VERSUCH NUMMER

TITEL

Maximilian Sackel
Maximilian.sackel@gmx.de

Philip Schäfers
phil.schaefers@gmail.com

Durchführung: DATUM

Abgabe: DATUM

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theoretische Grundlage

1.1 Ziel des Versuches

In den folgenden Versuchen wird die Amplitude und der effektive Dämpfungswiderstand eines gedämpften Schwingkreises untersucht. Zusätzlich wird ermittelt bei welchem Widerstand der aperiodische Grenzfall eintritt. Zuletzt wird bei einer erzwungenen Schwingung die Frequenzabhängigkeit der Spannung und der Phasenverschiebung untersucht.

1.1.1 Differentialgleichung für die gedämpfte Schwingung

Ein Schwingkreis besteht im Idealfall aus einer Spule mit der Induktivität L und einem Kondensator mit der Kapazität C, die in diesem System eingespeicherte Energiemenge wird immer wieder zwischen dem Kondensator und der Spule ausgetauscht. Während sich der Kondensator entlädt, entsteht in der Spule durch Induktion ein Magnetfeld. Sobald das Magnetfeld zusammenbricht wird der Kondensator wieder aufgeladen und der Vorgang beginnt erneut.
Anders ist das bei einem gedämpften oder realen Schwingkreis, da dieser noch einen Widerstand R besitzt. Über diesen Widerstand wird laufend Energie in Wärme umgewandelt und geht entsprechend in dem Schwingkreis verloren. Daraus folgt das R als Dämpfungsfaktor anzusehen ist.

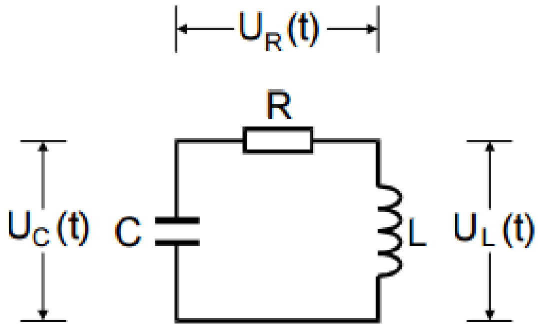

Abbildung 1: Schematischer Aufbau eines RCL-Schwingkreises [2, S. 284].

Die in der Abbildung 1 eingezeichneten Spannungen U_R, U_C und U_L sind die Spannungen die über die entsprechenden Bauteile abfallen. Das zweite Kirchhoffsche Gesetzt besagt das sich alle Teilspannungen einer Masche zu null addieren, damit folgt:

$$U_\text{R}(t) + U_\text{C}(t) + U_\text{L}(t) = 0 \ . \tag{1}$$

Da nun

$$\begin{aligned} U_\text{R}(t) &= RI(t) \quad , \\ U_\text{C}(t) &= \frac{Q(t)}{c} \quad \mathit{und} \\ U_\text{L}(t) &= L\frac{dI}{dt} \end{aligned}$$

ist, folgt mit weiteren umformungen

$$\ddot{I}(t) + \frac{R}{L}\dot{I}(t) + \frac{1}{LC}I(t) = 0\ . \tag{2}$$

Die Differentialgleichung hat folgende Lösung:

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t}\left(Ae^{i2\pi\nu t} + Be^{-i2\pi\nu t}\right)\ , \tag{3}$$

wobei die Abkürzungen

$$\mu := \frac{R}{4\pi L}$$
$$und\ \ \nu := \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

verwendet wurden.
Im folgenden müssen nun zwei Fälle unterschieden werden.

Erster Fall:

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$$

Im reelen Fall, lässt sich Formel 3 mit Hilfe der Eulerschen Formel zu

$$I(t) = Ce^{-2\pi\mu t}\cos(2\pi\nu t + \eta) \tag{4}$$

umformen. Unter der genannten Bedingung ist zu erkennen das es sich um eine gedämpfte Schwingung handelt, die für $t \to \infty$ gegen Null strebt. Die Abklingdauer ist definiert als:

$$T_{\text{ex}} = \frac{1}{2\pi\mu}\ . \tag{5}$$

Nach der Abklingdauer hat sich die Amplitude auf den e-ten Teil ihres ursprünglischen Wertes verringert.

