

Versuch 408

## **Geometrische Optik**

Maximilian Sackel  
Maximilian.sackel@gmx.de

Philip Schäfers  
phil.schaefers@gmail.com

Durchführung: 26.04.16

Abgabe: 03.05.16

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

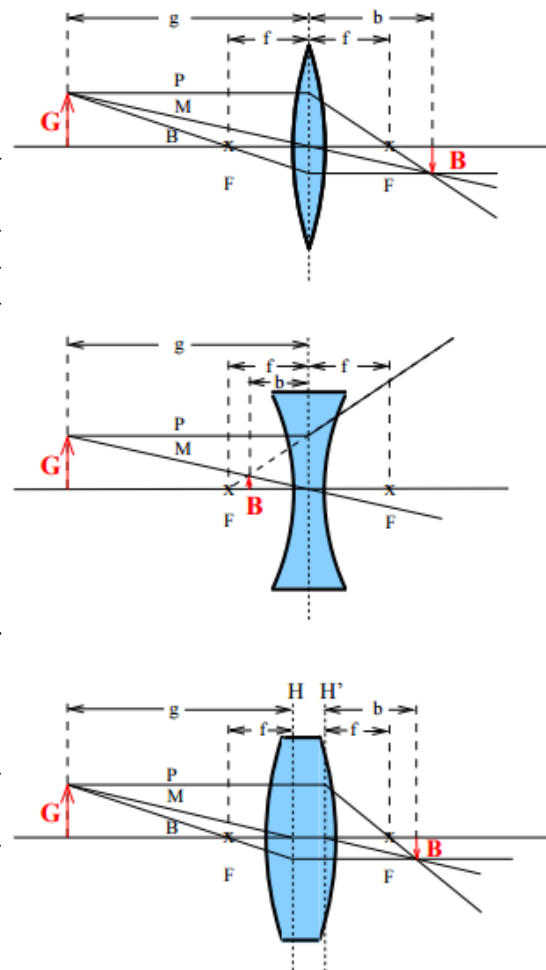
<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theoretische Grundlage</b>	<b>3</b>
2.1 Bestimmung der Brennweite einer Linse nach Bessel . . . . .	4
2.2 Bestimmung der Brennweite eines Linsensystems nach Abbe . . . . .	5
<b>3 Fehlerrechnung</b>	<b>5</b>
3.1 Mittelwert . . . . .	5
3.2 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung . . . . .	6
3.3 Lineare Regression . . . . .	6
<b>4 Durchführung und Aufbau</b>	<b>6</b>
4.1 Aufbau und Durchführung um das Abbildungsgesetz und die Linsengleichung zu verifizieren . . . . .	6
4.2 Bestimmung der Brennweite einer Linse nach der Methode von Bessel . .	6
4.3 Bestimmung der Brennweite eines Linsensystems nach Abbe . . . . .	7
<b>5 Auswertung</b>	<b>7</b>
5.1 Verifizieren der Linsengleichung . . . . .	7
5.2 Bestimmung einer Bekannten sowie Unbekannten Brennweite . . . . .	7
5.3 Besselmethode . . . . .	8
5.4 Methode nach Abbe . . . . .	9
<b>6 Diskussion</b>	<b>11</b>
<b>Literatur</b>	<b>11</b>

# 1 Zielsetzung

Ziel des Versuches ist es die Brennweite  $f$  von verschiedenen Linsen mit zwei Methoden zu bestimmen. Dazu wird zunächst das Abbildungsgesetz und die Linsengleichung verifiziert. Zusätzlich wird die chromatische Abberation untersucht.

