

TAF ISC – TAF OPE

UE Cœur 1

Course

Some noise phenomena in physics

Bruno Fracasso

Département Optique

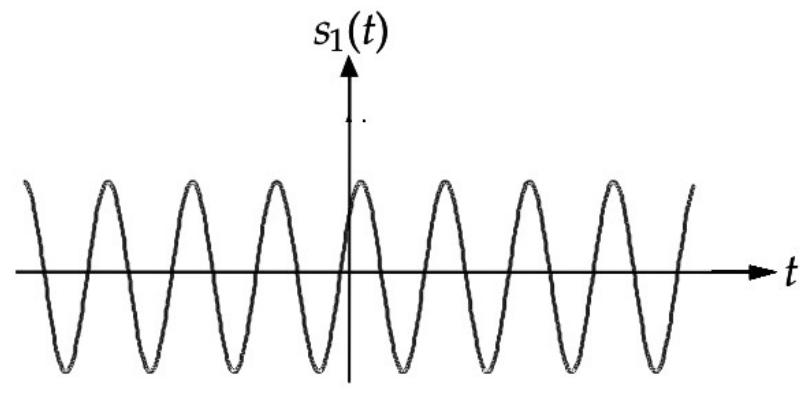
Outline

- Physical noise: first approach and examples
- Notion of random signal, variance, covariance
- Second-order stationary random signal
- White Gaussian noise
- Examples of physical noise
- Case of thermal noise

The noise : first approach...

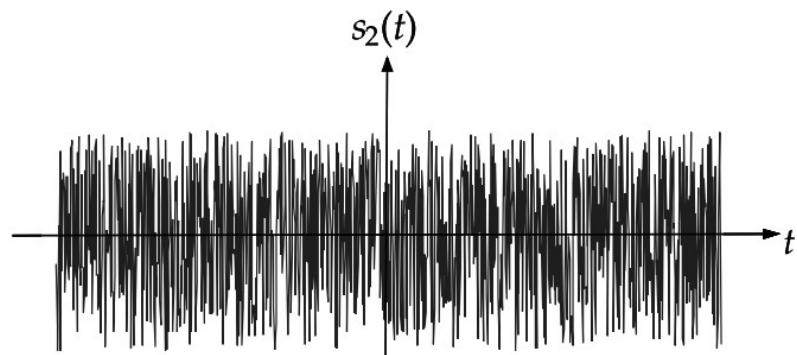
■ Signal déterministe

- ▶ Fonction mathématique $s(t)$
- ▶ Valeurs connues à l'avance !
- ▶ Quantité d'information : nulle
- ▶ Ne permet pas de prendre en compte la réalité physique



■ Signal aléatoire

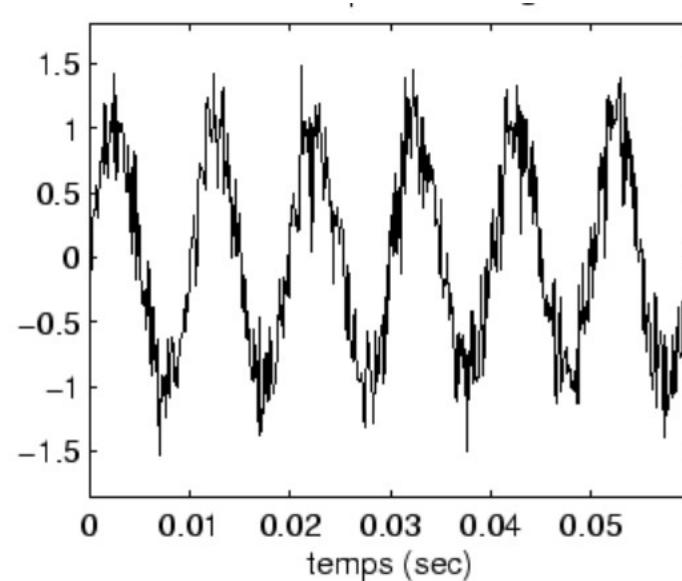
- ▶ Pas totalement connu à l'avance
- ▶ Permet de traduire la réalité physique
- ▶ Comment décrire un tel objet ?



Real noisy situation

■ Observation = signal physique « bruité »

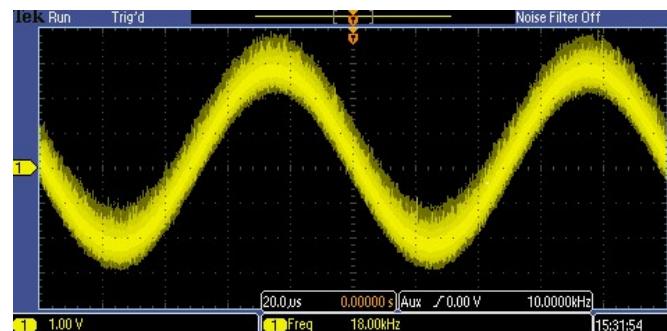
- ▶ Bruit additif : $x(t) = s(t) + b(t)$
- ▶ Valeur moyenne du bruit : $\langle b \rangle = E[b(t)]$
- ▶ Le plus souvent, $\langle b \rangle$ n'est pas un phénomène aléatoire, et le « véritable bruit » correspond aux fluctuations $\delta b = b - \langle b \rangle$
- ▶ Notion de signal aléatoire (bruit) stationnaire
- ▶ Questions :
 - *Quelle est la puissance moyenne du bruit ?*
 - *Comment mesurer le degré de « pollution » du signal par le bruit ?*



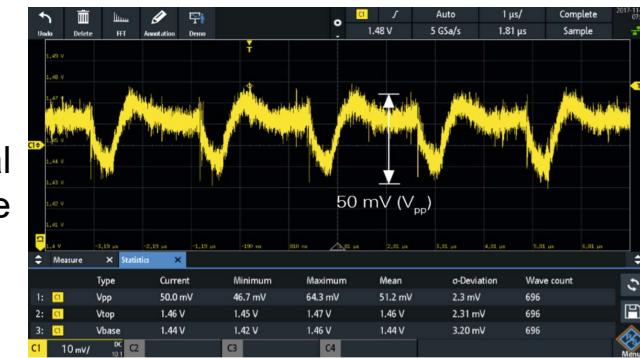
Examples of physical noise (1/2)

