

# TAF ISC – TAF OPE

## UE Cœur 1

Course

### *Some noise phenomena in physics*

**Bruno Fracasso**  
Département Optique

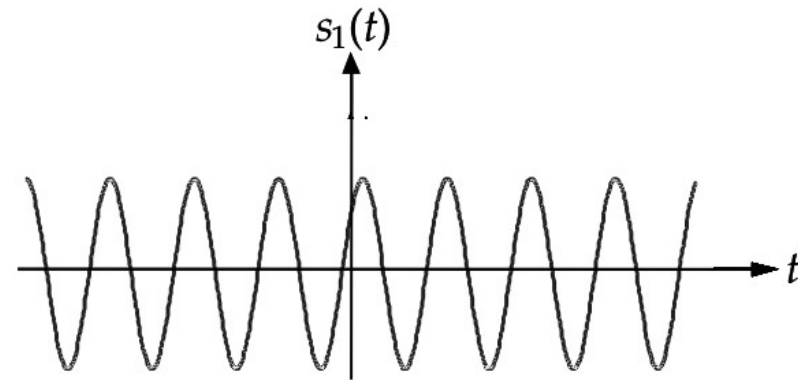
September 2022

- Physical noise: first approach and examples
- Notion of random signal, variance, covariance
- Second-order stationary random signal
- White Gaussian noise
- Examples of physical noise
- Case of thermal noise

# The noise : first approach...

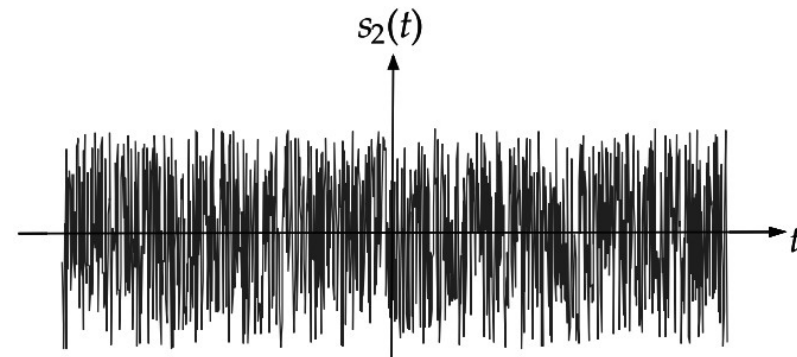
## ■ Signal déterministe

- ▶ Fonction mathématique  $s(t)$
- ▶ Valeurs connues à l'avance !
- ▶ Quantité d'information : nulle
- ▶ Ne permet pas de prendre en compte la réalité physique



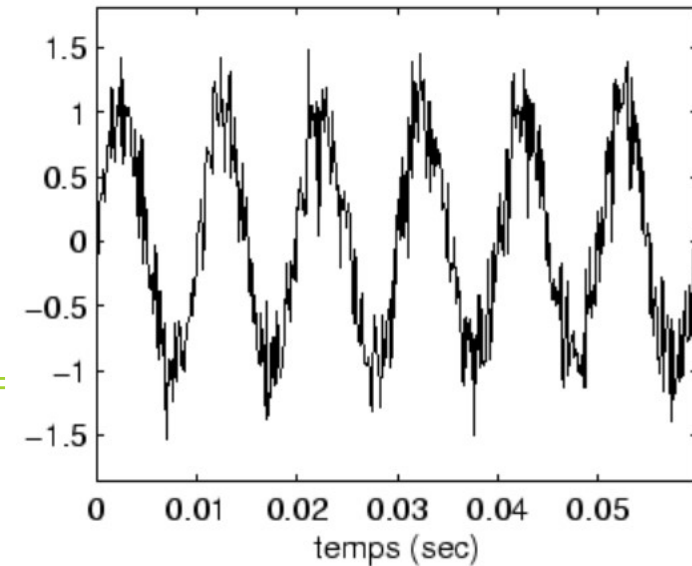
## ■ Signal aléatoire

- ▶ Pas totalement connu à l'avance
- ▶ Permet de traduire la réalité physique
- ▶ Comment décrire un tel objet ?



## ■ Observation = signal physique « bruité »

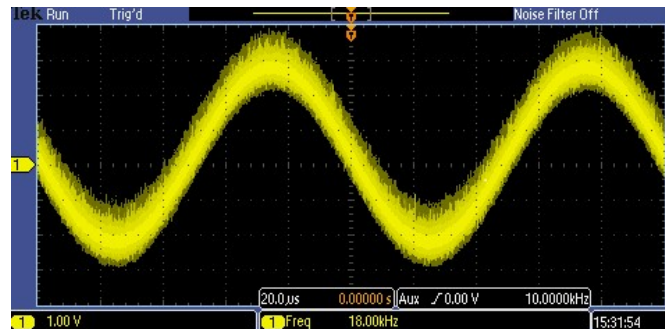
- ▶ Bruit additif :  $x(t) = s(t) + b(t)$
- ▶ Valeur moyenne du bruit :  $\langle b \rangle = E[b(t)]$
- ▶ Le plus souvent,  $\langle b \rangle$  n'est pas un phénomène aléatoire, et le « véritable bruit » correspond aux fluctuations  $\delta b = b - \langle b \rangle$
- ▶ Notion de signal aléatoire (bruit) stationnaire
- ▶ Questions :
  - Quelle est la puissance moyenne du bruit ?
  - Comment mesurer le degré de « pollution » du signal par le bruit ?