## 2 Theoretische Grundlage

Im Allgemeinen werden Linsen aus einem Material gefertigt, welches einen anderen Brechungsindex aufweist, als die umgebende Luft. Durch den unterschiedlichen Brechungsindex wird das eintreffende Licht, nach dem Brechungsgesetz, gebrochen. Die Linsen werden in zwei Gruppen eingeteilt: die Sammellinsen und die Zerstreuungslinsen. Die Sammellinsen werden zum Linsenrand dünner, wodurch parralleles Licht im Brennpunkt gebündelt wird. Bei Sammellinsen sind die Brennweite  $f$  und die Bildweite  $b$  immer positiv und es entsteht ein reelles Bild. Im Gegensatz dazu wird die Zerstreuungslinse zum Linsenrand hin breiter. Außerdem sind Brennweite  $f$  und Bildweite  $b$  negativ. Das entstehende Bild wird als virtuell bezeichnet. Die Abbildung (1) zeigt die Bildkonstruktion von einer dünnen Sammellinse (Oben), einer dünnen Zerstreuungslinse (Mitte) und einer dicken Sammellinse (Unten). Bei dünnen Linsen wird die Brechung auf die Mittelebene der Linse reduziert. Dies ist bei dicken Linsen nicht mehr möglich und es werden zwei Hauptebenen eingeführt an denen sich das Licht bricht. Zur Bildkonstruktion werden drei ausgezeichnete Strahlen verwendet:



**Abbildung 1:** Bildkonstruktion für drei ausgewählte Linsen. [1]

Der Parrallelstrahl  $P$  läuft vom Gegenstand  $G$  parrallel zur optischen Achse zur Linse und wird dort so gebrochen, dass er durch den Bildpunkt  $B$  läuft.

Der Mittelpunktstrahl läuft vom Gegenstand  $G$  direkt zum Bildpunkt  $B$  ohne durch die Linse gebrochen zu werden.

Der Brennpunktstrahl läuft vom Gegenstand  $G$  zur Linse und wird dort so gebrochen, dass er danach parrallel zur optischen Achse läuft und die beiden anderen Strahlen im Bildpunkt  $B$  schneidet.

Mithilfe der Strahlensätze lässt sich das Abbildungsgesetz, an den Fällen in Abbildung (1), herleiten:

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} . \quad (1)$$

$B$  und  $G$  entsprechen der Bild- bzw. Gegenstandsgröße und  $b$  und  $g$  der Bild- bzw. Gegenstandsweite. Für dünne Linsen folgt aus dem Abbildungsgesetz und der Bildkonstruktion die Linsengleichung:

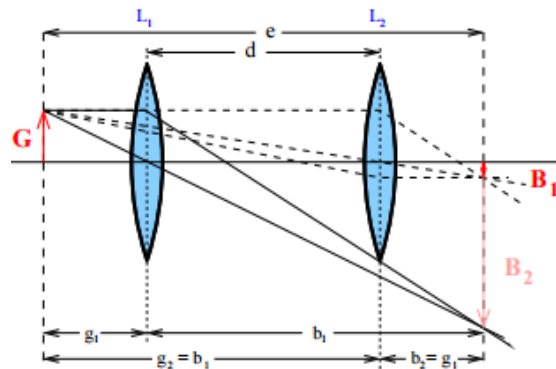
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} . \quad (2)$$

Bei dicken Linsen und Linsensystemen wird nun die Mittelebene durch zwei Hauptebenen  $H$  und  $H'$  ersetzt an denen die Strahlen gebrochen werden. Die Brennweite, die Gegenstandsweite und die Bildweite werden zu der jeweiligen Hauptebene bestimmt, dadurch behält die Linsengleichung ihre Gültigkeit. Die Vereinfachung der Brechung an der Mittelebene bzw. der Hauptebenen nur für achsennahe Strahlen, da bei achsenfernen Strahlen das Licht stärker gebrochen wird. Bei der sphärischen Abberration liegt der Brennpunkt von achsennahen Strahlen weiter weg von der Linse als bei achsenfernen Strahlen. Durch dieses Phänomen wird das Bild unscharf, dies kann allerdings durch eine Irisblende, welche die achsenfernen Strahlen ausblendet, gelöst werden.

Außerdem muss beachtet werden, dass der Brechungsindex von der Wellenlänge, des einfallenden Lichtes, abhängt. Dadurch entsteht die chromatische Abberration. Das heißt blaues Licht wird stärker gebrochen als rotes Licht.

## 2.1 Bestimmung der Brennweite einer Linse nach Bessel

Dafür wird der Abstand  $e$  und der Abstand  $d$  konstant gehalten (siehe Abbildung (2)).



**Abbildung 2:** Schematische Darstellung für die Methode von Bessel. [1]

Der Abstand  $e$  ist gleich

$$e = g_1 + b_1 = g_2 + b_2$$

und  $d$  entspricht

$$d = g_1 - b_1 = g_2 - b_2 .$$

Durch einsetzen lässt sich die Brennweite der Linse zu

$$f = \frac{e^2 - d^2}{4e} \quad (3)$$

bestimmen.