■ Source physique déterministe « entachée » de bruit

Signal analogique

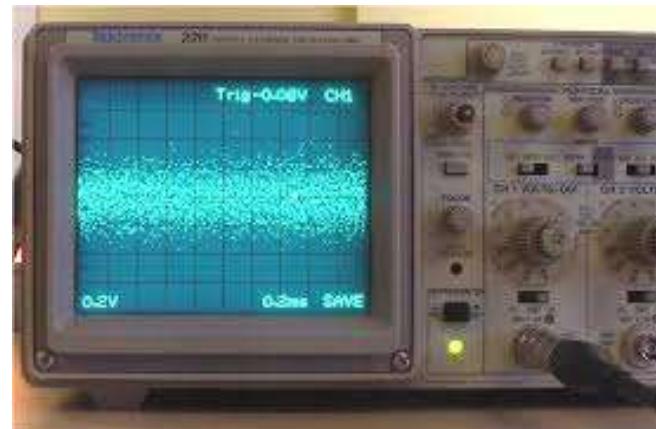


Signal numérique

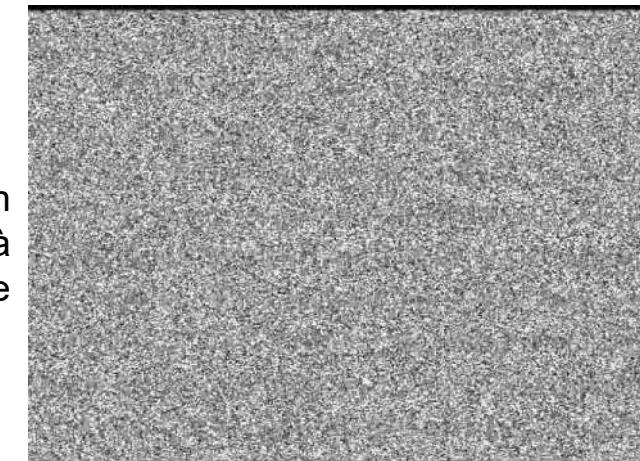


■ Bruit « pur »

Tension de bruit thermique aux bornes d'une résistance électrique



« Neige » sur l'écran des téléviseurs à tube cathodique

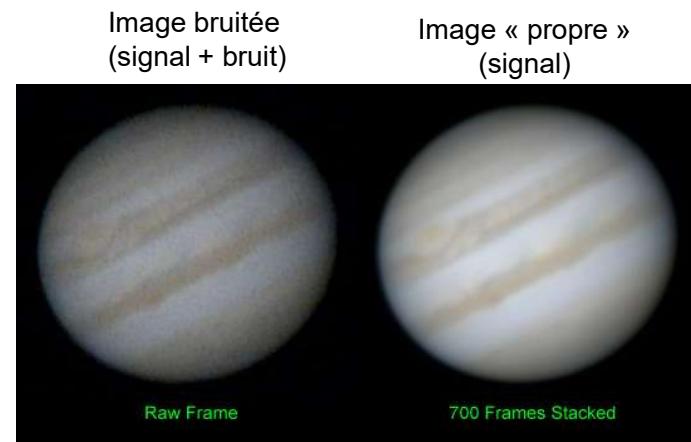


Examples of physical noise (2/2)

Perturbations à caractère aléatoire



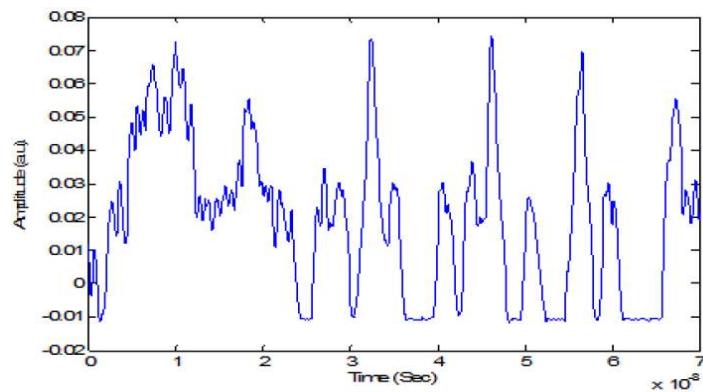
images
astronomiques et
bruit atmosphérique



Interférences avec le signal utile

- ▶ Trajets multiples en transmission sans-fil
- ▶ « Ronflement 50 Hz » dans un équipement électronique (e. g. amplificateur audio)
- ▶ Diaphonie en télécommunications (téléphonie fixe)

Trajet multiples :
signal détecté avec
une modulation
binaire d'amplitude
(NRZ)



Sources of physical noise

■ Internes à un système : création d'un bruit propre indépendant de l'extérieur

- ▶ Perturbations impulsionales (circuits électroniques)
- ▶ Bruit de fond électronique (statistique de la conduction)



