TAF STAR – TAF OPE
UE Cœur 1

Course

Noise phenomena in communications physics

Bruno Fracasso
Département Optique

September 2023

IMT Atlantique
Bretagne-Pays de la Loire
École Mines-Télécom

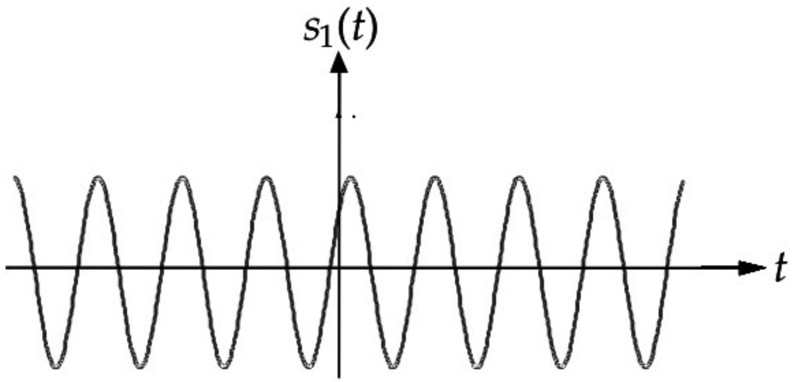
Outline

- Physical noise: first approach and examples
- Notion of random signal, variance, covariance
- Second-order stationary random signal
- White Gaussian noise
- Examples of physical noise
- Case of thermal noise

The noise : first approach…

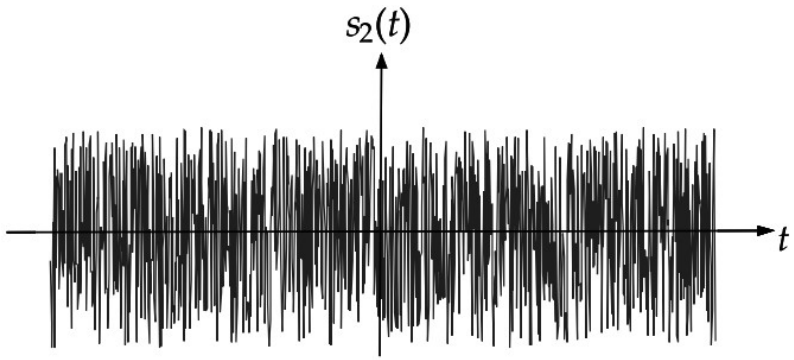
Signal déterministe

- Fonction mathématique $s(t)$
- Valeurs connues à l'avance !
- Quantité d'information : nulle
- Ne permet pas de prendre en compte la réalité physique



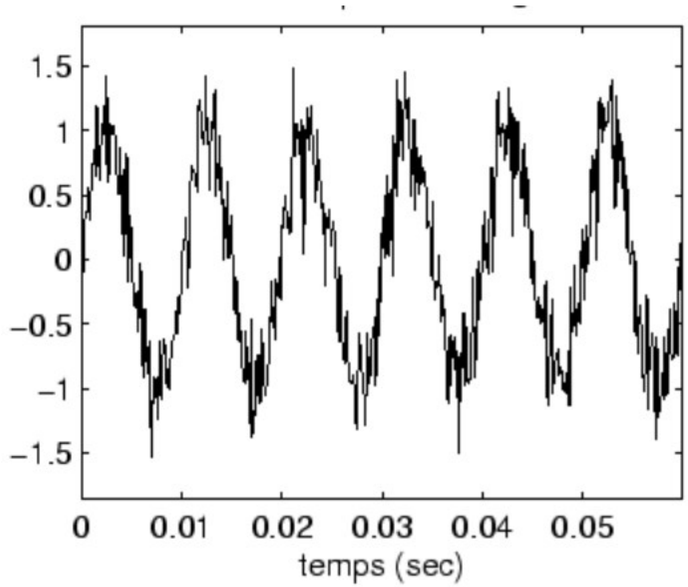
Signal aléatoire

- Pas totalement connu à l'avance
- Permet de traduire la réalité physique
- Comment décrire un tel objet ?



Real noisy situation

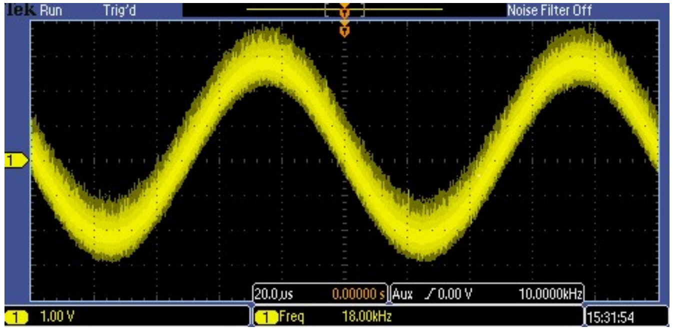
- **Observation = signal physique « bruité »**
  - Bruit additif : $x(t) = s(t) + b(t)$
  - Valeur moyenne du bruit : $\langle b \rangle = E[b(t)]$
  - Le plus souvent, $\langle b \rangle$ n'est pas un phénomène aléatoire, et le « véritable bruit » correspond aux fluctuations $\delta b = b - \langle b \rangle$
  - Notion de signal aléatoire (bruit) stationnaire
  - Questions :
    - *Quelle est la puissance moyenne du bruit ?*
    - *Comment mesurer le degré de « pollution » du signal par le bruit ?*



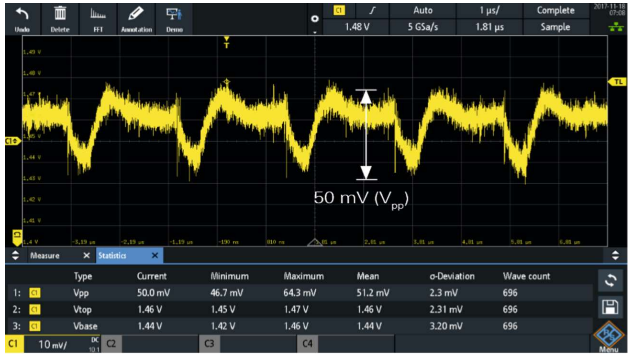
Examples of physical noise (1/2)