## 2.2 Bestimmung der Brennweite eines Linsensystems nach Abbe

Dafür muss neben der Brennweite  $f$ , auch die Lage der beiden Hauptebenen  $H$  und  $H'$  ermittelt werden. Dies geschieht über das Abbildungsgesetz (siehe Gl. (1)). Wie in Abbildung (3) zu erkennen ist, werden dazu die Bild- und Gegenstandsweiten  $g'$  und  $b'$  bezüglich eines beliebigen Punktes  $A$  gemessen. Aus den Formeln

$$g' = g + h = f \cdot \left(1 + \frac{1}{V}\right) + h \quad (4)$$

und

$$b' = b + h' = f \cdot (1 + V) + h' \quad (5)$$

ergeben sich dann die Brennweite  $f$  und die Lage der Hauptebenen.

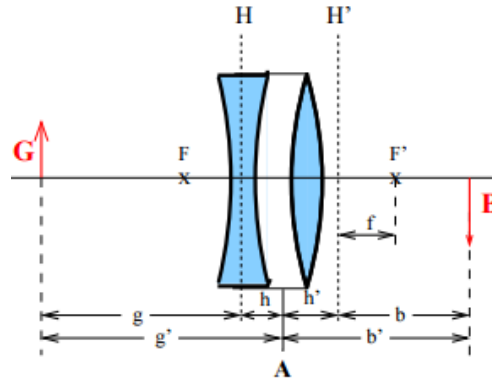


Abbildung 3: Schematische Darstellung für die Methode von Abbe. [1]

## 3 Fehlerrechnung

Sämtliche Fehlerrechnungen werden mit Hilfe von Python 3.4.3 durchgeführt.

### 3.1 Mittelwert

Der Mittelwert einer Messreihe  $x_1, \dots, x_n$  lässt sich durch die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad (6)$$

berechnen. Die Standardabweichung des Mittelwertes beträgt

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \quad (7)$$

### 3.2 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

Wenn  $x_1, \dots, x_n$  fehlerbehaftete Messgrößen im weiteren Verlauf benutzt werden, wird der neue Fehler  $\Delta f$  mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung angegeben.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \cdot (\Delta x_k)^2} \quad (8)$$

### 3.3 Lineare Regression

Die Steigung und y-Achsenabschnitt einer Ausgleichsgeraden werden gegebenenfalls mittels Linearen Regression berechnet.

$$y = m \cdot x + b \quad (9)$$

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (10)$$

$$b = \frac{\overline{x^2y} - \bar{x}\overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (11)$$

## 4 Durchführung und Aufbau

### 4.1 Aufbau und Durchführung um das Abbildungsgesetz und die Linsengleichung zu verifizieren

Dazu wird eine optische Bank aufgestellt, an deren einem Ende sich eine Halogenlampe befindet und am anderen Ende ein Schirm. Dazwischen wird ein Gegenstand "Perl L" und eine Sammellinse mit bekannter Brennweite  $f$  positioniert. Nun wird bei gegebener Gegenstandsweite  $g$ , die Position des Schirms so lange variiert bis das Bild scharf abgebildet wird und die Wertepaare  $(g_i, b_i)$  werden notiert. Diese Messung wird für mindestens 9 weitere Gegenstandsweiten wiederholt. Dann werden alle Wertepaare in ein Koordinatensystem eingezeichnet und der Punkt  $A$  in dem sich die Geraden schneiden stellt die Brennweite  $f$  der Linse dar.

### 4.2 Bestimmung der Brennweite einer Linse nach der Methode von Bessel

Dazu werden der Schirm und der Gegenstand im Abstand  $e$  voneinander aufgestellt und die Linse dazwischen positioniert. Nun wird die Linse vom Gegenstand in Richtung des Schirms bewegt, bis das Bild scharf abgebildet wird und es werden  $g_1$  und  $b_1$  notiert. Danach wird die Linse weiter in Richtung des Schirms bewegt, bis das Bild ein weiteres mal scharf abgebildet wird und es werden  $g_2$  und  $b_2$  notiert. Dieses Verfahren wird für 9 weitere Abstände  $e$  wiederholt.