■ Externes à un système et agissant sur celui-ci par influence



Champ magnétique crée par les lignes à haute tension



Bruit de fond cosmique

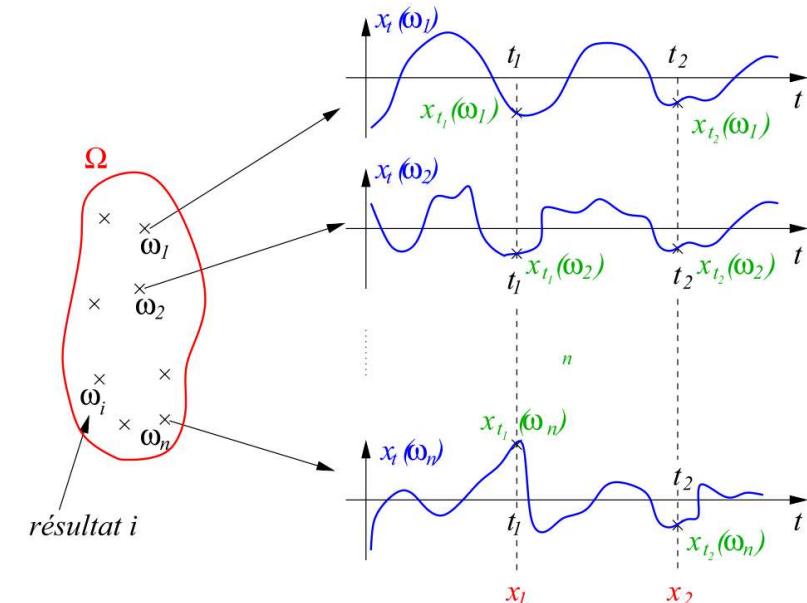


Variation de température sur les fibres optiques

Mathematical formalism: the random signal

- Contexte rigoureux : présenté en UE cœur 2 de la TAF ISC
- Processus aléatoire : notion introduite par Kolmogorov en 1933

- ▶ Un **signal aléatoire** (scalaire ou vectoriel) est une famille de variables ou vecteurs aléatoires indexés par un ensemble de paramètres $t \in T$ (le temps)
- ▶ **Notation** : $\{x_t(\omega) \mid t \in T\}$ T ensemble discret ou continu
- ▶ $x_t(\omega)$ est une fonction de deux paramètres : le temps t et ω paramètre aléatoire lié au résultat d'une **expérience aléatoire**
 - Pour chaque t , $x_t(\dots)$ est une **variable aléatoire** égale à l'état du processus considéré à l'instant t
 - Pour ω fixé, $x_{\dots}(\omega)$ est une **réalisation** du processus qui est une fonction du temps
 - Pour t et ω fixés, $x_t(\omega)$ est un **nombre**
 - On notera $x_t(\omega) = x(t, \omega)$

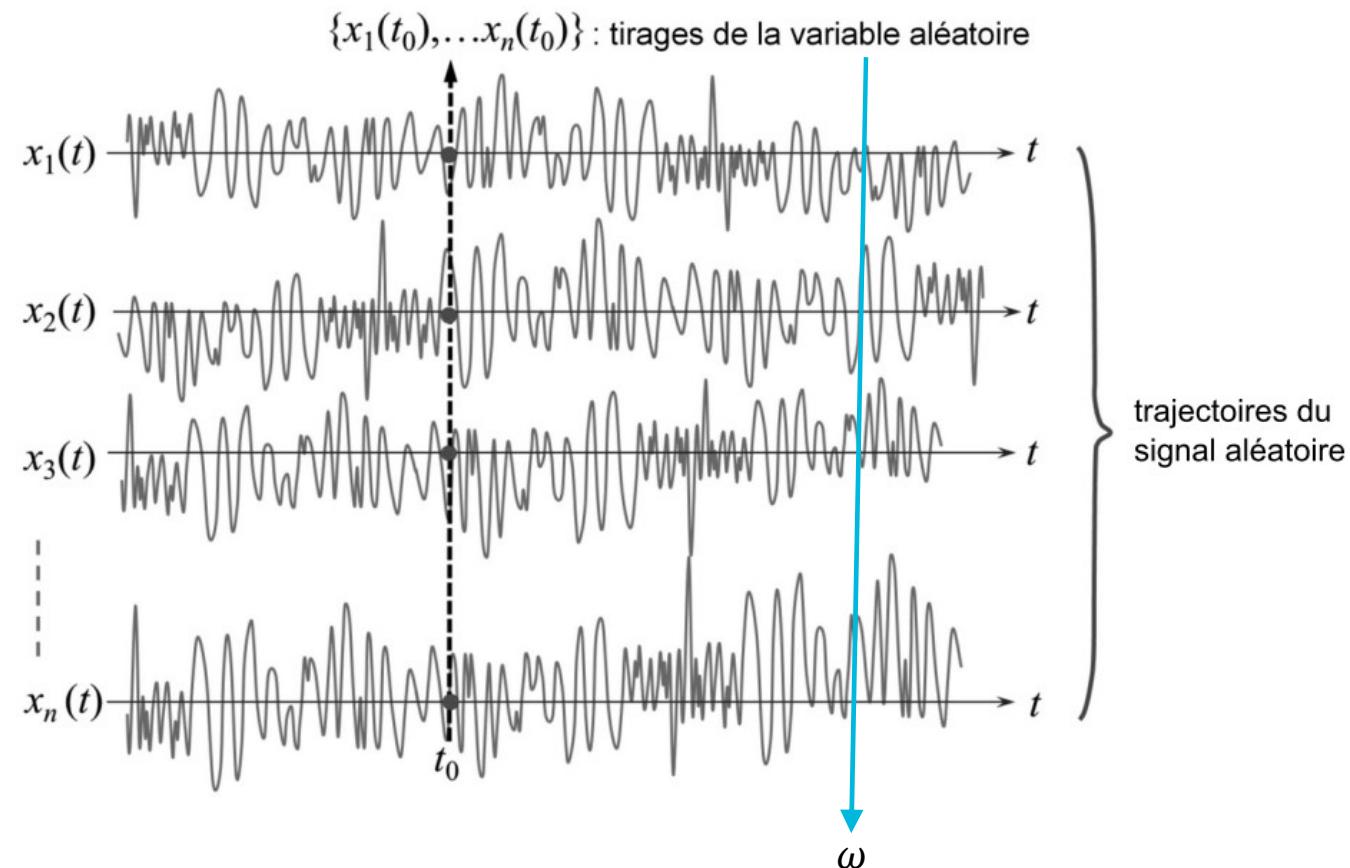


Realizations (or trajectories) of a random signal

→ La forme du signal aléatoire $x(t, \omega)$ dépend de la réalisation ω (trajectoire)

Exemple 1 : tension de bruit thermique aux bornes d'une résistance : $V(t_0, \omega)$

