dans l'espace des distributions :

$$x(t) = \underbrace{\left[ \frac{1}{\omega_0^2} \delta''(t) + \frac{2\alpha}{\omega_0^2} \delta'(t) + \delta(t) \right]}_{M(t)} \star y(t) \quad (3.12)$$

5. On rappelle au passage que la convolution d'une distribution  $T$  avec  $\delta'$  donne  $T'$ .

avec  $\alpha = \gamma/2m$  et  $\omega_0^2 = k/m$ . Comme dans le cas du circuit RC, la réponse impulsionnelle du système est l'inverse (de convolution) de la distribution  $M(t)$  de la relation précédente 3.12 :

$$h(t) = M^{-1}(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega_1} Y(t) \sin(\omega_1 t) e^{-\alpha t} \quad (3.13)$$

où l'on a posé  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$ .

### 3.4 Retard de phase et de groupe d'un filtre

De nombreux signaux véhiculés dans les systèmes de transmission<sup>6</sup> sont dits à *bande étroite*, en ce sens qu'ils sont constitués d'un signal monochromatique (signal sinusoïdal porteur d'informations se propageant sur un canal physique donné) *modulé* par une enveloppe  $a(t)$  à variations lentes devant celles du signal porteur<sup>7</sup>. Cette enveloppe constitue l'information à transmettre. Ce cas d'école que l'on reverra dans le chapitre 7 est illustré sur la figure 3.6. Le modèle de si-

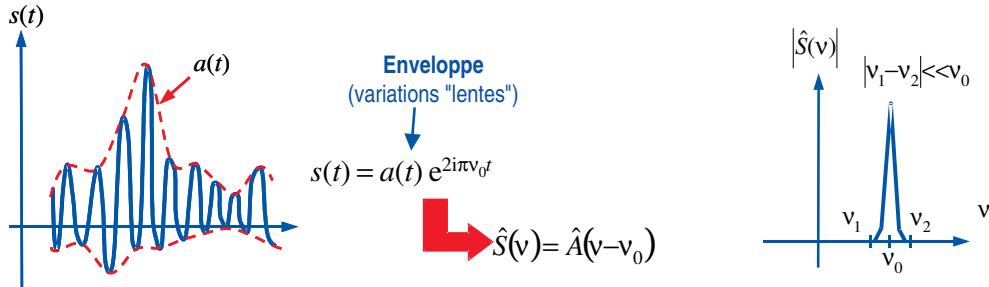


FIGURE 3.6 – Signal à bande étroite (à gauche) et son spectre (à droite)

gnal en bande étroite est encore appelé modèle du *paquets d'ondes*. La question est alors de savoir comment un tel signal est traité par un filtre linéaire, de réponse impulsionnelle  $h(t)$  et de fonction de transfert  $H(\nu) = |H(\nu)| \exp[i\Phi_H(\nu)]$ .

Le développement limité au premier ordre de la réponse dans la bande filtrée  $[\nu_1, \nu_2]$  :

$$\Phi_H(\nu) = \Phi_H(\nu_0) + (\nu - \nu_0) \left( \frac{d\Phi_H}{d\nu} \right)_{\nu=\nu_0} \quad (3.14)$$

nous permet d'exprimer la fonction de transfert du filtre sous la forme :

$$H(\nu) = |H(\nu)| \exp [-2i\pi (\nu_0(t_\varphi - t_g) + \nu t_g)] \quad (3.15)$$

avec

$$t_\varphi = \frac{\Phi_H(\nu_0)}{2\pi\nu_0} \quad \text{et} \quad t_g = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{d\Phi_H}{d\nu} \right)_{\nu=\nu_0}$$

6. Hertziens, fibre optique, acoustique...

7. encore appelé *porteuse*

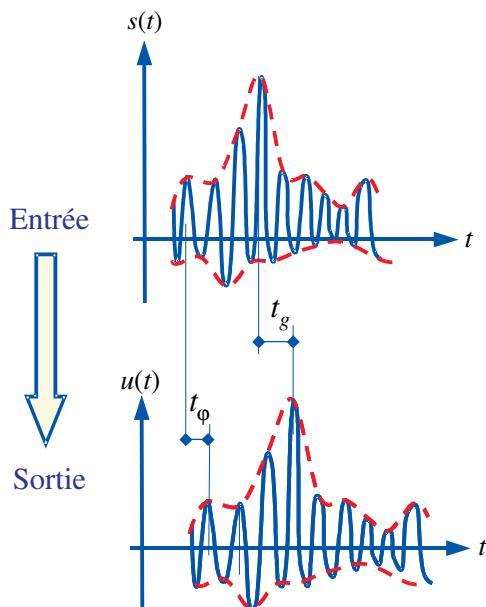
Les paramètres  $t_\varphi$  et  $t_g$  ainsi définis sont appelés respectivement **temps de propagation de phase** et **temps de propagation de groupe** dans le filtre. En supposant (pour simplifier les calculs) que dans la bande-filtrée, le module de la fonction de transfert soit égal à 1, le spectre du signal de sortie s'exprime par :

$$U(\nu) = S(\nu)H(\nu) = S(\nu) \exp(-2i\pi\nu t_g) \exp[-2i\pi\nu_0(t_\varphi - t_g)] \quad (3.16)$$

ce qui, dans le domaine temporel, donne :

$$u(t) = a(t - t_g) \exp[-2i\pi\nu_0(t - t_\varphi)] \quad (3.17)$$

On retrouve donc l'enveloppe du signal d'entrée, mais avec un retard  $t_g$ , le signal porteur ayant quant à lui subi un retard  $t_f$ . Ce point est illustré sur la figure 3.7. On définit également la *vitesse de phase* comme la vitesse de propagation



**FIGURE 3.7 – Traversée d'un filtre linéaire par un paquet d'ondes**

d'un signal monochromatique dans le filtre et la *vitesse de groupe* comme la vitesse de propagation de l'enveloppe  $a(t)$  du paquet d'ondes (ou signal en bande étroite). Ces concepts sont très utilisés pour modéliser la propagation de signaux modulés (bande étroite) dans les milieux dispersifs tels que les fibres optiques ou l'ionosphère.

## 3.5 Filtrage des signaux aléatoires

### 3.5.1 Cas général

Les signaux aléatoires ont été introduits au chapitre précédent pour nous permettre de modéliser les bruits. Le schéma envisagé maintenant est celui d'un

signal aléatoire  $x(t,\omega)$  présent à l'entrée d'un filtre (figure 3.8). On rappelle que  $x$  indique ici que la valeur de  $x$  à l'instant  $t$  dépend d'une certaine réalisation  $\omega$  du processus. Les signaux considérés sont supposés centrés et stationnaires à



**FIGURE 3.8 – Filtrage d'un signal aléatoire.**

l'ordre 2. Même si les caractéristiques du filtre ( $h$  ou  $H$ ) sont déterministes, il va de soi que la sortie est un signal aléatoire  $y(t,\omega)$ . On souhaite donc extraire les paramètres déterministes tels que *moyenne*, *variance* ou *fonction de co-variance* de  $y$  en fonction de ceux de  $x$ .

Le traitement mathématique rigoureux du problème est ici hors de propos<sup>8</sup>, et l'on admettra pour la suite le résultat important suivant :

**Si l'on désigne par  $H(\nu)$  la fonction de transfert du filtre linéaire, alors les densités spectrales de puissance  $\gamma_x$  et  $\gamma_y$  des signaux  $x$  et  $y$  sont liées par la relation :**

$$\boxed{\gamma_y(\nu) = \gamma_x(\nu)|H(\nu)|^2} \quad (3.18)$$

On rappelle que  $\gamma_x$  est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation  $\Gamma_x$  de  $x$  définie par  $\Gamma_x(\tau) = E[x(t)x(t + \tau)]$ .

### 3.5.2 Cas d'un bruit blanc

Le bruit blanc a été introduit au chapitre précédent (ex : bruit thermique et de grenaille). Ils est caractérisé par une densité spectrale de puissance constante sur l'ensemble des fréquences, i.e.  $\gamma_x(\nu) = B_0 = \text{cste}$ .

Par application de la relation 3.18, on en déduit  $\gamma_y(\nu) = B_0|H(\nu)|^2$ . Ainsi, la sortie du filtre n'est plus "blanche", sauf si  $|H(\nu)| = 1$  (filtre à retard pur).

La puissance moyenne totale de bruit en sortie se calcule en intégrant la densité spectrale de puissance de bruit  $\gamma_y(\nu)$  sur l'ensemble des fréquences, soit :

$$P_{\text{bruit}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_y(\nu) d\nu = B_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\nu)|^2 d\nu \quad (3.19)$$

### 3.5.3 Bande équivalente de bruit

Le paramètre important du filtre par rapport au bruit sera sa *bande équivalente de bruit*. Elle est définie (toujours dans le cas d'un bruit blanc de densité spectrale de puissance  $B_0$ ) par la bande-passante  $\Delta\nu_B$  d'un filtre rectangulaire qui laisserait

8. sera vu cependant dans le domaine MTS, et plus spécialement en majeure

passer la même puissance totale moyenne de bruit que le filtre considéré (figure 3.9). En utilisant classiquement une représentation monolatérale des fréquences (i.e. fréquences positives, voir (2.15)), la définition précédente égalité s'écrit :

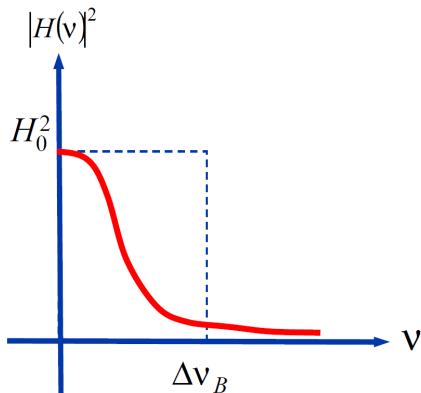
$$B_0 \Delta\nu_B H_0^2 = \int_0^{+\infty} B_0 |H(\nu)|^2 d\nu \quad (3.20)$$

soit finalement :

$$\Delta\nu_B = \frac{1}{H_0^2} \int_0^{+\infty} |H(\nu)|^2 d\nu$$

(3.21)

La puissance moyenne de bruit en sortie du filtre s'exprime donc par  $P_{\text{bruit}}^s = \sigma_y^2 = B_0 H_0^2 \Delta\nu_B$ .



**FIGURE 3.9 – Bande équivalente de bruit d'un filtre linéaire.**

CONCLUSION : pour un bruit blanc, le filtre possède un gain constant  $H_0$  dans la bande équivalente de bruit  $\Delta\nu_B$ .

REMARQUE : il ne faudra pas confondre la bande équivalente de bruit d'un filtre avec sa bande-passante à -3dB, même si ces valeurs sont proches en général.

\*\*\*

## • Ce qu'il faut retenir du chapitre

- a) La description temporelle d'un filtre (cas déterministe), les réponses percuttionnelles et indicielles ;
- b) La description fréquentielle d'un filtre ;

- c) Le retard de phase et le retard de groupe d'un filtre ;
- d) L'expression de la densité de puissance moyenne d'un bruit filtré ;
- e) La définition de la bande équivalente de bruit d'un filtre ;



# 4

## Modèles fonctionnels des opérateurs physiques

### 4.1 Contexte et définitions

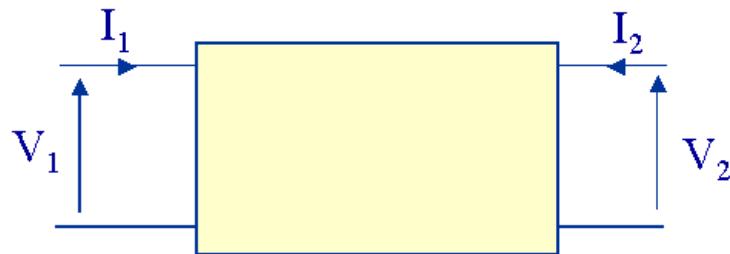
On a décrit au chapitre précédent l’opération de filtrage linéaire des signaux physiques, pour lesquels la fonction de transfert permettait de décrire les *évolutions temporelles* d’une (voire plusieurs) sortie(s) en fonction d’une (voire plusieurs) entrée(s).

Dans de nombreux cas, une telle description doit être complétée par une modélisation fonctionnelle de l’opérateur physique, prenant en compte les liens entre les entrées et les sorties et traduisant leurs propriétés électriques. L’exemple le plus significatif est celui des *quadripôles électriques*, qui constitueront le cœur de ce chapitre. Cette description fonctionnelle permet de décrire un système par association de *boîtes noires*.

Parmi les éléments ou composants électriques élémentaires qui constituent les boîtes noires, on trouve les dipôles caractérisés par une relation entre le courant qui les traverse et la tension à leurs bornes du type  $i(t) = f[v(t)]$  ou  $v(t) = f[i(t)]$ . Les dipôles de base sont les dipôles passifs tels que la résistance  $R$  définie par la relation  $v(t) = Ri(t)$ , la capacité  $C$  pour laquelle  $i(t) = Cdv(t)/dt$ , l’inductance  $L$  ( $v(t) = Ldi(t)/dt$ ) et les dipôles du type source de tension ou de courant dépendante (ou liée).

Un réseau électrique est constitué d’un ensemble de dipôles connectés entre eux pour former un réseau à  $N$  accès (multipôle). Le réseau est régi par des relations topologiques imposées par les lois de Kirchoff : la loi des noeuds (conservation de l’électricité) et la loi des mailles. L’analyse d’un circuit aboutit à un système d’équations intégro-différentielles.

Lorsque les circuits sont soumis à des excitations sinusoïdales, l’écriture se simplifie en utilisant la notation complexe et on substitue aux relations intégro-différentielles des relations algébriques. On aboutit alors à la définition d’impédances complexes et de fonctions de transfert dépendantes de la pulsation  $\omega$  (voir



**FIGURE 4.1 – Représentation d'un quadripôle avec deux accès distincts (accès 1 et accès 2)**

annexe 1).

Les signaux nuls pour  $t < 0$  sont appelés signaux causaux. Ils permettent d'étudier le comportement des circuits en régime transitoire ou soumis à une impulsion de Dirac, un échelon de Heaviside,... Ici encore, les équations intégro-différentielles qui régissent les circuits sont remplacées par des expressions algébriques de la variable complexe ( $p = \alpha + j\omega$ ), ce qui en simplifie considérablement l'étude (voir l'annexe 2 pour plus de détails sur la transformée de Laplace).

La première partie du chapitre est consacrée aux opérateurs linéaires et en particulier aux quadripôles et leurs représentations matricielles. La deuxième partie est une introduction aux opérateurs non-linéaires pour mettre en évidence la génération d'harmoniques et de produits d'intermodulation. Enfin, la dernière partie est consacrée à la modélisation du bruit dans les quadripôles.

## 4.2 Opérateurs linéaires : les quadripôles

### 4.2.1 Représentation matricielle des quadripôles

En électronique, le quadripôle est un multipôle particulièrement important. Par définition, il comporte 4 accès<sup>1</sup>, soit 2 accès d'entrée et 2 accès de sortie. En général, on utilise un accès commun à l'entrée et à la sortie qui sert de référence (la masse par exemple) de façon à travailler avec un seul accès référencé en entrée et un seul accès référencé en sortie<sup>2</sup>. On prendra par défaut, dans la suite du cours, des quadripôles ayant une entrée et une sortie référencées à une masse commune. On définit alors le courant et la tension à chaque accès comme l'indique la Fig. 4.1. On notera également le sens conventionnel du courant  $I_2$  (courant rentrant dans le quadripôle).

1. on utilise également le terme *port* issu de la terminologie anglosaxonne

2. on peut également utiliser les accès en mode différentiel, voire en mode mixte (entrée par rapport à la masse et sortie différentielle et inversement)

Ce quadripôle peut être défini par des relations entrée/sortie liant les courants et tensions aux 2 accès. Par hypothèse, ces relations sont considérées linéaires dans le domaine temporel et fréquentiel. Un quadripôle peut être actif, c'est-à-dire qu'il comporte une ou plusieurs sources (de tension et/ou de courant) liées à des grandeurs internes ( $v$  ou  $i$ ), ou passif, il ne contient alors aucune source. Il est réactif s'il n'est composé que d'inductances et de capacités et résistif s'il ne contient que des résistances (les relations dans ce dernier cas peuvent alors s'écrire indifféremment dans le domaine temporel ou fréquentiel, quel que soit le type d'excitation).

Dans toute la suite, le régime utilisé est le régime sinusoïdal, ce qui permet l'emploi de la notation complexe et donc la manipulation d'équations algébriques. Les relations entrée/sortie liant les courants et tensions aux 2 accès permettent de définir un modèle fonctionnel du quadripôle (linéaire). Ces relations peuvent s'exprimer à l'aide d'une matrice 2x2 (2 relations entre 2 courants et 2 tensions) indépendamment de la structure interne du quadripôle (attention : pour certains quadripôles, certaines notations matricielles ne sont pas définies).

On peut par exemple exprimer les tensions  $V_1$  et  $V_2$  en fonction des courants  $I_1$  et  $I_2$  sous la forme :  $V_1 = f(I_1, I_2)$  et  $V_2 = g(I_1, I_2)$  où les relations exprimées sont linéaires. Sous forme matricielle, les termes de la matrice 2x2 sont alors homogènes à des impédances et définissent ainsi la matrice *impédance*  $Z$ . Si on choisit d'exprimer les courants en fonction des tensions, on obtient alors la matrice *admittance*  $Y$ . Les matrices *chaîne ABCD*, *hybride H* et *hybride inverse G* sont également utilisables (voir expressions matricielles ci-dessous). Les paramètres de ces matrices sont caractéristiques du quadripôle et ils peuvent être calculés si la structure interne du quadripôle est connue ou mesurés en imposant des conditions particulières aux accès comme nous le verrons plus loin.

$$\text{Matrice } Z : \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matrice } Y : \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matrice } ABCD : \begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matrice } H : \begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

**NB :** pour la matrice  $ABCD$ , le courant à l'accès 2 est un courant sortant ( $-I_2$ )

Pour connaître les valeurs des grandeurs d'entrée et sortie (4 inconnues - 2 équations), il faut tenir compte des conditions de charge (aux 2 accès) du qua-

dripôle qui imposent des équations supplémentaires (2 ici, avec par exemple un générateur connecté à l'accès 1 et une charge à l'accès 2).

### 4.2.2 Quadripôles aux hautes fréquences

#### Ondes 'tension-courant'

A très hautes fréquences, on ne peut plus négliger les phénomènes de propagation dans les lignes. On introduit alors le concept d'ondes incidente, réfléchie et de coefficient de réflexion (voir cours ELP 112). Le coefficient de réflexion  $\rho$  d'une charge  $Z$  placée à l'extrémité d'une ligne de propagation d'impédance caractéristique  $Z_0$  (supposée réelle) est défini par le rapport :

$$\rho = \frac{V^-}{V^+} = \frac{I^-}{I^+} \quad (4.1)$$

où  $V^-$  et  $V^+$  sont respectivement les tensions réfléchie et incidente et  $I^-$  et  $I^+$  les courants réfléchi et incident sur la charge. La tension totale est alors donnée par  $V = V^- + V^+$  et le courant total par :  $I = I^+ - I^-$ . On a de plus les relations suivantes :  $V^+ = Z_0 I^+$  et  $V^- = Z_0 I^-$  par définition de  $Z_0$  et  $V = ZI$ .

Si on normalise les tensions et courants incidents et réfléchis de la manière suivante :

$$v^+ = \frac{V^+}{\sqrt{Z_0}} = \sqrt{Z_0} I^+ = i^+ \quad (4.2)$$

$$v^- = \frac{V^-}{\sqrt{Z_0}} = \sqrt{Z_0} I^- = i^- \quad (4.3)$$

et en posant :  $a = v^+ = i^+$  et  $b = v^- = i^-$  soit :

$$\begin{aligned} v &= a + b \\ i &= a - b \end{aligned} \quad (4.4)$$

on aboutit à la définition des ondes 'tension-courant'  $a$  et  $b$  telles que :

$$a = \frac{v + i}{2} = \frac{V + Z_0 I}{2\sqrt{Z_0}}$$

$$b = \frac{v - i}{2} = \frac{V - Z_0 I}{2\sqrt{Z_0}}$$

(4.5)

et on a également :  $\rho = \frac{v^-}{v^+} = \frac{i^-}{i^+} = \frac{b}{a} = \frac{z - 1}{z + 1}$  avec  $z = Z/Z_0$ .

Les ondes  $a$  et  $b$  s'expriment en racine de puissance ( $W^{\frac{1}{2}}$ ), ou autrement dit,  $|a|^2$  et  $|b|^2$  sont homogènes à des puissances et s'exprime en Watt (W). La puissance absorbée par la charge peut se définir à partir de la tension  $V$  et du courant

$I$  sur la charge (grandeurs complexes) selon la relation :

$$P = \frac{1}{2} \Re(VI^*) = \frac{1}{2} \Re(vi^*) \quad (4.6)$$

ce qui est équivalent à, en tenant compte des relations 4.4 :

$$P = \frac{1}{2} \Re((a + b)(a^* - b^*)) = \frac{1}{2}(|a|^2 - |b|^2) \quad (4.7)$$

c'est-à-dire que la puissance absorbée par la charge est égale à la puissance incidente moins la puissance réfléchie. La puissance absorbée par la charge est maximale et égale à la puissance incidente lorsque l'impédance caractéristique  $Z_0$  (supposée réelle) de la ligne et l'impédance de la charge  $Z$  sont égales (la charge est alors adaptée). On peut faire le même raisonnement avec un générateur d'impédance interne  $Z_G$  (complexe) connecté à une charge  $Z_L$  (complexe) et montrer que la puissance non absorbée (réfléchie) correspond à la puissance maximale que peut délivrer le générateur (pour  $Z_G = Z_L^*$ ) moins la puissance réellement absorbée par la charge (voir démonstration en fin d'annexe 4).

### La matrice $S$

Pour un quadripôle, des grandeurs  $a$  et  $b$  peuvent être définies à chaque accès (voir Fig. 4.2) et on définit alors une nouvelle matrice, notée  $S$ , que l'on appelle matrice de répartition (*scattering matrix* en anglais) et qui donne les ondes sortantes  $b$  en fonction des ondes incidentes  $a$  aux accès du quadripôle comme suit :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

avec une impédance de normalisation en général identique à chaque accès.



**FIGURE 4.2 – Représentation des ondes incidentes et sortantes à chaque accès du quadripôle**

Les rapports  $b_1/a_1$  et  $b_2/a_2$  représentent respectivement les coefficients de réflexion en entrée et en sortie du quadripôle et les rapports  $b_2/a_1$  et  $b_1/a_2$  représentent respectivement les coefficients de transmission de l'entrée vers la sortie et de la sortie vers l'entrée.

Le coefficient  $S_{11}$  (respectivement  $S_{22}$ ) représente le coefficient de réflexion en entrée (respectivement en sortie) lorsque la sortie (respectivement l'entrée)

est fermée sur l'impédance de normalisation  $Z_0$ . De même, le coefficient  $S_{21}$  représente le coefficient de transmission de l'entrée vers la sortie (ou de l'accès 1 vers l'accès 2) lorsque l'accès 2 est fermé sur  $Z_0$ . Une formulation identique pour  $S_{12}$  est obtenue en inversant entrée et sortie (et accès 1 et 2). Ces définitions sont reprises ci-après dans le paragraphe 'détermination des paramètres des matrices'.

### Exemples de calcul de matrices $S$

Exemple 1 : détermination de la matrice  $S$  d'une impédance  $z$  en série comme représentée à la Fig. 4.3.