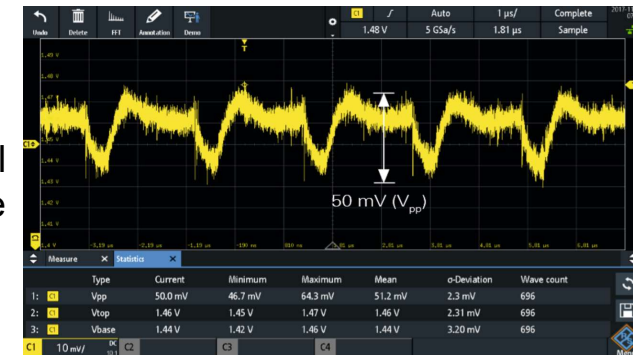
# Examples of physical noise (1/2)

## ■ Source physique déterministe « entachée » de bruit

Signal  
analogique

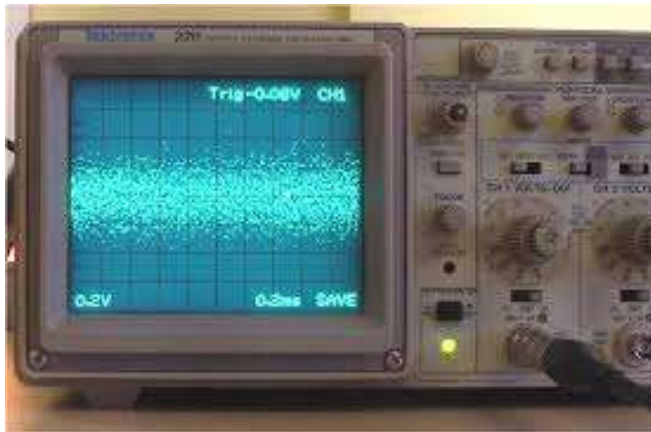


Signal  
numérique

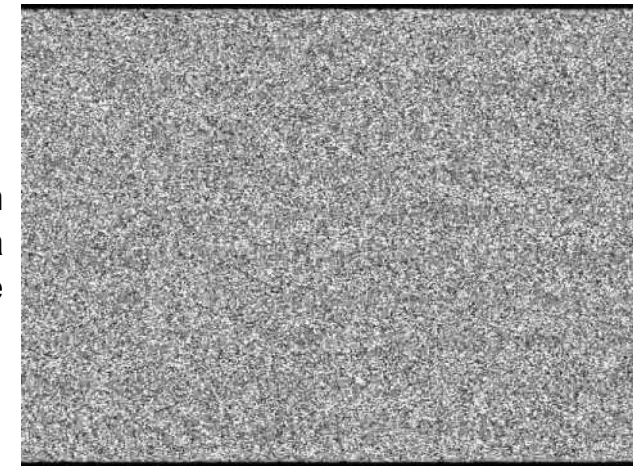


## ■ Bruit « pur »

Tension de bruit  
thermique aux bornes  
d'une résistance  
électrique



« Neige » sur l'écran  
des téléviseurs à  
tube cathodique



# Examples of physical noise (2/2)

## ■ Perturbations à caractère aléatoire

Image « propre » (signal seul)



Image bruitée (signal + bruit)



images  
astronomiques et  
bruit atmosphérique

Image bruitée  
(signal + bruit)

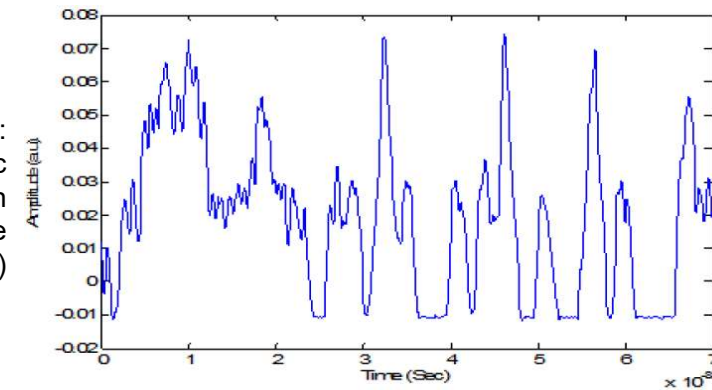
Image « propre »  
(signal)



## ■ Interférences avec le signal utile

- ▶ Trajets multiples en transmission sans-fil
- ▶ « Ronflement 50 Hz » dans un équipement électronique (e. g. amplificateur audio)
- ▶ Diaphonie en télécommunications (téléphonie fixe)

**Trajet multiples :**  
signal détecté avec  
une modulation  
binaire d'amplitude  
(NRZ)





# Sources of physical noise

PAGE 7

## ■ Internes à un système : création d'un bruit propre indépendant de l'extérieur

- ▶ Perturbations impulsionnelles (circuits électroniques)
- ▶ Bruit de fond électronique (statistique de la conduction)