Um die chromatische Abberation zu untersuchen, werden für jeweils 5 Abstände  $e$ , ein roter und ein blauer Filter vor den Gegenstand gesetzt und analog zu dem oberen Verfahren vorgegangen werden.

### 4.3 Bestimmung der Brennweite eines Linsensystems nach Abbe

Dazu werden auf der optischen Bank der Gegenstand, eine Zerstreuungslinse, eine Sammellinse und der Schirm in eben dieser Reihenfolge aufgebaut. Der Abstand zwischen den beiden Linsen muss für die gesamte Messung konstant gehalten werden. Nun wird das Linsensystem verschoben bis ein scharfes Bild auf dem Schirm zu erkennen ist und die Bild- und Gegenstandsweiten  $b'$  und  $g'$  werden zu einem Referenzpunkt  $A$  gemessen. Hier wird der Referenzpunkt  $A$  auf die Mittelebene der Sammellinse gelegt. Zusätzlich werden die Bild- und Gegenstandsgrößen  $B$  und  $G$  gemessen. Diese Messung wird für 9 weitere Gegenstandsweiten durchgeführt.

## 5 Auswertung

### 5.1 Verifizieren der Linsengleichung

Um die Gleichung 1 und 2 zu verifizieren sind die dafür Relevanten Messwerte in Tabelle 1 aufgetragen. Die Gegenstandsgröße  $G$  des Pearl L beträgt  $3.0 \cdot 10^{-2}$  m und die Vergrößerungen werden entsprechen  $V_1 = \frac{b}{g}$  und  $V_2 = \frac{B}{G}$  berechnet.

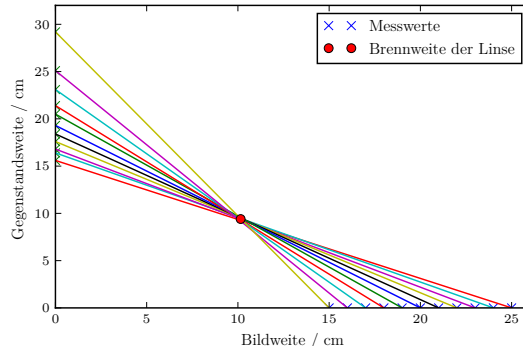
$g/10^{-2}$ m	$b/10^{-2}$ m	$B/10^{-3}$ m	$V_1$	$V_2$	$\left  \frac{V_1 - V_2}{V_1} \right  / \%$
25	15.6	2.0	0.62	0.66	6.6
24	16.4	2.0	0.68	0.66	3.0
23	16.8	2.2	0.73	0.73	0.0
22	17.6	2.3	0.80	0.77	3.8
21	18.4	2.7	0.88	0.90	2.3
20	19.3	2.7	0.97	0.90	7.2
19	20.5	3.1	1.08	1.03	4.7
18	21.4	3.4	1.18	1.13	4.2
17	23.1	4.2	1.35	1.40	3.7
16	25.1	4.7	1.56	1.57	0.6
15	29.2	5.7	1.94	1.90	2.1

**Tabelle 1:** Verifizierung des Abbildungsgesetzes

### 5.2 Bestimmung einer Bekannten sowie Unbekannten Brennweite

Desweiteren wird zur Ermittlung der Brennweite ein Plot erstellt, wobei die Gegenstandsweiten auf die Y-Achse des Koordinatensystems aufgetragen werden und mit den entsprechenden Bildweiten, welche auf der X-Achse aufgetragen sind, verbunden. Aus dem Schnittpunkt der Geraden lässt sich die Brennweite der Linse Ablesen. Aus Abbildung 4 wird die Brennweite

$$f_{\text{abgelesen}} = (9.8 \pm 0.7) 10^{-2} \text{ m} \quad (12)$$



**Abbildung 4:** Brennweite einer bekannten Linse

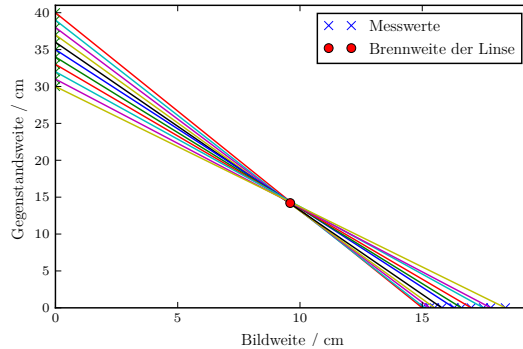
abgelesen. Die vom Hersteller angegeben Brennweite beträgt