Zweiter Fall:

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$$

Im imaginären Fall, kann Formel 3, nach einer hinreichend großen Zeit zu

$$I(t) \propto e^{-(2\pi\mu - i2\pi\nu)t} \tag{6}$$

umgeschrieben werden.
Von Bedeutung ist der Speziallfall:

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_{\text{ap}}^2}{4L^2} \qquad d.h. \nu = 0\ ,$$
$$dann\ wird$$
$$I(t) = Ce^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}}\ .$$

Der Speziallfall stellt den aperiodischen Grenzfall dar, die Amplitude des Stromes fällt hier am schnellsten ab ohne über zu schwingen.

1.1.2 Differentialgleichung für die erzwungene Schwingung

In diesem Versuch wird ein von außen angeregter RCL-Schwingkreis untersucht. Dafür wird ein Sinusgenerator integriert. Der schematische Aufbau ist in Abbildung 2 dargestellt.

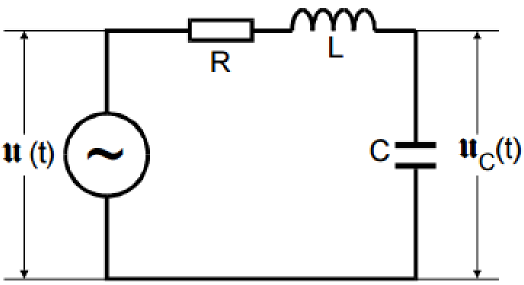

Abbildung 2: Schematischer Aufbau eines angeregten RCL-Schwingkreises [2, S. 289].

Die Differentialgleichung für dieses Problem ist nun inhomogen und lautet:

$$LC\ddot{U}_\mathrm{C}(t) + RC\dot{U}_\mathrm{C}(t) + U_\mathrm{C}(t) = U_0 e^{i\omega t} \ . \tag{7}$$

Daraus folgt die Lösung für die Spannung zu:

$$U = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - i\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \ . \tag{8}$$

Die Phasenverschiebung ergibt sich aus dem Vergleich von Real- und Imaginärteil von U:

$$\Phi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right) \tag{9}$$

Es wird deutlich, dass sich die Frequenzen ω_1 und ω_2, bei denen die Phasenverschiebung die Werte $\frac{\pi}{4}$ bzw. $\frac{3\pi}{4}$ hat, zu

$$\omega_{1,2} = \pm\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \tag{10}$$

ergeben. Der Betrag von U entspricht der gesuchten Lösungsfunktion $U_\mathrm{C}(\omega)$, damit folgt:

$$U_\mathrm{C}(\omega) = |U| = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \ . \tag{11}$$

Es wird deutlich das $U_\mathrm{C}(\omega)$ für $\omega \to \infty$ gegen Null strebt und für $\omega \to 0$ gegen U_0 strebt. Außerdem gibt es eine Frequenz bei der U_C seinen Maximalwert erreicht, diese Frequenz wird Resonanzfrequenz genannt.

$$\omega_\mathrm{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \ . \tag{12}$$

Wenn

$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC} \ ,$$

dann wird von einer schwachen Dämpfung gesprochen. Es gilt $\omega_{\mathrm{res}} \approx \omega_0$ wobei ω_0 die Erregerfrequenz ist.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \ . \tag{13}$$

Die Güte des Schwingkreises lässt sich über:

$$q = \frac{1}{\omega_0 RC} \tag{14}$$

berechnen. Die maximale Spannung an dem Kondensator ist um den Faktor der Güte größer als die Erregerspannung. Es wird nun die Breite der Resonanzkurve betrachtet, welche duch 11 beschrieben wird. Wenn

$$\frac{R^2}{L^2} \ll {\omega_0}^2$$

berücksichtigt wird, folgt die Breite zu:

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L} \ . \tag{15}$$

Die Güte folgt damit zu:

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-} \tag{16}$$

1.2 Fehlerrechnung

Sämtliche Fehlerrechnungen werden mit Hilfe von Python 3.4.3 durchgeführt.