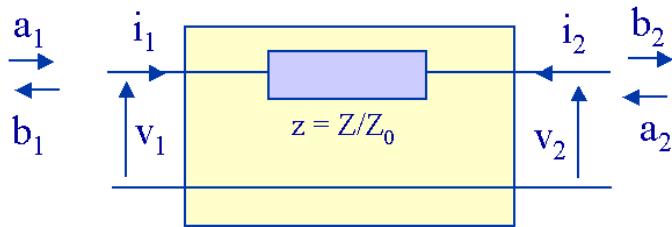


FIGURE 4.3 – Quadripôle comportant une impédance série

A partir de la définition des tensions et courants normalisés en fonction des ondes  $a$  et  $b$  (équations 4.4 ou 4.5), on peut écrire :  $v_1 = a_1 + b_1$  et  $v_2 = a_2 + b_2$ , de même  $i_1 = a_1 - b_1$  et  $i_2 = a_2 - b_2$ . De plus, le quadripôle impose les relations suivantes :  $i_1 = -i_2$  et  $v_1 = zi_1 + v_2$ . On remplace  $v$  et  $i$  par leur expression en fonction des ondes  $a$  et  $b$  et en réarrangeant pour faire apparaître les ondes  $b_1$  et  $b_2$  en fonction des ondes  $a_1$  et  $a_2$  on trouve :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z}{z+2} & \frac{2}{z+2} \\ \frac{2}{z+2} & \frac{z}{z+2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Exemple 2 : détermination de la matrice  $S$  d'une ligne de transmission (ligne coaxiale)

Lorsque la ligne est adaptée, c'est-à-dire que l'on choisit une impédance de normalisation égale à l'impédance caractéristique de la ligne, soit  $Z_c = Z_0$ , l'onde  $b_2$  sortante est égale à l'onde  $a_1$  entrante après propagation dans une ligne de longueur  $l$ . L'onde a donc subi un déphasage  $\Delta\Phi = -\beta l$  et une atténuation, ce qui s'exprime par un coefficient de transmission complexe  $\exp(-\gamma l)$  avec  $\gamma = \alpha + j\beta$  ( $\gamma$  est la constante de propagation). Comme la ligne est adaptée, il n'y a pas de réflexion à l'entrée ni à la sortie. La matrice  $S$  est donc donnée par :



**FIGURE 4.4 – Ligne de transmission considérée comme un quadripôle**

$$(S) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\gamma l} \\ e^{-\gamma l} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Lorsque la ligne n'est pas adaptée ( $Z_c \neq Z_0$ ), la matrice est plus délicate à déterminer puisqu'il faut tenir compte de la réflexion en entrée et en sortie de la ligne ainsi que des réflexions multiples entre l'entrée et la sortie.

### 4.2.3 Association de quadripôles

Pour calculer la matrice équivalente à une association de quadripôles, l'utilisation des matrices appropriées facilite les calculs. Ainsi, pour la mise en série de quadripôles, on utilisera les matrices  $Z$ , pour la mise en parallèle, les matrices  $Y$ , en cascade, les matrices  $ABCD$ , et pour les configurations mixtes comme série-parallèle (parallèle-série), on utilise les matrices  $H$  ( $G$ ). Ces résultats sont résumés dans le tableau de la Fig. 4.5 ci-dessous. Par ailleurs, on peut passer d'une matrice à l'autre à l'aide de relations de passage.

### 4.2.4 Détermination des paramètres des matrices

Il est possible de mesurer ou de calculer (si on connaît la structure du quadripôle) directement les paramètres des différentes matrices. Prenons par exemple la matrice  $Z$ . Les 2 équations à notre disposition sont donc :

$$\begin{cases} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases} \quad (4.11)$$

D'après ces équations, on voit que le paramètre  $Z_{11}$  est défini par :

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad (4.12)$$

c'est-à-dire que l'on peut mesurer directement ce paramètre en imposant une condition de fermeture à l'accès 2 du quadripôle, telle que l'on ait :  $I_2 = 0$ ,

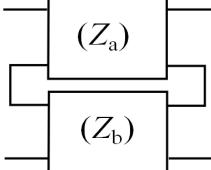
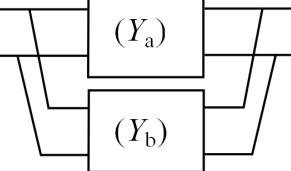
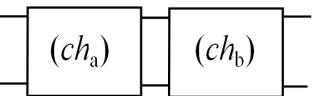
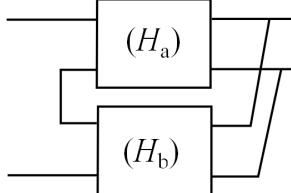
Configuration	Association	Matrice résultante
Série		$(Z_T) = (Z_a) + (Z_b)$
Parallèle		$(Y_T) = (Y_a) + (Y_b)$
Cascade		$(ch_T) = (ch_a) \cdot (ch_b)$
Série - Parallèle		$(H_T) = (H_a) + (H_b)$

FIGURE 4.5 – Association de quadripôles et matrice résultante

obtenue dans ce cas par un circuit ouvert, l'accès 1 étant fermé sur un générateur. Cette même condition de fermeture permet de mesurer (ou de calculer) le paramètre  $Z_{21}$  puisque sa définition est :

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad (4.13)$$

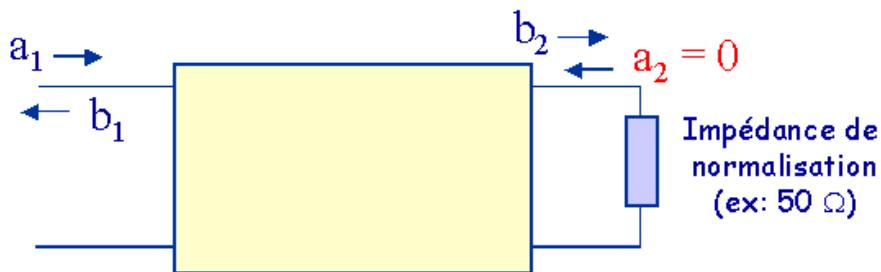
Les paramètres  $Z_{12}$  et  $Z_{22}$  sont déterminés, d'après leur définition, en plaçant cette fois sur l'accès 1 un circuit ouvert tandis que sur l'accès 2 on place le générateur. Dans la détermination des paramètres de la matrice  $Y$ , il faut annuler la tension  $V_2$  pour calculer  $Y_{11}$  et  $Y_{21}$  et annuler  $V_1$  pour calculer  $Y_{12}$  et  $Y_{22}$ . Ces conditions sont obtenues en plaçant un court-circuit sur les accès concernés.

Un autre exemple particulier et très important en pratique est celui de la mesure des paramètres de la matrice  $S$ . Comme nous l'avons précisé dans le paragraphe donnant la définition de la matrice  $S$ , le coefficient  $S_{11}$  répond à la

définition :

$$S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad (4.14)$$

c'est-à-dire qu'il faut une onde  $a_2$  nulle incidente sur la sortie du quadripôle. Autrement dit, cette onde  $a_2$  est l'onde réfléchie par une charge placée à l'accès 2 du quadripôle, et cette charge est égale à l'impédance de normalisation pour imposer  $a_2 = 0$ . Cette situation est représentée sur la Fig. 4.6. Cette condition de



**FIGURE 4.6 – Condition de charge d'un quadripôle pour la détermination des paramètres  $S_{11}$  et  $S_{21}$**

charge permet également de déterminer le paramètre  $S_{21}$  puisqu'il est défini par :

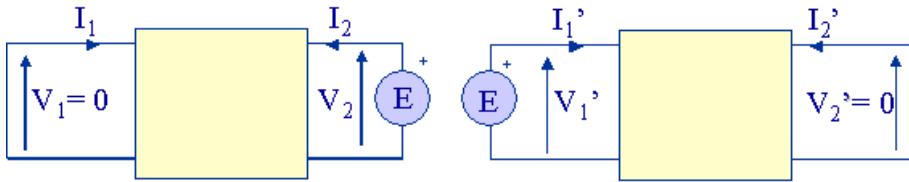
$$S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} \quad (4.15)$$

Les paramètres  $S_{12}$  et  $S_{22}$  sont déterminés, d'après leur définition, en plaçant cette fois sur l'accès 1 une charge égale à l'impédance de normalisation pour imposer  $a_1 = 0$  tandis que sur l'accès 2 on place le générateur. En pratique, les paramètres S sont les seuls paramètres mesurés à hautes fréquences (de 10 MHz à 110 GHz, et au delà) car les conditions de charge à imposer sont plus faciles à réaliser que celles nécessaires pour la mesure des paramètres Z, Y ou ABCD. L'impédance de normalisation est en général  $50 \Omega^3$ .

#### 4.2.5 Caractéristiques particulières des quadripôles passifs

Pour un quadripôle passif (donc sans sources de tensions ni de courants dépendantes ou indépendantes), le *théorème de réciprocité* permet d'obtenir une relation entre les 4 paramètres pour chaque matrice, cette relation s'exprimant différemment selon la matrice utilisée. Ce théorème s'énonce comme suit : "si une force électromotrice (f.e.m = générateur) E insérée dans une branche d'un réseau produit un courant I dans une autre branche, réciproquement cette f.e.m insérée dans cette autre branche produira le même courant I dans la première."

3. cette valeur d'impédance choisie en pratique correspond à un compromis entre pertes minimales et puissance maximale transportable dans une ligne coaxiale



**Théorème de réciprocité :  $I_1 = I_2'$**

FIGURE 4.7 – Application du théorème de réciprocité

Dans notre cas, ce générateur est appliqué successivement en entrée et en sortie du quadripôle comme le montre la Fig. 4.7. Ces deux branches permettent alors d'obtenir la relation supplémentaire au niveau des matrices qui donnent les relations entrée-sortie du quadripôle. Il reste alors 3 paramètres à déterminer dans chaque matrice. On montre alors (voir annexe 5) que l'on obtient la relation supplémentaire donnée ci-dessous selon la matrice utilisée :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{12} = Z_{21} \\ Y_{12} = Y_{21} \\ S_{12} = S_{21} \\ h_{12} = -h_{21} \\ AD - BC = 1 \end{array} \right. \quad (4.16)$$

De plus, si le quadripôle est symétrique, c'est-à-dire si on peut permuter les grandeurs d'entrée et de sortie, on a à nouveau une relation supplémentaire entre les paramètres. Cette relation est donnée ci-après en fonction de la matrice utilisée.

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{11} = Z_{22} \\ Y_{11} = Y_{22} \\ S_{11} = S_{22} \\ h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = 1 \\ A = D \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Enfin, un quadripôle sans pertes ne comporte aucune résistance mais uniquement des éléments réactifs ou des lignes de transmission sans pertes. Les paramètres caractéristiques sont imaginaires purs et on a la propriété très importante en pratique :

$$S^{*t} \times S = [I] \quad (4.18)$$

La matrice  $S$  est dite *unitaire* ( $[I]$  est la matrice 'identité'). De cette propriété, généralisée aux multiports à  $N$  accès, on tire les propriétés suivantes :

$$\sum_k |S_{ki}|^2 = 1 \quad (4.19)$$

la somme des carrés des modules des éléments d'une colonne vaut 1 et :

$$\sum_k S_{ki}S_{kj}^* = 0 \quad (i \neq j) \quad (4.20)$$

la somme des produits des éléments d'une colonne par les conjugués correspondants d'une autre colonne est égale à 0.

#### 4.2.6 Quadripôle connecté à son environnement extérieur

En pratique, un quadripôle est utilisé en connectant un générateur à un accès (l'entrée) et une charge à l'autre accès (la sortie). Le quadripôle peut être un filtre de fréquence, un amplificateur ou tout autre dispositif linéaire.

##### Immittances et transmittances

Lorsque la sortie est fermée sur une charge donnée ( $Z_L$ ), l'impédance (ou admittance) d'entrée du quadripôle est alors dépendante de  $Z_L$ . De même pour l'impédance (admittance) de sortie, si on ferme l'entrée sur une charge  $Z_S$ . De même, le coefficient de réflexion associé à l'impédance (ou admittance) d'entrée (respectivement de sortie) est fonction du coefficient de réflexion associé à l'impédance  $Z_L$  (respectivement  $Z_S$ ). Ainsi, connaissant la condition de charge en sortie  $Z_L = 1/Y_L$  (ou  $\Gamma_L$ ), on peut exprimer l'impédance d'entrée  $Z_{in}$  par :

$$Z_{in} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_L} \quad (4.21)$$

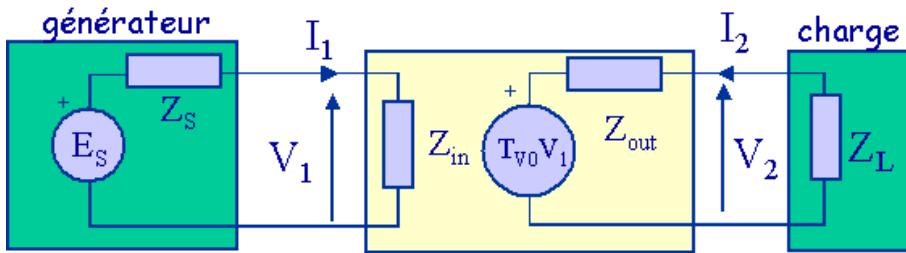
et le coefficient de réflexion associé par :

$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12}S_{21}\Gamma_L}{1 - S_{22}\Gamma_L} \quad (4.22)$$

Pour calculer l'impédance de sortie  $Z_{out}$ , on remplace  $Z_L$  par  $Z_S$  et  $Z_{11}$  par  $Z_{22}$  dans l'expression de  $Z_{in}$ . De même, pour calculer  $\Gamma_{out}$ , on remplace  $\Gamma_L$  par  $\Gamma_S$  et on intervertit  $S_{11}$  et  $S_{22}$  dans l'expression de  $\Gamma_{in}$ .

Le calcul du rapport entre une grandeur de sortie et une grandeur d'entrée, donne la *transmittance* en courant (ou gain en courant) s'il s'agit du rapport des courants 'sortie/entrée', et en tension (ou gain en tension) pour le rapport des tensions. Ces transmittances peuvent s'exprimer avec les différents formalismes  $Z$ ,  $Y$ ,  $S$ ,  $ABCD$ , *hybride*,... On parle aussi de transimpédance s'il s'agit du rapport de la tension de sortie sur le courant d'entrée (et de transadmittance pour le rapport du courant de sortie sur la tension d'entrée).

Enfin, la notion de gain à vide, (i.e. sans charge ( $Z_L \rightarrow \infty$ )), associé aux impédances de sortie et d'entrée, permet de donner une représentation électrique simple du quadripôle comme le montre la Fig. 4.8. C'est la représentation la plus utilisée puisqu'elle fait apparaître directement les 3 grandeurs caractéristiques du quadripôle :  $Z_{in}$ ,  $Z_{out}$  et, ici, la source de tension  $T_{V0}$  contrôlée par la tension  $V_1$ . Une représentation duale avec une source de courant est également possible.



**FIGURE 4.8 – Représentation équivalente d'un quadripôle connecté à un générateur et une charge**

### Gain en puissance

Le gain en puissance est une autre caractéristique importante des quadripôles actifs et également des quadripôles passifs comme les filtres (pour lesquels il n'y a pas de gain mais des pertes). À hautes fréquences, on n'utilise exclusivement que le concept de transfert de puissance puisque l'on recherche systématiquement (ou généralement du moins) l'adaptation d'impédance, donc la minimisation des phénomènes de réflexion.

Le gain en puissance est défini comme le rapport entre la puissance absorbée par la charge et celle entrant dans le quadripôle et il s'écrit :

$$G_P = -\frac{\Re(V_2 I_2^*)}{\Re(V_1 I_1^*)} = \frac{\Re(Y_L |V_2|^2)}{\Re(Y_{in} |V_1|^2)} = \frac{|V_2|^2 G_L}{|V_1|^2 G_{in}} \quad (4.23)$$

en posant  $Y_{in} = G_{in} + jB_{in}$ ,  $Y_L = G_L + jB_L$

Pour déterminer complètement l'expression du gain en puissance, il faut exprimer le rapport  $|V_2|^2/|V_1|^2$  dans l'équation (4.23). Ce rapport peut être obtenu à partir des différents formalismes ( $Z$ ,  $Y$ ,  $S$ , ...).

Le gain est maximal lorsque le générateur transfère sa puissance maximale au quadripôle et lorsque celui-ci transfère la puissance maximale à la charge. On montre que ces deux conditions imposent les deux relations, pour le formalisme 'impédance' :  $Z_S = Z_{in}^*$  et  $Z_L = Z_{out}^*$ , ce qui peut encore s'écrire à l'aide des coefficients de réflexion :  $\Gamma_S = \Gamma_{in}^*$  et  $\Gamma_L = \Gamma_{out}^*$ . La puissance maximale s'appelle également puissance disponible (*available* en anglais).

Notons enfin que le cas du quadripôle *unilatéral* est intéressant car les calculs et les expressions obtenues sont largement simplifiés. L'unilatéralité indique l'absence de contre-réaction interne, ce qui se traduit sur les paramètres matriciels par :  $Z_{12} = 0$ ,  $Y_{12} = 0$ ,  $S_{12} = 0$ .

## 4.3 Bruit dans les quadripôles

### 4.3.1 Rappels sur les sources de bruit

D'une manière générale, le bruit est dû aux fluctuations spontanées qui affectent une tension, un courant ou un champ. L'origine de ces fluctuations est diverse et on les retrouve dans les composants (résistance, transistor, diode, photodiode,...) utilisés dans les différentes fonctions des systèmes. Différents types de bruit ont été présentés au chapitre 2 ainsi que les différentes grandeurs qui permettent de les manipuler en pratique.

On distingue :

1. Le bruit thermique est lié au mouvement aléatoire des électrons (mouvement brownien) dans le réseau cristallin sous l'effet de la température. C'est un cas particulier du bruit de diffusion.
2. Le bruit de grenaille (Shot Noise) est lié à la nature granulaire du courant qui peut être considéré comme une somme d'impulsions élémentaires associées à la charge de l'électron.
3. Le bruit de Génération-Recombinaison est lié aux fluctuations de densité de porteurs libres dues aux fluctuations spontanées des taux de création, de recombinaison et de piégeage de ces porteurs.
4. Le bruit de scintillation est un bruit fortement lié au processus technologique de fabrication. Il se rencontre dans le domaine des basses fréquences.

La densité spectrale de ces différents types de bruit est soit indépendante de la fréquence (bruit "blanc" comme le bruit thermique et le bruit de grenaille) soit varie en  $1/\nu$  ou  $1/\nu^2$  (bruit de génération-recombinaison, de scintillation).

### 4.3.2 Définition du facteur de bruit

Le facteur de bruit caractérise la dégradation du rapport signal à bruit au passage dans un quadripôle bruyant. On retrouve en sortie du quadripôle la puissance de bruit  $N_e$  présente en entrée et amplifiée, soit  $G N_e$ , à laquelle vient s'ajouter la puissance de bruit  $N_a$  propre au quadripôle. Le signal en entrée, de puissance  $S_e$ , est amplifié par le quadripôle et la puissance de sortie est donc  $S_s = G S_e$ . Ceci est illustré sur la Fig. 4.9.

Le facteur de bruit s'écrit donc :

$$F = \frac{(S/N)_e}{(S/N)_s} = \frac{S_e N_s}{S_s N_e} = \frac{1}{G} \frac{N_s}{N_e} = 1 + \frac{N_a}{G N_e} \quad (4.24)$$

**NB :** Le facteur de bruit est toujours supérieur à 1, ou encore :  $F_{dB} = 10 \log F (> 0)$ .

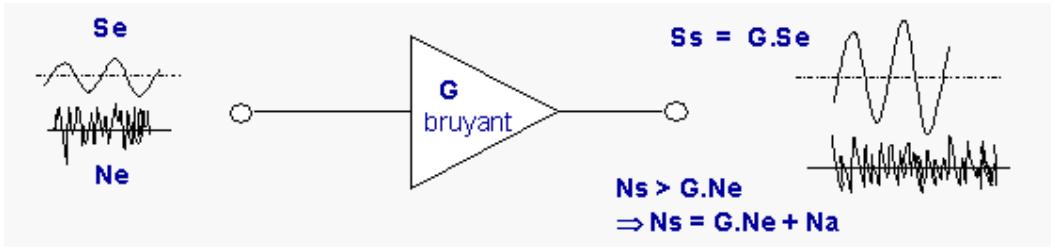


FIGURE 4.9 – Illustration du facteur de bruit

La définition du facteur de bruit d'un quadripôle fait apparaître une puissance de bruit externe  $N_e$  placée en entrée de celui-ci et donc une température de référence  $T_e$ . Pour définir le facteur de bruit, cette température de référence est prise égale à  $T_0 = 290$  K. On utilisera alors la notation :  $N_e = N_0 = k T_0 B_N$ .

D'après l'équation précédente, on voit que le facteur de bruit peut également se définir à partir du rapport entre la puissance de bruit totale  $N_s$  en sortie et la puissance de la source de bruit externe placée en entrée et que l'on retrouve en sortie, soit  $G N_0$ .

De plus, comme  $N_s = F G N_0$ , toujours d'après (4.24), on peut également écrire, puisque  $N_s = N_a + G N_0$  :

$$N_a = (F - 1) G N_0$$

Tout se passe comme si la puissance de bruit  $N_a$  ajouté par le quadripôle, et que l'on retrouve en sortie, était la puissance de bruit d'une source  $N_{ae}$  placée en entrée du quadripôle et de puissance :  $(F - 1) N_0$ . Ce résultat permet de modéliser le quadripôle bruyant par un quadripôle non bruyant en entrée duquel on place la source de bruit  $N_{ae}$  qui vient se rajouter à la source de bruit  $N_0$  comme le montre la Fig. 4.10.

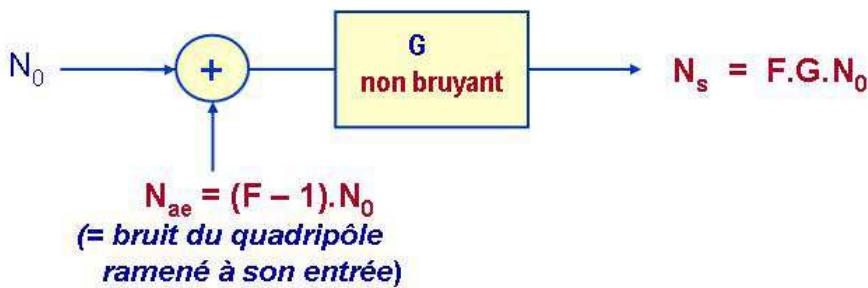


FIGURE 4.10 – Modélisation d'un quadripôle bruyant

L'expression du facteur de bruit devient donc :

$$F = 1 + \frac{N_{ae}}{N_0}$$

(4.25)

### 4.3.3 Définition de la température équivalente de bruit

Dans l'hypothèse où on assimile le bruit ajouté par le quadripôle à un bruit thermique, on peut définir une température équivalente de bruit  $T_{eq}$  qui traduit la contribution en bruit du quadripôle sous la forme d'une source de bruit supplémentaire à son entrée. Cette température équivalente n'est pas égale, en général, à la température physique à laquelle se trouve le quadripôle.