$$f_{\text{Hersteller}} = 10 \cdot 10^{-2} \text{ m} . \quad (13)$$

Die Messung wird für eine Linse mit unbekannter Brechkraft wiederholt und aus dem Diagramm 5 lässt sich eine Brennweite von

$$f_{\text{unbekannt}} = (11.9 \pm 4.6) \text{ m} \quad (14)$$

ablesen.



**Abbildung 5:** Brennweite einer unbekannten Linse

### 5.3 Besselmethode

Die entsprechenden Messdaten zu dem Versuch sind in Tabelle 2 zu finden. Dabei wurde die Brennweite nach Formel 3 berechnet, wobei der Abstand  $d = g - b$  und die Gegenstandsweite als  $g = e - b$  dem entsprechend definiert ist. Aus Mittlung der Einzelmesswerte erhält man durch die Besselmethode eine experimentell bestimmte Brennweite von

$$f_{\text{exp}} = (9.7 \pm 0.1) 10^{-2} \text{ m} . \quad (15)$$



$e / 10^{-2} \text{ m}$	$g_1 / \text{ m}$	$g_2 / \text{ m}$	$f / 10^{-2} \text{ m}$	$f / 10^{-2} \text{ m}$
100.0	11.5	89.3	10.18	9.48
97.5	11.5	86.9	10.14	9.41
95.0	11.6	84.4	10.18	9.61
92.5	11.6	81.6	10.15	9.58
90.0	11.7	79.1	10.18	9.61
87.5	11.7	76.5	10.14	8.74
85.0	11.8	75.1	10.16	7.94
82.5	11.9	73.6	10.18	9.56
80.0	11.9	68.9	10.13	9.51
77.5	12.1	66.4	10.21	9.37
			$10.16 \pm 0.01$	$9.3 \pm 0.1$

**Tabelle 2:** Brennweite von weißem Licht

Für den Versuch wurde eine Brennweite von

$$f_{\text{Hersteller}} = 10 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (16)$$

verwendet. Anschließend wird die Brechkraft von farbigen Licht bestimmt. Dazu wird zunächst ein roter und anschließend ein blauer Farbfilter vor die Lampe gespannt. Aus

$e / \text{ m}$	$g_{\text{rot}}/10^{-2} \text{ m}$	$b_{\text{rot}}/10^{-2} \text{ m}$	$f_{\text{rot}}/10^{-2} \text{ m}$	$g_{\text{blau}}/10^{-2} \text{ m}$	$b_{\text{blau}}/10^{-2} \text{ m}$	$f_{\text{blau}}/10^{-2} \text{ m}$
100	89.3	10.7	9.6	89.3	10.7	9.6
90	79.1	10.9	9.6	79.3	10.7	9.4
80	68.8	11.2	9.6	69.0	11.0	9.5
70	58.5	11.5	9.6	58.6	11.4	9.4
60	48.0	12.0	9.6	48.4	11.6	9.4

**Tabelle 3:** Brennweite von rotem und blauem Licht

der Tabelle 3 ergibt sich für rotes Licht eine Brennweite von

$$f_{\text{rot}} = (9.60 \pm 0.01) 10^{-2} \text{ m} \quad (17)$$

und für blaues Licht eine Brennweite von

$$f_{\text{blau}} = (9.49 \pm 0.02) 10^{-2} \text{ m} . \quad (18)$$

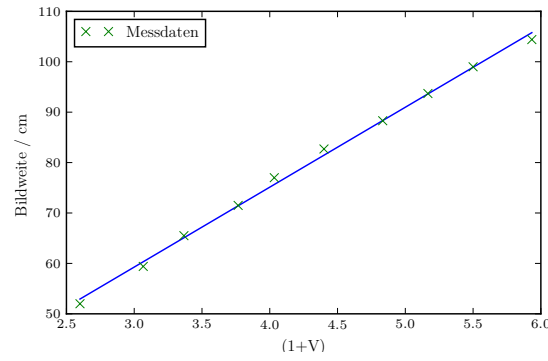
## 5.4 Methode nach Abbe

Es sollen die Hauptebene und die Brennweite mit Hilfe der Formeln 4 und 5 bestimmt werden. Es wird eine Zerstreuungslinse und Fokussierlinse jeweils von 10 cm Brennweite im Abstand von 6 cm verwendet. Die restlichen Messwerte sind in Tabelle 4 aufgetragen.