## ■ Externes à un système et agissant sur celui-ci par influence



Champ magnétique créé par les lignes à haute tension



Bruit de fond cosmique

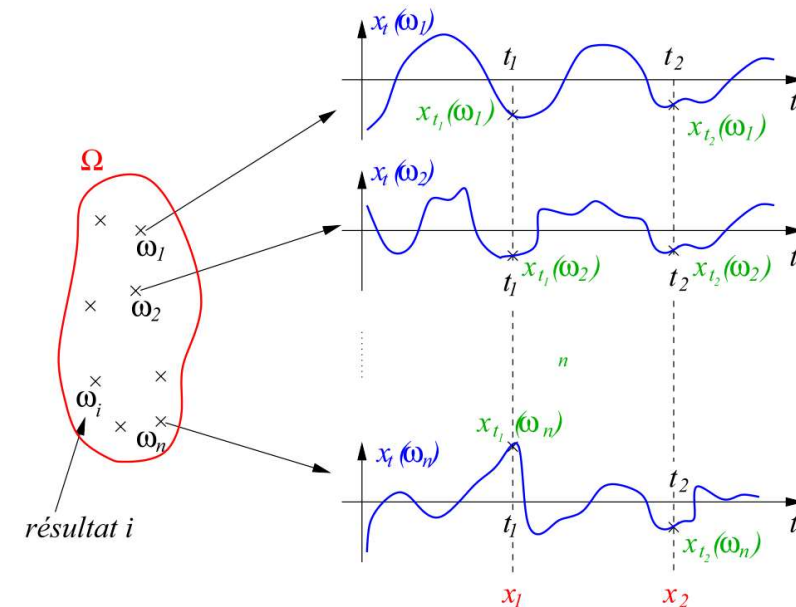


Variation de température sur les fibres optiques

# Mathematical formalism: the random signal

PAGE 8

- **Contexte rigoureux** : présenté en UE cœur 2 de la TAF ISC
- **Processus aléatoire** : notion introduite par Kolmogorov en 1933
  - ▶ Un **signal aléatoire** (scalaire ou vectoriel) est une famille de variables ou vecteurs aléatoires indexés par un ensemble de paramètres  $t \in T$  (le temps)
  - ▶ **Notation** :  $\{x_t(\omega) \mid t \in T\}$   $T$  ensemble discret ou continu
  - ▶  $x_t(\omega)$  est une fonction de deux paramètres : le temps  $t$  et  $\omega$  paramètre aléatoire lié au résultat d'une **expérience aléatoire**
    - Pour chaque  $t$ ,  $x_t(\dots)$  est une **variable aléatoire** égale à l'état du processus considéré à l'instant  $t$
    - Pour  $\omega$  fixé,  $x_{\dots}(\omega)$  est une **réalisation** du processus qui est une fonction du temps
    - Pour  $t$  et  $\omega$  fixés,  $x_t(\omega)$  est un **nombre**
    - On notera  $x_t(\omega) = x(t, \omega)$



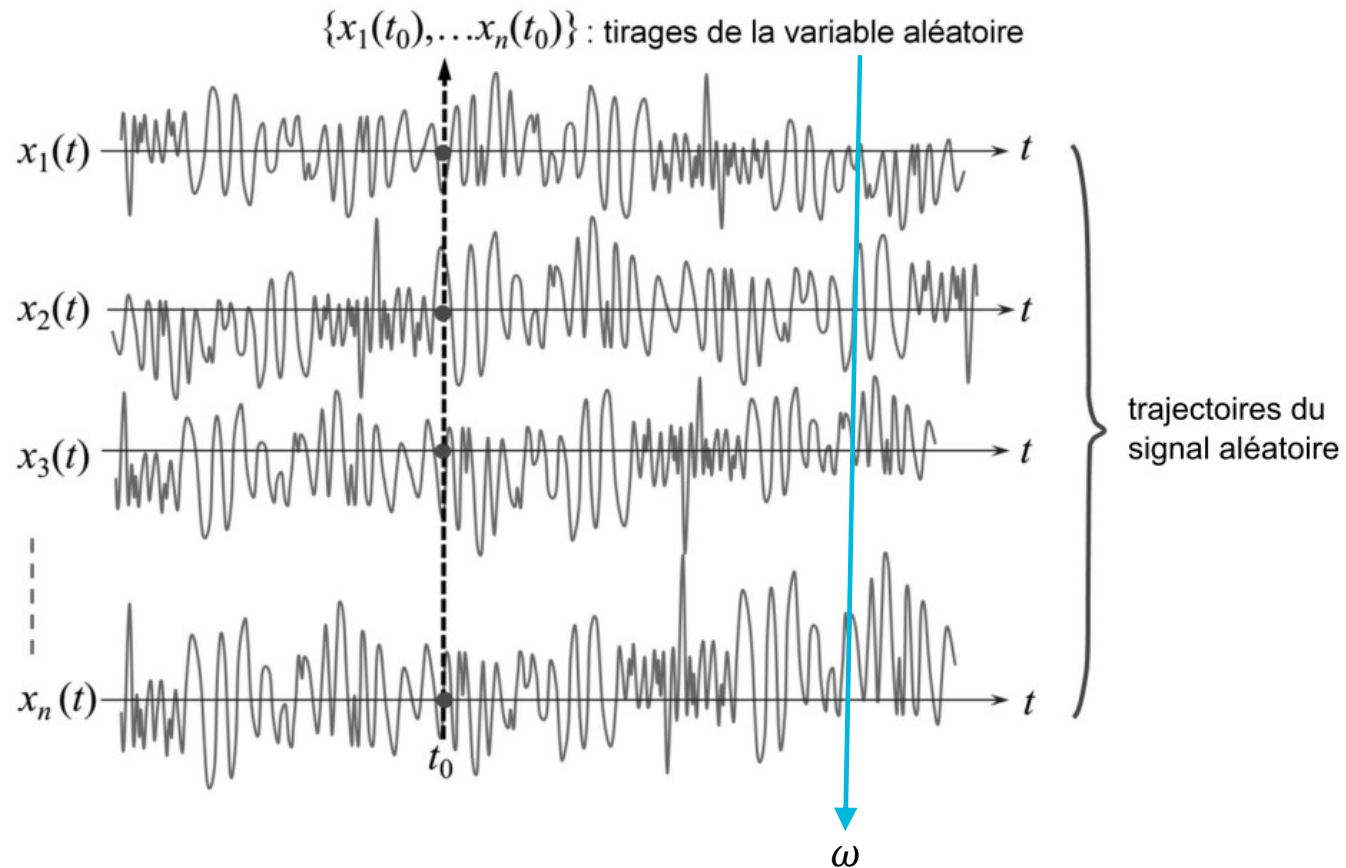


# Realizations (or trajectories) of a random signal

→ La forme du signal aléatoire  $x(t, \omega)$  dépend de la réalisation  $\omega$  (trajectoire)

Exemple 1 : tension de bruit thermique aux bornes d'une résistance :  $V(t_0, \omega)$

Exemple 2 : éclairage lumineux enregistré par une camera video :  $I(t, x, y, \omega)$