Exemple 2 : éclairement lumineux enregistré par une camera video : $I(t, x, y, \omega)$



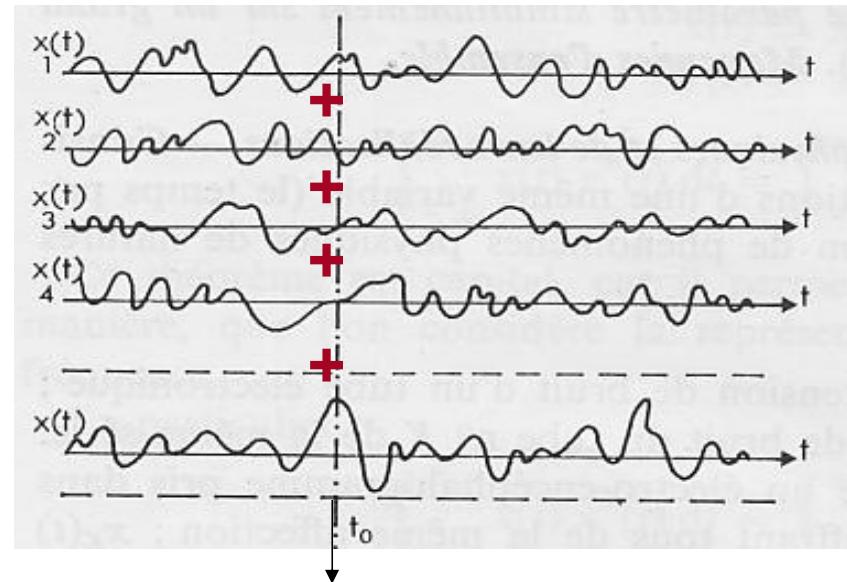
Average value of a random signal

- On observe les trajectoires du signal aléatoire $x(t, \omega)$
- Valeur moyenne de x (hypothèse : grand nombre de réalisations)

$$\mathbb{E}[X(t_0)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_0)$$

Paramètre d'ordre 1

- ▶ Moyenne **d'ensemble** : calculée à un instant donné t_0
- ▶ Moyenne **temporelle** : calculée sur une réalisation x_i



$$\bar{X}(t_0) = E[X(t_0)] \text{ (notation)}$$

Paramètres statistiques de la variable aléatoire $X(t_0)$

Moyenne $\mathbb{E}[X(t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{t_0}(x) dx$

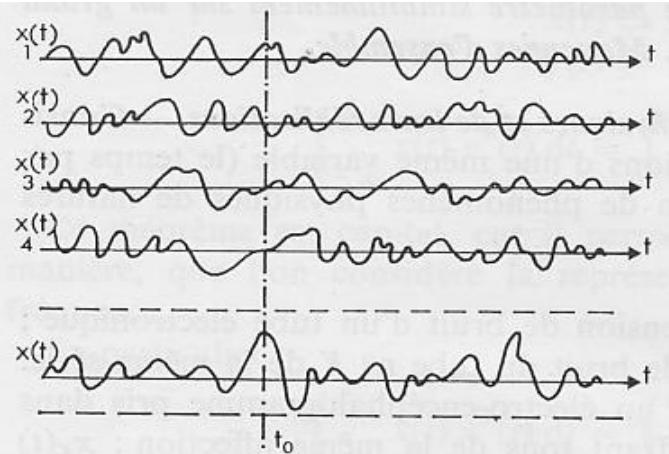
Variance $\sigma_X^2(t_0) = \mathbb{E}[X^2(t_0)] - (\mathbb{E}[X(t_0)])^2$

Variance and co-variance of a random signal

■ Variance d'un signal aléatoire (ordre 1)

$$\begin{aligned}\sigma_x^2(t_0) &= E[(x(t_0) - \bar{x}(t_0))^2] \\ &= E[x(t_0)^2] - \bar{x}(t_0)^2\end{aligned}$$

► Dépend de l'instant considéré

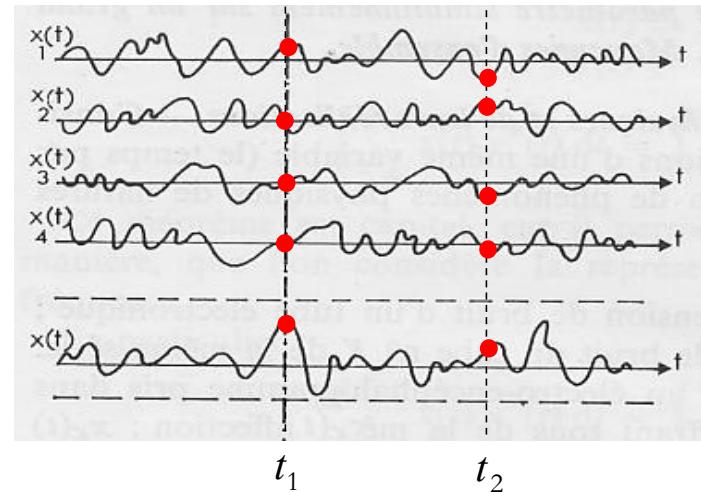


■ Fonction de covariance (ordre 2)

$$\Gamma_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] - \bar{x}(t_1)\bar{x}(t_2)$$

→ $\sigma_x^2(t) = \Gamma_x(t)$

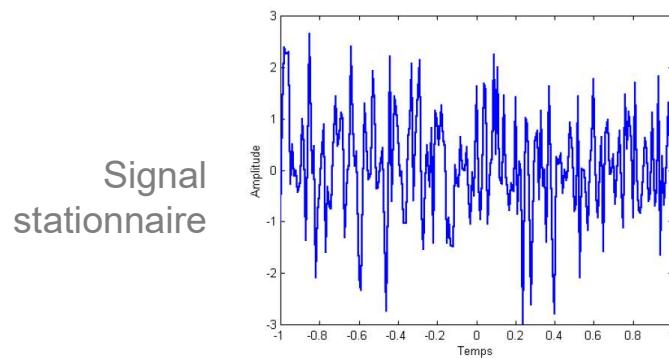
■ Notation (simplifiée) : $x(t, \omega) = x(t)$