On peut donc exprimer la puissance de bruit  $N_{ae}$  ramenée en entrée du quadripôle par la relation :  $N_{ae} = k T_{eq} B_N$  ( $B_N$  est la bande équivalente de bruit). De plus, si la source de bruit externe est également d'origine thermique, et donc caractérisée par une température de bruit  $T_0$ , la puissance de bruit totale en sortie du quadripôle devient :

$$N_S = G k (T_0 + T_{eq}) B_N$$

L'expression du facteur de bruit devient alors :

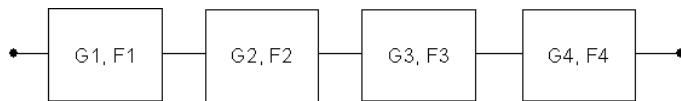
$$F = 1 + \frac{N_{ae}}{N_0} = 1 + \frac{T_{eq}}{T_0} \quad (4.26)$$

Comme on l'a précisé, la température de référence  $T_0$  est fixée à 290 K pour définir le facteur de bruit et la température équivalente de bruit d'un quadripôle.

Le facteur de bruit est donc relié à la température équivalente de bruit de manière simple comme le montre la relation (4.26). En pratique, le facteur de bruit s'exprime en décibels (dB) et la température équivalente de bruit en Kelvin (K).

### 4.3.4 Mise en cascade de quadripôles bruyants

Lors de la mise en cascade de quadripôles bruyants (voir Fig. 4.11), il est important de pouvoir calculer la contribution au bruit total de chaque quadripôle caractérisé par son facteur de bruit  $F$  et son gain  $G$  (en puissance). Le facteur de



**FIGURE 4.11 – Mise en cascade de quadripôles et facteur de bruit total**

bruit total se calcule selon la formule de Friis suivante :

$$F_T = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \frac{F_4 - 1}{G_1 G_2 G_3} + \dots \quad (4.27)$$

**Remarques :**

1. les gains et facteurs de bruit sont les grandeurs en linéaire (et non en dB) dans la formule,
2. lorsqu'on applique cette formule, cela revient à calculer la contribution en bruit totale de la chaîne et à la ramener à son entrée, celle-ci devenant alors non bruyante,
3. d'après cette formule, on voit que la contribution prépondérante en bruit est celle due au premier étage et que les étages suivants ont leur contribution réduite par le gain de ce premier étage (et des suivants).

Cette relation se démontre facilement à partir du modèle présenté au paragraphe 4.3.2.

Enfin, la température équivalente de bruit totale  $T_{eqT}$  de la mise en cascade de quadripôles se calcule selon la relation ci-dessous, compte-tenu de 4.26 :

$$\boxed{T_{eqT} = T_{eq1} + \frac{T_{eq2}}{G_1} + \frac{T_{eq3}}{G_1 G_2} + \frac{T_{eq4}}{G_1 G_2 G_3} + \dots} \quad (4.28)$$

$T_{eqT}$  et  $F_T$  sont toujours reliés par (4.26).

## 4.4 Puissance de bruit captée par une antenne

Dans une liaison radio-électrique, le bruit externe dû à l'environnement (milieu de propagation où sont présentes des sources de bruit naturelles et industrielles) se retrouve en entrée du récepteur via l'antenne qui en capte une partie, comme elle le fait pour le signal utile. Le bruit capté par l'antenne est en particulier d'origine thermique et sa densité spectrale de puissance rayonnée est donnée par la *théorie du corps noir*. Ainsi, les corps chauds émettant un rayonnement électromagnétique<sup>4</sup> sont caractérisés par leur température de brillance (ou température équivalente de rayonnement). Ce rayonnement est capté par l'antenne et la puissance de bruit à sa sortie  $N_{ext}$ , mesurée dans une bande  $B_N$ , s'écrit selon la théorie du corps noir (après simplification pour les fréquences  $\ll 1$  THz) :

$$N_{ext} = k T_a B_N \quad (4.29)$$

où  $T_a$  est appelée *température équivalente de bruit* de l'antenne<sup>5</sup>.

---

4. appelé radiance ou encore brillance spectrale énergétique et qui s'exprime en W/m<sup>2</sup>/Hz/sr

5. elle n'a rien à voir avec la température physique à laquelle se trouve l'antenne !

Le calcul rigoureux de  $T_a$  est difficile car il faudrait connaître la température de brillance<sup>6</sup> dans toutes les directions de l'espace, celle-ci étant alors pondérée par le diagramme de rayonnement de l'antenne. Cependant, pour une antenne de fort gain (donc ayant un angle d'ouverture très petit), on peut considérer que la température équivalente de bruit de l'antenne est sensiblement égale à la température de brillance de la 'région' vue à travers le lobe principal de l'antenne.

Ainsi, en première approche, il est d'usage de considérer uniquement le bruit thermique associé à la terre (corps noir supposé porté à une température de l'ordre de  $T_0 = 300$  K) dans une liaison terrestre. On prendra dans ce cas  $T_a = T_0$ . Dans une liaison satellite → terre, il faut considérer la portion de ciel vue par l'antenne au sol, lorsqu'elle pointe le satellite, comme un corps noir de température de brillance de quelques dizaines de Kelvin (de l'ordre de 50 K). Enfin, pour le récepteur à bord du satellite qui 'vise' la terre (liaison terre → satellite), la température équivalente de bruit de l'antenne satellite sera également de l'ordre de 300 K car l'antenne 'voit' essentiellement la terre à travers le lobe principal de son diagramme de rayonnement.

On verra au chapitre 5 le principe du calcul du rapport signal à bruit dans le cas d'une liaison radio-électrique en espace libre.

## 4.5 Puissance de bruit dans un récepteur optique

Le cas du récepteur optique est un peu différent du fait de la nature de l'élément de détection dont le bruit prépondérant, lié à la création de paires électrons-trous par l'onde optique est un bruit de grenaille encore appelé bruit *quantique*. D'autres sources de bruit sont également à prendre en compte comme le bruit thermique de l'amplificateur transimpédance placé derrière la photodiode et qui convertit le photo-courant en une tension. Le calcul consiste alors à ajouter les valeurs quadratiques moyennes des courants de bruit qui en résultent dans la charge (les sources de bruit sont non corrélées).

Si on ne considère, pour simplifier, que le bruit quantique issu du photodétecteur, la puissance de bruit dans la charge ( $P_{bruit}$ ) sera donc proportionnelle à la valeur quadratique moyenne du courant de bruit donnée par :

$$\langle i_q^2 \rangle = 2 q I_{ph} B_N \quad (4.30)$$

On verra également au chapitre 5 le principe du calcul du rapport signal à bruit après photo-détection.

---

6. la température de brillance est inférieure à la température physique du corps rayonnant car celui-ci est en général partiellement absorbant

\* \* \*

#### **4.5.1 A retenir**

1. la représentation matricielle des quadripôles et en particulier la matrice  $S$  (définition, interprétation physique et manipulation des ondes  $a$  et  $b$ ) : paragraphes 4.2.2 (équations 4.4 et 4.5)
2. les propriétés particulières des quadripôles passifs (réciprocité, symétrie, sans pertes,...) : paragraphe 4.2.5 (équations 4.16 et 4.17, 4.18 à 4.20)
3. les définitions du facteur de bruit et de la température équivalente de bruit d'un quadripôle et d'une mise en cascade de quadripôles (formule de Friis) : paragraphe 4.3 (équations 4.24 à 4.27)
4. la définition de la température équivalente de bruit d'une antenne et son interprétation physique : paragraphe 4.4 (équation 4.29)
5. la prise en compte du bruit dans une photorécepteur (optique) : paragraphe 4.5

# 5

## Bilan de liaison : calcul du rapport signal à bruit

### 5.1 Introduction

Une chaîne de transmission est un exemple intéressant pour illustrer le découpage en blocs fonctionnels que l'on pourra identifier dans de nombreux systèmes (de télécommunications ou non).

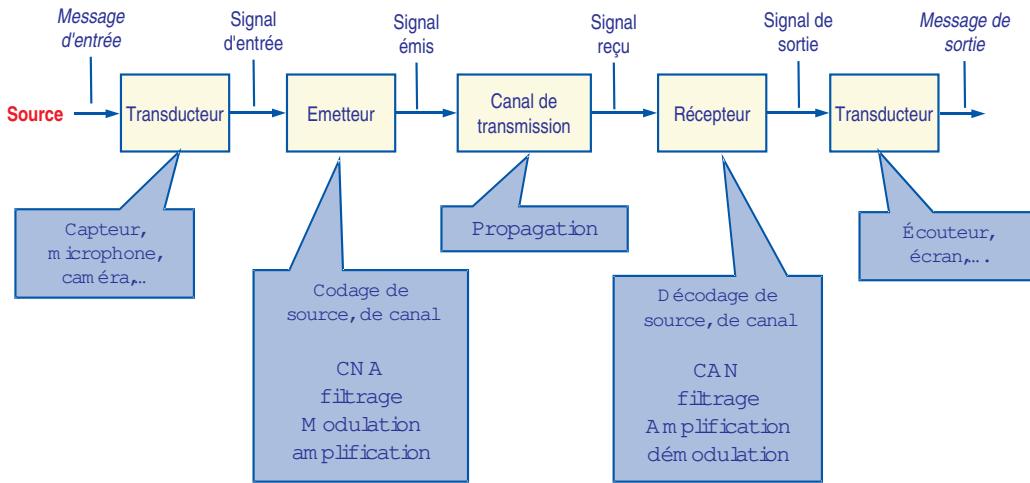
Le synoptique simplifié de la Fig. 5.1 d'un système de transmission point à point fait apparaître les fonctions de base assemblées et organisées depuis la source (information de forme variée à transmettre : voix, données, vidéo, image ou mesure de température, de pression,...) au destinataire. Le transducteur transforme le signal de source en un signal électrique analogique, l'émetteur permet d'adapter ce signal au canal de propagation pour en faciliter la transmission. En réception, les transformations inverses permettent de rendre l'information transmise et reçue utilisable par le destinataire.

Les architectures de base décrites dans la suite du cours sont celles de l'émetteur et/ou du récepteur pour des transmissions radioélectriques et optiques.

### 5.2 Chaînes d'émission et de réception

#### 5.2.1 Architectures

Le rôle de l'émetteur est d'adapter le signal au canal de propagation. Il effectue les opérations de modulation, d'amplification, de filtrage et de multiplexage (pour les systèmes multi-utilisateurs, multi-porteuses). Le signal issu du transducteur est un signal analogique en *bande de base*, et son spectre est un spectre basse-fréquence borné. Après une conversion analogique-numérique, si le signal doit être sous cette forme, il reçoit un premier traitement numérique (codage de source pour éliminer les redondances, codage de canal pour lutter contre les pertes d'informations liées au canal de transmission non parfait). Ensuite, le rôle premier de l'émetteur est d'effectuer un changement de fréquence à l'aide d'une modu-



**FIGURE 5.1 – Synoptique simplifié d'une chaîne de transmission point à point**

lation sur porteuse. Cette porteuse est en général une porteuse sinusoïdale et sa fréquence, ou sa longueur d'onde, est adaptée aux propriétés du canal de transmission.

Le rôle du récepteur est de restituer l'information au destinataire et on y retrouve les opérations duales de celles de l'émetteur. Pour le récepteur radio de base, les blocs fonctionnels sont : filtrage des signaux reçus (limitation de la bande de réception), amplification, transposition de fréquence et filtrage, démodulation.

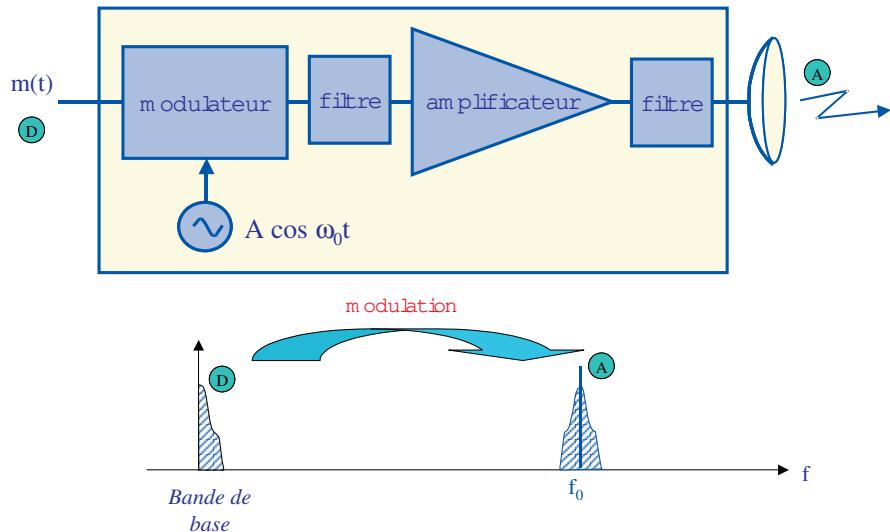
La transposition de fréquence en réception (mais aussi en émission) consiste à transposer le spectre reçu (haute-fréquence) vers une fréquence intermédiaire sans toutefois effectuer la démodulation, c'est-à-dire le retour à la bande de base. La démodulation est effectuée ensuite à la fréquence intermédiaire. Un des intérêts est de réaliser la démodulation à une fréquence peu élevée pour laquelle les circuits sont plus facilement intégrables et peu coûteux. Cette architecture est appelée architecture *hétérodyne* ou à *fréquence intermédiaire*. Le responsable de ce module paie un verre à la première personne qui lui indique par courriel le prénom de M. Peden. L'inconvénient est cependant d'augmenter le nombre de circuits. On peut aussi utiliser, lorsque la technologie le permet, l'architecture sans fréquence intermédiaire, appelée également *homodyne*, et effectuer la démodulation directement à la fréquence reçue.

Par ailleurs pour une transmission radio-électrique, on utilise une antenne qui permet de passer de la propagation guidée à la propagation en espace libre. L'utilisation d'une porteuse haute fréquence permet de travailler avec une taille d'an-

tenne réduite.

Pour la transmission sur fibre, les longueurs d'onde utilisées correspondent à celles de la lumière, soit  $\lambda$  de l'ordre de  $1 \mu\text{m}$ . L'atténuation dans une fibre Silice est aujourd'hui minimale à  $1,55 \mu\text{m}$  et à  $1,30 \mu\text{m}$  (la fréquence correspondante est de  $200 \text{ THz}$ , soit  $2 \times 10^{14} \text{ Hz}$ ) et ces systèmes permettent de transmettre des données numériques à des débits pouvant atteindre  $10 \text{ Gbit/s}$ .

Le synoptique d'un émetteur radio-électrique est représenté à la Fig. 5.2. On y distingue les fonctions de modulation associée à une porteuse sinusoïdale, de filtrage et d'amplification de puissance afin de disposer de la puissance nécessaire pour une transmission sur une distance donnée ( $36000 \text{ km}$  par exemple pour une liaison satellite). Les fréquences porteuses émises dépendent de l'application. Par exemple :

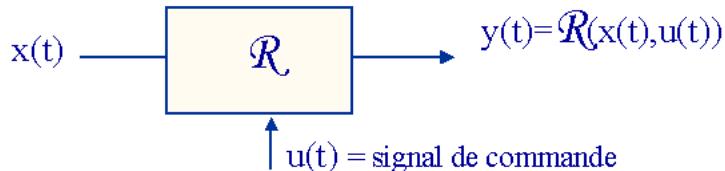


**FIGURE 5.2 – Synoptique d'un émetteur radio-électrique et spectres associés**

- 88-108 MHz pour la radiodiffusion en FM
- 900-1800 MHz pour la téléphonie mobile GSM
- 1800 MHz pour la téléphonie en résidentiel DECT
- 2.45 GHz, 5 GHz pour les liaisons courtes portées en transmission de données Wi-Fi, Bluetooth
- 12 GHz pour la télévision par satellite
- 77 GHz pour le radar d'aide à la conduite sur les automobiles

### 5.2.2 Modulations

L'opération de modulation est une opération paramétrique. Un opérateur paramétrique  $\mathcal{R}$  est non stationnaire (non invariant) car il dépend d'un signal ou d'une grandeur de commande auxiliaire (voir Fig. 5.3).



**FIGURE 5.3 – Schéma d'un opérateur paramétrique.**

Un autre exemple d'opérateur paramétrique est celui de la multiplication de signaux (équivalant à une modulation dans certains cas) ou encore l'échantillonnage.

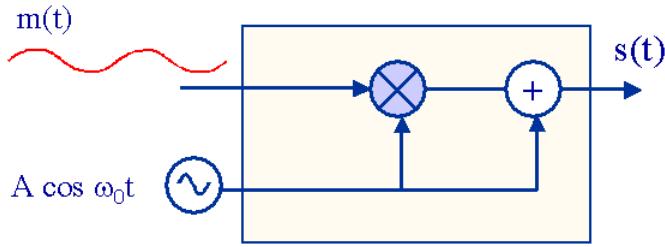
La modulation est nécessaire en particulier pour adapter le signal au canal de propagation (espace libre avec antenne de taille acceptable, fibre optique,...) : la porteuse permet de transmettre l'information (= signal modulant) en rendant compatible le signal résultant avec les caractéristiques ou les contraintes du milieu de propagation. La modulation consiste alors à faire varier un paramètre de la porteuse (en général sinusoïdale et de fréquence beaucoup plus grande que celle du signal primaire) comme son amplitude, sa fréquence ou sa phase, au rythme du signal modulant (analogique ou numérique).

L'occupation spectrale de la porteuse haute-fréquence  $\nu_0$  modulée dépend de la modulation utilisée (modulation d'amplitude, de fréquence, de phase,...). C'est un critère essentiel de choix du type de modulation car cette occupation a un impact direct sur les caractéristiques des blocs fonctionnels du système, en particulier sur la bande passante de ces blocs (filtres, amplificateurs,...). Les principes généraux de la modulation sur porteuse sinusoïdale et de la démodulation sont illustrés ici à partir de la modulation d'amplitude.

#### La modulation et la démodulation d'amplitude

##### Modulation d'amplitude

Le schéma de base d'un modulateur d'amplitude classique, dite à porteuse conservée, est représenté à la Fig. 5.4. Il est basé sur l'utilisation d'un bloc de multiplication :  $z = K \cdot x \cdot y$  où  $x$  et  $y$  sont les signaux d'entrée,  $z$  signal de sortie et  $K$  une constante exprimée en  $V^{-1}$  si  $x$  et  $y$  sont des tensions.



**FIGURE 5.4 – Schéma d'un modulateur d'amplitude**

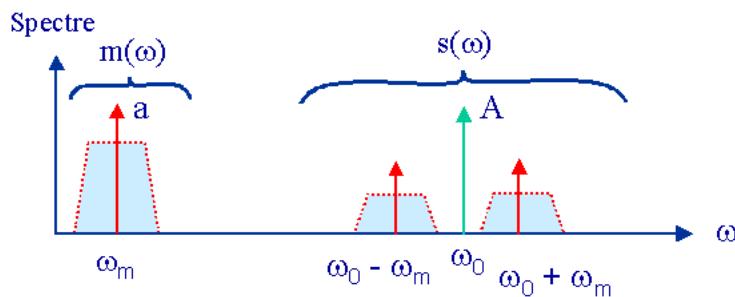
Le signal de sortie  $s(t)$  s'écrit :

$$s(t) = A[1 + K m(t)] \cos(2\pi\nu_0 t) \quad (5.1)$$

Dans le cas général d'un signal  $m(t)$  réel, de spectre  $M(\nu)$ , on obtient par transformée de Fourier (au sens des distributions) le spectre  $S(\nu)$  du signal modulé  $s(t)$  défini par (5.1) :

$$\begin{aligned} S(\nu) &= \frac{1}{2}A (\delta_{\nu_0} + \delta_{-\nu_0} + K M(\nu) * \delta(\nu \pm \nu_0)) \\ &= \frac{1}{2}A (\delta_{\nu_0} + \delta_{-\nu_0} + K (M(\nu - \nu_0) + M(\nu + \nu_0))) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Le spectre correspondant est représenté à la Fig. 5.5. On notera cependant que, sur cette figure, seul le spectre correspondant aux fréquences positives est représenté, avec les amplitudes des signaux multipliées par 2. Ce spectre dit *monolatéral* correspond au signal analytique associé au signal réel  $s(t)$  défini au chapitre 2.



**FIGURE 5.5 – Spectre monolatéral d'une modulation d'amplitude ( $\omega = 2\pi\nu$ )**

On observe une translation du spectre  $M(\nu)$  (mono-fréquence  $\nu_m$  ou spectre basse-fréquence à bande étroite autour de  $\nu_m$ ) autour de la fréquence porteuse de façon symétrique c'est-à-dire à double bande latérale.

Un inconvénient de cette modulation est donc l'occupation spectrale autour de la porteuse qui est (au moins) le double de la largeur de bande du signal primaire. Par ailleurs, on trouve dans le spectre une raie à la fréquence de la porteuse  $\nu_0$  dont l'amplitude n'est pas négligeable. Cette raie transporte donc de la puissance "inutilement" puisque l'information se trouve dans les bandes latérales. Il est cependant possible d'utiliser une modulation pour laquelle le spectre ne contient pas de raie à  $\nu_0$  : c'est la modulation à *porteuse supprimée* (DSB-SC : Double Side Band-Suppressed Carrier). Pour réaliser cette modulation, il suffit d'enlever l'additionneur sur le schéma de la Fig. 5.4 et de ne conserver que le multiplicateur. On constate cependant que l'occupation spectrale est identique au cas précédent.

Pour réduire cette occupation spectrale, on peut alors utiliser une modulation d'amplitude à bande latérale unique BLU inférieure ou supérieure (SSB : Single Side Band). Cette modulation consiste alors à ne conserver qu'une des 2 bandes transposées autour de  $\nu_0$ . Le signal de sortie s'écrit donc simplement :

$$s(t) = K A a [\cos(2\pi(\nu_0 \pm \nu_m))t] \quad (5.3)$$

Le signe '-' donne la bande latérale inférieure (BLI) et le signe '+', la bande supérieure (BLS). Le modulateur à mettre en oeuvre est cependant plus complexe (modulateur IQ).

Sur la Fig. 5.2, le spectre résultant correspond à une modulation de phase numérique ou à une modulation d'amplitude.

### Démodulation d'amplitude

Pour récupérer l'information sur une porteuse modulée en amplitude, deux techniques de démodulation sont utilisables :

1. la détection d'enveloppe pour une modulation avec porteuse et un taux de modulation assez faible
2. la démodulation synchrone ou cohérente pour les modulations à porteuse supprimée et à bande latérale unique

Le principe de la démodulation d'amplitude synchrone peut être également utilisé pour la démodulation de phase. Le principe est représenté à la Fig. 5.6. Le signal modulé ainsi qu'une porteuse localement reconstituée sont appliqués à un multiplicateur. Le signal de sortie filtré  $m(t)$  représente une image du signal modulant. En effet, le signal modulé s'écrit :

$$s(t) = A[1 + K a \cos 2\pi\nu_m t] \cos(2\pi\nu_0 t) \quad (5.4)$$

et la porteuse reconstituée avec un certain déphasage  $\varphi$  :  $V_0 \cos(2\pi\nu_0 t + \varphi)$ . En sortie du multiplicateur supposé parfait et après filtrage passe-bas de fréquence

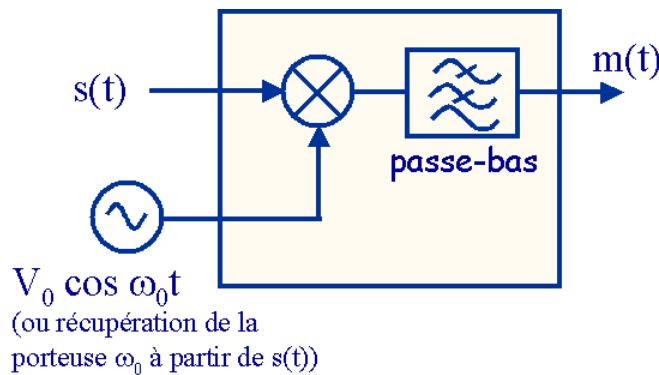
de coupure  $\nu_C$  telle que  $\nu_m < \nu_c < \nu_0$ , on obtient :

$$m'(t) = \frac{AV_0}{2}(1 + K a \cos(2\pi\nu_m t)) \cos\varphi \quad (5.5)$$

et, enfin, en éliminant le terme continu :

$$m''(t) = \frac{AV_0}{2}K a \cos(2\pi\nu_m t) \cos\varphi \quad (5.6)$$

Pour une détection optimale, il faut, d'après l'équation (5.6), un déphasage  $\varphi$  nul entre le signal modulé reçu et la porteuse reconstituée. C'est la difficulté principale de cette technique qui exige de reconstituer localement (en réception) une porteuse en phase et à la même fréquence que la porteuse utilisée lors de la modulation (en émission). Cela nécessite en pratique des techniques particulières (boucle à verrouillage de phase, boucle de Costas).