1.2.1 Mittelwert

Der Mittelwert einer Messreihe $x_1, ..., x_{\mathrm{n}}$ lässt sich durch die Formel

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{N}} x_k \tag{17}$$

berechnen. Die Standardabweichung des Mittelwertes beträgt

$$\Delta\overline{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{N}} (x_{\mathrm{k}} - \overline{x})^2} \tag{18}$$

1.2.2 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

Wenn $x_1, ..., x_\mathrm{n}$ fehlerbehaftete Messgrößen im weiteren Verlauf benutzt werden, wird der neue Fehler Δf mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung angegeben.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\mathrm{k}}\right)^2 \cdot (\Delta x_\mathrm{k})^2} \tag{19}$$

1.2.3 Lineare Regression

Die Steigung und y-Achsenabschnitt einer Ausgleichsgeraden werden gegebenfalls mittels Linearen Regression berechnet.

$$y = m \cdot x + b \tag{20}$$

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \tag{21}$$

$$b = \frac{\overline{x^2}\overline{y} - \overline{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \tag{22}$$

2 Durchführung und Aufbau

2.1 Zeitabhängigkeit der Schwingungsamplitude

In der Abbildung 3 ist eine Schaltung aufgebaut, mit welcher die Zeitabhängigkeit der Schwingungsamplitude untersucht werden kann. Um die Abklingdauer T_ex und den effektiven Dämpfungswiderstand R_eff zu bestimmen, wird die Amplitudenabnahme eines gedämpften RCL-Schwingkreises untersucht.

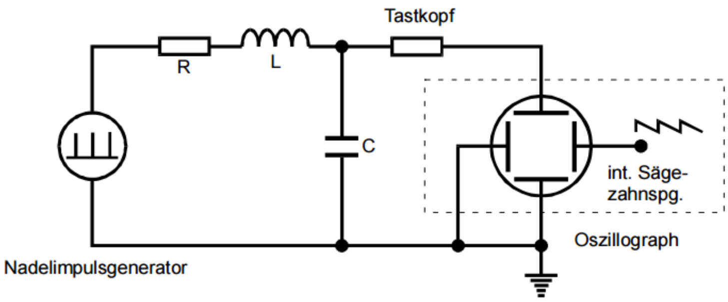

Abbildung 3: Aufbau eines RCL-Schwingkreises zur Untersuchung der Spannung am Kondensator [2, S. 294].

Der Nadelimpulsgenerator wird so eingestellt, dass die Spannungsamplitude U_C, welche am Kondensator abgenommen wird, um den Faktor 3 bis 8 kleiner wird. Die Spannung wird am Oszilloskop gegen die Zeit aufgetragen, die Werte werden auf einem USB-Stick gespeichert und mit Hilfe von Python 3.4.3 ausgewertet.

2.2 Bestimmung des aperiodischen Grenzwiderstandes

In der Abbildung 4 ist eine Schaltung aufgebaut, mit welcher der aperiodische Grenzwiderstand R_{ap} bestimmt werden kann.