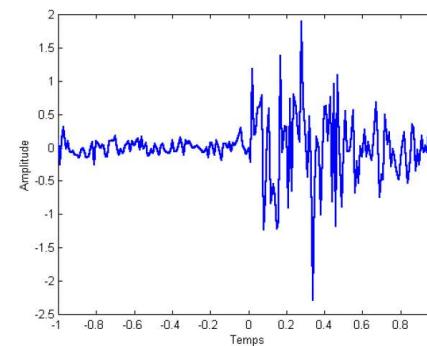
Stationary random signal (1/2)

■ Stationnarité (sera revu en UE cœur B)

- On étudiera essentiellement des processus dits "stationnaires", dont les propriétés statistiques ne dépendent pas du temps (stabilité de la structure des phénomènes générateurs, sources, dégradations...)



Signal non-stationnaire



- Stationnarité au second ordre : si le signal aléatoire vérifie les deux propriétés :

$$1) \bar{x}(t) = m = \text{cste}$$

$$2) \Gamma_x(t_1, t_2) = \Gamma_x(t_1 - t_2)$$

$$\Gamma_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] - \bar{x}(t_1)\bar{x}(t_2)$$

- Stationnarité au sens strict : densité de probabilité et moments ne dépendent pas du temps (propriété plus «forte» qu'au second ordre).

Stationary random signal (2/2)

Fonction de corrélation

- Pour un signal **stationnaire** et de moyenne nulle, on définit la **fonction de corrélation** par

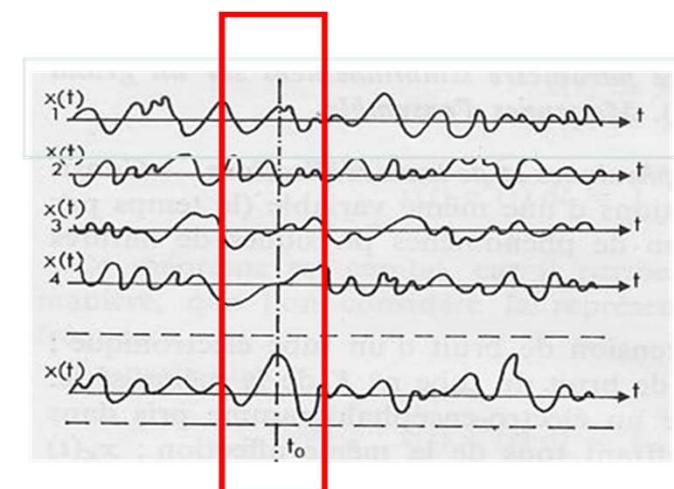
$$\begin{aligned}\Gamma_x(\tau) &= E[x(t)x(t + \tau)] \\ &= E[x(0)x(\tau)]\end{aligned}$$

$$\Gamma_x(t_1, t_2) = \Gamma_x(t_1 - t_2)$$

- Intérêt** : description d'un signal aléatoire (« imprévisible ») par une fonction **déterministe** (ou « **certaine** »)
- Propriétés** : la fonction de corrélation est réelle et paire

Signal stationnaire « ergodique »

- La moyenne **d'ensemble** est égale à la moyenne **temporelle**
- Permet d'estimer la moyenne d'ensemble sur un nombre restreint d' « observations »



Power of a stationary random signal (1/2)

■ Puissance aléatoire instantanée

- ▶ Rappel : puissance instantanée = densité temporelle d'énergie
- ▶ Définition : $P(t, \omega) = |x(t, \omega)|^2$ **pour une réalisation ω**
- ▶ Ne présente que peu d'intérêt, car c'est une **grandeur aléatoire**

■ Densité spectrale de puissance moyenne (DSPM)

- ▶ **Définition** : $\gamma_x(\nu)$ est la valeur de la puissance moyenne du signal contenue dans l'intervalle $[\nu, \nu + d\nu]$
- ▶ Unité de $\gamma_x(\nu)$: le Watt/Hertz (W/Hz)

■ Théorème de Wiener-Khintchine : la DSPM est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation, i.e.

$$\Gamma_x(\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} \gamma_x(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_x(\tau) e^{-2j\pi\nu\tau} d\tau$$

On admet ce résultat !

Power of a stationary random signal (2/2)

- La puissance moyenne d'un signal aléatoire stationnaire de moyenne nulle est donnée par :

Définition $P_{\text{moy}} = \int_{\mathbb{R}} \gamma_x(\nu) d\nu$

Transformée de Fourier inverse $\Gamma_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} \gamma_x(\nu) e^{+2j\pi\nu\tau} d\nu, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$ **(Fonction de corrélation)**

Puissance moyenne $P_{\text{moy}} = \Gamma_x(0) = \mathbb{E}[x^2(t)] = \sigma_x^2$ **(valeur moyenne nulle)**

- Important : la puissance moyenne d'un signal aléatoire **stationnaire et centré** est égale à sa variance

- Signal aléatoire $y(t)$ non centré : on applique ce qui précède pour le signal δy de « variations » de y , qui est un signal aléatoire centré :