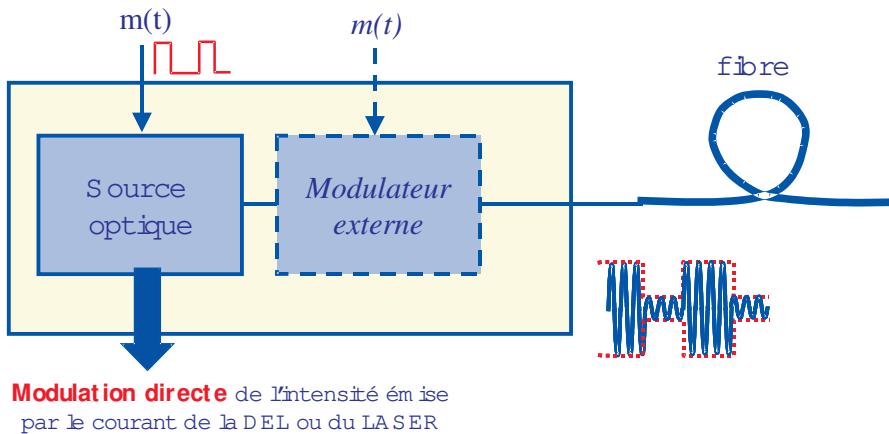
**FIGURE 5.6 – Démodulation synchrone (ou cohérente)**

La modulation d'amplitude est encore utilisée de nos jours pour transmettre des informations analogiques (voix, téléphonie maritime,...). La modulation de fréquence (modulation non-linéaire car le spectre autour de la porteuse est très différent du spectre en bande de base) est également très employée comme dans la bande radio FM ou en téléphonie. La numérisation des signaux permet aujourd'hui l'emploi de modulation de phase avec des performances et des possibilités bien supérieures aux modulations classiques analogiques (meilleure immunité au bruit, meilleure efficacité spectrale, possibilité de multiplexage temporel,...).

### Cas d'une transmission optique

En communications optiques, on utilise principalement aujourd'hui la modulation d'amplitude d'une porteuse optique, issue d'un laser ou d'une diode électroluminescente (DEL), directement par le signal en bande de base (au format "numérique"). Cette modulation peut se faire directement via le courant de polarisation du composant émetteur ou de façon externe et la puissance émise par

le laser ou la DEL varie au rythme du signal modulant composé de "0" (pas ou peu de puissance émise) et de "1" (puissance maximale émise). Le synoptique de base d'un émetteur optique est donné à la Fig. 5.7.



**FIGURE 5.7 – Synoptique d'un émetteur optique**

## 5.3 Le canal de transmission

D'une façon générale, la transmission d'un signal sur un support modifie les caractéristiques du signal transmis. On observe ainsi des distorsions dues à la bande passante limitée du canal (dispersion, atténuation) et du bruit qui vient se superposer au signal. Un tel canal physique est soit le canal libre radio-électrique (atmosphère), soit un canal guidé (câble coaxial, filaire ou fibre optique). Il peut être caractérisé par sa réponse impulsionnelle  $h(t)$  ou sa fonction de transfert  $H(\nu) = TF(h(t))$ . L'étude complète des phénomènes de propagation libre ou guidée sort du cadre de ce cours.

### 5.3.1 Cas du canal radio-électrique (voir module ELP 112)

Le canal radio-électrique libre correspond à la propagation d'une onde électromagnétique entre deux antennes. On se place dans le cas de conditions idéales de propagation telles qu'il existe un 'trajet' direct unique entre l'émetteur et le récepteur (trajet principal qui correspond effectivement aux conditions de l'espace libre ou de *visibilité directe*).

#### Calcul de la puissance reçue au récepteur

Pour calculer la puissance captée par une antenne réceptrice à la distance  $d$  de l'émetteur, on utilise deux notions très importantes qui sont la densité de

puissance à la distance  $d$  et la surface équivalente ou effective de l'antenne de réception (surface qui capte le rayonnement incident).

#### Définitions : densité de puissance, directivité et gain d'une antenne

Une antenne isotrope est une antenne qui rayonne de la même façon dans toutes les directions de l'espace. La puissance  $P_e$  injectée dans l'antenne (supposée sans pertes) va être répartie sur la surface d'une sphère dont le rayon  $d$  augmente au fur et à mesure de la propagation de l'onde (à la vitesse de la lumière  $c$ ). Le point d'émission est supposé ponctuel et l'onde émise sphérique a localement les propriétés d'une onde plane ( $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  perpendiculaires entre eux et à la direction de propagation avec une décroissance des champs en  $1/d$ ). La densité de puissance  $dP/dS$  (en  $\text{W/m}^2$ ) est alors définie par le rapport entre  $P_e$  et la surface de la sphère, soit :

$$\frac{dP}{dS} = \frac{P_e}{4\pi d^2} \quad (5.7)$$

NB : cette expression est cohérente avec une décroissance des champs en  $1/d$  en champ lointain. Elle se calcule également à partir du flux du vecteur de Poynting lorsqu'on connaît les expressions des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  rayonnés en champ lointain.

Une antenne non isotrope est caractérisée par sa directivité qui indique la façon dont l'antenne rayonne l'énergie dans l'espace par rapport à l'antenne isotrope. La directivité, notée  $D$ , est donc définie par le rapport entre la densité de puissance de l'antenne considérée et la densité de puissance de l'antenne isotrope alimentée dans les mêmes conditions (même puissance  $P_e$  injectée), ces densités étant calculées à la même distance  $d$ . On a donc :

$$D = \frac{dP}{dS} / \frac{P_e}{4\pi d^2} \quad (5.8)$$

$D$  dépend de la direction de l'espace considérée. Lorsque l'antenne rayonne de manière privilégiée dans une (ou plusieurs) direction de l'espace (ce qui est généralement le cas), on s'intéresse à la direction dans laquelle la directivité est maximale pour calculer la puissance reçue.

En pratique, l'antenne a des pertes intrinsèques et on utilise alors la notion de *gain*, noté  $G_e$ , pour évaluer la densité de puissance de l'antenne à la distance  $d$ . On remplace alors dans (5.7)  $P_e$  par le produit  $P_e G_e$ , que l'on appelle la *PIRE* (Puissance Isotrope Rayonnée Effective), puisque la densité de puissance de l'antenne considérée est  $G_e$  fois plus grande que celle de l'antenne isotrope. La densité de puissance d'une antenne de gain  $G_e$  s'écrit donc :

$$\frac{dP}{dS} = \frac{P_e G_e}{4\pi d^2} \quad (5.9)$$

### Calcul de la puissance reçue

En réception, l'antenne capte une partie de la puissance rayonnée par l'antenne d'émission. L'antenne en réception est caractérisée par une grandeur homogène à une surface, appelée *surface équivalente ou effective*, notée  $A_{\text{eff}}$ . La puissance  $P_r$ , en Watt, captée par l'antenne s'écrit donc :

$$P_r = \frac{dP}{dS} A_{\text{eff}} \quad (5.10)$$

Par ailleurs, une antenne fonctionne de manière équivalente en émission et en réception : elle capte de manière privilégiée l'énergie provenant d'une direction de l'espace qui correspond à la direction dans laquelle sa densité de puissance rayonnée serait maximale si elle fonctionnait en émission. On montre alors qu'il existe une relation entre le gain  $G_r$  (caractéristique de l'antenne utilisée en émission) et la surface effective  $A_{\text{eff}}$  (caractéristique de l'antenne utilisée en réception). Cette relation, obtenue à partir du théorème de réciprocité (ici ce théorème n'est pas exprimé tout à fait dans les mêmes termes que celui donné au paragraphe 4.2.4), est :

$$\frac{A_{\text{eff}}}{G_r} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \quad (5.11)$$

Finalement la puissance reçue  $P_r$  s'écrit, en tenant compte de (5.9), (5.10) et (5.11) :

$$P_r = \frac{P_e G_e}{4\pi d^2} \frac{G_r \lambda^2}{4\pi} = P_e G_e G_r \left( \frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2$$

(5.12)

Le terme  $(4\pi d/\lambda)^2$  est l'*affaiblissement en espace libre (AEL)*. L'expression donnant  $P_r$  est appelée 'formule de Friis'.

### Cas des antennes à ouverture rayonnante

Les antennes de type "ouverture rayonnante" comme les paraboles et les cornets sont très utilisées en pratique (antenne de réception de TV par satellite par exemple) et leur surface effective  $A_{\text{eff}}$  est directement liée à la surface géométrique qui capte le rayonnement. La surface  $S_{\text{ouverture}}$  d'une parabole, assimilée à un disque de diamètre  $\phi$  vu de face, vaut :

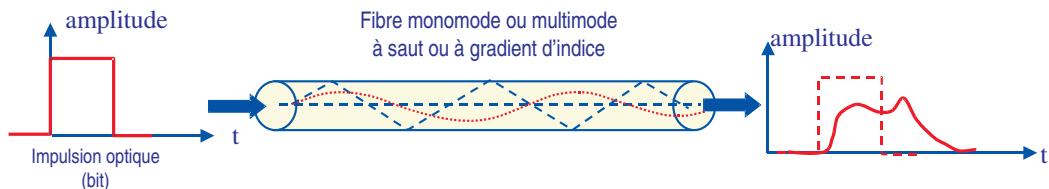
$$S_{\text{ouverture}} = \pi \phi^2 / 4 \quad (5.13)$$

et sa surface effective vaut alors  $A_{\text{eff}} = \eta S_{\text{ouverture}}$  où  $\eta$  est le rendement ( $< 1$ ) qui prend en compte les imperfections de l'antenne, ses pertes,... Enfin, le gain de l'antenne s'écrit, à partir de (5.11) et de l'expression de  $A_{\text{eff}}$  :

$$G_r = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{\text{eff}} = \eta \left( \frac{\pi\phi}{\lambda} \right)^2 \quad (5.14)$$

### 5.3.2 Cas du canal guidé (voir module ELP112)

Lorsque le signal est guidé dans un câble, une fibre ou toute autre structure de propagation, il subit également des déformations en amplitude et en phase dues à la dispersion. Cette dispersion provient de la variation de la vitesse de propagation avec la fréquence. On parle aussi de temps de propagation de phase ( $t_\phi$ ) et de groupe ( $\tau_g$ )<sup>1</sup>. Lorsqu'un canal introduit une variation de phase linéaire en fonction de la fréquence,  $t_\phi$  est constant et est égal à  $\tau_g$ . Cette dispersion est illustrée sur la Fig. 5.8. L'impulsion optique idéale (dont le spectre contient beaucoup de fréquences) de durée finie va être transmise avec des déformations liées aux différentes vitesses de propagation des composantes spectrales du signal optique injecté. Au lieu de retrouver une impulsion simplement retardée (du temps de propagation dans la fibre), celle-ci est déformée en amplitude et plus étalée dans le temps.



**FIGURE 5.8 – Illustration du phénomène de dispersion dans la fibre optique**

Les phénomènes de dispersion dans une fibre (ou un autre guide) ont diverses origines. On parle de dispersion *intermodale* (cas de la fibre multimode) lorsque l'énergie se propage dans la fibre sous différents modes (que l'on assimile aux différents rayons représentés figure 5.8), de dispersion *intramodale* (même s'il n'y a qu'un seul mode de propagation - "un seul rayon" - il y a une dispersion avec la fréquence due à l'occupation spectrale), de dispersion *chromatique* (du fait de la variation de l'indice de réfraction de la fibre avec la longueur d'onde).

La conséquence majeure de cette dispersion est la limitation de la bande passante (ou de la bande utile) du milieu de propagation, cette limitation ayant une répercussion directe sur le débit maximal transmissible. L'étalement des impulsions provoque également de l'interférence entre symboles (ou bits) à la réception et constitue donc à nouveau un facteur limitatif du débit utile par dégradation de la qualité de la liaison.

1. voir définitions au chapitre 3

## 5.4 Calcul du rapport signal à bruit en entrée d'un récepteur

### 5.4.1 Généralités

La qualité de la transmission en sortie d'un récepteur est en pratique évaluée à partir du *rapport signal à bruit*, noté  $S/N$  qui représente le rapport des puissances du signal et du bruit. Le bruit, que l'on considère ici additif et indépendant du signal, se superpose au signal dans toutes les étapes de traitement. Le signal bruité sera d'autant plus facile à traiter (récupération de l'information sans erreur) que la puissance de bruit est faible par rapport à la puissance du signal utile. La démodulation d'un signal bruité est illustré à la Fig. 5.9. Le taux d'erreur binaire (*TEB*) en communications numériques permet de quantifier la qualité de la liaison puisque il indique le pourcentage de bits erronés obtenus en sortie du démodulateur et du circuit de décision pour un temps d'observation très long. Le *TEB* est directement relié au rapport  $S/N^2$  et cette relation dépend du type de modulation et de démodulation (cohérente ou non).

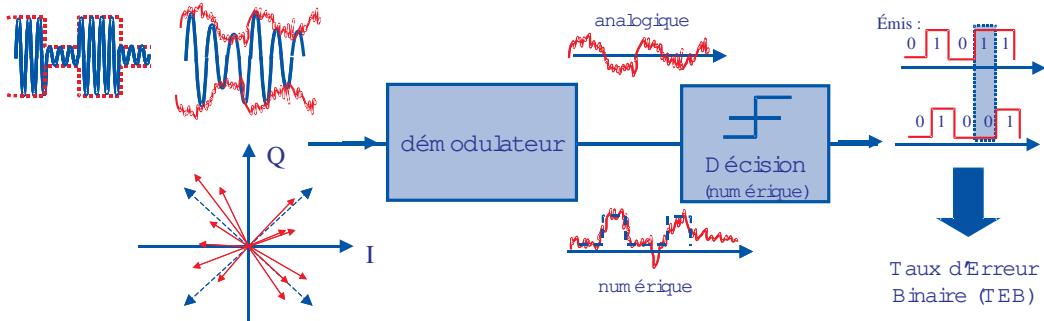


FIGURE 5.9 – Influence du bruit en réception

### 5.4.2 Cas du récepteur radio

La puissance du signal en entrée du récepteur dépend de la puissance émise et des pertes lors de la transmission du signal (pertes dues au canal). La puissance de bruit totale doit prendre en compte le bruit externe au récepteur provenant de l'environnement extérieur et qui arrive à son entrée, et auquel s'ajoute le bruit propre du récepteur ('bruit interne') via chacun des blocs constitutifs de la chaîne de réception.

2. on introduit également le rapport  $E_b/N_0$  (sans dimension ou en dB) qui exprime le rapport entre l'énergie par bit et la densité spectrale de bruit, ce rapport étant relié lui-même au rapport  $S/N$ , relation qui dépend toujours du type de modulation

Comme on l'a vu au chapitre 4, le bruit interne ajouté par le récepteur est ramené à son entrée et se calcule à l'aide du facteur de bruit global (formule de Friis) ou de la température équivalente de bruit totale lorsque les sources de bruit sont assimilées à du bruit thermique, ce qui est souvent le cas en pratique dans un récepteur radio-fréquence. Le bruit externe capté par l'antenne se retrouve également en entrée du récepteur (voir chapitre 4).

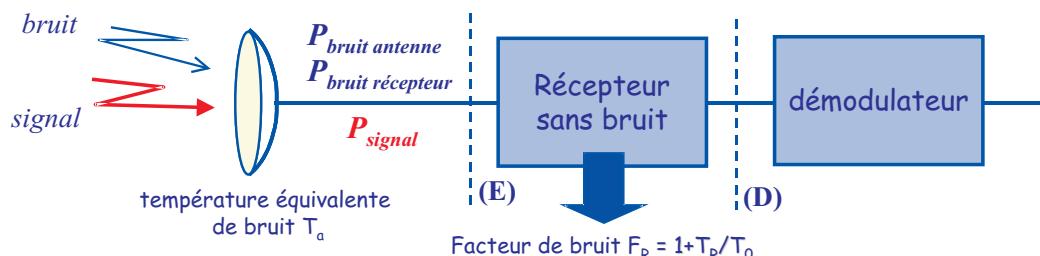
La puissance  $N_R$  du bruit apporté par le récepteur et qui est ramené à son entrée se calcule, dans la bande  $B_N$ , par :

$$N_R = k T_R B_N = k (F_R - 1) T_0 B_N \quad (5.15)$$

où  $T_R$  est la température équivalente de bruit totale du récepteur,  $F_R$  son facteur de bruit total et  $T_0$  la température de référence égale à 290 K.

La puissance de bruit **totale**  $N_T$ , calculée dans le plan (E) de la Fig. 5.10, en prenant en compte les contributions du bruit interne et externe (via la température équivalente de bruit de l'antenne - voir paragraphe 4.4.3) est donc la somme des puissances de bruit (car les sources de bruit sont non corrélées) présentes à son entrée. On a donc :

$$N_T = k (T_a + T_R) B_N = k (T_a + (F_R - 1) T_0) B_N \quad (5.16)$$



**FIGURE 5.10 – Calcul du rapport signal à bruit en entrée du récepteur**

La puissance du signal reçu, toujours dans le cas d'une liaison radio-électrique dans les conditions d'espace libre, est quant à elle donnée par l'équation (5.12). Finalement, le rapport signal à bruit en entrée du récepteur peut être calculé par la relation :

$$\frac{P_{signal}}{P_{bruit}} = \frac{P_r}{N_T} = \frac{P_r}{k (T_a + T_R) B_N} = \left. \frac{S}{N} \right|_{(E)} \quad (5.17)$$

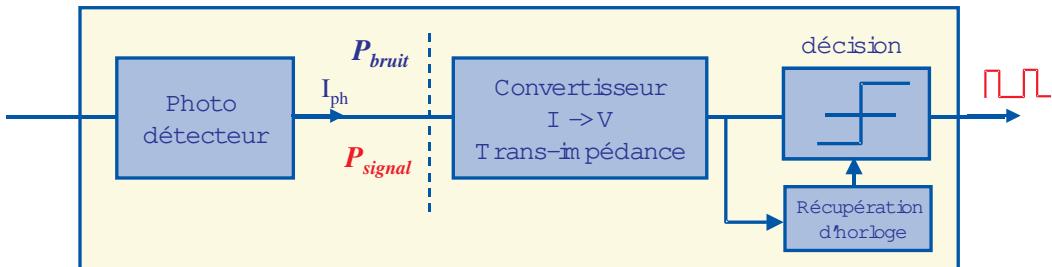
**remarque :** le rapport  $S/N$  dans le plan (D) est identique au rapport  $S/N$  dans le plan (E) puisque dans cette représentation les sources de bruit internes au récepteur sont ramenées à son entrée qui est alors considéré non bruyant (voir Fig. 5.10).

### 5.4.3 Cas du récepteur optique

Comme on l'a précisé au chapitre 4 (paragraphe 4.5), on calcule, dans la résistance de charge, la puissance de bruit à partir des valeurs quadratiques moyennes de chaque source de bruit ainsi que la puissance du signal à partir du courant photo-détecté. Le rapport signal sur bruit est alors dans ce cas exprimé par un rapport de valeurs quadratiques moyennes de courant (puisque les puissances sont calculées dans la même charge).

La puissance du courant de bruit quantique est donnée par  $\langle i_q^2 \rangle = 2qI_{ph}B_N$ . La puissance du signal est quant à elle proportionnelle à la valeur quadratique moyenne du courant photo-détecté, soit :  $\langle i_{ph}^2 \rangle = (SP_{opt})^2$  (voir paragraphe 4.5). Le rapport signal à bruit s'exprime donc par :

$$\frac{S}{N} = \frac{\langle i_{ph}^2 \rangle}{\langle i_q^2 \rangle} = \frac{(SP_{opt})^2}{2qI_{ph}B_N} \quad (5.18)$$



**FIGURE 5.11 – Calcul du rapport signal à bruit pour un récepteur optique**

\* \* \*

### • Ce qu'il faut retenir du chapitre

- a) les architectures de base des émetteurs/récepteurs radiofréquences et optiques (les blocs fonctionnels qui les constituent) : paragraphe 5.2.1
- b) le principe de la modulation d'amplitude (représentation temporelle et spectrale) et de la démodulation : paragraphe 5.2.2
- c) la formule de Friis : calcul de la puissance reçue et atténuation en espace libre : équation 5.12
- d) le gain d'une antenne à ouverture rayonnante : équation 5.14

- e) le bilan de liaison (radio et optique) : prise en compte des différentes sources de bruits en réception et calcul du rapport signal à bruit : équations 5.16 à 5.18



# 6

## Complément : aux sources des télécommunications

### 6.1 Approche historique

#### 6.1.1 Introduction

Le mot *télécommunication* a été introduit en 1904 par Edouard ESTAUNIÉ, ingénieur et écrivain français, dans son « Traité pratique de télécommunication électrique ». Ce terme est issu du préfixe grec « τῆλε » (tèle) signifiant *loin* et du latin *communicare*, pour *partager, communiquer*. Par ce nouveau terme, il souhaitait unifier sous une même discipline la télégraphie, la téléphonie et les radio-communications naissantes. Plus d'un siècle plus tard, les télécommunications désignent<sup>1</sup> toute transmission, émission ou réception de signes, de signaux, d'écrits, d'image, de sons ou de renseignements de toute nature, à distance, par fil, radioélectricité, optique ou d'autres systèmes électromagnétiques. Elles confirment leur convergence avec le monde informatique, amorcée dans les années 1970, et absorbent progressivement le secteur audiovisuel pour donner naissance à un monde massivement connecté de données *multimedia*, terme désignant le rapprochement, au sein d'un même « medium » interactif, de données liées au texte, à l'image, au son ou à la vidéo.

Dans le même temps, le réseau *Internet*, balbutiant dans les années 1970 avec le lancement du courrier électronique, a évolué dès le début des années 1990 vers un tissu mondial de liens et de nœuds fournissant de gigantesques volumes de pages en langage HTML<sup>2</sup>, vecteurs de l'information multimedia. Internet est devenu en quelques années une infrastructure de communications à l'échelle mondiale, englobant les interconnexions des réseaux informatiques publics et privés. Ses retombées ont depuis longtemps dépassé le cadre de la communication entre scientifiques initiés pour s'étendre au commerce, à l'économie, aux loisirs, et à tous les aspects de nos sociétés directement ou indirectement liés à l'information et à la communication. L'essor de la téléphonie mobile et des terminaux mobiles connectés vient renforcer cette profusion d'échange d'informations. Les

---

1. Selon le texte officiel de l'UIT, Union Internationale des Télécommunications, créée en 1865.

2. HyperText Markup Language

technologies des objets connectés et de l’Internet pourraient même à terme, faire communiquer entre elles chaque entité vivante ou inerte sur Terre. A ce sujet, si la norme IPV4 du protocole internet IP<sup>3</sup> ne permettait d’adresser « que »  $2^{32} \simeq 4,3$  milliards d’adresses terrestres différentes, provoquant une pénurie annoncée de liens, le nouveau système d’adresses codées sur 128 bits (IPV6) permet de définir  $2^{128} \simeq 2,4 \cdot 10^{38}$  identifiants indépendants. Pour fixer les idées, on peut prendre le *quadrillon* (i.e.  $10^{24}$ ) comme référence, cet ordre de grandeur fournissant l’estimation du nombre de grains de sable contenus dans le Sahara ou du nombre totale de gouttes d’eau contenues dans les océans terrestres. Avec plus de  $10^{38}$  adresses possibles, IPV6 offre près de 670 quadrillions d’adresses par mm<sup>2</sup> carré de surface terrestre ... !