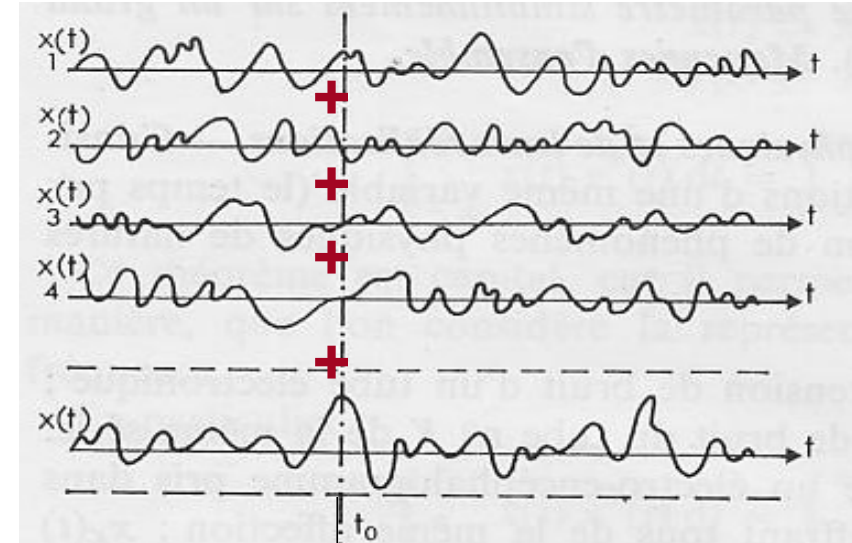
# Average value of a random signal

- On observe les trajectoires du signal aléatoire  $x(t, \omega)$
- Valeur moyenne de  $x$  (hypothèse : grand nombre de réalisations)

$$\mathbb{E}[X(t_0)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k(t_0)$$

## Paramètre d'ordre 1

- Moyenne **d'ensemble** : calculée à un instant donné  $t_0$
- Moyenne **temporelle** : calculée sur une réalisation  $x_i$



$$\bar{X}(t_0) = E[X(t_0)] \text{ (notation)}$$

Paramètres statistiques de la variable aléatoire  $X(t_0)$

**Moyenne**  $\mathbb{E}[X(t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_{t_0}(x) dx$

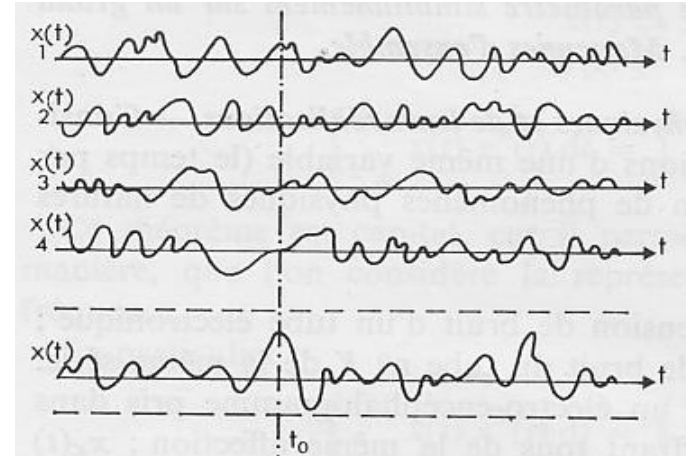
**Variance**  $\sigma_X^2(t_0) = \mathbb{E}[X^2(t_0)] - (\mathbb{E}[X(t_0)])^2$

# Variance and co-variance of a random signal

## ■ Variance d'un signal aléatoire (ordre 1)

$$\begin{aligned}\sigma_x^2(t_0) &= E \left[ (x(t_0) - \bar{x}(t_0))^2 \right] \\ &= E \left[ x(t_0)^2 \right] - \bar{x}(t_0)^2\end{aligned}$$

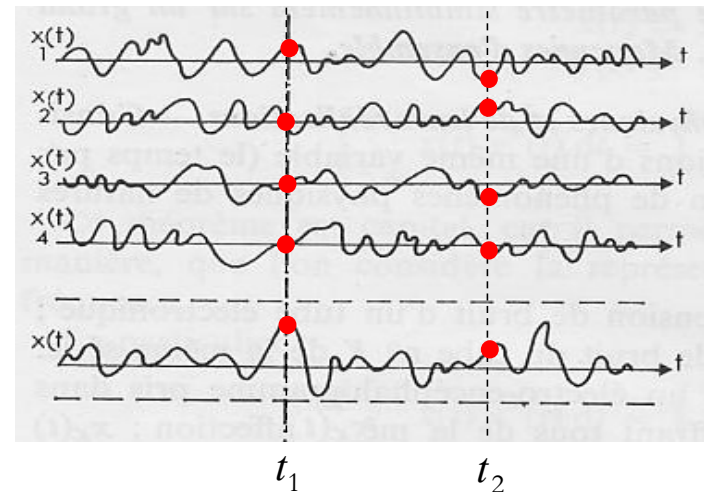
► Dépend de l'instant considéré



## ■ Fonction de covariance (ordre 2)

$$\Gamma_x(t_1, t_2) = E [x(t_1)x(t_2)] - \bar{x}(t_1)\bar{x}(t_2)$$

→  $\sigma_x^2(t) = \Gamma_x(t)$



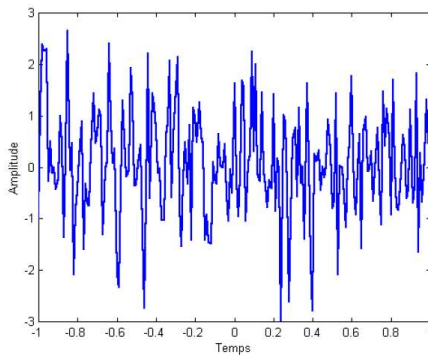
## ■ Notation (simplifiée) : $x(t, \omega) = x(t)$

# Stationary random signal (1/2)

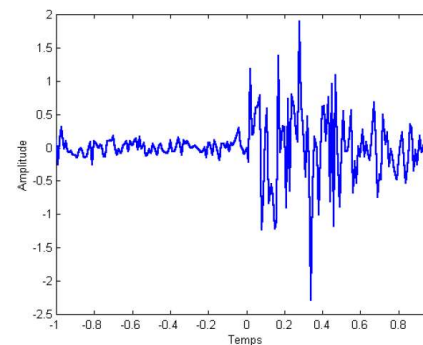
## ■ Stationnarité (sera revu en UE cœur B)

- On étudiera essentiellement des processus dits "**stationnaires**", dont les propriétés statistiques ne **dépendent pas du temps** (stabilité de la structure des phénomènes générateurs, sources, dégradations...)