■ Source physique déterministe « entachée » de bruit

Signal analogique

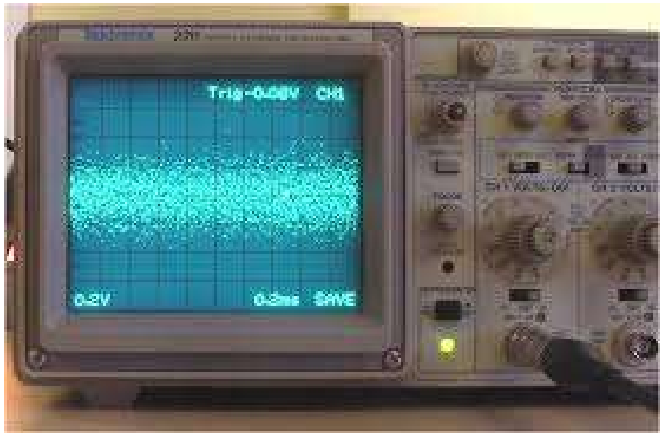


Signal numérique

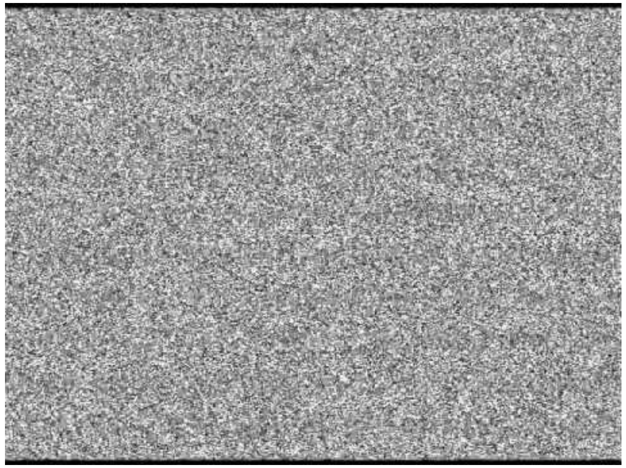


■ Bruit « pur »

Tension de bruit thermique aux bornes d'une résistance électrique



« Neige » sur l'écran des téléviseurs à tube cathodique



Examples of physical noise (2/2)

Perturbations à caractère aléatoire

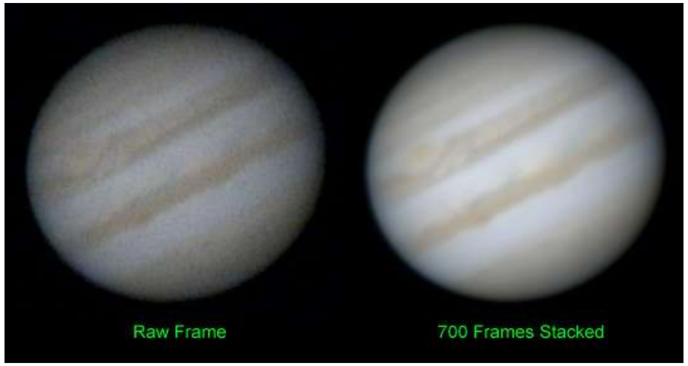
Image « propre » (signal seul)

Image bruitée (signal + bruit)

images astronomiques et bruit <u>atmosphérique</u>

Image bruitée (signal + bruit)

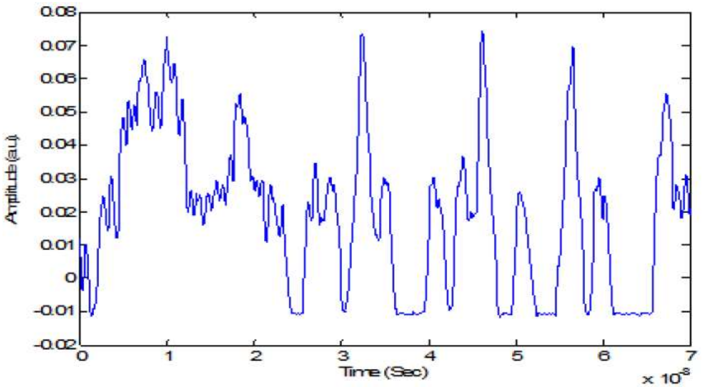
Image « propre » (signal)



Interférences avec le signal utile

- Trajets multiples en transmission sans-fil
- « Ronflement 50 Hz » dans un équipement électronique (e. g. amplificateur audio)
- Diaphonie en télécommunications (téléphonie fixe)

Trajet multiples : signal détecté avec une modulation binaire d'amplitude (NRZ)



Sources of physical noise

- **Internes à un système :** création d'un bruit propre indépendant de l'extérieur
  - Perturbations impulsionnelles (circuits électroniques)
  - Bruit de fond électronique (statistique de la conduction)

- **Externes à un système** et agissant sur celui-ci par influence

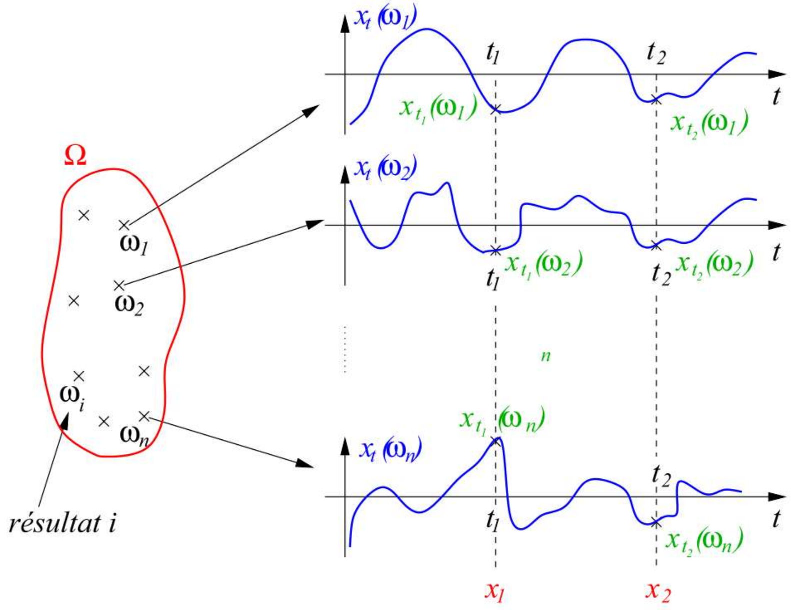
Champ magnétique crée par les ignes à haute tension