Nous aurions cependant tort de croire que cette émergence de l’Internet et de la communication mobile constitue un bouleversement technologique, social et économique sans précédent. L’humanité a déjà connu de profonds changements en matière de communications et d’échanges par les inventions de l’écriture, de la monnaie ou de l’imprimerie, mais ces innovations ont mis des centaines d’années à percoler dans les sociétés, au gré de l’efficacité des langages et des moyens de transport, jadis uniques vecteurs de l’information.

Dans ce premier chapitre d’introduction, on se penchera plus spécialement sur la période 1850-1950, laquelle, non content d’avoir accompagné la deuxième phase de la révolution industrielle, a vu naître et se développer la base des télécommunications modernes, sans toutefois bénéficier des infrastructures de communication actuelles et de la pression des énormes intérêts financiers du monde numérique du XXI<sup>e</sup> siècle.

### 6.1.2 Aux origines

Les premiers modes de transmission de l’information pouvaient être divisés en deux groupes : les signaux visuels (flammes, fumée, phares..) et les signaux sonores (cris, cors, sifflements, cloches). Tous ces systèmes primitifs, même s’ils utilisaient des rudiments de codage, ne constituaient pas à proprement parler un réseau de transmission de l’information.

C’est probablement en Grèce antique que l’on trouve la trace des premiers moyens de communication à distance, le plus souvent imaginés pour informer au plus vite les dirigeants des épisode de guerre. A Troie, les navires partaient à la bataille avec des voiles noires et les remplaçaient par des blanches en cas de victoire. L’issue des combats était donc rapidement connue aux abords des ports. C’est cette coutume qui valut à Thésée, héros de la mythologie grecque ayant oublié de hisser la voile blanche après sa victoire sur le minotaure, la triste mésaventure du suicide de son père Egée au retour de son bateau. Quant aux messagers grecs, ils pouvaient parcourir des dizaines de kilomètres pour faire parvenir les informations stratégiques à leurs destinataires. Un épisode célèbre, rapporté par Plutarque, est celui de la bataille de Marathon (490 av. J.C.). Les troupes

---

3. Internet protocol.

athéniennes ayant vaincu les Perses, le messager Philippides parcourut au pas de course près de 42 km jusqu'à Athènes, où il succombe d'épuisement, juste après avoir annoncé la victoire. Un autre moyen de communication à distance répandu chez les Grecs était celui des signaux de feu, décrits dans les récits de Homère. Des feux allumés dans l'obscurité étaient repérés à plusieurs kilomètres et relayés par d'autres messagers jusqu'à leur destination finale. Puis à l'époque romaine, des *tours à feux* étaient allumées près des côtes méditerranéennes pour guider les marins. Des réseaux de phares ont ainsi été créés par les Carthaginois sur la côte nord de l'Afrique et en Espagne, utilisés simultanément pour la signalisation et la transmission de signaux lumineux. Les Gaulois quant à eux avaient un système de communication à distance basé sur un télégraphe *oral*. Tout événement d'importance, comme le mouvement d'une armée ennemie, était proclamé à grands cris dans la campagne. Ceux qui percevaient ces hurlements les transmettaient à d'autres, et ainsi de suite, de village en village. Même si ces moyens primitifs ont été perfectionnés au cours du Moyen Âge, la vitesse de communication est longtemps restée celle du courrier, du coureur à pied ou du coursier à cheval. Or, ce paramètre devient rapidement un enjeu fondamental dans le développement des sociétés, tant pour des besoins militaires que commerciaux.

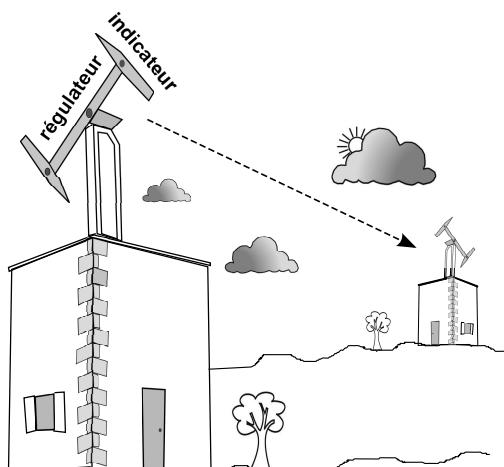
### 6.1.3 Le télégraphe optique

En 1684, le physicien britannique Robert HOOKE fut le premier à exposer clairement le principe du télégraphe visuel, basé sur des stations relayant des symboles visibles à distance, mais sa solution ne fut jamais mise en application. En France, il faudra attendre les guerres de la Révolution pour que naîsse un véritable réseau de télécommunications organisé, hiérarchisé et quasi-permanent. Ainsi, en mars 1792, Claude CHAPPE propose à l'Assemblée Législative un système de communications<sup>4</sup> basé sur la transmission de messages entre des stations espacées d'une dizaine de kilomètres et situées sur des points élevés. La ligne Paris-Lille est opérationnelle dès 1793 et sera suivie de Paris-Strasbourg. Le Consulat, puis l'Empire suscitent un développement massif du réseau, qui s'étendra jusque à la fin des années 1840, où il totalisera près de 5000 km de ligne, avec 534 stations desservant 29 grandes villes. Son usage est réservé à l'armée et aux services de l'Etat. Le code ou vocabulaire est dépendant des pièces mobiles du télégraphe, à savoir un bras principal central, appelé *régulateur*, muni de deux ailes pivotantes nommées *indicateurs* (figure 6.1a). Le régulateur est aligné selon deux positions, horizontale ou verticale, les obliques étant réservées au service. Des angles de 45° sont utilisés par les deux indicateurs, soit 7 positions pour chaque élément car le positionnement de l'indicateur dans le prolongement du régulateur est exclue, jugée trop ambiguë. Le nombre de positions affichables par le système est donc  $7 \times 7 \times 2 = 98$  messages de base. Six sont nécessaires pour le service et il reste 92 signaux de correspondance utilisables pour former les messages. Pour ce faire, on utilise un répertoire de 92 pages contenant cha-

4. Mis au point avec ses quatre frères.

cune 92 lignes avec un mot ou une expression, permettant ainsi de piocher dans un dictionnaire de  $92 \times 92 = 8464$  mots, consignés dans un livre tenu secret par le directeur du site, pour décoder les dépêches (figure 6.1b). Malgré cette capacité limitée, ce télégraphe *optique* représente une première forme de réseau de télécommunications, hiérarchisé et centralisé. A partir de 1850, il sera rapidement remplacé par le télégraphe électrique. Le télégraphe optique est encore utilisé de nos jours dans le code international des fanions.

Extrait du vocabulaire -Télégraphe Chappe Page 50



(a)

1 Absenter	Enrôlé	HUDSON (baie)
Actif	Équivalent	HUDSON (détroit)
Age	Etoffe	Huée
Antipathie	Sur eux	Huer
5 Assesseur	35 Extorqué	65 HUESCA
Aumône	Félicitation	HULST
Après avoir	Fois	HONDURAS
Baisse	Friche (en)	Hune
Bénéficiar	General	Hunier
10 Bouclier	40 GRAVELINES	70 HUMINGE
Buisson	HESSORS	HUMINGUE (pont)
Caravane	HYERES	HUNTINGTON
Avec celui	HILSDELSHIM	HURON
Chargement	Historien	Hussard
Civiliser	45 Hivernage	75 Escadron
Commodité	HOCHSTET	Hydraulique
Conduire	HOGUE (Cap)	Hymne
Consternation	Hollandais	Hypocrisie
Conviction	Hollande	Hypothèque
20 Craindre	50 HOLSTEIN	80 Idée
Débaucher	Honfleur	Identifier
Défense	Hongrie	Identité
Démonter	Hongrois	Idolâtre
Devenir	Horaire	Idolâtrer
25 Dire	55 HORN (Cap)	85 Idolâtrie
Domination	Horloge	Idole
Donner une idée de	Hospice	Ignorance
Echouer	Hottentots	Ignorant
Electriser	HOTWIEL	Ignoré
30 Empoisonnement	60 HOUNDEL (le)	90 Ignorer
		ILANTE
		ILDEFONSE (Saint)

(b)

FIGURE 6.1 – a) vue schématique d'un site de transmission optique Chappe  
et b) extrait d'une des 92 pages du vocabulaire Chappe.

#### 6.1.4 Le télégraphe électrique

Ce n'est qu'au début du XIX<sup>e</sup> siècle qu'apparaît l'exploitation de l'électricité pour représenter et transmettre une information. L'acte de naissance de l'électromagnétisme date de 1820, lorsque le danois Hans Christian ØERSTED découvre l'effet produit par un courant électrique sur une aiguille aimantée mobile sur un pivot. Dans la foulée, le français André-Marie AMPÈRE énonce un ensemble de principes qui définissent le champ magnétique créé par un courant, et l'action d'un champ magnétique sur un conducteur parcouru par un courant. La première « transmission à distance » est ainsi née. En 1831, le britannique Michael FARADAY découvre les courants d'induction qui prennent naissance dans les conducteurs placés dans un champ magnétique variable, ou se déplaçant dans un champ magnétique. Ces résultats fondamentaux favorisent la mise au point du télégraphe électrique pour transmettre un texte par alphabet codé. L'un des premiers télégraphes électriques utilisant l'effet électromagnétique est un appareil à aiguilles réalisé en 1833 par les allemands Carl Friedrich GAUSS et Wilhelm Eduard WE-

BER. Il fonctionnera sur une dizaine de kilomètres entre l'observatoire et l'université de Göttingen. Le télégraphe à aiguilles est alors amélioré durant les années 1835-40 par les travaux conjoints de l'américain Samuel MORSE et des britanniques William COOKE et Charles WHEATSTONE. On atteint alors des débits de l'ordre de 20 mots par minute ! Le déploiement des lignes télégraphiques à longue distance est facilité par la mise en évidence des pertes résistives d'un matériau conducteur par le britannique James Prescott JOULE en 1841. Morse réalise le 24 mai 1844 la première liaison de télégraphie électrique entre Washington et Baltimore, utilisant la modulation binaire d'un courant continu et donnant en réception des traces de points et de traits formant un alphabet, qui deviendront rapidement un code international. En 1848, une grande avancée technologique est réalisée par l'allemand Werner SIEMENS, qui développe une presse spéciale permettant l'extrusion et le collage sur les fils de cuivre d'une gomme naturelle isolante issue du latex, la gutta-percha. Cette dernière perdurera jusque dans les années 1930 et la découverte du polyéthylène. Des câbles isolés en rouleau de plusieurs kilomètres sont rapidement développés, et le premier lien sous-marin télégraphique transatlantique est posé en 1858 entre l'Irlande et Terre-Neuve. Il est constitué d'une âme composée d'un toron de sept fils de cuivre pur gainé de trois couches de gutta-percha. Un message inaugural est échangé entre la reine Victoria et le président James Buchanan. La transmission du message de 100 mots dure 67 minutes. Le câble tombera en panne au bout de trois semaines, avant d'être reconnecté durablement en 1866.

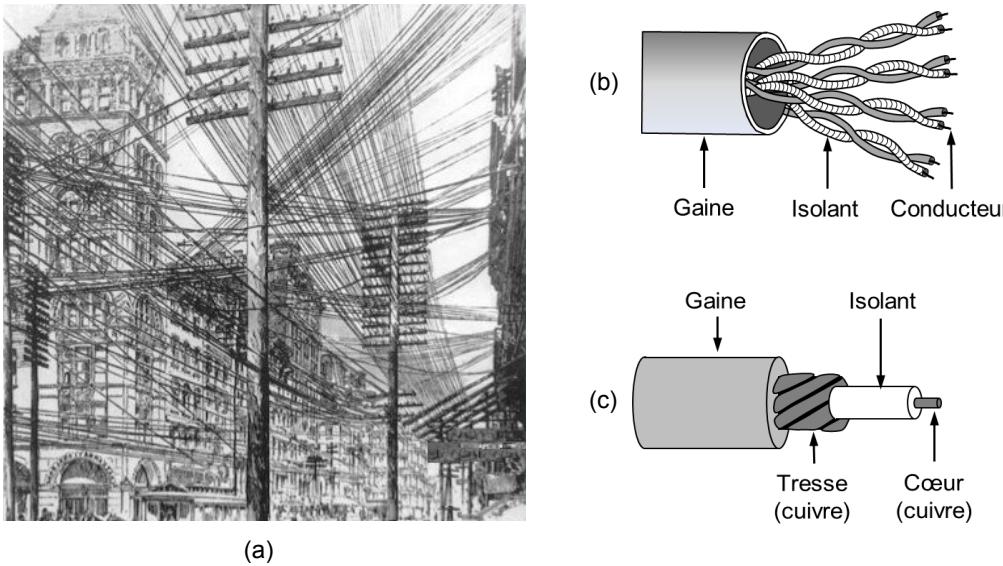
### 6.1.5 Le télégraphe parlant

Alors que le télégraphe électrique se déploie à travers le monde, une nouvelle technique voit le jour sous le nom de télégraphe *parlant*. De nombreux chercheurs avaient eu l'intuition du téléphone. C'est le cas du français Charles BOURSEUL, agent du télégraphe, qui démontre en 1854 que les vibrations acoustiques générées par la voix humaine peuvent être transmises de manière identique au télégraphe électrique. Il rencontre alors un scepticisme général et n'a pas les moyens matériel de développer son invention. Ce n'est qu'en 1889 que la France le reconnaîtra comme le véritable père du téléphone, en l'élevant au grade de Chevalier de la Légion d'honneur.

C'est toutefois en 1876 que l'américain Alexander Graham BELL est identifié comme l'inventeur du téléphone, non sans susciter une certaine polémique avec l'italien Antonio MEUCCI, qui a déposé le premier brevet sur l'invention quelques semaines avant celui de Bell. Les institutions américaines reconnaîtront définitivement l'antériorité de l'invention et des brevets de Meucci en ... 2002. Tout comme le télégraphe, le système de Bell est basé sur le principe de l'induction électromagnétique. Dans les premières versions, les vibrations de pression acoustique communiquées par la voix à la membrane du transmetteur (une plaquette en bois solidaire de crayons en graphite) entraînent une variation du flux magnétique d'un barreau aimanté placé devant lui, générant un courant électrique

par induction. Le signal acoustique est ainsi transformé en un signal électrique analogique. Dans le récepteur, le courant électrique venant de la ligne téléphonique est envoyé dans un électroaimant qui agit sur une plaque souple dont les vibrations reconstituent la voix. A son origine et malgré des performances satisfaisantes, le téléphone n'intéresse que peu de monde en raison de son assimilation à la sonnette des domestiques.

Les premières lignes téléphoniques suivent le développement du télégraphe et n'offrent alors que des liaisons point-à-point, multipliant le nombre de fils en environnement urbain (figure 6.2.a). Le grand blizzard qui ravage la côte ouest



**FIGURE 6.2 – a)** Paysage urbain de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, avant la mise en place des câbles à paires torsadées (b) et c) schéma en coupe d'un câble à conducteurs coaxiaux (ou câble « coaxial »).

des Etats-Unis en mars 1888 détruit une grande partie des lignes téléphoniques et accélère le processus d'enfouissement des câbles. La création de *centraux de commutation* devient rapidement une nécessité. C'est chose faite en 1878, date de mise en service du premier central téléphonique dans le Connecticut. Le premier système électromécanique de commutation est mis au point en 1891. On compte alors 1,5 million de téléphones aux Etats-Unis. La qualité des premières liaisons inter-urbaines n'est toutefois pas fameuse. Les lignes sont réalisées au moyen de deux fils de cuivre ou de bronze. Mais il faut augmenter le diamètre des fils pour lutter contre l'affaiblissement du signal et la quantité de cuivre nécessaire pour les longues distances rendait prohibitif le coût de ce mode de transmission. Le britannique Oliver HEAVISIDE avait mis au point dans les années 1880 le modèle théorique de ligne de transmission à constantes distribuées. Il avait montré que l'affaiblissement linéaire d'une ligne peut être diminué en interposant régulièrement sur le câble une inductance de valeur calibrée en fonction des paramètres physiques de la ligne. S'inspirant de ces travaux, les solutions viennent au tout

début des années 1900. Le danois Carl Emil KRARUP propose d'envelopper le conducteur de cuivre d'une matière possédant des propriétés magnétiques (un fil de fer par exemple), et le serbo-américain Mihajlo PUPIN suggère le placement à intervalles réguliers d'inductances le long des câbles de communication. En réalisant l'adaptation d'impédance suggérée par Heaviside, ces bobines permettent de réduire l'affaiblissement des câbles téléphoniques interurbains et d'accroître la portée des communications téléphoniques, tout en diminuant le diamètre des conducteurs. La Bell Company achète tous ses brevets en 1901. Toutefois, s'ils résolvent le problème dans les basses fréquences, les câbles « pupinisés » présentent des forts affaiblissements dans les hautes fréquences, et le salut ne viendra finalement que de l'introduction de *répéteurs-amplificateurs*. Les premiers câbles régionaux sont posés avec des répéteurs tous les 60 kms, tel le Paris-Bordeaux, posé en 1929. Jusqu'à la seconde guerre mondiale, les câbles téléphoniques sont constitués de « paires » ou de quartes de fils (figure 6.2.b). Après la guerre, les artères à grande distance, qui écoulement des milliers de communications téléphoniques régionales, utilisent un autre type de câble plus performant, le câble *co-axial*, schématisé sur la figure 6.2.c. Ce câble peut transmettre des bandes de fréquence beaucoup plus larges qu'une paire de fils, permettant ainsi le multiplexage fréquentiel d'un plus grand nombre de voies ainsi que la diminution de la quantité de fils nécessaires aux différentes liaisons. On l'utilisera dès la fin des années 1960 dans l'industrie naissante de la cablo-distribution.

### 6.1.6 Du transistor au circuit intégré

En 1883, l'américain Thomas EDISON, qui étudiait le phénomène de dégradation du filament de sa lampe à incandescence, remarqua qu'un courant électrique pouvait passer entre la plaque métallique, qu'il avait introduite dans l'ampoule, et le filament. Cette génération de flux d'électrons par un métal porté à haute température est exploitée par la britannique John Ambrose FLEMING<sup>5</sup>, alors ingénieur chez Marconi, qui invente et brevette en 1904 *la diode à vide*. Ce tube redresseur de courant comporte deux électrodes : la cathode (un filament pointu), chauffée, émet des électrons que l'anode (une plaque) peut capter, tandis que le contraire n'est pas possible. La diode à vide est considérée comme le premier composant électronique. Deux ans plus tard, l'américain Lee DE FOREST ajoute au redresseur de Fleming une grille de contrôle entre le filament et la plaque et obtient un détecteur radio à tube, baptisé « audion ». Il perfectionne son invention avec Edwin ARMSTRONG<sup>6</sup> et met au point la *triode*, premier amplificateur électronique. Ce dispositif se révèle déterminant dans le déploiement du réseau téléphonique, des liaisons radio à longue distance, du *radar*<sup>7</sup> et des premiers calculateurs électroniques.

5. A ne pas confondre avec son homonyme et compatriote John Alexander Fleming, découvreur de la pénicilline en 1928.

6. Le futur inventeur de la contre-réaction et de la modulation de fréquence.

7. RAdio Detection And Ranging.

Au début des années 1930, pour pallier la piètre fiabilité des commutateurs téléphoniques de l'époque, qu'ils soient à relais électromécaniques ou à tubes à vide, les laboratoires Bell se lancent dans l'exploration d'interrupteurs plus fiables fondés sur un nouveau concept physique, les semi-conducteurs. Ces matériaux isolants possèdent une bande interdite suffisamment petite pour que des électrons de la bande de valence puissent rejoindre la bande de conduction. La théorie des semi-conducteurs s'est développée dans les années 1920 à partir des travaux théoriques des français Louis DE BROGLIE et Léon BRILLOUIN, du hongrois Eugene WIGNER et du suisse Félix BLOCH. On cherche dans un premier temps à construire des transistors<sup>8</sup> à effet de champ, sortes de triodes à l'état solide, sans toutefois parvenir à les fabriquer. Le dispositif semi-conducteur comporte trois électrodes actives, et doit permettre de contrôler un courant sur une des électrodes de sorties grâce à une électrode d'entrée. C'est le physicien autrichien Julius LILIENFELD qui dépose le premier brevet décrivant le fonctionnement et l'utilisation d'un dispositif à effet transistor dès 1925, sans aucune démonstration expérimentale, toutefois. Après une vingtaine d'années de développements théoriques et d'essais en laboratoire, c'est en 1947 que naît aux Bell Labs le *transistor bipolaire*. Les inventeurs en sont les américains William SHOCKLEY, Walter BRATTAIN et John BARDEEN, qui recevront le prix Nobel de physique en 1956. Le transistor ouvre de nouvelles perspectives pour détecter et amplifier les courants électriques, car il est à la fois beaucoup plus compact et plus robuste que le tube électronique, et fonctionne instantanément avec des tensions mille fois plus faibles.

Cette première génération de transistors utilise du cristal de germanium présentant des performances fluctuant en fonction de la température. En 1954, la société Texas Instrument (fondée en 1941 à Dallas) fabrique et commercialise le premier transistor en silicium, plus stable. La taille des transistors se réduit à celle d'un grain de sable, mais la densité des fils de connexion freine le développement de circuits complexes. La solution vient du circuit intégré, regroupant composants électroniques et liaisons métalliques dans un matériau semiconducteur d'un seul bloc. Le premier brevet de circuit intégré est déposé 1959 par Jack KILBY de Texas Instrument. Il devance de deux mois la société Fairchild, qui possède toutefois la solution pour fabriquer ces circuits intégrés en très grande quantité (procédé Planar). Inventeur génial, Kilby développera par la suite la calculatrice de poche et l'imprimante thermique et partagera le prix Nobel de physique en 2000 avec l'allemand KROMER et le russe ALFEROV, deux autres précurseurs de la physique et des structures à semi-conducteurs.

La diffusion des transistors et des circuits intégrés dans les équipements électroniques s'accélère avec les pressions conjuguées de la Guerre Froide et de la conquête spatiale. Aux Etats-Unis, le lancement du programme Apollo, doté de 25 milliards de dollars, donne un coup d'accélérateur aux recherches sur les calculateurs et les circuits intégrés. En 1965, la production annuelle de transistors dépasse les 600 millions d'unités outre-Atlantique. La même année, l'améri-

---

8. TRANSfer resISTOR.

cain Gordon MOORE, de la société Fairchild, énonce la loi qui portera son nom, conjecturant que la densité d'intégration dans un circuit intégré doublera tous les ans. Bien que corrigée quelques années plus tard à 18 mois, cette règle se révèle encore exacte de nos jours. Moore fonde en 1968 la société Intel<sup>9</sup>, qui produit en 1971 le premier microprocesseur, portant la référence 4004. Alimenté en 15 volts et aussi puissant que le premier ordinateur (ENIAC<sup>10</sup>), il fonctionne sur 4 bits et intègre 2300 transistors. Il est utilisé l'année suivante par la NASA pour le projet de sonde spatiale Pioneer 10.