Signal  
stationnaire



Signal  
non-stationnaire



- Stationnarité au second ordre : si le signal aléatoire vérifie les deux propriétés :

$$1) \bar{x}(t) = m = \text{cste}$$

$$2) \Gamma_x(t_1, t_2) = \Gamma_x(t_1 - t_2)$$

$$\Gamma_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] - \bar{x}(t_1)\bar{x}(t_2)$$

- Stationnarité au sens strict : densité de probabilité et moments ne dépendent pas du temps (propriété plus «forte» qu'au second ordre).

# Stationary random signal (2/2)

## ■ Fonction de corrélation

- Pour un signal **stationnaire** et de **moyenne nulle**, on définit la **fonction de corrélation** par

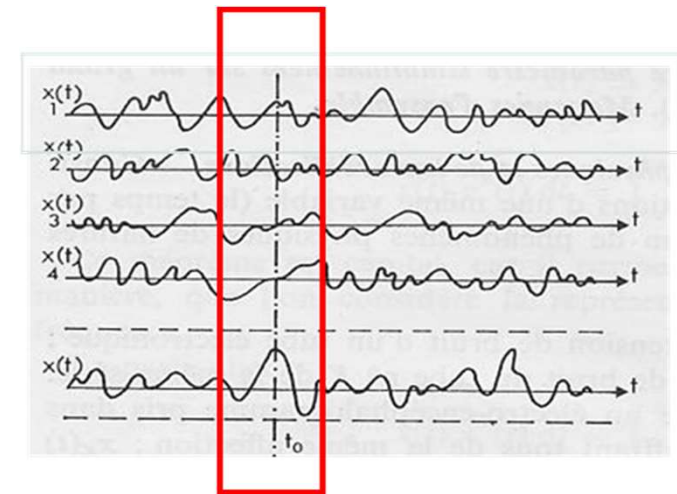
$$\begin{aligned}\Gamma_x(\tau) &= \text{E} [x(t)x(t + \tau)] \\ &= \text{E} [x(0)x(\tau)]\end{aligned}$$

$$\Gamma_x(t_1, t_2) = \Gamma_x(t_1 - t_2)$$

- **Intérêt** : description d'un signal aléatoire (« imprévisible ») par une fonction **déterministe** (ou « certaine »)
- **Propriétés** : la fonction de corrélation est réelle et paire

## ■ Signal stationnaire « ergodique »

- La moyenne **d'ensemble** est **égale** à la moyenne **temporelle**
- Permet d'estimer la moyenne d'ensemble sur un nombre restreint d'« observations »



# Power of a stationary random signal (1/2)

## ■ Puissance aléatoire instantanée

- ▶ Rappel : puissance instantanée = densité temporelle d'énergie
- ▶ Définition :  $P(t, \omega) = |x(t, \omega)|^2$  **pour une réalisation  $\omega$**
- ▶ Ne présente que peu d'intérêt, car c'est une **grandeur aléatoire**

## ■ Densité spectrale de puissance moyenne (DSPM)

- ▶ **Définition** :  $\gamma_x(\nu)$  est la valeur de la puissance moyenne du signal contenue dans l'intervalle  $[\nu, \nu + d\nu]$
- ▶ Unité de  $\gamma_x(\nu)$  : le Watt/Hertz (W/Hz)

- **Théorème de Wiener-Khintchine** : la DSPM est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation, i.e.

$$\Gamma_x(\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} \gamma_x(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_x(\tau) e^{-2j\pi\nu\tau} d\tau$$

**On admet ce résultat !**



# Power of a stationary random signal (2/2)

- La puissance moyenne d'un signal aléatoire stationnaire de moyenne nulle est donnée par :

Définition  $P_{\text{moy}} = \int_{\mathbb{R}} \gamma_x(\nu) d\nu$

Transformée de Fourier inverse  $\Gamma_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} \gamma_x(\nu) e^{+2j\pi\nu\tau} d\nu, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad \text{(Fonction de corrélation)}$

Puissance moyenne  $P_{\text{moy}} = \Gamma_x(0) = \mathbb{E} [x^2(t)] = \sigma_x^2 \quad \text{(valeur moyenne nulle)}$

- Important : la puissance moyenne d'un signal aléatoire stationnaire et centré est égale à sa variance
- Signal aléatoire  $y(t)$  **non centré** : on applique ce qui précède pour le signal  $\delta y$  de « variations » de  $y$ , qui est un signal aléatoire centré :

$$\delta y(t) = y(t) - \mathbb{E} [y(t)]$$

# White and Gaussian noise

- Un bruit (signal aléatoire) est dit blanc si sa densité spectrale de puissance est constante sur une bande de fréquences « très large »

- ▶ On a donc, en théorie :  $\gamma(\nu) = \gamma_0 \longrightarrow \Gamma_x(\tau) = \gamma_0 \delta(\tau)$
- ▶ En pratique, un bruit observé n'est jamais blanc, car il est mesuré par un capteur dont la bande-passante est limitée (on parlera alors de bruit « rose »).