Bruit de fond cosmique

Variation de température sur les fibres optiques

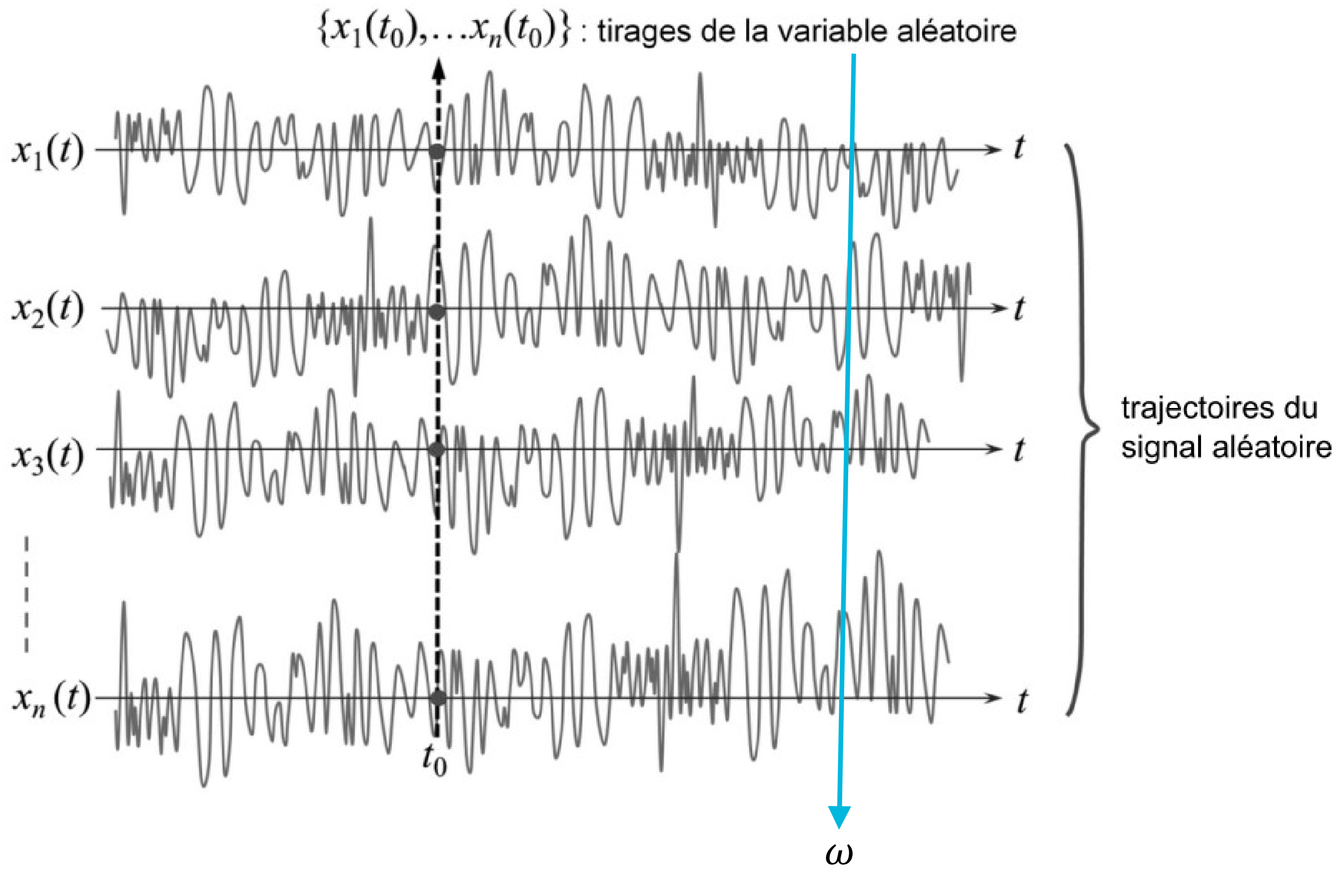
Mathematical formalism: the random signal

- **Contexte rigoureux** : présenté en UE cœur 2 de la TAF ISC
- **Processus aléatoire** : notion introduite par Kolmogorov en 1933
  - Un **signal aléatoire** (scalaire ou vectoriel) est une famille de variables ou vecteurs aléatoires indexés par un ensemble de paramètres $t \in T$ (le temps)
  - **Notation** : $\{x_t(\omega) \mid t \in T\}$ T ensemble discret ou continu
  - $x_t(\omega)$ est une fonction de deux paramètres : le temps t et ω paramètre aléatoire lié au résultat d'une **expérience aléatoire**
    - Pour chaque t, $x_t(\dots)$ est une **variable aléatoire** égale à l'état du processus considéré à l'instant t
    - Pour ω fixé ,$x_{\dots}(\omega)$ est une **réalisation** du processus qui est une fonction du temps
    - Pour t et ω fixés, $x_t(\omega)$ est un **nombre**
    - On notera $x_t(\omega) = x(t, \omega)$



Realizations (or trajectories) of a random signal

→ **La forme du signal aléatoire $x(t, \omega)$ dépend de la réalisation ω (trajectoire)**



Exemple 1 : tension de bruit thermique aux bornes d'une résistance : V(t_0, ω)

Exemple 2 : éclairement lumineux enregistré par une camera video : I(t,x,y,ω)