De nos jours, les puces les plus performantes comportent plusieurs milliards de transistors, connectés par des liens (pistes) de quelques dizaines de nm d'épaisseur, se rapprochant de la distance inter-atomique au sein du matériau semi-conducteur.

### 6.1.7 L'émergence des radiocommunications

Dans les années 1860, le britannique James Clerk MAXWELL réalise une synthèse des études antérieures sur l'électromagnétisme en unifiant les propriétés électriques, magnétiques et lumineuses de la matière. Ses résultats sont accueillis en 1865 avec un grand scepticisme. En 1887, l'allemand Heinrich Rudolf HERTZ confirme cette théorie en mettant en évidence les ondes électromagnétiques (o.e.m.), et en montrant qu'elles possèdent toutes les propriétés de la lumière. Leurs applications pratiques –qu'elles soient guidées dans une ligne ou non– se multiplient dès lors : réception des signaux radio par le français Edouard BRANLY grâce à son *cohéreur à limaille* (1890), première antenne radio-réceptrice par le russe Alexandre POPOV en 1896, et la même année, première transmission radio de messages télégraphiques sur 12 km par l'italien Guglielmo MARCONI à Salisbury (U.K.). En 1901, la *Marconi's Wireless Telegraph Corporation* réalise la première liaison télégraphique transatlantique entre les Cor-nouailles et Terre-Neuve (3400 km).

En ce début de XX<sup>e</sup> siècle, plusieurs problèmes doivent être résolus pour permettre de meilleures performances en matière de transmission : trouver des composants capables d'émettre des puissances élevées, améliorer la sensibilité des récepteurs et enfin manipuler et filtrer les signaux reçus. Le tube triode de De Forest (1906) sera, jusqu'à l'invention du transistor, l'organe essentiel de l'électronique, que ce soit en radio, radar, télévision, son haute-fidélité ou dans les premiers ordinateurs. Il permet notamment d'amplifier les signaux au sein des répéteurs utilisés dans les câbles du téléphone. Les premiers filtres électriques sont conçus par l'américain George CAMPBELL en 1915. Deux ans plus tard, le français Lucien LEVY et Edwin Armstrong (encore lui !) mettent au point la réception superhétérodyne, permettant d'améliorer la sensibilité des récepteurs radio, et par la suite, des radars et de la télévision. La première station de radiodiffusion est

---

9. Integrated Electronics.

10. Electronic Numerical Integrator and Computer, conçu en 1946 à l'Université de Pennsylvanie.

créée en 1920 à Pittsburgh. Marconi réalise la première communication radio intercontinentale en ondes courtes en 1925. La fameuse antenne *râteau*, association de dipôles et d'un réflecteur en tiges métalliques, est mise au point en 1926 par le japonais Hidetsugu YAGI et son collègue Shintaro UDA. Le dispositif, qui fleurira plus tard sur les toits de la planète, conservera le célèbre nom d'antenne « Yagi ».

Grâce à une succession d'innovations proposées par de nombreux physiciens, la période 1924-1939 voit le développement de la source d'ondes hyperfréquences *magnétron*, capable de produire des puissances élevées à des longueurs d'ondes allant du centimètre au décimètre. Un autre générateur, le *klystron*, est mis au point entre 1936 et 1939 par les travaux conjoints des américains METCALF, HAHN, et VARIAN. Ce tube générateur ou amplificateur d'ondes hyperfréquences est encore utilisé dans les radars, faisceaux hertziens et accélérateurs de particules. Suite à ces avancées et sous la très forte pression des militaires, la seconde guerre mondiale voit le développement des radars, des faisceaux hertziens et de la radio-navigation.

### 6.1.8 Transmission des images

En 1827, après dix années de tentatives diverses sur une technologie baptisée *héliographie*, le français Joseph Nicéphore NIEPCE réalise la première véritable photographie au monde, à savoir les toits de son village, près de Châlon-sur-Saône. Mort prématurément, son invention est reprise et perfectionnée dans les années 1830 par son compatriote Louis DAGUERRE. Dès 1840, divers essais de transmission d'écritures manuscrites ont lieu. Le *télégautographe* de l'italien Giovanni CASELLI, ancêtre du fax, fonctionne dans les années 1860 sur le principe de balayage par lignes d'une trame. Il est abandonné, faute de clients. En 1870, le français Edouard BELIN invente le *bélinographe*, équipement de transmission des photographies de presse, réservé à des professionnels équipés de laboratoires de développement. La télécopie (ou FAX) explosera dans les années 1980 grâce à l'adoption d'une norme internationale sur un réseau performant et sous la pression d'une demande grandissante, juste avant la diffusion planétaire du courrier électronique.

Le cinéma avait, dès 1895 et les frères LUMIÈRE, créé les images animées. C'est dans les années 1920 que les premiers prototypes de télévision apparaissent. La première avancée est celle du britannique John BAIRD dont le *televisor* décompose les images par un procédé mécanique. La véritable voie est celle de la télévision « électronique » basée sur l'*iconoscope* mis au point pour RCA<sup>11</sup> par le russe Vladimir ZVORYKIN en 1931. En Grande-Bretagne, les programmes de la BBC<sup>12</sup> débutent en 1936, avec une définition de 405 lignes, et il y aura 20 000 récepteurs en 1939. On ne compte à la même époque que quelques centaines de récepteurs en France, où la télévision publique émet depuis 1935 un programme

---

11. Radio Corporation of America, créée en 1919 par la General Electric pour s'introduire dans le secteur émergeant de la radio.

12. British Broadcasting Corporation, fondée en 1922.

de 15 heures hebdomadaires. Elle adoptera en 1948 un système à 819 lignes, mais c'est TELEFUNKEN en Allemagne qui imposera au milieu des années 50 une norme quasi-mondiale à 625 lignes. La diffusion d'émissions en couleur se fait à partir de 1964. Le premier câble transatlantique (TAT-1) installé en 1956 ne permettait de transmettre que 36 voies téléphoniques. Pour transmettre la télévision entre continents, il fallait enregistrer un programme sur une bande magnétique, envoyer celle-ci par avion vers le studio destinataire, et tout reportage télévisé en direct était donc impossible. A cette époque, on envisage déjà la transmission de communications téléphoniques par satellite artificiel, de trois manières différentes nécessitant des moyens de mise en orbite bien différents :

- un *satellite passif*, qui se contente de renvoyer les ondes hertziennes par réflexion. Deux points à la surface de la Terre peuvent ainsi être mis en relation via un rebond sur le satellite. Les premiers exemplaires sont des ballons à réflecteur ;
- un *satellite à défilement*, décrivant une orbite proche de la Terre (600-800 km) en 1h30, le plus souvent sur une orbite polaire passant régulièrement au-dessus de tous les points de la surface terrestre. Ce type d'orbite dit *héliosynchrone* permet au satellite de passer toujours à la même heure locale au-dessus d'un lieu donné ;
- un *satellite géostationnaire*, tournant à la même vitesse que la Terre, à 36000 km d'altitude, et restant de fait immobile par rapport à un point de la surface terrestre. Trois satellites géostationnaires suffisent en théorie à couvrir l'ensemble de la surface du globe terrestre.

Après plusieurs expériences menées aux Etats-Unis, dont le ballon réflecteur passif ECHO 1 et le satellite actif COURRIER B, tous deux lancés en 1960, un premier satellite de télécommunications opérationnel est lancé en 1962 : c'est TELSTAR, un satellite à défilement, qui n'est « visible » que dans un laps de temps réduit (20 mn). Peu après, on inaugure les communications téléphoniques intercontinentales par satellite. Dès 1963 sont lancés des satellites géostationnaires, dont les premières versions commerciales, construites par le groupe Hughes Aircraft, se nomment INTELSAT 1 et SYNCOM 3. En août 1964, ce dernier retransmet les Jeux Olympiques de Tokyo entre le Japon et les Etats-Unis. A partir de 1984, la France lance les satellites TÉLÉCOM 1 destinés aux communications avec les départements d'Outre-mer, à la distribution de programmes radio et télévisés sur le territoire national ainsi qu'aux liaisons militaires. Ils fournissent alors une capacité de relayage de 6 à 8 canaux de TV et 4000 circuits téléphoniques. Fin 1991, Télécom 2A possédait une capacité de 11 à 15 canaux TV et 16000 circuits téléphoniques.

### 6.1.9 La transmission par fibre optique

Depuis le début des années 1990, la transmission des données par fibre optique est à la base de l'explosion des communications modernes. C'est en effet grâce à cette gigantesque toile en fils de silice que le réseau Internet et la téléphonie mobile ont pu être déployés à l'échelle mondiale. Améliorée constamment depuis les années 1960, la transmission optique a réussi là où les versions précédentes (électrique, hertzienne ou satellitaire) avaient échoué, grâce à ses nombreux atouts : une capacité gigantesque, une forte immunité aux parasites, des temps de latences très faibles, une extrême légèreté et durabilité du milieu de transmission. Le premier câble sous-marin transatlantique (TAT-1) avait été déployé en 1956 et véhiculait sous forme électrique 36 circuits téléphoniques sur 3700 km. Cette prouesse technologique combinait à l'époque l'invention récente du câble coaxial et de la gaine en polyéthylène. Trente ans plus tard, le premier câble transatlantique à fibre optique (TAT-8) est installé et véhicule 40 000 circuits téléphoniques. La dernière version de la série (TAT-14) est posée en 2001 et totalise près de 15000 km de câble optique, en transportant l'équivalent de 50 millions de circuits téléphoniques, pour une capacité de transfert de 3 500 Gbit/s. Actuellement, si l'intégralité des fibres optiques déployées sur la planète étaient mises bout à bout, nous obtiendrions un câble de plus d'un milliard de kilomètres, soit 25 000 fois le tour de la Terre.

La première démonstration officielle d'un guide lumineux par réflexion totale interne est effectuée au début des années 1840 par les français Jean-Daniel COLLADON et Jacques BBINET. En injectant de la lumière dans un jet d'eau s'écoulant d'un trou à la base d'un réservoir, celle-ci suit la courbure du jet, démontrant ainsi qu'elle peut être déviée de sa trajectoire rectiligne. L'idée est révolutionnaire puisque les scientifiques de l'époque considèrent que la lumière ne peut voyager qu'en ligne droite. Ils démontrent ainsi le principe qui est à la base de la fibre optique. L'expérience est répétée par le britannique John TYNDALL devant la Société Royale Britannique en 1854. Les fontaines lumineuses seront des attractions aux expositions internationales de Glasgow et de Paris, en 1888 et 1889.

À la fin des années 1920, John BAIRD (précurseur de la télévision) en Angleterre et Clarence HANSELL aux USA déposent des brevets sur la transmission d'une image par un assemblage de fibres de verre, mais la première réalisation expérimentale est attribuée à l'allemand Heinrich LAMM en 1930, qui transmet l'image d'une ampoule à filament via un faisceau de fibres en silice. La qualité de l'image transmise est perfectible car, dans cet assemblage, les fibres optiques se touchent et la lumière peut se transmettre d'une fibre à l'autre. Afin d'éviter ces ramifications lumineuses, le néerlandais Abraham VAN HEEL propose en 1954 d'enrober la fibre avec un matériau de plus bas indice de réfraction. La couche de verre externe est appelée la *gaine* optique, la partie centrale où se propage la lumière constituant le *cœur*. Grâce à cette structure guidante, la lumière subit une réflexion totale à l'interface cœur-gaine sans être affectée par l'éventuel contact

avec une autre fibre. Un ingénieux procédé de fabrication, utilisant une *préforme* (barreau encastré dans un tube) chauffée est mis au point par l'étudiant américain Larry CURTISS en 1956. De là naît le *fibroscope* flexible, qui permet la transmission d'une image pour observer l'intérieur du corps humain, testé pour la première fois sur un patient en 1957 par le gastroentérologue américain Basil HIRSCHOWITZ.

Pour servir de support aux télécommunications, la fibre optique doit toutefois pouvoir transporter la lumière sur plusieurs kilomètres, alors que l'on ne peut franchir que quelques mètres, en raison de pertes rédhibitoires de l'ordre de 1000 dB/km. La mise au point du laser en 1960 par l'américain Theodore MAIMAN provoque l'essor de la transmission par fibre optique. Dès 1964, Charles KAO décrit et imagine un système de communication reposant sur l'utilisation conjointe du laser et de la fibre optique. Ces travaux visionnaires sur les fibres en silice et la démonstration expérimentale de la preuve de ce principe pour des transmissions d'informations à longue distance lui vaudront le prix Nobel de physique en 2009. Des pertes de 17 dB/km sur des fibres en silice purifiée sont annoncées par une équipe de l'entreprise Corning Glass dès 1970, et les premières liaisons par fibre optique sont réalisées dès 1975 à l'échelle d'une ville. En 1982, les pertes ne sont plus que de 0,2 dB/km, à la longueur d'onde de 1,55 µm. La fibre multimode des débuts a cédé la place à la fibre monomode, présentant une bande-passante plus élevée, et autorisant des débits et des portées bien supérieurs. Le câble transatlantique TAT-8 évoqué plus haut véhicule l'information par fibre optique dès 1988, mais les amplificateurs sont électroniques, générant des dispositifs coûteux et limitant la bande-passante disponible. Les premières démonstrations d'amplificateurs optiques pour les télécommunications par fibre datent de 1987, sous l'impulsion des travaux conjoints de l'américain Randy GILES, du britannique Davis PAYNE et du français Emmanuel DESURVIRE. Ils reposent sur une fibre à base de silice dont le cœur est dopé avec des ions erbium ( $\text{Er}^{3+}$ ), amplifiant les longueurs d'onde vers 1,55 µm, domaine de plus faible atténuation de la silice, sur une bande-passante théorique gigantesque de près de 5000 GHz ! La mise en pratique de cet amplificateur EDFA<sup>13</sup> est très rapide puisqu'il est installé dès 1995 sur le câble transatlantique TAT-12, marquant une augmentation significative de la capacité de transmission : de 288 Mbit/s pour TAT-8 à 60 Gbit/s pour TAT-12 en 1996, et 3200 Gbit/s pour TAT-14 en 2001. L'EDFA est donc bien l'élément déclenchant qui a permis le déploiement de l'Internet sur la toile optique, et il se dit que l'avoir mis au point pourrait valoir à ses inventeurs une récompense suprême dans quelques années...

Le principal effort de déploiement de la fibre optique réside maintenant dans les réseaux d'accès des opérateurs, où régnait jusqu'alors la technologie sur cuivre ASDL<sup>14</sup>. Le remplacement par des fibres optiques des derniers mètres de câble téléphonique reliant les abonnés au central de l'opérateur permet de multiplier par un facteur allant de 10 à 100 les débits accessibles, tout en offrant des liens

13. Erbium-Doped Fiber Amplifier.

14. Asymmetric Digital Subscriber Line.

montant et descendant symétriques aux utilisateurs.

## 6.2 Source d'information et support de transmission

### 6.2.1 Sources d'information

Le rappel historique précédent met en évidence la nécessité de traiter et transmettre un nombre toujours croissant de types de messages tels que textes, sons, images fixes ou animées. La forme que revêt cette information est généralement commode pour une communication directe telle qu'une conversation ou un échange sur support physique (papier, écran) lorsque les interlocuteurs sont en présence. Quand ils sont distants l'un de l'autre, l'emploi des réseaux de communications est une manière efficace d'effectuer la transmission d'information. On distingue alors le *message initial*, lié à une source physique, de la *représentation* de ce message sous forme d'un signal apte à se propager dans un canal de transmission. Ce point sera revu au chapitre 2. On classe souvent les sources physiques d'information en fonction de leur origine, parmi lesquelles :

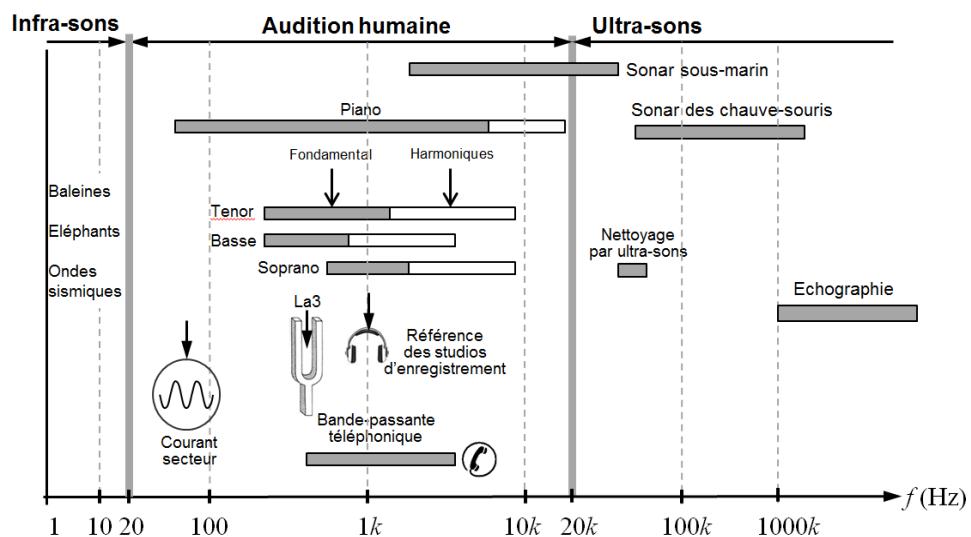
- Les sources *géophysiques* : liées à une évolution de la température, de la pression, de la vitesse d'écoulement de fluides terrestres (météorologie) ou aux ondes de vibration de l'écorce terrestre (sismique). Un cas particulier est formé par les *images* et les *videos*, constituées des variations d'éclairage et de couleur de notre environnement perçues par un œil, un appareil de photo ou une caméra ;
- Les sources *spatiales* : images du cosmos visibles ou invisibles à l'œil nu, provenant des rayonnements électromagnétiques spatiaux captés par les télescopes et les radio-télescopes ;
- Les sources de *poursuite* : émanant des radar, *sonar*<sup>15</sup>, ou *lidar*<sup>16</sup>. Ces dispositifs peuvent être actifs, basés sur l'émission d'une onde et l'écoute de son écho, ou passifs, limités à l'écoute des bruits. Dans le domaine de la biologie, on parle également de sonar pour désigner les moyens d'écholocation dont disposent les chauve-souris et les cétacés ;
- Les sources *biologiques* : de nature acoustique, électrique et optique, elles renseignent sur le fonctionnement des tissus vivants en général et du corps humain en particulier. On citera l'imagerie à rayon X (radiographie ou scanner), l'imagerie à résonance magnétique (IRM), la tomographie à émission de positons (TEP), l'échographie par ultra-sons, l'électro-cardiogramme, l'électro-encéphalogramme, l'électro-myogramme ou l'électro-oculogramme ;

15. SOund NAVigation and Ranging.

16. LIght Detection And Ranging.

- Les sources de *structures* : d'origine mécanique, elles sont obtenues par des moyens acoustiques, électriques ou optiques et permettent le diagnostic vibratoire d'un pont, d'un bâtiment, d'une pièce en mouvement ou d'un véhicule ;
- Les sources de *télécommunications* : elles sont constituées le plus souvent d'une onde électromagnétique dite « porteuse », modulée par un signal à transmettre de plus basse fréquence. Le rôle de la porteuse est essentiel et permet au signal à transmettre de traverser le canal de propagation sans encombre. Ce point sera approfondi au chapitre 7 ;
- Les sources d'*échanges inter-personnels* : parole, écriture, physionomie ou gestuelle. A l'opposé des sources de télécommunications, ces sources émettent un signal modulé de manière très complexe puisque modulateur et démodulateur sont le cerveau humain.

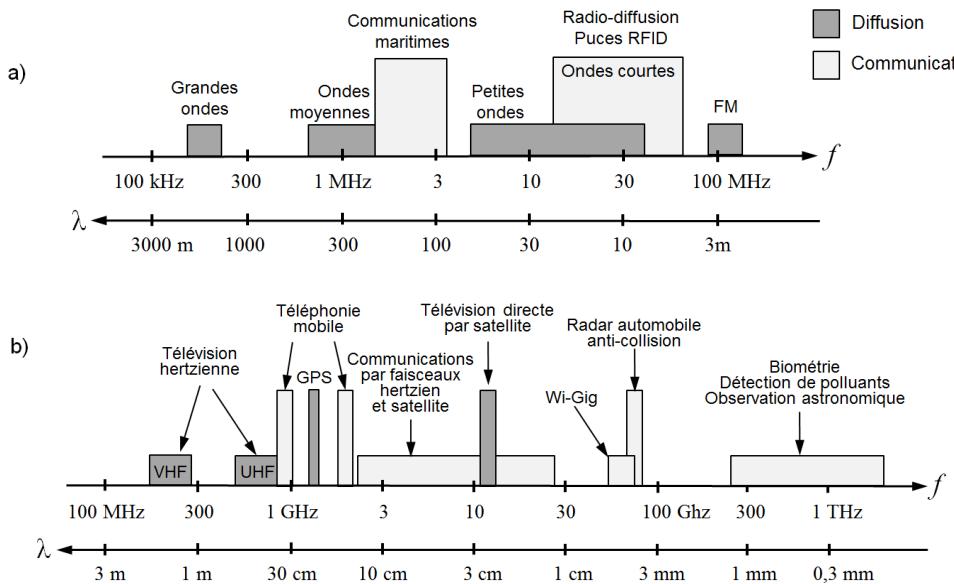
Les principales sources physiques de messages peuvent être classées selon la gamme de fréquences ou de longueurs d'onde qu'elles occupent, comme illustré sur la figure 6.3 pour l'acoustique et sur la figure 6.4 pour les ondes radiofréquences.



**FIGURE 6.3 – Vue schématique de notre paysage acoustique. L'axe des abscisses est gradué en échelle logarithmique.**

## 6.2.2 Supports de transmission

Les principaux supports physiques utilisés en télécommunications ont été introduits de manière historique dans la section 1.1. Il en ressort que les caractéristiques physiques de ces supports vont le plus souvent perturber la transmission



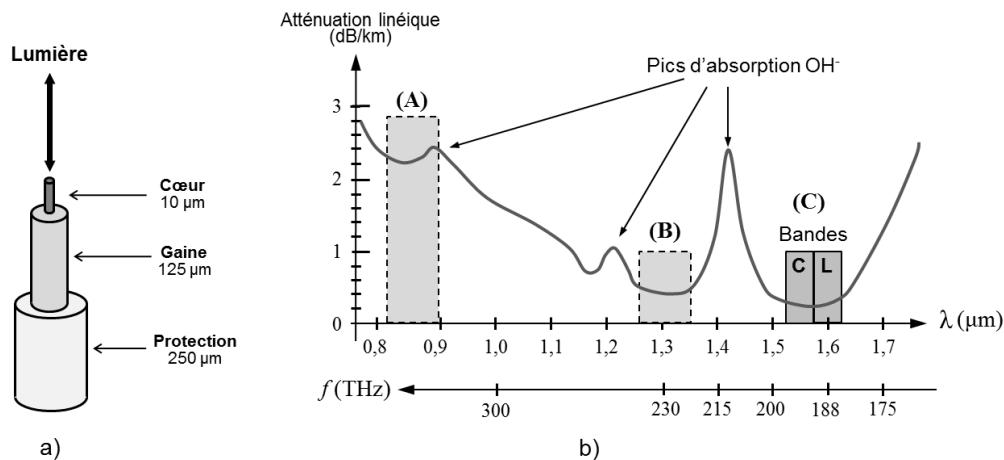
**FIGURE 6.4 – Paysage électromagnétique : a) gamme des moyennes fréquences et b) gamme des hautes fréquences. Les axes des abscisses sont gradués en fréquence et en longueur d'onde, en échelles logarithmiques.**

d'information et limiter la quantité de données acheminable par unité de temps (le débit maximal). De ce point de vue, les deux paramètres-clé seront la *bande-passante* et la *sensibilité* du support aux bruits, que ces derniers proviennent du support ou de l'environnement extérieur dans lequel il est plongé. Le problème du bruit étant traité au chapitre 2, on n'envisagera ici que la bande-passante, définie comme la bande de fréquences dans laquelle les signaux appliqués à l'entrée du support de transmission ont une puissance de sortie supérieure à un seuil donné après traversée du support. En général, on caractérise un support par sa bande-passante à 3 dB (décibels), c'est-à-dire par la plage de fréquences dans laquelle la puissance de sortie est, au maximum, divisée par 2. La notion d'unité logarithmique (dB, dBm) et l'intérêt de son emploi dans le monde des communications sera précisée au chapitre 2.