$g$ / cm	$b$ / cm	$V$
104.4	15.6	4.94
99.0	16.0	4.50
93.7	16.3	4.17
88.3	16.7	3.83
82.7	17.3	3.40
77.0	18.0	3.03
71.5	18.5	2.77
65.5	19.5	2.37
59.4	20.6	2.07
52.0	23.0	1.60

**Tabelle 4:** Messwerte zur Bestimmung der Brennweite mittels Abbemethode

Es wird zunächst eine lineare Regression durchgeführt und die Fitparameter ermittelt. Anhand derer kann man aus der Steigung des Graphens und den Schnittpunkten mit der Achse die Hauptebenen und die Brennweiten berechnen. Der Fit ergibt die Brennweiten



**Abbildung 6:** Gegenstandsweiten Fit

und die Laage der Hauptebenen

$$f_g = (15.9 \pm 0.3) \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (19)$$

$$f_b = (17.5 \pm 0.1) \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (20)$$

$$h = (11 \pm 1) \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (21)$$

$$h' = (-5.30 \pm 0.18) \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (22)$$

Die Theoretische Brennweite des Systems berechnet sich aus modifikation der Formel 2 um einen Korrekturfaktor zu

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2} \quad (23)$$

$$f = 16.6 \cdot 10^{-2} \text{ m} . \quad (24)$$

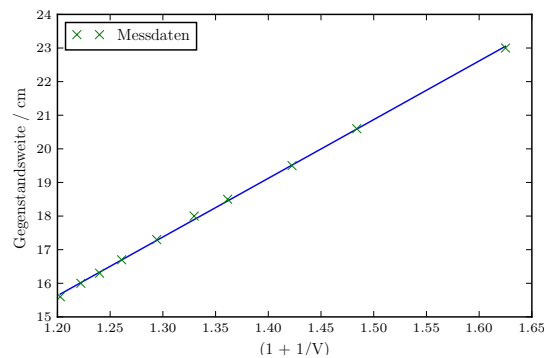


Abbildung 7: Bildweiten Fit

## 6 Diskussion

Generell ist die Bestimmung eines Scharfen Bildes recht Objektiv. Es kann nicht immer ein eindeutiger Punkt gefunden werden, sondern eher ein ganzer Bereich wo das Bild scharf zu sein scheint. Daher wurde Versucht die Schärfe an bestimmten Merkmalen an der Gestalt des Bildes reproduzierbar zu machen. Die Linsengleichung scheint als bestätigt da die Werte lediglich 0 bis 8 % von den theoretischen abweichen und dies im Rahmen der Messunsicherheit dieses Versuches aufgrund des oben gennante Problems liegt. Die Bekannte Linse wurde mit einem Messfehler von 2 % bestimmt, was als gelungene Messung eingestuft werden kann. Bei der Unbekannten Linse beträgt der Fehler 26 %. Dabei fällt auf das wenn der Brennpunkt im Plott auf die y-Achse projiziert werden würde, dies einer Brennweite von 15 cm entsprechen würde. Da aber der Fehler bei dem Brennpunkt welcher auf die x-Achse jedoch groß ist, kommt solch ein großer Fehler zu stande. Dies liegt womöglich daran, dass ein Bild welches rein Objektiv als scharf empfunden wird, dies nicht wirklich ist. Die mittels der Besselmethode bestimmte Brennweite für weißes Licht beträgt 9.7 cm. Dies entspricht einer relativen Abweichung von 3 %. Desweiteren wurde ermittelt das die Brechkraft der Linse bei rotem licht geringer als die vom blauen ist. Die mittels Abbe Methode ermittelten Brennweiten weichen um bis zu 6 % von dem Theorie wert ab. Mittelt man die beiden ermittelten Messwerte zuerst ist die Messunsicherheit kleiner als 1 % .

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 408, Geometrische Optik*. <http://129.217.224.2/HOME-PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V408.pdf>, 2016.