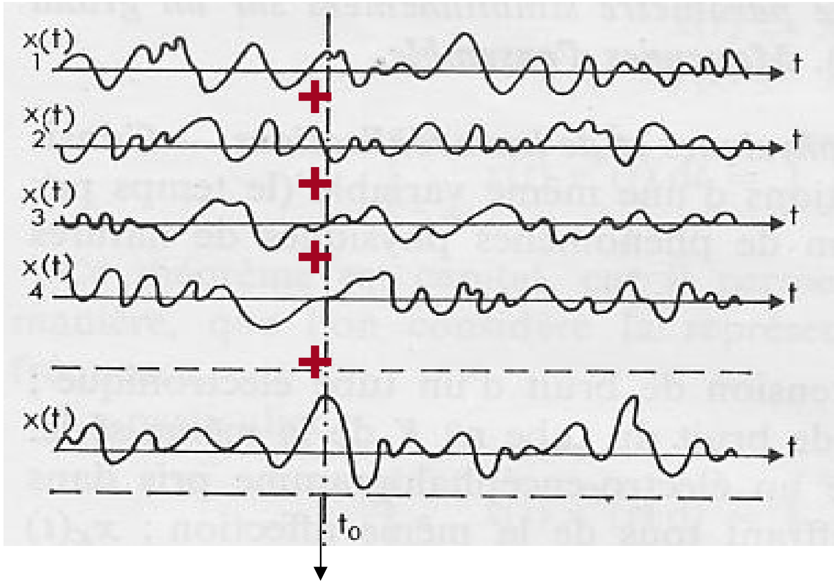
Average value of a random signal

- **On observe les <u>trajectoires</u> du signal aléatoire** $x(t, \omega)$
- **Valeur moyenne de** x (hypothèse : grand nombre de réalisations)

$$\mathbb{E}\left[X(t_0)\right] = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k(t_0)$$

Paramètre d'ordre 1

- Moyenne **d'ensemble :** calculée à un instant donné t_0
- Moyenne **temporelle :** calculée sur une réalisation x_i



$\bar{X}(t_0) = E[X(t_0)]$ (notation)

Paramètres statistiques de la variable aléatoire $X(t_0)$

Moyenne $\mathbb{E}\left[X(t_0)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p_{t_0}(x)\, \mathrm{d}x$

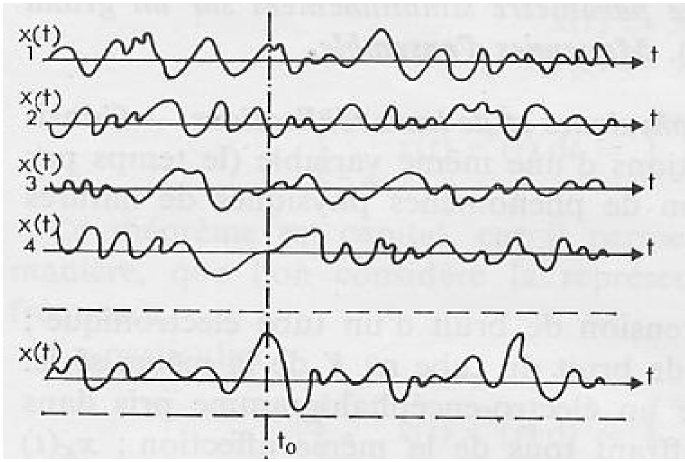
Variance $\sigma_X^2(t_0) = \mathbb{E}\left[X^2(t_0)\right] - \left(\mathbb{E}\left[X(t_0)\right]\right)^2$

Variance and co-variance of a random signal

- **Variance d'un signal aléatoire** (ordre 1)

$$\begin{aligned}\sigma_x^2(t_0) &= \mathrm{E}\left[(x(t_0)-\bar{x}(t_0))^2\right] \\ &= \mathrm{E}\left[x(t_0)^2\right]-\bar{x}(t_0)^2\end{aligned}$$

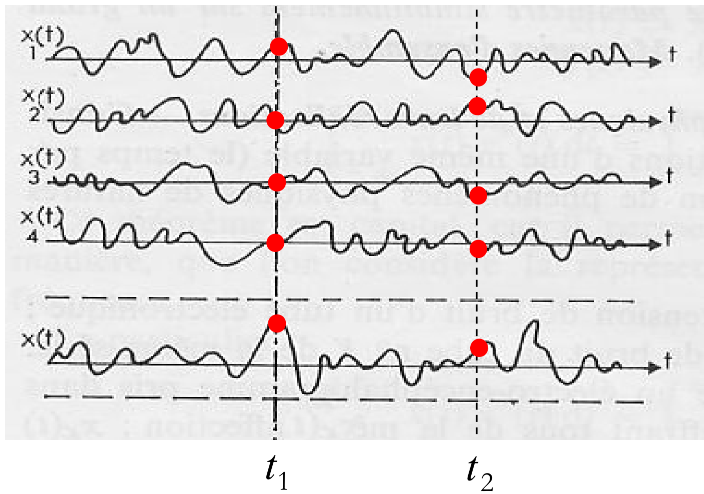
  - Dépend de l'instant considéré



- **Fonction de covariance** (ordre 2)

$$\Gamma_x(t_1,t_2) = \mathrm{E}\left[x(t_1)x(t_2)\right]-\bar{x}(t_1)\bar{x}(t_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_x^2(t)=\Gamma_x(t)}$$



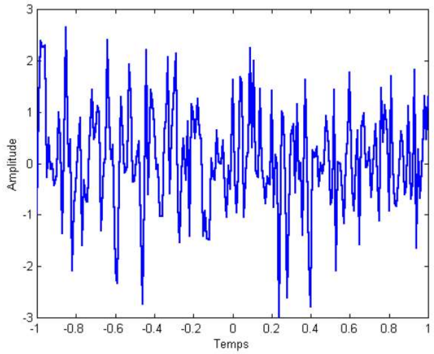
- Notation (simplifiée) : $x(t,\omega)=x(t)$

Stationary random signal (1/2)