$$\delta y(t) = y(t) - \mathbb{E}[y(t)]$$

White and Gaussian noise

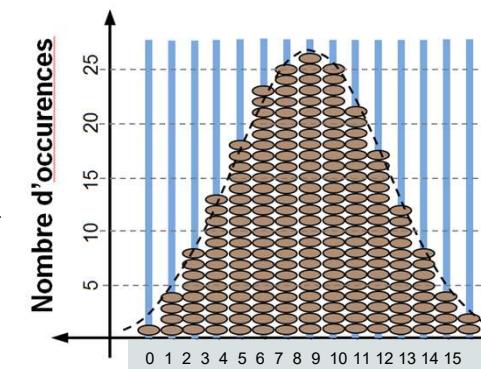
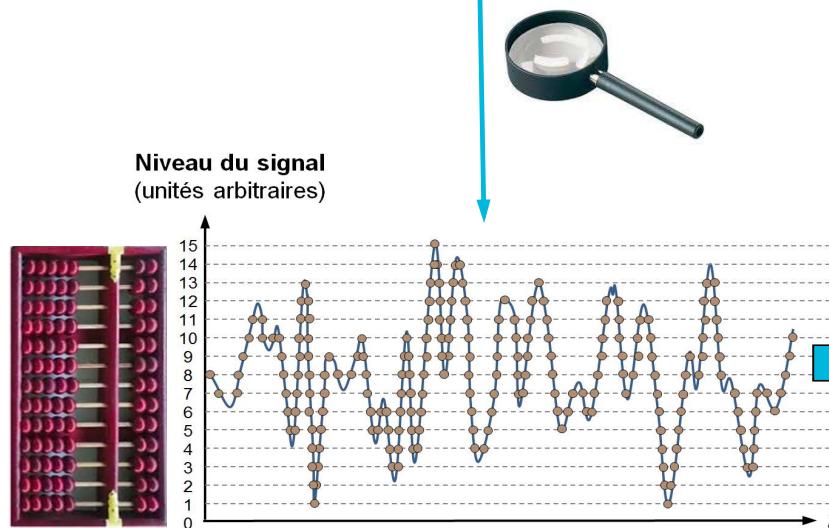
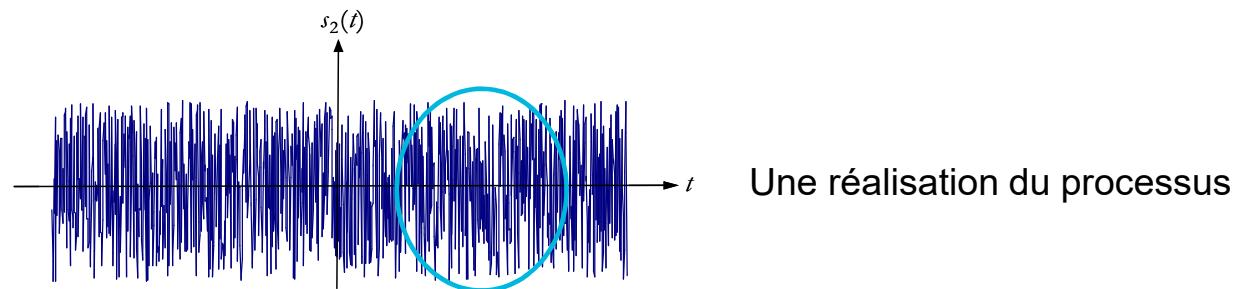
- Un bruit (signal aléatoire) est dit blanc si sa densité spectrale de puissance est constante sur une bande de fréquences « très large »
 - ▶ On a donc, en théorie : $\gamma(\nu) = \gamma_0 \rightarrow \Gamma_x(\tau) = \gamma_0 \delta(\tau)$
 - ▶ En pratique, un bruit observé n'est jamais blanc, car il est mesuré par un capteur dont la bande-passante est limitée (on parlera alors de bruit « rose »).
- Les bruits blancs observés dans la nature ont le plus souvent des statistiques gaussiennes

- ▶ La densité de probabilité des réalisations du processus $x(t)$ vérifie, à chaque instant t , une loi normale $G(x, \mu, \sigma)$ de moyenne μ et de variance σ^2 :

$$G(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

- ▶ En pratique, on choisira $\mu = 0$ en considérant les variations $\delta x = x - E[x(t)]$

White and Gaussian noise: illustration



[Video : Galton board](#)

Signal-to-noise ratio

- Définition : le rapport signal-sur-bruit mesure le degré de « pollution » du signal par le bruit

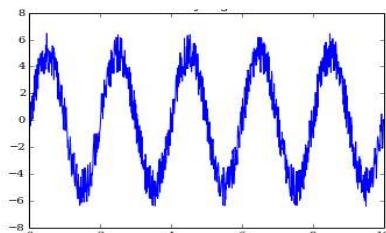
$$\xi_{\text{dB}} = \left(\frac{S}{B} \right)_{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{\bar{P}_{\text{signal}}}{\bar{P}_{\text{bruit}}} \right)$$

$$\bar{P}_{\text{bruit}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_x(\nu) d\nu = \Gamma_x(0) = \sigma^2$$

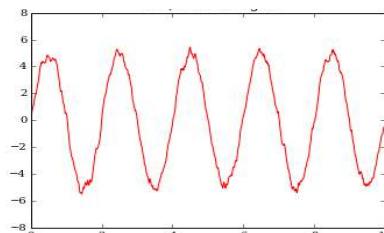
- Exemple : signal sinusoïdal bruité

$$s(t) = a_0 \cos(\omega t) + b(t)$$

$$\xi_{\text{dB}} = 20 \log \left(\frac{a_0}{\sigma \sqrt{2}} \right)$$



$\xi = 6 \text{ dB}$



$\xi = 23 \text{ dB}$

Téléphonie mobile : $\xi = 10 \text{ dB}$

Téléphonie fixe : S/N = 40 dB

Hifi audio : S/N = 80 dB

■ Bruit thermique électronique

- ▶ Crée par l'agitation des électrons libres 'dans un conducteur à température ambiante, indépendamment de toute tension appliquée'
- ▶ **Autres appellations** : bruit thermique, ou bruit de résistance, ou bruit Johnson (1927)

■ Bruit quantique

- ▶ Bruit de fond qui peut être modélisé par un processus de Poisson d'arrivées de flots de particules
- ▶ En **électronique** : le courant électrique n'est pas continu mais constitué de porteurs de charge élémentaires (en général des électrons)
- ▶ En **optique** : un flux lumineux est constitué d'un ensemble de photons.
- ▶ **Autres appellations** : bruit de grenaille (shot noise), bruit de Schottky (1915)