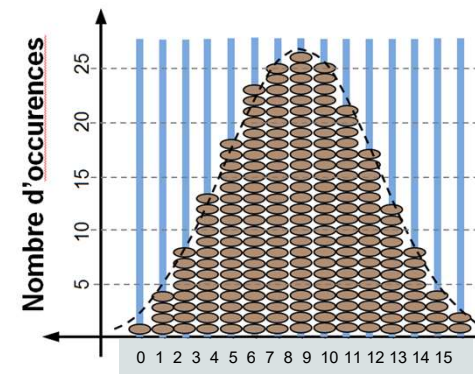
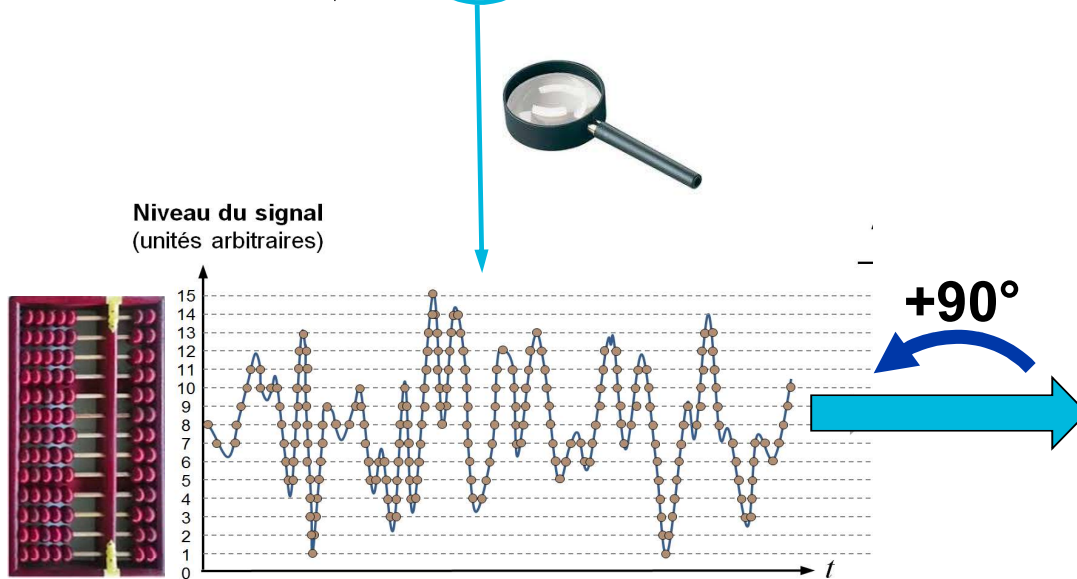
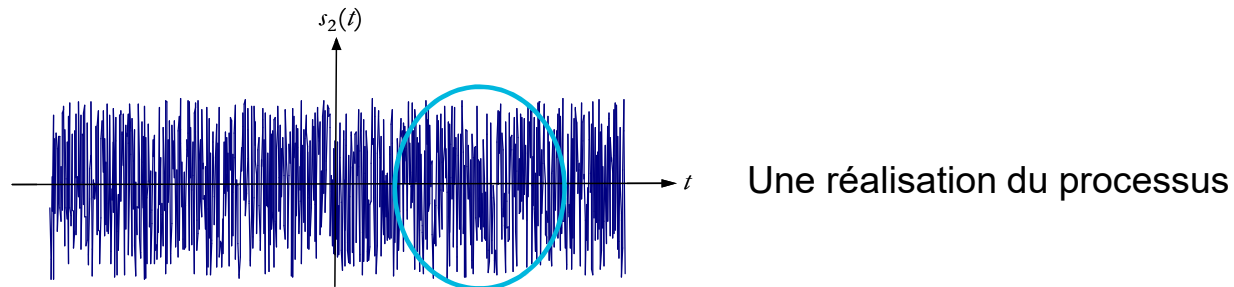
- Les bruits blancs observés dans la nature ont le plus souvent des statistiques gaussiennes

- ▶ La densité de probabilité des réalisations du processus  $x(t)$  vérifie, à chaque instant  $t$ , une loi normale  $G(x, \mu, \sigma)$  de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ :

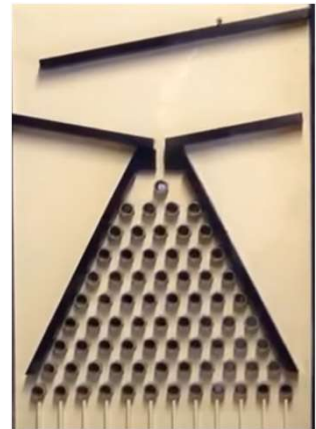
$$G(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

- ▶ En pratique, on choisira  $\mu = 0$  en considérant les variations  $\delta x = x - E[x(t)]$

# White and Gaussian noise: illustration



Densité de probabilité  
(estimation)



Video : Galton board

# Signal-to-noise ratio

- Définition : le rapport signal-sur-bruit mesure le degré de « pollution » du signal par le bruit

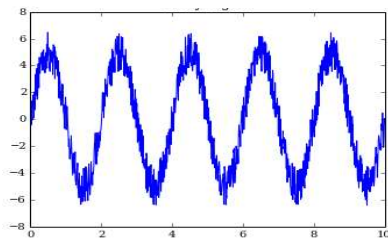
$$\xi_{\text{dB}} = \left( \frac{S}{B} \right)_{\text{dB}} = 10 \log \left( \frac{\bar{P}_{\text{signal}}}{\bar{P}_{\text{bruit}}} \right)$$

$$\bar{P}_{\text{bruit}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_x(\nu) d\nu = \Gamma_x(0) = \sigma^2$$

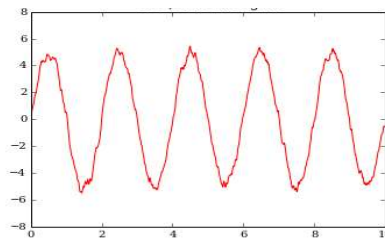
- Exemple : signal sinusoïdal bruité

$$s(t) = a_0 \cos(\omega t) + b(t)$$

$$\xi_{\text{dB}} = 20 \log \left( \frac{a_0}{\sigma \sqrt{2}} \right)$$



$\xi = 6 \text{ dB}$



$\xi = 23 \text{ dB}$

Téléphonie mobile :  $\xi = 10 \text{ dB}$

Téléphonie fixe :  $S/N = 40 \text{ dB}$

Hifi audio :  $S/N = 80 \text{ dB}$

## ■ Bruit thermique électronique

- ▶ Créé par l'agitation des électrons libres 'dans un conducteur à température ambiante, indépendamment de toute tension appliquée
- ▶ **Autres appellations** : bruit thermique, ou bruit de résistance, ou bruit Johnson (1927)