Les caractéristiques physiques des principaux supports de transmission utilisés en télécommunications sont résumées dans le tableau multi-critères 6.1. Le cas de la fibre optique mérite d'être étudié quelques instants. Nous avons vu en 6.1.9 que ce support de transmission est l'unique solution pour écouler les flux de données transitant sur les *réseaux cœur* des opérateurs, constitués d'artères terrestres ou sous-marines à très haut débit (de l'ordre du Tbit/s par fibre). La très grande bande-passante de la fibre optique monomode peut en partie s'expliquer par la courbe de l'affaiblissement linéaire spectral de la silice, représentée sur la figure 6.5, dont les variations proviennent de la combinaison de trois phéno-

Support	Câble symétrique	Câble coaxial	Fibre monomode	Ondes radio
<b>Propagation</b>	guidée	guidée	guidée	libre
<b>Matériaux</b>	métal (Cu)	métal (Cu)	silice	Air
<b>Bandes-passantes (Hz)</b>	$10^5 - 10^6$	$10^8$	$10^{12}$	$10^9$
<b>Atténuation</b>	20 dB/km (1 MHz)	20 dB/km (1 GHz)	0,2 dB/km (193 THz)	$AEL = 20 \log_{10} \left( \frac{4\pi d}{\lambda} \right)$
<b>Sensibilité au bruit</b>	forte	faible	nulle	forte
<b>Confidentialité</b>	limitée	correcte	élevée	nulle
<b>Coût support</b>	faible	élevé	modéré	nul
<b>Coût interfaces</b>	très faible	faible	élevé	assez faible
<b>Applications</b>	téléphone	réseaux locaux	très haut débit	mobiles, satellites

**TABLE 6.1 – Propriétés des principaux supports de transmission utilisés en télécommunications.** L'atténuation en espace libre (AEL) des ondes radio varie fortement en fonction de la distance de propagation  $d$  et de la longueur d'onde  $\lambda$  (ou la fréquence  $f = 3 \cdot 10^8 / \lambda$ ). Ainsi, pour  $f = 1 \text{ GHz}$  et  $d = 1 \text{ km}$ , AEL = 92 dB.



**FIGURE 6.5 – a)** Structure d'une fibre monomode en silice, utilisée dans les réseaux de télécommunications et **b)** Courbe d'atténuation linéaire spectrale d'une fibre monomode standard en silice. L'axe des abscisses est gradué en longueur d'onde (en μm) ou en fréquence (en THz).

mènes : (i) l'*absorption* dans le matériau, liée aux vibrations moléculaires et transitions électroniques, (iii) la *diffusion de Rayleigh*, due aux fluctuations locales de la susceptibilité électrique<sup>18</sup> de la silice dopée et (iii) l'*absorption intrinsèque* des radicaux hydroxyles OH<sup>-</sup> présents dans le milieu. Outre une fenêtre (A) exploitable à 850 nm pour les courtes distances et une autre (B) utilisée à 1300 nm dès le milieu des années 1980 pour les distances moyennes (quelques dizaines de km), la courbe résultante montre un minimum d'absorption de 0,2 dB/km autour de la

18. La susceptibilité électrique sera introduite au §4.5.2.

longueur d'onde de référence  $\lambda_0 = 1,55 \mu\text{m}$ , dégageant deux bandes de canaux optiques exploitables, notées C et L et utilisées systématiquement dans les transmissions optiques à longue distance dès la fin des années 1980. Dans cette zone, la fréquence optique est de l'ordre de  $f_0 = c/n\lambda_0 = 193 \text{ THz}$ . D'après la courbe de la figure 6.5, la bande-passante en longueur d'onde à 0,1 dB disponible autour de  $\lambda_0$  peut être estimée à la largeur de la bande C+L, soit environ  $\Delta\lambda = 1,62 \mu\text{m} - 1,52 \mu\text{m} = 100 \text{ nm}$ , correspondant à une bande fréquentielle  $\Delta f = \frac{f_0}{\lambda_0} \cdot \Delta\lambda = 12,5 \text{ THz}$ . On arrive ainsi à une capacité théorique de près de 200 millions de circuits téléphoniques par fibre optique ! Notons que la fenêtre de transmission (B) située autour de  $1,3 \mu\text{m}$  (de largeur 10 THz) est également utilisable sur des distances plus courtes, et que des fibres spéciales ne présentant pas de pic d'absorption à  $1,4 \mu\text{m}$  sont désormais disponibles, autorisant une capacité théorique encore plus importante. Aujourd'hui, la capacité expérimentale de transmission d'une fibre optique atteint 50 Tbit/s sur plus de 5000 kilomètres, avec des systèmes optimisés en laboratoire.

Dans la pratique, on doit tenir compte d'autres effets physiques perturbant la transmission optique et rendant délicat l'accès à de telles capacités de transmission. C'est le cas de la *dispersion chromatique*, liée à la variation de l'indice de la silice en fonction de la longueur d'onde, entraînant une variation de la vitesse de groupe du signal et une déformation des impulsions optiques au cours de la propagation. Cet effet sera étudié et modélisé au §4.6.3. On compense ce phénomène par l'utilisation conjointe de tronçons de fibres à dispersion négative et d'un découpage de la bande optique en canaux indépendants de faible largeur spectrale<sup>19</sup>, le multiplexage en longueur d'onde (WDM). Ainsi, sur les liaisons à longue distance, des sites de régénération « tout optique », associant amplification optique et compensation de dispersion chromatique, sont placés à intervalles réguliers ( $\approx 100 \text{ km}$ ).

### 6.2.3 Des communications au traitement du signal

Dès les années 20, le suédois Harry NYQUIST et l'américain Ralph HARTLEY étudient la quantité d'information transmise sur une voie télégraphique et observent que la cadence maximale de transmission est proportionnelle à la largeur de bande de fréquence disponible sur la ligne. Nyquist détermine tout d'abord que le nombre d'impulsions indépendantes pouvant être transmises par unité de temps sur un canal télégraphique est donné par  $f_p \leq 2B$ , si  $f_p$  est la fréquence des impulsions (en  $\text{s}^{-1}$ ) et  $B$  désigne la bande-passante du canal (en Hz). Cette quantité  $2B$  devient alors la célèbre « cadence de Nyquist ». Ensuite, Hartley prend en compte le nombre  $M$  d'états distincts pris par les impulsions de Nyquist (symboles) pour en déduire une capacité du canal  $C = f'_p \log_2(M)$ , où  $f'_p$  est la cadence exprimant le nombre de symboles transmis par seconde (en bauds) par le canal. Cette formule s'applique toutefois à la condition d'une transmission non-bruitée par les perturbations du canal, le plus souvent électroniques. Ce point

---

19. Donc individuellement moins sensibles à la dispersion chromatique.

sera revu dans le chapitre 3. Le traitement rigoureux et général de cette question est proposé 20 ans plus tard par Claude SHANNON et son collègue des Bell labs Warren WEAVER, aboutissant à la théorie mathématique de la communication (1948), et conjointement par le mathématicien du MIT Norbert WIENER dans sa théorie sur la *cybernétique* (1949). L'élément nouveau est la prise en compte de l'aspect aléatoire des phénomènes étudiés (le bruit). On retiendra la formule fondamentale, dite de « Shannon-Hartley », concernant la capacité  $C$  d'un canal de communication analogique (en bit/s), en présence d'un bruit blanc gaussien additif :

$$C = B \log_2 \left( 1 + \frac{P_s}{P_b} \right) \quad (6.1)$$

où  $P_s$  et  $P_b$  sont respectivement les puissances moyennes du signal utile et du bruit, exprimées en Watt, et  $P_s/P_b$  définit le *rapport signal-sur-bruit*, ou SNR<sup>20</sup>. Le théorème stipule que l'on peut transmettre sans erreur sur ce type de canal, pourvu que le taux moyen d'information  $R$  émis par la source soit inférieur à la capacité fournie par la relation 6.1. La théorie de la communication et, par la suite, du signal, était véritablement née.

Dans la relation 6.1, si le SNR requis est de 1000 (soit 30 dB) et la bande-passante disponible est de 4 kHz (cas d'une communication téléphonique), alors la capacité du canal sera  $C = 4000 \cdot \log_2(1001) = 40$  kbit/s. Inversement, si l'on veut transmettre 100 kbit/s sur un canal de bande-passante 30 kHz, le SNR minimal requis sera de  $2^{\frac{10}{3}} - 1 = 9,1$ , soit 9,6 dB. Enfin, notons toujours d'après (6.1) que si  $B$  augmente, alors la puissance de bruit collecté augmente (justifié au chapitre 3), donc le SNR se dégrade et vient modérer l'augmentation de capacité.

Dès lors, de nombreux chercheurs contribuent dans les années 1950 au développement de cette discipline émergente qu'est le *traitement de signal*. Citons dans la communauté française, les travaux d'André BLANC-LAPIERRE sur les signaux aléatoires, et ceux de Léon BRILLOUIN sur les conséquences de la théorie de l'information dans la modélisation des phénomènes physiques. Dès cette époque, des équipes d'universitaires ont commencé à s'intéresser à ces problèmes, donnant naissance à une communauté importante en théorie et traitement du signal. C'est ainsi qu'ont été développées les notions de compression d'impulsion en radar, de filtrage adapté, de modulation à spectre étalé ou encore de filtrage auto-adaptatif, trouvant de nombreuses applications en détection, estimation ou compression des signaux. En 1960, les travaux de l'américain Rudolph KALMAN (d'origine Hongroise) débouchent sur un résultat marquant concernant l'estimation et les contrôle des processus dans les systèmes aérospatiaux. Son algorithme mathématique récursif déployé dans le domaine temporel permet une estimation robuste de l'état futur d'un système en fonction de la connaissance de sa dynamique, et ce malgré l'imprécision de la modélisation et des mesures bruitées. Il autorise de fait un contrôle efficace en temps réel, et la NASA l'implante rapidement dans les ordinateurs de navigation du programme Apollo pour l'estimation des trajectoires. En 1965, les américains James COOLEY et John TUKEY

---

20. Signal-to-Noise Ratio.

proposent l'algorithme de transformée de Fourier discrète rapide (FFT<sup>21</sup>) et le principe de son implantation sur calculateur. Dès lors, le traitement numérique du signal ne constitue plus une approximation du traitement analogique, mais une discipline à part entière. Dans la lignée des microprocesseurs, les premiers processeurs de traitement de signal (DSP) seront proposés par NEC et Texas Instruments au début des années 1980.

### 6.2.4 Du système au réseau

Même si le point de départ d'une communication à distance est souvent matérialisé par une ou plusieurs sources physiques (microphone, camera, antenne, photodétecteur, télescope, sismographe, port Ethernet d'un terminal), il serait infondé de vouloir réduire le spectre des communications à la simple étape de transmission de données d'un point A à un point B sur un support physique. La justification est fournie par des assemblages aussi complexes que l'architecture d'un ordinateur ou un réseau de téléphonie mobile, sièges de liaisons bidirectionnelles de type « multipoint-multipoint », gérées par un système logiciel de stockage des données et de traitement des requêtes. Plus généralement, on considérera des *systèmes* de communication échangeant des données au sein d'entités plus complexes appelées *réseaux* de communication. Conformément à la figure 6.6.a, un système de communications sera vu comme la juxtaposition d'un nombre donné de cellules de base (opérations) de *traitement* (notées P<sup>22</sup>) et de *transmission* (T) de l'information, complétées par les opérations « support » que sont la *mesure* (M) et le *stockage* (S). La combinaison cohérente de ces 4 cellules T, P, M et S au niveau matériel (hardware) constituera la *couche physique* du système, et l'adjonction d'une couche de supervision logicielle (software) lui permettra d'assurer un service auprès de clients.

D'un point de vue topologique, un système de communications peut présenter une architecture :

- a) de type *point-à-point*, comme par exemple un câble métallique, une fibre optique, ou une liaison hertzienne. Des répéteurs peuvent y être inclus pour régénérer les signaux (i.e. les amplifier et les corriger) ;
- b) de *diffusion*, à l'image de la télévision où un satellite est reçu par des milliers de récepteurs au sol, ou dans les réseaux câblés électriques et optiques, distribuant des services (TV et Internet) via une topologie en arbre, du point de présence de l'opérateur jusqu'aux abonnés ;
- c) de *collecte*, comme en surveillance océanographique, où les signaux des centaines de sondes immergées sont reçus par un système central, ou encore dans le cas de micro-capteurs sans-fil en milieu industriel et en domotique ;

---

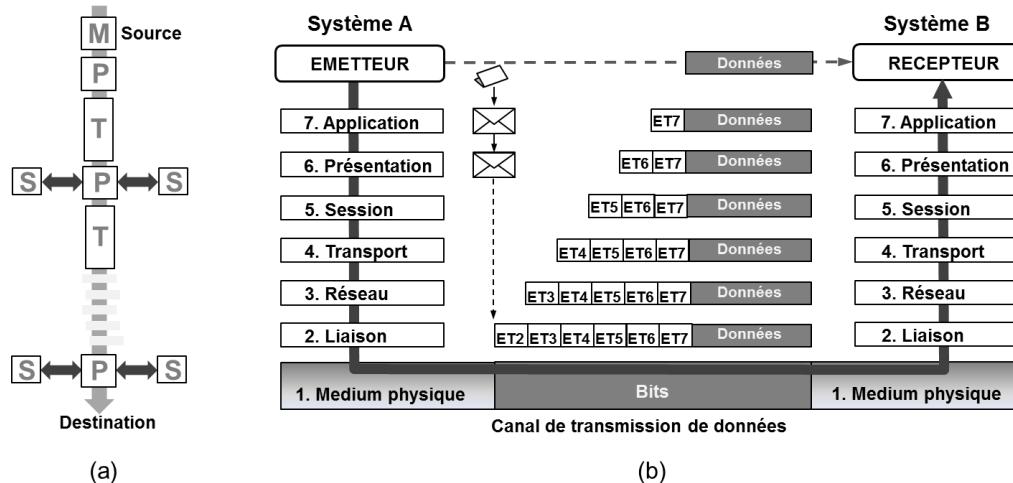
21. Fast Fourier Transform.

22. « Processing », traduction anglaise de « traitement ».

d) organisée en *réseau local*, où un ensemble de *terminaux* comportant des ports d'émission et de réception communiquent entre eux via des *nœuds*, équipements de supervision et d'aiguillage des connexions. Ainsi, dans un réseau *Ethernet*, les utilisateurs communiquent sur un medium partagé (câble métallique ou fibre optique) et sont identifiés par les commutateurs de trames au moyen d'une clé unique, leur adresse MAC<sup>23</sup>.

Ce principe de réseau connecté est étendu à l'échelle mondiale via une hiérarchie de réseaux intermédiaires de collecte vers le réseau Internet. Dans ce cas, les paquets de données émis par chaque terminal sont aiguillés par des *routeurs* vers d'autres machines désignées par leur adresse IP, selon une route dynamique non pré-établie. Il importera à ce niveau de ne pas confondre la topologie *physique* du réseau (en arbre, étoile, anneau, bus, maillé) avec sa topologie *logique*, constituée par le graphe des connexions réalisables via ses liens et ses noeuds. Le lecteur désirant approfondir ce sujet pourra consulter un ouvrage de référence dans le domaine des réseaux.

On conclura toutefois ce chapitre par une présentation d'un modèle historique qui illustre bien ce passage du système au réseau. Il s'agit du célèbre schéma en couches constitué par le modèle OSI<sup>24</sup>, né en 1984 de la volonté de normaliser les communications pour garantir un maximum d'évolutivité et d'interopérabilité entre les terminaux et les réseaux, alors que ceux-ci transportaient déjà des données par commutation ou routage de paquets. Le modèle OSI est un schéma



**FIGURE 6.6 – a) Schématisation des quatre opérations de base réalisées au sein d'un système de communications et b) modèle OSI d'un réseau et son principe de communication en 7 couches indépendantes, au moyen d'en-têtes (ET).**

générique et plutôt abstrait qui permet de décomposer en étapes successives les

23. Medium Access Control.

24. Open Systems Interconnection.

opérations qu'effectue un système de données lorsqu'il envoie ou reçoit de l'information, via le réseau auquel il est connecté. Il comporte sept couches, conformément au schéma de la figure 6.6.b.

Les couches basses (1 à 4) concernent le transport de l'information entre les extrémités concernées par la communication, et dépendent de fait du réseau et du support physique. On les trouve dans les terminaux qui communiquent via un réseau et dans les divers dispositifs qui assurent le fonctionnement de ce réseau. Les couches hautes (5 à 7) sont responsables du traitement de l'information relative à la gestion des échanges entre systèmes informatiques. Elles sont utilisées par les logiciels de communication. Les couches 1 à 3 interviennent entre machines voisines, et non entre les machines d'extrémité qui peuvent être séparées par plusieurs routeurs. Inversement, les couches 4 à 7 n'interviennent qu'entre hôtes distants. Ainsi, lorsque l'internaute du système A de la figure 6.6.b. interroge Internet grâce au navigateur de son terminal, la demande d'information qu'il formule démarre de la couche 7 (e.g. « télécharger une page web ») avant d'être mise en forme à la couche 5 selon le protocole HTTP<sup>25</sup> du Web. Les données générées sont mises en paquets en accord avec le protocole TCP d'Internet (couche 4) et chaque paquet reçoit une adresse conforme au protocole IP d'Internet (couche 3). Il est ensuite introduit dans une trame Ethernet de couche 2, puis expédié sur le réseau local via un medium physique. Le modèle OSI est donc parcouru en descendant, et des données de gestion (en-tête) sont rajoutées par chaque couche. Pour arriver au destinataire (le serveur web), les mêmes opérations se déroulent en sens inverse en remontant les couches du modèle. Notons qu'au sein du réseau, lorsque deux équipements veulent communiquer ensemble au sein d'une même couche (des routeurs IP par exemple), ils ne consulteront que les en-têtes propres à la couche (ET3), sans perdre de temps à analyser le reste des données.

Seule la couche 1 dédiée au canal physique nous concerne dans cet ouvrage. Elle s'occupe de la transmission des bits de façon brute sur un système de communication, et doit garantir l'intégrité des données (un bit 1 envoyé doit bien être reçu comme bit valant 1). Elle va ainsi normaliser les caractéristiques électriques (un bit 1 doit être représenté par une tension de 5 V, par exemple), les caractéristiques mécaniques (forme des connecteurs, de la topologie etc.), les caractéristiques fonctionnelles des circuits de données et les procédures d'établissement, de maintien et de libération du circuit de données. Les équipements de couche 1 sont des supports de transmission (câble, paire torsadée, fibre), les interfaces, les répéteurs, les amplificateurs, les modems, ou les concentrateurs. La principale unité d'information de cette couche sera le « bit », véhiculé sur le canal de propagation par un signal physique adapté, dont la description constitue l'objet du chapitre suivant.

\*\*\*

---

25. HyperText Transfer Protocol.

## ☒ Qu'ai-je appris ?

1. *Entre 1896 et 1901, les travaux de G. Marconi ont débouché sur la première transmission transatlantique sans fil d'un message de parole.*  
 Vrai  
 Faux
2. *L'ancêtre du transistor est :*  
 le magnétron  
 le cohéreur à limaille  
 le tube triode
3. *Le phénomène de diaphonie dans les premières lignes téléphonique était favorisé par :*  
 Les pertes dans les centraux téléphoniques  
 Le faible diamètre des fils de transmission  
 Les défauts d'isolation des liens de communications individuels
4. *L'apport principal de la théorie des communications à la fin des années 1940 était de rendre compte de l'influence :*  
 de la capacité des canaux de transmission  
 de la sensibilité des récepteurs  
 du bruit généré dans la chaîne de transmission
5. *La première antenne réceptrice d'ondes électromagnétiques date de :*  
 1879  
 1896  
 1926
6. *Le télégraphe électrique utilisait le principe :*  
 d'induction magnétique  
 de couplage électrostatique  
 de vibration électromécanique
7. *Le premier satellite de télécommunications géostationnaire fut lancé en :*  
 1962  
 1963  
 1964
8. *La génération du signal téléphonique repose sur un principe identique à celui du télégraphe.*  
 Faux  
 Vrai
9. *Combien d'années se sont-elles écoulées entre la mise en service du premier câble transatlantique télégraphique et celle du premier câble transatlantique téléphonique ?*

- 28
- 75
- 100

10. *La norme standard de télévision analogique à 625 lignes fut imposée par :*

- La BBC
- La radio-télévision Belge
- Une compagnie privée Allemande

11. *La bande-passante théorique d'une fibre optique monomode en silice utilisée à 1550 nm est de :*

- 3500 Gbit/s
- 12,5 THz
- 40 GHz

12. *La première transmission sans-fil est due à :*

- Rudolf Hertz
- Hidetsugu Yagi
- Guglielmo Marconi

13. *Le premier brevet de circuit intégré fut déposé en :*

- 1951
- 1959
- 1964

14. *La première gaine isolante opérationnelle sur les câbles à longue distance fut fabriquée en :*

- gutta-percha
- polyéthylène
- gomme arabique

15. *La relation de Shannon-Hartley stipule que la capacité d'un canal de communications :*

- Varie linéairement en fonction de la bande-passante du canal
- Décroît lorsque la puissance de bruit capté dans la bande augmente
- Ne dépend pas de la bande-passante du canal

16. *Le modèle OSI permet de représenter de manière générique l'échange des données entre :*

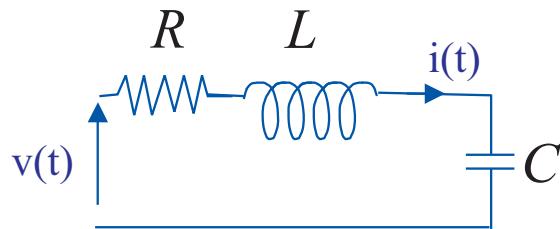
- Deux interfaces de la couche physique, exclusivement
- Deux points d'accès d'un réseau local
- Deux terminaux quelconques du réseau internet

17. *Le premier microprocesseur date de :*

- 1965
- 1971
- 1975

## Annexe 1 - Excitation sinusoïdale et notation complexe pour un circuit électrique

Un circuit électrique est régi par des relations topologiques imposées par les lois de Kirchoff : la loi des noeuds (conservation de l'électricité) et la loi des mailles. Son analyse aboutit à un système d'équations intégro-différentielles du fait des relations constitutives des éléments qui le composent ( $L$ ,  $C$  et  $R$ ). Pour l'exemple de la Fig. I), la relation qui en résulte est donnée par l'équation 1.



**FIGURE I – Schéma d'un circuit  $R, L, C$  en série**

$$v(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t') dt' \quad (1)$$

Lorsque les circuits sont soumis à des excitations sinusoïdales, l'écriture se simplifie en utilisant la notation complexe et on substitue les relations intégro-différentielles par des relations algébriques. On aboutit alors à la définition d'impédances complexes et de fonctions de transfert dépendantes de la pulsation  $\omega$ .