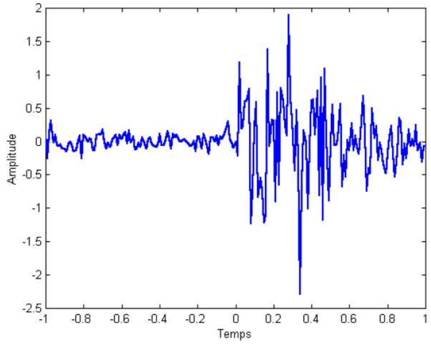
Stationnarité (sera revu en UE cœur B)

- On étudiera essentiellement des processus dits "**stationnaires**", dont les propriétés statistiques ne **dépendent pas du temps** (stabilité de la structure des phénomènes générateurs, sources, dégradations…)

Signal stationnaire



Signal non-stationnaire



- Stationnarité au **second ordre** : si le signal aléatoire vérifie les deux propriétés :

$$1)\ \bar{x}(t) = m = \text{cste} \qquad 2)\ \Gamma_x(t_1, t_2) = \Gamma_x(t_1 - t_2) \qquad \Gamma_x(t_1,t_2) = \mathrm{E}\left[x(t_1)x(t_2)\right] - \bar{x}(t_1)\bar{x}(t_2)$$

- Stationnarité au **sens strict** : densité de probabilité et moments ne dépendent pas du temps (propriété plus «forte» qu'au second ordre).

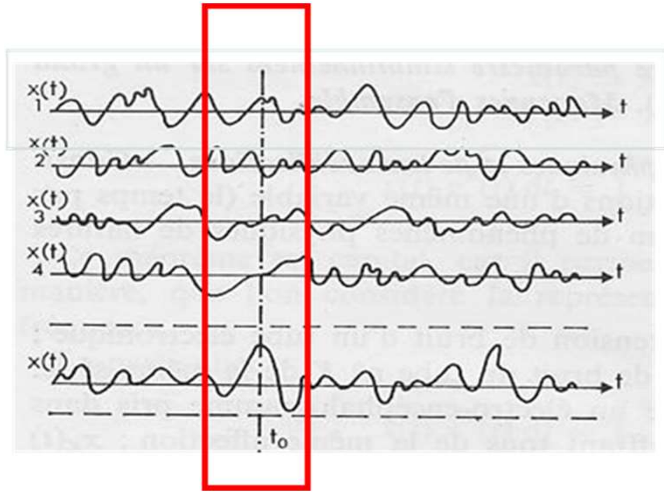
Stationary random signal (2/2)

- ## Fonction de corrélation
  - Pour un signal **stationnaire** et de **moyenne nulle**, on définit la **fonction de corrélation** par

$$\boxed{\begin{aligned}\Gamma_x(\tau) &= \mathrm{E}\left[x(t)x(t+\tau)\right] \\ &= \mathrm{E}\left[x(0)x(\tau)\right]\end{aligned}}$$

$$\Gamma_x(t_1, t_2) = \Gamma_x(t_1 - t_2)$$

  - **Intérêt** : description d'un signal <u>aléatoire</u> (« imprévisible ») par une fonction **déterministe** (ou « **certaine »)**
  - **Propriétés** : la fonction de corrélation est réelle et paire



- ## Signal stationnaire « ergodique »
  - La moyenne **d'ensemble est égale** à la moyenne **temporelle**
  - Permet d'estimer la moyenne d'ensemble sur un nombre restreint d' « observations »

Power of a stationary random signal (1/2)

- **Puissance aléatoire instantanée**
  - Rappel : puissance instantanée = densité temporelle d'énergie
  - Définition :

$$P(t,\omega) = |x(t,\omega)|^2$$

pour une réalisation ω

  - Ne présente que peu d'intérêt, car c'est une **grandeur aléatoire**

- **Densité spectrale de puissance moyenne (DSPM)**
  - **Définition** : $\gamma_x(\nu)$ est la valeur de la puissance moyenne du signal contenue dans l'intervalle $[\nu, \nu + d\nu\ ]$
  - Unité de $\gamma_x(\nu)$: le Watt/Hertz (W/Hz)

- **Théorème de Wiener-Khintchine** : la DSPM est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation, i.e.

$$\boxed{\Gamma_x(\tau) \overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \gamma_x(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_x(\tau)\, \mathrm{e}^{-2j\pi\nu\tau}\, \mathrm{d}\tau}$$

On admet ce résultat !

Power of a stationary random signal (2/2)

- **La puissance moyenne d'un signal aléatoire stationnaire de moyenne nulle est donnée par :**

Définition
$$P_{\text{moy}} = \int_{\mathbb{R}} \gamma_x(\nu)\,\mathrm{d}\nu$$

Transformée de Fourier inverse
$$\Gamma_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} \gamma_x(\nu)\mathrm{e}^{+2j\pi\nu\tau}\,\mathrm{d}\nu, \qquad \forall\tau\in\mathbb{R}.$$
(Fonction de corrélation)

Puissance moyenne
$$P_{\text{moy}} = \Gamma_x(0) = \mathbb{E}\left[x^2(t)\right] = \sigma_x^2$$
(valeur moyenne nulle)

- **Important :** la **puissance moyenne** d'un signal aléatoire **stationnaire et centré est égale à sa variance**
- Signal aléatoire $y(t)$ **non centré** : on applique ce qui précède pour le signal δy de « variations » de y, qui est un signal aléatoire centré :

$$\delta y(t) = y(t) - \mathbb{E}\left[y(t)\right]$$

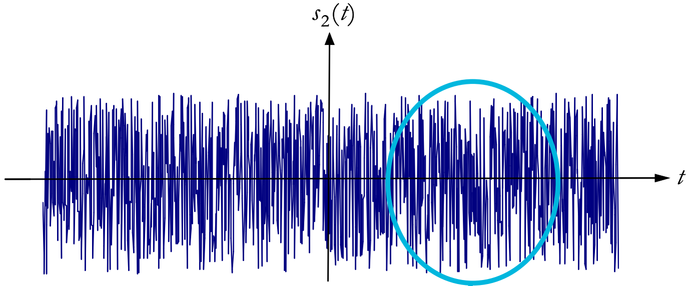
White and Gaussian noise

- **Un bruit (signal aléatoire) est dit blanc si sa densité spectrale de puissance est constante sur une bande de fréquences « très large »**
  - On a donc, en théorie : $\gamma(\nu) = \gamma_0 \longrightarrow \Gamma_x(\tau) = \gamma_0 \delta(\tau)$
  - En pratique, un bruit observé n'est jamais blanc, car il est mesuré par un capteur dont la bande-passante est limitée (on parlera alors de bruit « rose »).
- **Les bruits blancs observés dans la nature ont le plus souvent des statistiques gaussiennes**
  - La densité de probabilité des réalisations du processus $x(t)$ vérifie, à chaque instant t, une loi normale $\mathrm{G}(x, \mu, \sigma)$ de moyenne μ et de variance σ^2:

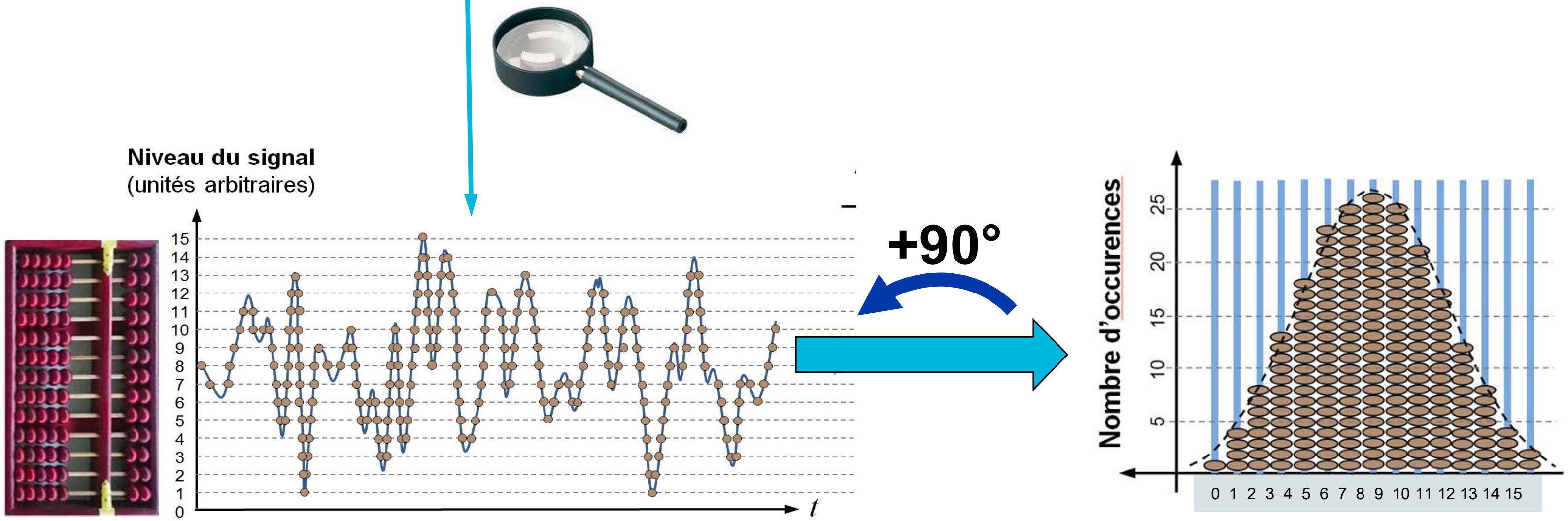
$$\boxed{G(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}$$

  - En pratique, on choisira $\mu = 0$ en considérant les variations $\delta x = x - \mathrm{E}[x(t)]$

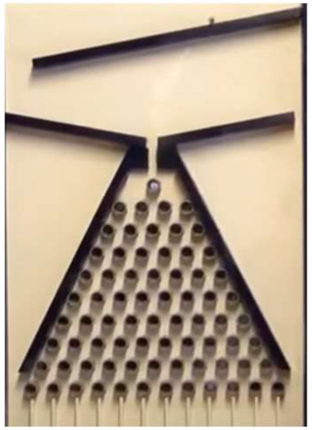
White and Gaussian noise: illustration



Une réalisation du processus



Densité de probabilité
(estimation)



Video : Galton board

Signal-to-noise ratio

- **Définition : le rapport signal-sur-bruit mesure le degré de « pollution » du signal par le bruit**

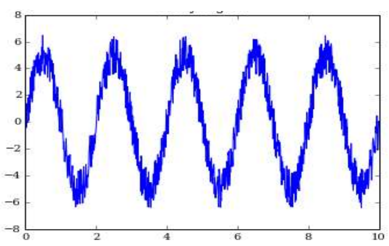
$$\xi_{\mathrm{dB}} = \left(\frac{S}{B}\right)_{\mathrm{dB}} = 10\log\left(\frac{\bar{P}_{\mathrm{signal}}}{\bar{P}_{\mathrm{bruit}}}\right)$$

$$\bar{P}_{\mathrm{bruit}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_x(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \Gamma_x(0) = \sigma^{2}$$

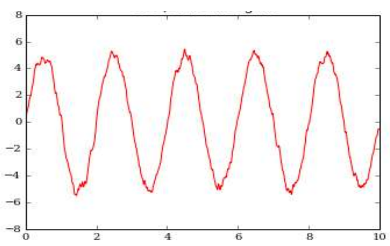
- **Exemple : signal sinusoïdal bruité**

$$s(t) = a_0\cos(\omega t) + b(t)$$

$$\xi_{\mathrm{dB}} = 20\log\left(\frac{a_0}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$