## ■ Bruit quantique

- ▶ Bruit de fond qui peut être modélisé par un processus de Poisson d'arrivées de flots de particules
- ▶ En **électronique** : le courant électrique n'est pas continu mais constitué de porteurs de charge élémentaires (en général des électrons)
- ▶ En **optique** : un flux lumineux est constitué d'un ensemble de photons.
- ▶ **Autres appellations** : bruit de grenaille (shot noise), bruit de Schottky (1915)

## ■ Autres bruits

- ▶ Bruit en  $1/f$  en électronique
- ▶ Bruit cosmique en astronomie
- ▶ Bruit d'émission spontanée amplifiée en communications optiques

# Thermal noise in a conductor (1/3)

## ■ Conducteur électrique résistif à la température d'équilibre T

- ▶ Déplacement aléatoire des électrons (agitation thermique)
- ▶ Chocs sur le réseau solide d'ions positifs du milieu



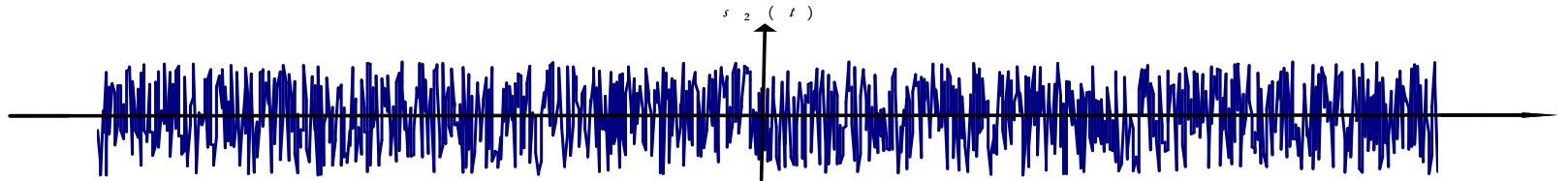
Constante de Boltzmann

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

- ▶ Energie cinétique moyenne d'un électron (par dimension) :

$$E = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} kT$$

- ▶ A température ambiante ( $T=290 \text{ K}$ ) :  $kT = 4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$
- ▶ Remarque :  $[J] = \text{W/Hz}$ ,  $kT$  est donc une densité spectrale de puissance moyenne (DSPM)





# Thermal noise in a conductor (2/3)

PAGE 21

## ■ Processus de bruit thermique

- ▶ Un micro-courant d'intensité aléatoire  $i(t)$  (**bruit**) est créé dans le conducteur, et par conséquent une micro-tension  $u(t)$  est générée aux bornes du dipôle résistif, en l'absence de toute tension extérieure appliquée.



- ▶ Le bruit thermique est un bruit **blanc additif, gaussien** (AGWN) et de **moyenne nulle**

- ▶ La densité spectrale de puissance de **courant moyen de bruit** est :

$$\gamma_i(\nu) = \frac{4kT}{R}$$

en  $A^2/Hz$

- ▶ La densité spectrale de puissance **de tension moyenne de bruit** est :

$$\gamma_u(\nu) = 4kTR$$

en  $V^2/Hz$

# Thermal noise in a conductor (3/3)

## ■ Puissance moyenne totale de tension de bruit thermique aux bornes de la résistance

$$P_U = \int_0^{\Delta\nu} \gamma_U(\nu) d\nu = 4kTR\Delta\nu \rightarrow \sigma_U^2 = 4kTR\Delta\nu \quad (\text{en V}^2)$$

relation de Nyquist

$\Delta\nu$  : bande-passante du détecteur

Température ambiante ( $T = 290 \text{ K}$ ) :  $kT = 4 \times 10^{-21} \text{ W/Hz}$

## ■ Puissance moyenne totale de courant de bruit thermique aux bornes de la résistance

$$P_I = \sigma_I^2 = \frac{4kT\Delta\nu}{R} \quad (\text{relation de Nyquist})$$

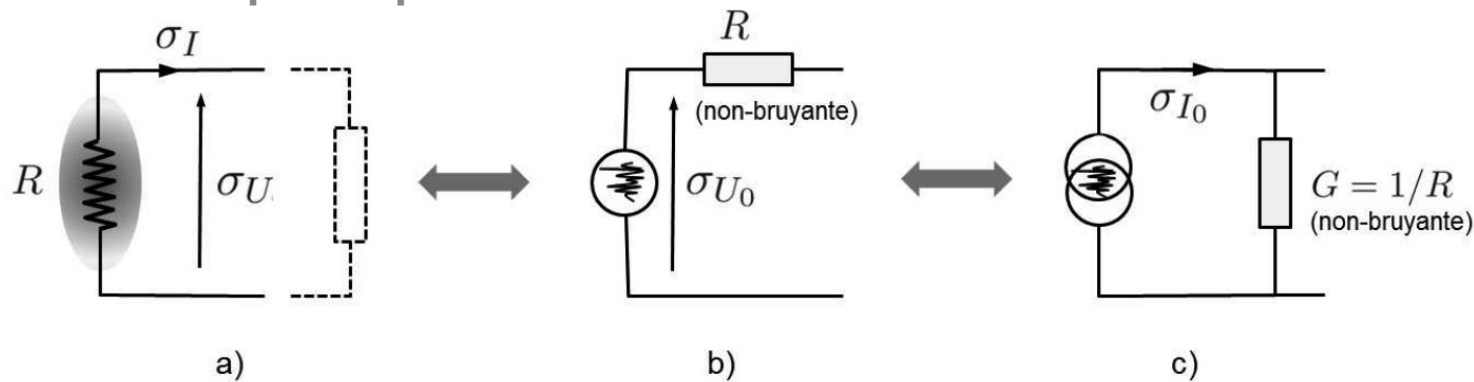
## ■ Exemple

- ▶ On considère une résistance  $R = 1 \text{ M}\Omega$  à la température  $T = 300 \text{ K}$  et l'on mesure le bruit avec un micro-voltmètre de bande-passante  $\Delta\nu = 100 \text{ MHz}$

$$P_U = \sigma_U^2 = 1,7 \cdot 10^{-9} \text{ V}^2 \quad U_{\text{eff}} = \sqrt{\sigma_U^2} = 41 \text{ }\mu\text{V.} \quad \text{Tension efficace de bruit}$$