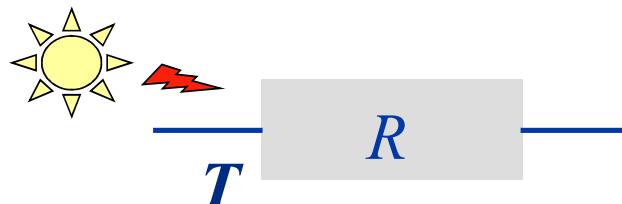
■ Autres bruits

- ▶ Bruit en 1/f en électronique
- ▶ Bruit cosmique en astronomie
- ▶ Bruit d'émission spontanée amplifiée en communications optiques

Thermal noise in a conductor (1/3)

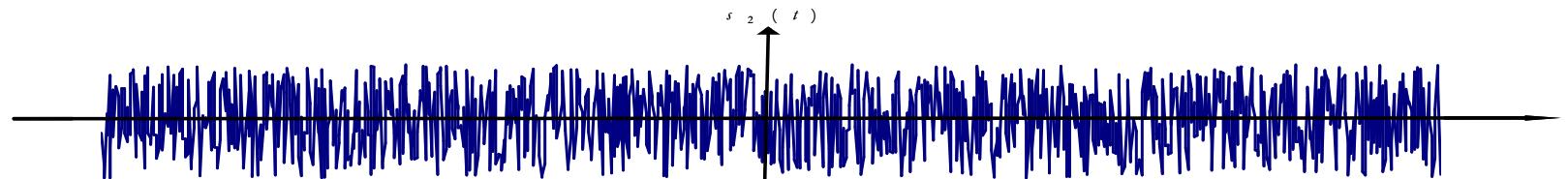
■ Conducteur électrique résistif à la température d'équilibre T

- ▶ Déplacement aléatoire des électrons (agitation thermique)
- ▶ Chocs sur le réseau solide d'ions positifs du milieu



Constante de Boltzmann
 $k = 1,38 \cdot 10^{-2} \text{ } JK^{-1}$

- ▶ Energie cinétique moyenne d'un électron (par dimension) :
$$E = \frac{1}{2}m <v^2> = \frac{1}{2}kT$$
- ▶ A température ambiante ($T=290 \text{ K}$) : $kT = 4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$
- ▶ Remarque : [J] = W/Hz, kT est donc une densité spectrale de puissance moyenne (DSPM)



Thermal noise in a conductor (2/3)

Processus de bruit thermique

- ▶ Un micro-courant d'intensité aléatoire $i(t)$ (**bruit**) est créé dans le conducteur, et par conséquent une micro-tension $u(t)$ est générée aux bornes du dipôle résistif, en l'absence de toute tension extérieure appliquée.



- ▶ Le bruit thermique est un bruit **blanc additif, gaussien (AGWN)** et de **moyenne nulle**
 - ▶ La densité spectrale de puissance de **courant moyen de bruit** est :
- $$\gamma_i(\nu) = \frac{4kT}{R}$$
en A²/Hz
- ▶ La densité spectrale de puissance de **tension moyenne de bruit** est :
- $$\gamma_u(\nu) = 4kTR$$
en V²/Hz

Thermal noise in a conductor (3/3)

■ Puissance moyenne totale de tension de bruit thermique aux bornes de la résistance

$$P_U = \int_0^{\Delta\nu} \gamma_U(\nu) d\nu = 4kTR\Delta\nu \rightarrow \sigma_U^2 = 4kTR\Delta\nu \quad (\text{en V}^2)$$

relation de Nyquist

$\Delta\nu$: bande-passante du détecteur

Température ambiante ($T = 290$ K) : $kT = 4 \times 10^{-21}$ W/Hz

■ Puissance moyenne totale de courant de bruit thermique aux bornes de la résistance

$$P_I = \sigma_I^2 = \frac{4kT\Delta\nu}{R} \quad (\text{relation de Nyquist})$$

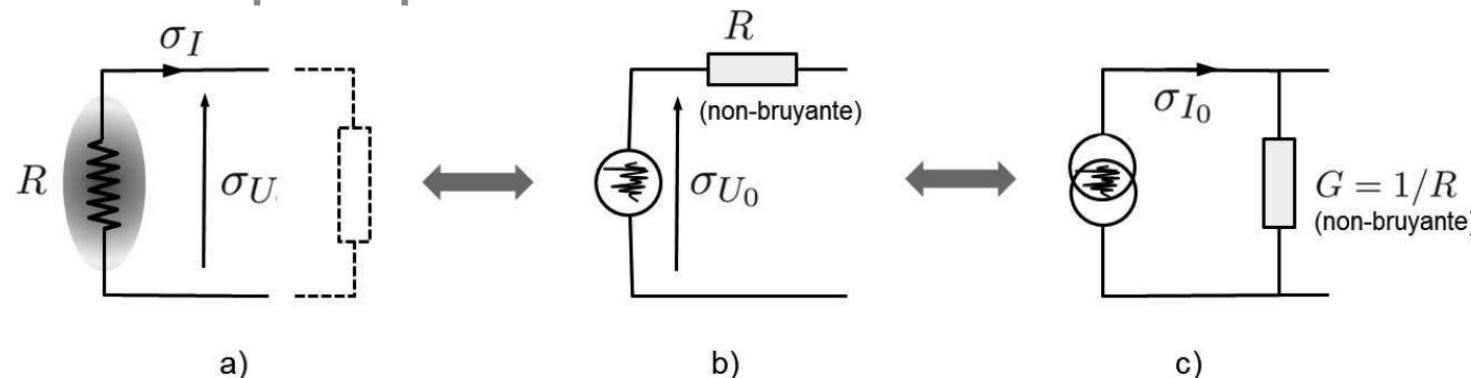
■ Exemple

- On considère une résistance $R = 1$ MΩ à la température $T = 300$ K et l'on mesure le bruit avec un micro-voltmètre de bande-passante $\Delta\nu = 100$ MHz

$$P_U = \sigma_U^2 = 1,7 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2 \quad U_{\text{eff}} = \sqrt{\sigma_U^2} = 41 \text{ } \mu\text{V.} \quad \text{Tension efficace de bruit}$$