$\xi = 6$ dB



$\xi = 23$ dB

Téléphonie mobile : ξ = 10 dB

Téléphonie fixe : S/N = 40 dB

Hifi audio : S/N = 80 dB

Noise in electronics and optics

- **Bruit thermique électronique**
  - Crée par l'agitation des électrons libres 'dans un conducteur à température ambiante, indépendamment de toute tension appliquée
  - **Autres appellations** : bruit thermique, ou bruit de résistance, ou bruit Johnson (1927)
- **Bruit quantique**
  - Bruit de fond qui peut être modélisé par un processus de Poisson d'arrivées de flots de particules
  - En **électronique** : le courant électrique n'est pas continu mais constitué de porteurs de charge élémentaires (en général des électrons)
  - En **optique** : un flux lumineux est constitué d'un ensemble de photons.
  - **Autres appellations** : bruit de grenaille (shot noise), bruit de Schottky (1915)
- **Autres bruits**
  - Bruit en 1/f en électronique
  - Bruit cosmique en astronomie
  - Bruit d'émission spontanée amplifiée en communications optiques

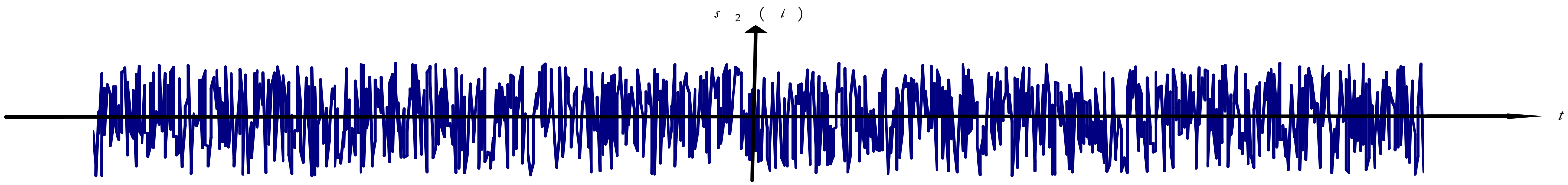
Thermal noise in a conductor (1/3)

- **Conducteur électrique résistif à la température d'équilibre T**
  - Déplacement aléatoire des électrons (agitation thermique)
  - Chocs sur le réseau solide d'ions positifs du milieu

Constante de Boltzmann

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ JK^{-1}$

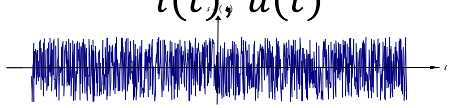
  - Energie cinétique moyenne d'un électron (par dimension) : $\boxed{E = \frac{1}{2}m <v^2>= \frac{1}{2}kT}$
  - A **température ambiante** (T=290 K) : $kT = 4 \cdot 10^{-21}$ J
  - Remarque : [J] = W/Hz, kT est donc une densité spectrale de puissance moyenne (DSPM)



Thermal noise in a conductor (2/3)

Processus de bruit thermique

- Un micro-courant d'intensité aléatoire $i(t)$ (**bruit**) est crée dans le conducteur, et par conséquent une micro-tension $u(t)$ est générée aux bornes du dipôle résistif, en l'absence de toute tension extérieure appliquée.



- Le bruit thermique est un bruit **blanc additif, gaussien** (AGWN) et de **moyenne nulle**

- La densité spectrale de puissance de **courant moyen de bruit est :** $$\boxed{\gamma_i(\nu) = \frac{4kT}{R}}$$ **en A^2/Hz**

- La densité spectrale de puissance **de tension moyenne de bruit est :** $$\boxed{\gamma_u(\nu) = 4kTR}$$ **en V^2/Hz**

Thermal noise in a conductor (3/3)

- **Puissance moyenne totale de tension de bruit thermique aux bornes de la résistance**

$$P_U = \int_0^{\Delta\nu} \gamma_U(\nu)\,\mathrm{d}\nu = 4kTR\Delta\nu \rightarrow \sigma_U^2 = 4kTR\Delta\nu$$ (en V^2)

relation de Nyquist

$\Delta\upsilon$: bande-passante du détecteur

Température ambiante (T = 290 K) : $kT = 4\times10^{-21}$ W/Hz

- **Puissance moyenne totale de courant de bruit thermique aux bornes de la résistance**

$$P_I = \sigma_I^2 = \frac{4kT\Delta\nu}{R}$$

(relation de Nyquist)

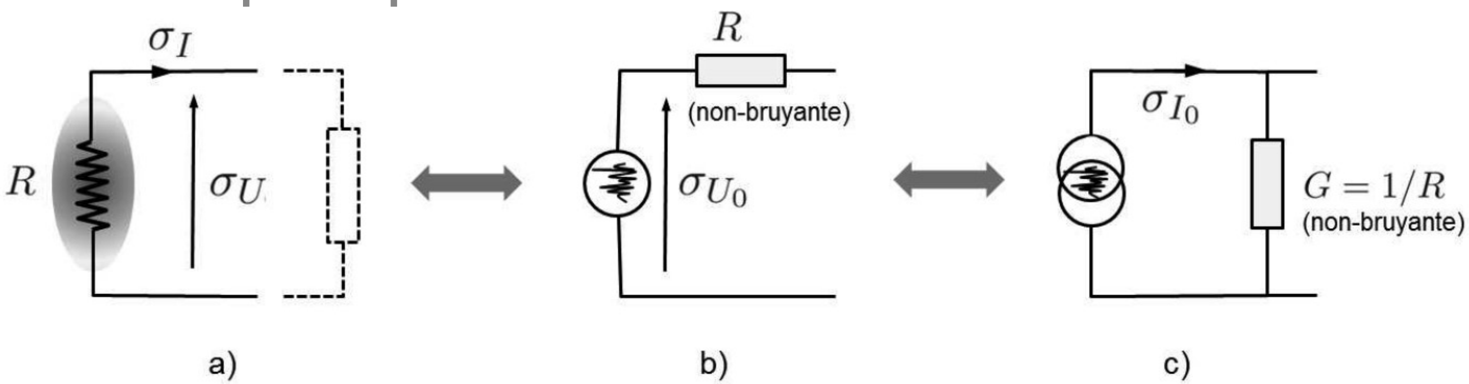
- **Exemple**
  - On considère une résistance R =1 MΩ à la température T = 300K et l'on mesure le bruit avec un micro-voltmètre de bande-passante $\Delta\upsilon$ = 100 MHz

$$P_U = \sigma_U^2 = 1{,}7 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{V}^2 \qquad U_{\text{eff}} = \sqrt{\sigma_U^2} = 41\ \mu\mathrm{V}.$$

