351

Fourier-Analyse und Synthese

Maximilian Sackel
Maximilian.sackel@gmx.de

Philip Schäfers
phil.schaefers@gmail.com

Durchführung: 12.01.2016

Abgabe: 19.01.2016

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theoretische Grundlage

Periodische Funktionen haben die Eigenschaft sich einerseits periodisch im Raum

$$f(x + D) = f(x) \ , \tag{1}$$

als auch periodisch in der Zeit

$$f(t + T) = f(t) \tag{2}$$

zu wiederholen. Dabei ist T die Periodendauer und D die Distanz nach dem sich ein Vorgang wiederholt. Solche Vorgänge lassen sich mittels der 2π periodoschen Funktionen Sinus und Cosinus beschreiben, welche die Form

$$f(t) = asin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \ , \tag{3}$$

$$f(t) = acos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \tag{4}$$

haben. Mittels des Fourierschen Theorem lassen sich sämtliche periodische Vorgänge in der Natur, mit Hilfe der beiden Funktionen beschreiben.

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{\mathrm{n}}cosn\frac{2\pi}{T}t + b_{\mathrm{n}}sinn\frac{2\pi}{T}t\right) \tag{5}$$

Vorraussetzung ist jedoch, dass die Reihe gleichmäßig konvergiert. Die Koeffizienten lassen sich nach

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{2}{T}\int_T^0 f(t)cosn\frac{2\pi}{T}tdt \tag{6}$$

$$b_{\mathrm{n}} = \frac{2}{T}\int_T^0 f(t)sinn\frac{2\pi}{T}tdt \tag{7}$$

berechnen. Dabei treten nur vielfache der ν_1 Grundfrequenz auf, welche als harmonische Oberschwingung bezeichnet wird. Beim Auftragen der Amplitude gegen die Oberwellen ergibt sich ein Linienspektrum, bei welchen die Amplituden für $n \to\to \infty$ gegen

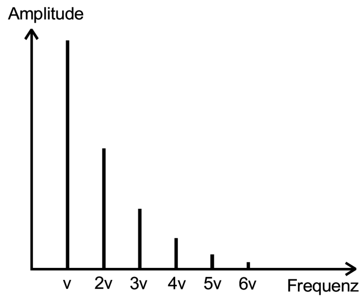

Abbildung 1: Frequenzspektrum einer periodischen Schwingung

null gehen sollte, wie man Abbildung 1 entnehmen kann. Falls es sich bei der fourier-analysierten Funktion nicht um eine Periodische Funktion handeln sollte, ergibt sich dort ein kontinuierliches Spektrum. Mit Hilfe der Fourier-Transformation ist es möglich das Frequenzspektrum sowohl periodischer als auch nicht-periodischer Funktion zu bestimmen.

$$g(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\nu t} dt \tag{8}$$

Da im Versuch nur über ein endlich langes Zeitintervall integriert werden kann, sind aufgrund der nicht periodizität Nebenmaxima zu erwarten.

1.1 Fehlerrechnung

Sämtliche Fehlerrechnungen werden mit Hilfe von Python 3.4.3 durchgeführt.

1.1.1 Mittelwert

Der Mittelwert einer Messreihe $x_1, ..., x_\mathrm{n}$ lässt sich durch die Formel

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} x_k \tag{9}$$

berechnen. Die Standardabweichung des Mittelwertes beträgt

$$\Delta\overline{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} (x_\mathrm{k} - \overline{x})^2} \tag{10}$$

1.1.2 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

Wenn $x_1, ..., x_\mathrm{n}$ fehlerbehaftete Messgrößen im weiteren Verlauf benutzt werden, wird der neue Fehler Δf mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung angegeben.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\mathrm{k}}\right)^2 \cdot (\Delta x_\mathrm{k})^2} \tag{11}$$

1.1.3 Lineare Regression

Die Steigung und y-Achsenabschnitt einer Ausgleichsgeraden werden gegebenfalls mittels Linearen Regression berechnet.

$$y = m \cdot x + b \tag{12}$$

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \tag{13}$$

$$b = \frac{\overline{x^2}\,\overline{y} - \overline{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \tag{14}$$

2 Durchführung und Aufbau

2.1 Vorbereitung

Zur Vorbereitung auf den Versuch sollen die Fourier-Koeffizienten von drei verschiedenen periodischen Schwingungen berechnet werden. Dabei wird bei der Parametrisierung darauf geachtet, dass die Funktionen entweder grade oder ungerade sind.

2.1.1 Sägezahn

$$a_{\mathrm{n}} = 0 \tag{15}$$

$$b_{\mathrm{n}} = -\frac{T}{n\pi}(-1)^n \tag{16}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{T}{n\pi}(-1)^n sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \tag{17}$$

2.1.2 Rechteck

$$a_{\mathrm{n}} = 0 \tag{18}$$

$$b_{\mathrm{n}} = \frac{2T}{n\pi} - \frac{2T}{n\pi}(-1)^n \tag{19}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4T}{(2n-1)\pi} sin\left(\frac{2\pi(2n-1)}{T}t\right) \tag{20}$$

2.1.3 Dreieck

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{4T}{n^2\pi^2} - (-1)^n \frac{4T}{n^2\pi^2} \tag{21}$$

$$b_{\mathrm{n}} = 0 \tag{22}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{8T}{(2n-1)^2\pi^2} cos\left(\frac{2\pi(2n-1)}{T}t\right) \tag{23}$$

2.2 Fourier-Synthese

Mittels eines Oberwellengenerator sollen die vorher berechneten Spannungen möglichst genau aproximiert werden. Dazu werden zunächst die harmonische Oberschwingung auf den ersten Channel des Osziloskops und auf den zweiten ein vielfaches der Oberschwingung gelegt. Mittels des X-Y-Betriebs des Oszilisskop kann die Phase der n-ten Oberschwingung mit der, der harmonischen Abgestimmt werden. Dies geschieht durch die Lissajour Figuren. Anschließend wird mittels eines AC-Millivoltmeters die in der Vorbereitung berechnete Amplitude für die einzelnen Oberwellen eingestellt. Nachdem die Amplituden auf das richtige Abfallverhalten eingestellt wurden, wird das Oszilliskop in den X-T-Betrieb gestellt und die einzelenen Oberwellen addiert. Von dem Graphen der auf dem Oszilloskopen erscheint wird ein Thermodruck gemacht.

2.3 Fourier-Analyse

Das Signal des Funktionsgenerator wird direkt an ein Oszilloskop angeschlossen. Dieses Foyetransformiert das Signal, nachdem man im Untermenü die entsprechende Einstellung getroffen hatt. Dabei ist darauf zu achten das die Skalierung hinreichend klein ist um genügend Peaks des Linienspektrums zu sehen. Die Nebenmaxima die durch die endliche Integration einer Zeit entstehen, sollen beim Ablesen vernachlässigt werden. Es sollen die Spannungswerte der Amplituden der Oberwelle entsprechend notiert werden um in der Auswertung eine Aussage über deren Abfallverhalten treffen zu können. Das Messprogramm wird für die 3 vorher berechneten Funktionen durchgeführt.

3 Auswertung

4 Diskussion