Pour une inductance par exemple, si le courant est sinusoïdal ( $i(t) = I \cos(\omega t + \Phi)$ ), la relation différentielle entre le courant et la tension devient alors :

$$u(t) = -LI\omega \sin(\omega t + \Phi) = LI\omega \cos(\omega t + \Phi + \pi/2)$$

En notation complexe, l'expression de  $i(t)$  s'écrit :  $\hat{i}(t) = I \exp j(\omega t + \Phi) = \hat{I} \exp j\omega t$  avec  $\hat{I}$  l'amplitude complexe du courant. Pour la tension, on a :  $\hat{u}(t) = LI\omega \exp j(\omega t + \Phi + \pi/2)$  et l'amplitude complexe  $\hat{U}$  est alors :  $\hat{U} = L\omega \hat{I} \exp j\pi/2 = jL\omega \hat{I} = Z\hat{I}$

La grandeur  $Z = jL\omega$  est appelée impédance complexe de l'inductance  $L$  en régime sinusoïdal.

De même pour la capacité  $C$ , on trouvera :  $Z = 1/jC\omega$  et pour le circuit de la Fig. I, on obtient :  $Z = R + j(L\omega - 1/C\omega)$ .

## Annexe 2 - la transformée de Laplace

**Définition :** Soit  $h(t)$  une fonction absolument intégrable sur tout intervalle fini et nulle pour  $t < 0$  :  $h(t) = U(t)f(t)$  où  $U(t)$  est la fonction échelon définie par :

- $U(t) = 1$  pour  $t > 0$
- $U(t) = 0$  pour  $t < 0$

La transformée de Laplace  $F(p)$  de cette fonction (transformée mono-latérale) est définie par :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (2)$$

avec  $p$  variable complexe ( $p = \alpha + j\omega$ )

On écrit  $F(p) = \mathcal{L}[U(t)f(t)]$  ou encore  $F(p) \subset U(t)f(t)$  ou à l'inverse  $U(t)f(t) \supset F(p)$ . La transformée  $F(p)$  s'appelle l'image et  $U(t)f(t)$  l'original. Cette transformée  $F(p)$  n'existe que si l'intégrale a un sens. La convergence absolue de l'intégrale ne dépend, pour une fonction  $f(t)$  donnée, que de  $\alpha$ . Pour plus de détails sur les conditions d'existence de cette intégrale, on se reportera à des ouvrages spécialisés comme par exemple : "Techniques mathématiques pour la physique", G. Auliac, J. Avigant, E. Azoulay collection Ellipses.

### Propriétés de linéarité

La propriété de linéarité résulte de celle de l'intégration. Si  $f(t) \supset F(p)$  et  $g(t) \supset G(p)$  alors, pour tout scalaire  $\lambda$  et  $\mu$ , on a :  $\lambda f(t) + \mu g(t) \supset \lambda F(p) + \mu G(p)$

### Propriétés de translation

-*translation sur t (formule du retard) :*

si  $f(t) \supset F(p)$  alors  $f(t-a) \supset e^{-pa}F(p)$  sachant que  $h(t-a) = f(t-a)U(t-a)$  est nulle pour  $t < a$ .

-*translation sur p :*

si  $F(p) \subset f(t)$  alors  $F(p-a) \subset f(t)e^{-at}$

-*Changement d'échelle :* pour  $a > 0$

si  $f(t) \supset F(p)$  alors  $f(at) \supset F(p/a)$

### Propriétés analytiques

*dérivation et intégration de l'original*  
 (comme précédemment, toutes les fonctions sont supposées nulles pour  $t < 0$ )  
 si  $f(t)$  admet une transformée de Laplace, alors il en est de même de sa dérivée :

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} \supset pF(p) - f(0^+) \quad (3)$$

et si de plus,  $f(t)$  est continue en 0, soit  $f(0^+) = 0$ , alors :

$$f'(t) \supset pF(p) \quad (4)$$

et pour la primitive  $g$  définie sur  $[0, +\infty]$ , nulle en 0

$$g(t) = \int_0^t f(u)du \supset G(p) \quad (5)$$

$$G(p) = \frac{1}{p}F(p) \quad (6)$$

En résumé, les transformées de Laplace de quelques fonctions usuelles sont données sur le tableau de la figure II.

$U(t)f(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1
$U(t)$	$\frac{1}{p}$
$t U(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$U(t)e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}$
$U(t-a)f(t-a)$	$F(p)e^{-ap}$
$U(t) af(at)$	$F(p/a)$
$U(t)f(t)e^{-at}$	$F(p+a)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$

FIGURE II – Transformées de Laplace de quelques fonctions usuelles

### Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

Si les limites existent, on a :

valeur finale :

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \quad (7)$$

valeur initiale :

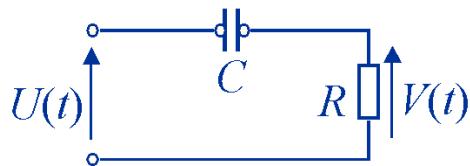
$$\lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \quad (8)$$

### Applications

Les méthodes de résolution de problèmes, en particulier en électricité ou électronique, utilisant la transformation de Laplace constituent le calcul symbolique.

Les signaux nuls pour  $t < 0$  sont appelés signaux causaux. Ils permettent d'étudier le comportement des circuits en régime transitoire ou soumis à une impulsion de Dirac, un échelon de Heaviside,... En utilisant la transformée de Laplace et ses propriétés, les équations intégro-différentielles qui régissent les circuits sont remplacées par des expressions algébriques de la variable  $p$ , ce qui en simplifie considérablement l'étude.

Prenons l'exemple simple d'un circuit RC (voir Fig. III) :



**FIGURE III – Circuit RC**

Ce circuit est régi par l'équation :

$$v(t) = R i(t) + \frac{1}{C} \int i(t') dt' \quad (9)$$

En passant aux transformées de Laplace, l'équation devient :

$$V(p) = RI(p) + \frac{I(p)}{Cp} \Rightarrow I(p) = \frac{V(p)}{R + \frac{1}{Cp}} = \frac{Cp}{1 + RCp} V(p) \quad (10)$$

Et si  $v(t)$  a, par exemple, la forme ci-dessous :

$v(t)$  s'écrit :  $v(t) = E(U(t) - U(t - \tau))$  et sa transformée de Laplace est :

$$V(p) = E\left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-p\tau}}{p}\right) = \frac{E}{p}(1 - e^{-p\tau}) \quad (11)$$



**FIGURE IV – tension d'attaque du circuit  $RC$**

On peut donc calculer le courant dans le circuit correspondant à la tension  $v(t)$  donnée ci-dessus. L'expression du courant dans le formalisme de Laplace est donc :

$$I(p) = \frac{EC}{1 + RCp} (1 - e^{-p\tau}) = \frac{E}{R} \frac{1}{p + \frac{1}{RC}} (1 - e^{-p\tau}) \quad (12)$$

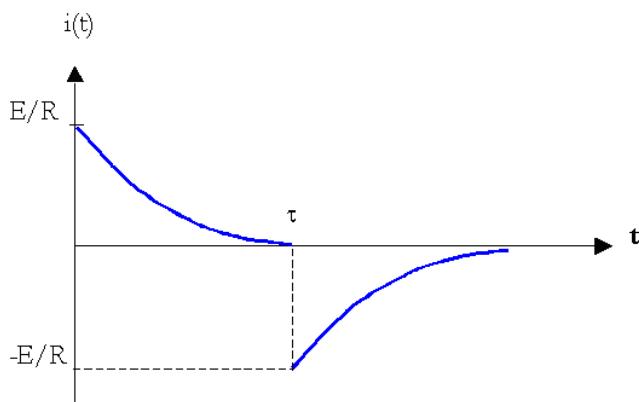
cette expression est de la forme :  $\frac{1}{p+a}(1 - e^{-pt})$  dont l'original s'obtient facilement (voir tableau ci-dessus) :

$$U(t)e^{-t/RC} - U(t - \tau)e^{-(t-\tau)/RC} \quad (13)$$

soit pour le courant  $i(t)$  :

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/RC} U(t) - \frac{E}{R} e^{-(t-\tau)/RC} U(t - \tau) \quad (14)$$

Cette expression fait donc apparaître la réponse classique "exponentielle" d'un circuit  $RC$  soumis à une brusque variation de tension (échelon positif suivi d'un échelon négatif). La représentation de  $i(t)$  est donnée sur la Fig. V (dans le cas où  $\tau \gg RC$ )



**FIGURE V – Réponse d'un circuit  $RC$  à un créneau de tension**

## Annexe 3 - Systèmes linéaires invariants causaux

### Cas général

Un filtre linéaire est dit *causal* si sa réponse percussionnelle  $h(t)$  est à support dans  $[0, +\infty[$ , i.e.  $h(t) = h(t)Y(t)$ , où  $Y(t)$  désigne l'échelon de Heaviside. La fonction de transfert  $H(\nu)$  se calcule alors en prenant la transformée de Fourier de l'expression précédente<sup>26</sup>

$$2H(\nu) = H(\nu) \star \left[ \delta_\nu + \frac{1}{i\pi} \text{VP} \frac{1}{\nu} \right] \quad (15)$$

où "VP" désigne la *valeur principale* au sens de Cauchy (cf cours MTS 101). En posant  $H(\nu) = X(\nu) + iY(\nu)$  (avec  $X$  et  $Y$  réels), on obtient :

$$\begin{aligned} X(\nu) &= Y(\nu) \star \text{VP} \frac{1}{\pi\nu} = \text{VP} \frac{1}{\pi} \int \frac{Y(u)}{\nu - u} du \\ Y(\nu) &= X(\nu) \star -\text{VP} \frac{1}{\pi\nu} = -\text{VP} \frac{1}{\pi} \int \frac{X(u)}{\nu - u} du \end{aligned} \quad (16)$$

Ainsi, les parties réelles et imaginaires de la fonction de transfert d'un système causal ne sont pas indépendantes : elles sont liées par la relation 16, dite transformation de *Hilbert*.

### Illustration : permittivité des milieux diélectriques

Un milieu diélectrique (ou isolant) est dit *parfait* si le vecteur densité de polarisation  $\vec{p}$  suit instantanément les variations du champ électrique appliqué  $\vec{e}$ , à savoir  $\vec{p}(t) = \varepsilon_0 \chi \vec{e}(t)$ , où  $\varepsilon_0$  et  $\chi$  désignent respectivement la permittivité du vide et la susceptibilité du milieu. Dans les milieux réels rencontrés dans la pratique, il existe un retard entre  $p$  et  $e$  (car la cause induit l'effet) que l'on traduit par une relation de filtrage :  $p(t) = \varepsilon_0 h(t) \star e(t)$ . Cette relation traduit le "temps de réponse" de la matière, à l'image du temps de montée d'un filtre électrique. On dit encore que le milieu est *dispersif*. Si on se place dans le domaine fréquentiel, on a bien sûr  $P(\nu) = \varepsilon_0 H(\nu) E(\nu)$ , avec  $H(\nu) = [\mathcal{F}\chi](\nu)$ . Ainsi, pour un champ monochromatique en milieu réel, on a le comportement d'un milieu parfait (ou non-dispersif).

Or, La réponse de la matière  $h(t)$  étant causale, on peut appliquer les relations 16. On obtient alors les relations de *Kramers-Krönig* :

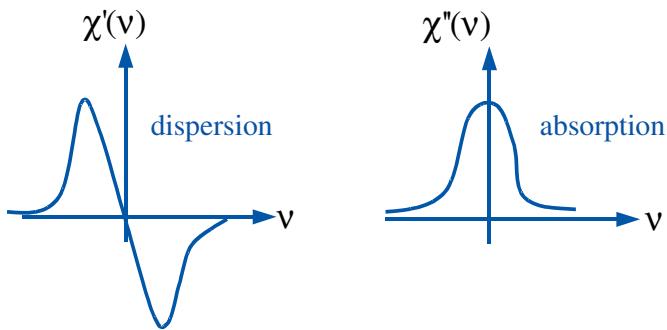
$$\begin{aligned} \chi'(\nu) &= \frac{1}{\pi} \text{VP} \int \frac{\chi''(\nu')}{\nu - \nu'} d\nu' \\ \chi''(\nu) &= \frac{1}{\pi} \text{VP} \int \frac{\chi'(\nu')}{\nu - \nu'} d\nu' \end{aligned} \quad (17)$$

---

26. Toujours au sens des distributions, car sinon le signal échelon  $Y$  n'a pas de TF.

où l'on a posé  $\hat{\chi}(\nu) = \chi'(\nu) - i\chi''(\nu)$ .

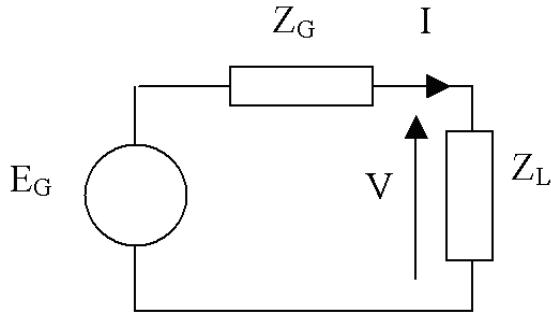
Les expressions précédentes expriment une dépendance entre les deux phénomènes de base au sein du matériau que sont la *dispersion* et l'*absorption*. La dispersion est représentée par  $\chi'(\nu)$  (et par l'*indice* du matériau, défini par  $n^2(\nu) = \varepsilon_r(\nu) = 1 + \chi'(\nu)$ ), tandis que  $\chi''(\nu)$  traduit l'absorption par le matériau. La figure VI donne l'allure des courbes correspondantes (autour d'une fréquence donnée  $\nu_0$ ) pour un matériau tel que la silice.



**FIGURE VI – Allures des courbes de dispersion et d'absorption dans un matériau diélectrique**

## Annexe 4 - Calcul de la puissance fournie à une charge

On considère le schéma ci-dessous :



**FIGURE VII – Générateur connecté à une charge**

En régime sinusoïdal, on a :  $Z_G = R_G + jX_G$  et  $Z_L = R_L + jX_L$

La définition de la puissance fournie par le générateur à la charge  $Z_L$  en utilisant des grandeurs complexes donne :  $P_G = \frac{1}{2}\Re(VI^*)$

Comme  $V = Z_L I$ , on a :  $P_L = \frac{1}{2}\Re(Z_L I_1 I_1^*) = \frac{1}{2}|I_1|^2 \Re(Z_L)$   
ou encore :

$$P_L = \frac{R_L}{2} \left| \frac{E_G}{(R_G + R_L)^2 + (X_G + X_L)^2} \right|^2 \quad (18)$$

soit

$$P_L = \frac{1}{2} \left( \frac{|E_G|^2}{4R_G + \frac{(R_G - R_L)^2}{R_L} + \frac{(X_G - X_L)^2}{X_L}} \right) \quad (19)$$

La puissance active dans la charge est maximale lorsque la charge est adaptée. L'expression de  $P_L$  ci-dessus montre que la puissance est maximale quand :  $R_G = R_L$  et  $X_G = -X_L$ , c'est-à-dire quand  $Z_G = Z_L^*$ . La puissance maximale ou puissance disponible est alors :

$$P_{Lmax} = \frac{|E_G|^2}{8R_G} \quad (20)$$

et comme  $E_G = Z_G I + V$  alors :

$$P_{Lmax} = \frac{1}{2} \frac{|V + Z_G I|^2}{4R_G} = \frac{1}{2} \frac{(V + Z_G I)(V + Z_G I)^*}{4R_G} \quad (21)$$

Si la charge est désadaptée, c'est-à-dire  $Z_G \neq Z_L^*$ , on peut exprimer la puissance  $P_L$  dans la charge comme la différence entre la puissance maximale (que recevrait une charge adaptée) et la puissance non absorbée du fait de la désadaptation. On écrit donc :  $P_L = P_{Lmax} - P_r$  et on calcule :  $P_r = P_{Lmax} - P_L$

$$P_r = \frac{1}{2} \left[ \frac{(V + Z_G I)(V + Z_G I)^*}{4R_G} - \Re(VI^*) \right] \quad (22)$$

or  $\Re(VI^*) = (VI^* + V^*I)/2$  et  $Z_G + Z_G^* = 2R_G$  donc :

$$P_r = \frac{1}{2} \left[ \frac{(V + Z_G I)(V + Z_G I)^*}{4R_G} - \frac{(Z_G + Z_G^*)(VI^* + V^*I)}{4R_G} \right] \quad (23)$$

$$P_r = \frac{1}{2} \frac{(V - Z_G^* I)(V - Z_G^* I)^*}{4R_G} = \frac{1}{2} \frac{|V - Z_G^* I|^2}{4R_G} \quad (24)$$

L'expression générale de la puissance active  $P_L$  absorbée par une charge quelconque est donc :

$$P_L = \frac{1}{2} \left[ \frac{(V + Z_G I)(V + Z_G I)^*}{4R_G} - \frac{(V - Z_G^* I)(V - Z_G^* I)^*}{4R_G} \right] \quad (25)$$

On peut encore écrire cette puissance à l'aide du formalisme des ondes tensions-courants introduit au paragraphe 4.2.2 (équation 4.7) :

$$a = \frac{v + i}{2} = \frac{V + Z_0 I}{2\sqrt{Z_0}} \quad b = \frac{v - i}{2} = \frac{V - Z_0 I}{2\sqrt{Z_0}} \quad (26)$$

où  $Z_0$  est réelle. Dans le cas plus général, si  $Z_0$  est complexe (égale à  $Z_G$  ici), les ondes  $a$  et  $b$  s'écrivent :

$$a = \frac{V + Z_0 I}{2\sqrt{\Re(Z_0)}} \quad b = \frac{V - Z_0^* I}{2\sqrt{\Re(Z_0)}} \quad (27)$$

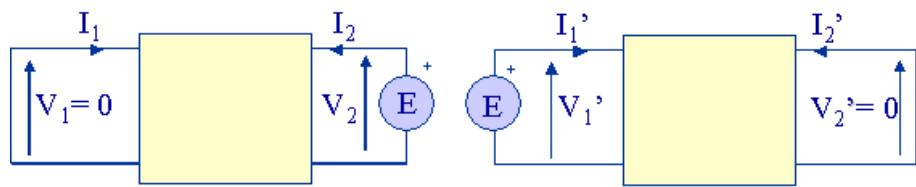
L'expression de la puissance  $P_L$  s'écrit donc :

$$P_L = \frac{1}{2}(|a|^2 - |b|^2) \quad (28)$$

on retrouve bien le résultat annoncé au paragraphe 4.2.2 (équation 4.7).

## Annexe 5 - Application du théorème de réciprocité

Pour un quadripôle passif (donc sans sources de tensions ni de courants dépendantes ou indépendantes), le théorème de réciprocité permet d'obtenir une relation entre les 4 paramètres pour chaque matrice, cette relation s'exprimant différemment selon la matrice utilisée. Ce théorème est énoncé au paragraphe 4.2.4 et est rappelé sur la figure ci-dessous :



**Théorème de réciprocité :  $I_1 = I_2'$**

**FIGURE VIII – Illustration du théorème de réciprocité pour un quadripôle**

\* Prenons par exemple la matrice  $ABCD$  pour obtenir la relation supplémentaire. On a la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$$

avec, d'une part, les conditions du schéma de gauche :  $V_1 = 0$ ,  $V_2 = E$

et d'autre part, celle du schéma de droite :  $V'_1 = E$ ,  $V'_2 = 0$

on obtient :

$$I_1 = -\frac{AD - BC}{B}E \quad (29)$$

et

$$I'_2 = -\frac{1}{B}E \quad (30)$$

Or d'après le théorème de réciprocité,  $I_1 = I'_2$ , donc :  $AD - BC = 1$

\* Prenons la matrice  $Z$  :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

avec, d'une part, les conditions du schéma de gauche :  $V_1 = 0, V_2 = E$

et d'autre part, celle du schéma de droite :  $V'_1 = E, V'_2 = 0$

on obtient :

$$I_1 = -\frac{Z_{12}}{\Delta z} E \quad (31)$$

où  $\Delta_z$  est le déterminant de la matrice  $Z$

et

$$I'_2 = -\frac{Z_{21}}{\Delta z} E \quad (32)$$

et d'après le théorème de réciprocité,  $I_1 = I'_2$ , donc :  $Z_{12} = Z_{21}$

Des démonstrations semblables conduisent aux relations suivantes pour les matrices  $Y, S$  et  $H$  :

$$Y_{12} = Y_{21}$$

$$S_{12} = S_{21}$$

$$h_{12} = -h_{21}$$

**NB :** pour la matrice  $S$ , il suffit de prendre les termes de la matrice exprimés à partir des paramètres  $z_{ij}$  (voir annexe A2) et la relation  $S_{12} = S_{21}$  est immédiate !

## Annexe 6 - Calcul de la puissance disponible d'un générateur

### Démonstration

Rappel : la définition de la puissance fournie par le générateur à la "charge"  $Z_{in}$  en utilisant des grandeurs complexes donne :

$$P_G = \frac{1}{2} \Re(V_1 I_1^*) \quad (33)$$

comme  $V_1 = Z_{in} I_1$ , on a :  $P_G = \frac{1}{2} \Re(Z_{in} I_1 I_1^*) = \frac{1}{2} |I_1|^2 \Re(Z_{in})$   
ou encore :  $P_G = \frac{1}{2} \Re\left(V_1 \frac{V_1^*}{Z_{in}^*}\right) = \frac{1}{2} |V_1|^2 \Re(Y_{in})$  en posant  $Y_{in} = 1/Z_{in}$  et  
 $\Re(Y_{in}) = \Re(Y_{in}^*)$   
or  $V_1 = \frac{Z_{in}}{Z_S + Z_{in}} E_S$  et si  $Z_S = Z_{in}^*$  alors  $V_1 = \frac{Z_S^*}{2\Re(Z_S)} E_S$   
d'où la puissance maximale du générateur :

$$P_{Gmax} = \frac{1}{2} |E_S|^2 \left| \frac{Z_S^*}{2\Re(Z_S)} \right|^2 \Re\left(\frac{1}{Z_S^*}\right) \quad (34)$$

et en simplifiant, il vient (CQFD) :

$$P_{Gmax} = \frac{1}{2} |E_S|^2 \left| \frac{Z_S^*}{2\Re(Z_S)} \right|^2 \Re\left(\frac{Z_S}{|Z_S|^2}\right) = \frac{1}{8} \frac{|E_S|^2}{\Re(Z_S)} \quad (35)$$

## Bibliographie

Quelques ouvrages –disponibles à la bibliothèque de l'IMT Atlantique, campus de Brest– pour approfondir le vaste sujet :

1. J. Max, "Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques", Masson et Cie, (**7.21 MAX**)
2. J. P. Mathieu, "Vibrations et Phénomènes de propagation - Tome 2 : Ondes", Masson et Cie, (**3.074 MATH**)
3. P. Fraisse et al, "Transmission de l'information", Ellipses, (**7.2 FRAI**)
4. G. Asch, "Les capteurs en instrumentation industrielle", Dunod, (**6.34 ASCH**)
5. R. Escarpit, "L'information et la communication", Hachette Supérieur, (**7.1 ESCA**)
6. J. L. Amat et al, "Techniques avancées pour le traitement de l'information", Cépaduès ed., (**7.1 AMAT**)
7. P. Clerc et al, "Principes fondamentaux des Télécoms", Ellipses, (**7.1 CLER**)
8. P. Lecoy, "Technologies des Télécoms", Hermès, (**8.01 LECO**)
9. B. Fracasso et A. Peden, "Physique des communications", Ellipses, (**7.2 FRAC**)







Bretagne-Pays de la Loire  
École Mines-Télécom