Modelling a noisy resistor

Schémas électriques équivalents



- a) Schéma de la résistance « bruyante » R à la température T
- b) modèle équivalent de **Thévenin** : résistance non-bruyante en série avec un générateur de tension de bruit, de valeur efficace (à vide) :

$$u_{\text{eff}} = \sigma_{U_0} = 2\sqrt{kTR\Delta\nu} \quad \text{Unité : } V/\sqrt{\text{Hz}}$$

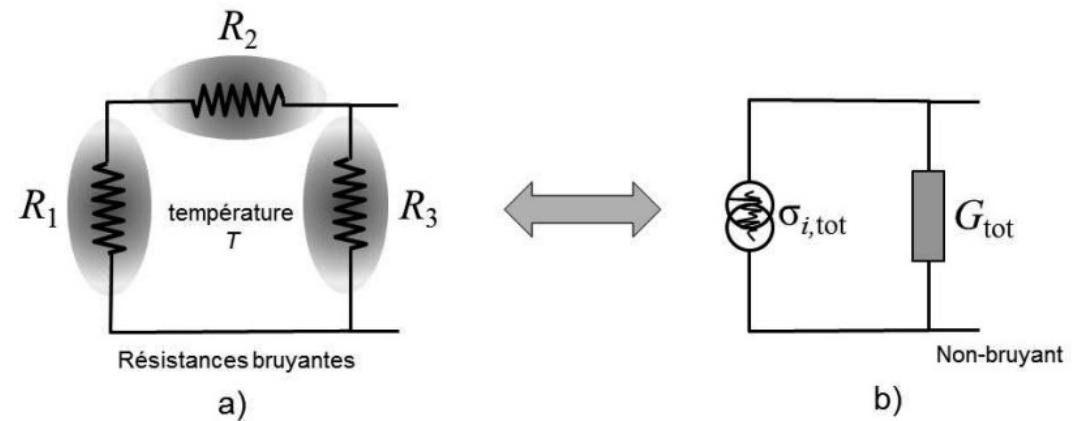
- c) Modèle équivalent de **Norton** : résistance non-bruyante en parallèle avec une conductance non-bruyante et générateur de courant de bruit, de valeur efficace (à vide) :

$$i_{\text{eff}} = \sigma_{I_0} = 2\sqrt{\frac{kT\Delta\nu}{R}} \quad \text{Unité : } A/\sqrt{\text{Hz}}$$

Illustration: exercise solved

Enoncé :

Déterminer le schéma équivalent de l'association des résistances R_1 , R_2 et R_3 de la figure a), en exprimant les paramètres de courant de bruit (efficace) et de conductance (figure (b)).



Corrigé :

On transforme tout d'abord le circuit proposé en 3.9 en un schéma équivalent comportant des résistances non bruyantes R_i et des générateurs de tension de bruit σ_{ui} (schéma 3.10.a). Les générateurs de tension de bruit u_1 et u_2 en série constituent un générateur

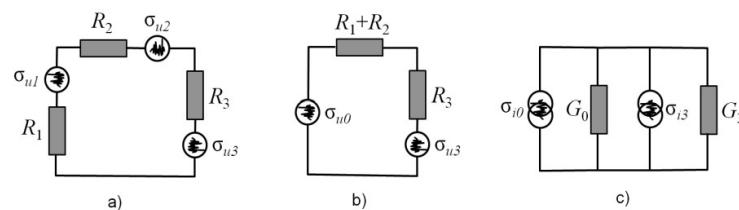


FIGURE 3.10 – Schémas équivalents.

aléatoire de tension instantanée $u_0(t) = u_1(t) + u_2(t)$, à moyenne nulle car chaque bruit est supposé centré (et gaussien). On obtient alors le schéma 3.10.b. La variance (puissance moyenne) de u_0 vaut donc $\sigma_{u0}^2 = \mathbb{E}[u_0(t)^2] = \sigma_{u1}^2 + \sigma_{u2}^2 + 2\mathbb{E}[u_1(t)u_2(t)]$. Le

dernier terme est nul car on suppose que les bruits générés par les deux résistances ne sont pas corrélés, et il vient donc $\sigma_{u0} = \sqrt{\sigma_{u1}^2 + \sigma_{u2}^2}$. La transformation Thévenin vers Norton du schéma 3.10.b fournit alors

$$\sigma_{i0} = \frac{\sqrt{\sigma_{u1}^2 + \sigma_{u2}^2}}{(R_1 + R_2)^2} \quad G_0 = \frac{1}{R_1 + R_2} \quad \sigma_{i3} = \frac{\sigma_{u3}}{R_3} = \quad G_3 = \frac{1}{R_3}$$

On aboutit enfin au schéma demandé en ajoutant les conductances ($G_{\text{tot}} = G_0 + G_3$) et les variances de courant de bruit ($\sigma_{i,\text{tot}}^2 = \sigma_{i0}^2 + \sigma_{i3}^2$).

Thermal noise : the case of very high frequencies

- Pour le bruit thermique, le cas des **très hautes fréquences** n'est pas traité convenablement par les considérations de physique classique. Il présente de nombreuses analogies avec le **rayonnement du corps noir**, et comme pour ce dernier, nécessite une approche par la physique quantique.
- La densité de spectrale de puissance moyenne de bruit :
 - ▶ est donnée par la loi de Boltzmann :
$$\gamma(\nu) = \frac{4R\nu}{\exp\left(\frac{\hbar\nu}{kT}\right) - 1}$$

$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
(Constante de Planck)

 - ▶ $\hbar\nu$ et kT s'expriment en Joule, et pour $T = 290\text{K}$, $kT = 4 \cdot 10^{-21}\text{J}$, soit $kT = -174 \text{ dBm/Hz}$
 - ▶ Approximation aux « basses fréquences » : $\hbar\nu \ll kT$ (pour $\nu \ll 1000 \text{ Ghz}$) $\gamma(\nu) \simeq 4kT\nu$
- Conclusion : on retrouve la densité de spectrale constante (bruit blanc) établie précédemment