# Modelling a noisy resistor

## ■ Schémas électriques équivalents



- a) Schéma de la résistance « bruyante »  $R$  à la température  $T$
- b) modèle équivalent de **Thévenin** : résistance non-bruyante **en série** avec un **générateur de tension** de bruit, de valeur efficace (à vide) :

$$u_{\text{eff}} = \sigma_{U_0} = 2\sqrt{kTR\Delta\nu} \quad \text{Unité : } V/\sqrt{\text{Hz}}$$

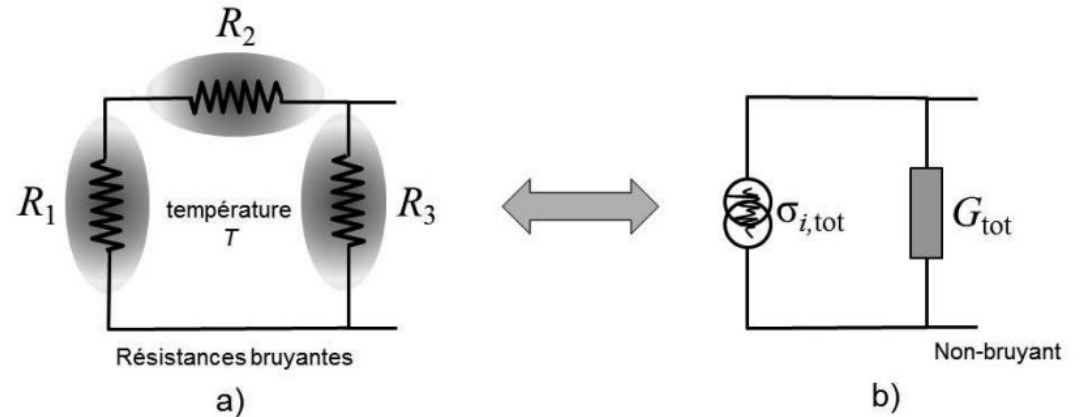
- c) Modèle équivalent de **Norton** : résistance non-bruyante **en parallèle** avec une conductance non-bruyante et générateur de courant de bruit, de valeur efficace (à vide) :

$$i_{\text{eff}} = \sigma_{I_0} = 2\sqrt{\frac{kT\Delta\nu}{R}} \quad \text{Unité : } A/\sqrt{\text{Hz}}$$

# Illustration: exercise solved

## Enoncé :

Déterminer le schéma équivalent de l'association des résistances  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  de la figure a), en exprimant les paramètres de courant de bruit (efficace) et de conductance (figure (b)).



## Corrigé :

On transforme tout d'abord le circuit proposé en 3.9 en un schéma équivalent comportant des résistances non bruyantes  $R_i$  et des générateurs de tension de bruit  $\sigma_{ui}$  (schéma 3.10.a). Les générateurs de tension de bruit  $u_1$  et  $u_2$  en série constituent un générateur

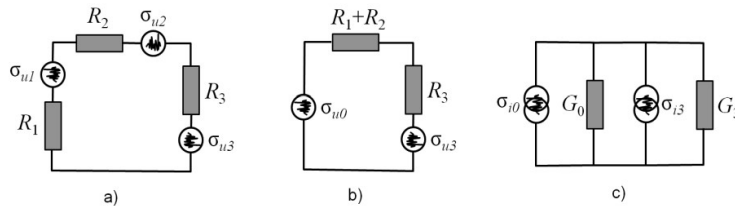


FIGURE 3.10 – Schémas équivalents.

aléatoire de tension instantanée  $u_0(t) = u_1(t) + u_2(t)$ , à moyenne nulle car chaque bruit est supposé centrée (et gaussien). On obtient alors le schéma 3.10.b. La variance (puissance moyenne) de  $u_0$  vaut donc  $\sigma_{u0}^2 = \mathbb{E}[u_0(t)^2] = \sigma_{u1}^2 + \sigma_{u2}^2 + 2\mathbb{E}[u_1(t)u_2(t)]$ . Le

dernier terme est nul car on suppose que les bruits générés par les deux résistances ne sont pas corrélés, et il vient donc  $\sigma_{u0} = \sqrt{\sigma_{u1}^2 + \sigma_{u2}^2}$ . La transformation Thévenin vers Norton du schéma 3.10.b fournit alors

$$\sigma_{i0} = \frac{\sqrt{\sigma_{u1}^2 + \sigma_{u2}^2}}{(R_1 + R_2)^2} \quad G_0 = \frac{1}{R_1 + R_2} \quad \sigma_{i3} = \frac{\sigma_{u3}}{R_3} = \quad G_3 = \frac{1}{R_3}$$

On aboutit enfin au schéma demandé en ajoutant les conductances ( $G_{\text{tot}} = G_0 + G_3$ ) et les variances de courant de bruit ( $\sigma_{i,\text{tot}}^2 = \sigma_{i0}^2 + \sigma_{i3}^2$ ).

# Thermal noise : the case of very high frequencies

- Pour le bruit thermique, le cas des **très hautes fréquences** n'est pas traité convenablement par les considérations de physique classique. Il présente de nombreuses analogies avec le **rayonnement du corps noir**, et comme pour ce dernier, nécessite une approche par la physique quantique.
- La densité de spectrale de puissance moyenne de bruit :
  - ▶ est donnée par la loi de Boltzmann :
 

$$\gamma(\nu) = \frac{4Rh\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$   
 (Constante de Planck)
  - ▶  $h\nu$  et  $kT$  s'expriment en Joule, et pour  $T = 290\text{K}$ ,  $kT = 4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$ , soit  $kT = -174 \text{ dBm/Hz}$
  - ▶ Approximation aux « basses fréquences » :  $h\nu \ll kT$  (pour  $\nu \ll 1000 \text{ GHz}$ )
 

$\gamma(\nu) \simeq 4kTR$
- **Conclusion** : on retrouve la densité de spectrale constante (bruit blanc) établie précédemment