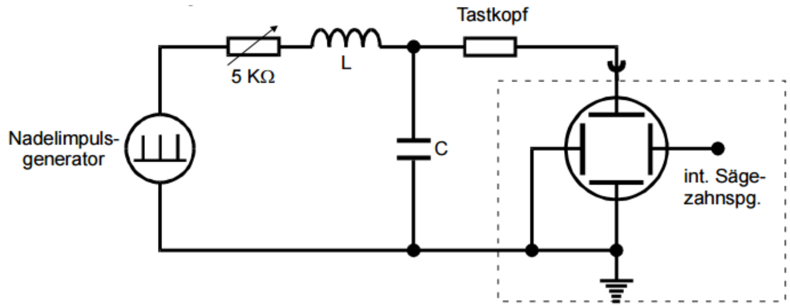

Abbildung 4: Aufbau eines RCL-Schwingkreises zur Bestimmung des aperiodischen Grenzwiderstandes [2, S. 295].

Der regelbare Widerstand wird auf seinen maximal Wert eingestellt, so dass der Schwingkreis ein reines Relaxationsverhalten, also eine monoton abfallende Spannung, zeigt. Nun wird der regelbare Widerstand solange verringert, bis ein Überschwingen der Spannung zu sehen ist. Allerdings ist der Schwingfall dann bereits eingetreten und der Widerstand muss nun solange erhöht werden, bis dieses Phänomen gerade wieder verschwindet. Der nun eingestellte Widerstand wird als R_{ap} notiert.

2.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung und der Phasenverschiebung

In der Abbildung 5 ist eine Schaltung aufgebaut, mit welcher die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung und der Phasenverschiebung(zwischen Erreger- und Kondensatorspannung) untersucht wird.

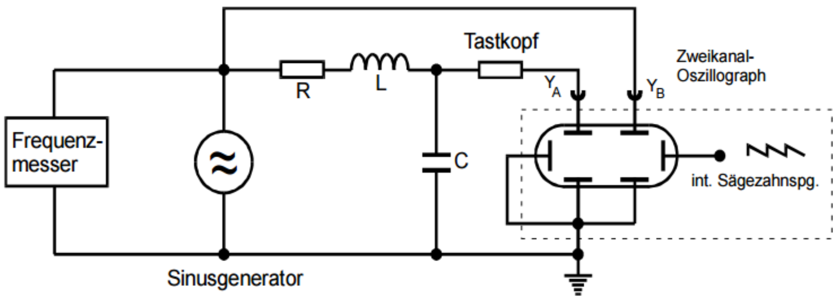

Abbildung 5: Schaltung zur Messung der Frequenzabhängigkeit von der Kondensatorspannung und der Phasenverschiebung [2, S. 296].

Auf dem Oszilloskop wird nun, wie in Abbildung 6 schematisch dargestellt, die Erreger- und die Kondensatorspannung gegen die Zeit aufgetragen. Daraufhin wird die Frequenz

ν am Sinusgenerator im Berreich von (1 - 100000)Hz variiert. Dabei werden etwa 30 Wertepaare aus der Spannung U_C, der Frequenz ν und der Phasenverschiebung Φ notiert. Der Bereich um die Resonanzfrequenz wird in kleineren Schritten gemessen, weil diese in der Auswertung genauer betrachtet werden soll. Für die Phasenverschiebung Φ wird der zeitliche Unterschied der Null durchgänge a gemessen und die Periodenlänge b aus der Frequenz ν berechnet.

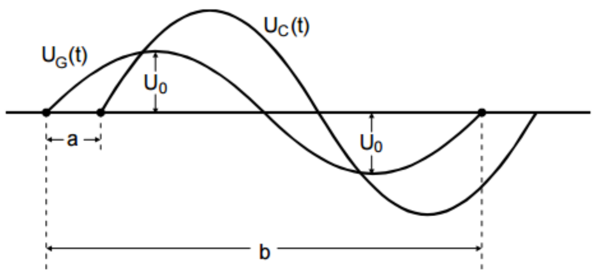

Abbildung 6: Schematische Darstellunf des am Oszilloskop zu sehenden Bildes [1, S. 282].

3 Auswertung

4 Diskussion

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuch 353: Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises.* 2014.

[2] TU Dortmund. *Versuch 354: gedämpfte und erzwungene Schwingungen.* 2014.