Tension efficace de bruit

Modelling a noisy resistor

Schémas électriques équivalents



a) Schéma de la résistance « bruyante » R à la température T

b) modèle équivalent de **Thévenin** : résistance non-bruyante **en série** avec un **générateur de tension** de bruit, de valeur efficace (à vide) :

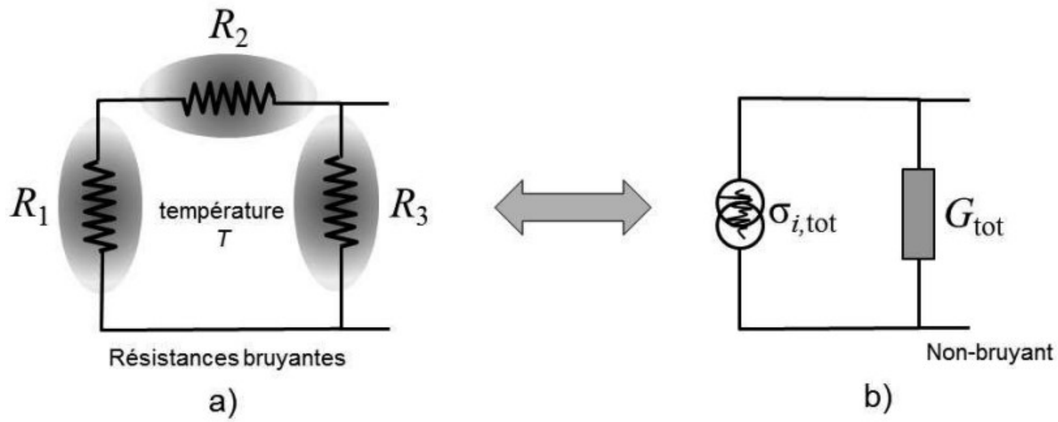
$$u_{\text{eff}} = \sigma_{U_0} = 2\sqrt{kTR\Delta\nu}$$ Unité : $V/\sqrt{\text{Hz}}$

c) Modèle équivalent de **Norton** : résistance non-bruyante **en parallèle** avec une conductance non-bruyante et générateur de courant de bruit, de valeur efficace (à vide) :

$$i_{\text{eff}} = \sigma_{I_0} = 2\sqrt{\frac{kT\Delta\nu}{R}}$$ Unité : $A/\sqrt{\text{Hz}}$

Enoncé :

Déterminer le schéma équivalent de l'association des résistances R_1, R_2 et R_3 de la figure a), en exprimant les paramètres de courant de bruit (efficace) et de conductance (figure (b)).



Corrigé :

On transforme tout d'abord le circuit proposé en 3.9 en un schéma équivalent comportant des résistances non bruyantes R_i et des générateurs de tension de bruit σ_{ui} (schéma 3.10.a). Les générateurs de tension de bruit u_1 et u_2 en série constituent un générateur

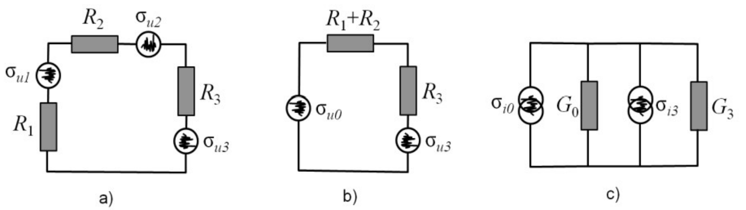


FIGURE 3.10 – *Schémas équivalents.*

aléatoire de tension instantanée $u_0(t) = u_1(t) + u_2(t)$, à moyenne nulle car chaque bruit est supposé centrée (et gaussien). On obtient alors le schéma 3.10.b. La variance (puissance moyenne) de u_0 vaut donc $\sigma_{u0}^2 = \mathbb{E}[u_0(t)^2] = \sigma_{u1}^2 + \sigma_{u2}^2 + 2\mathbb{E}[u_1(t)u_2(t)]$. Le dernier terme est nul car on suppose que les bruits générés par les deux résistances ne sont pas corrélés, et il vient donc $\sigma_{u0} = \sqrt{\sigma_{u1}^2 + \sigma_{u2}^2}$. La transformation Thévenin vers Norton du schéma 3.10.b fournit alors

$$\sigma_{i0} = \frac{\sqrt{\sigma_{u1}^2 + \sigma_{u2}^2}}{(R_1 + R_2)^2} \qquad G_0 = \frac{1}{R_1 + R_2} \qquad \sigma_{i3} = \frac{\sigma_{u3}}{R_3} = \qquad G_3 = \frac{1}{R_3}$$

On aboutit enfin au schéma demandé en ajoutant les conductances ($G_{\text{tot}} = G_0 + G_3$) et les variances de courant de bruit ($\sigma_{\text{i,tot}}^2 = \sigma_{i0}^2 + \sigma_{i3}^2$).

Thermal noise : the case of very high frequencies

- Pour le bruit thermique, le cas des **très hautes fréquences** n'est pas traité convenablement par les considérations de physique classique. Il présente de nombreuses analogies avec le **rayonnement du corps noir**, et comme pour ce dernier, nécessite une approche par la physique quantique.

- La densité de spectrale de puissance moyenne de bruit :
  - est donnée par la loi de Boltzmann : $$\boxed{\gamma(\nu) = \frac{4Rh\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}}$$ $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Js (Constante de Planck)
  - $h\nu$ et kT s'expriment en Joule, et pour T = 290K, $kT = 4 \cdot 10^{-21}$J, soit $kT =$ -174 dBm/Hz
  - Approximation aux « basses fréquences » : $h\nu \ll kT$ (pour $\nu \ll$ 1000 Ghz) $\boxed{\gamma(\nu) \simeq 4kTR}$

- **Conclusion** : on retrouve la densité de spectrale constante (bruit blanc) établie précédemment