

## **Elektrische Brückenschaltung**

Maximilian Sackel  
Maximilian.sackel@gmx.de

Philip Schäfers  
phil.schaefers@gmail.com

Durchführung: 15.12.15

Abgabe: 05.01.2015

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theoretische Grundlage</b>	<b>3</b>
1.1	Wheatston'sche Brückenschaltung . . . . .	4
1.2	Kapazitätsmessbrücke . . . . .	4
1.3	Induktivitätsmessbrücke . . . . .	5
1.4	Maxwell-Brücke . . . . .	6
1.5	TT-Brücke . . . . .	6
1.6	Fehlerrechnung . . . . .	7
1.6.1	Mittelwert . . . . .	7
1.6.2	Fehlerfortpflanzung mit Python . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Durchführung und Aufbau</b>	<b>8</b>
2.1	Wheatston'sche Brückenschaltung . . . . .	8
2.2	Kapazitätsmessbrücke . . . . .	8
2.2.1	Idealer Kondensator . . . . .	8
2.2.2	Realer Kondensator . . . . .	8
2.3	Induktivitätsmessbrücke . . . . .	8
2.4	Maxwell Brücke . . . . .	8
2.5	TT-Brücke . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>9</b>
3.1	Wheatston'sche Brückenschaltung . . . . .	9
3.2	Kapazitätsmessbrücke . . . . .	9
3.3	Induktivitätsmessbrücke . . . . .	10
3.4	Maxwell-Brücke . . . . .	11
3.5	TT-Brücke . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>14</b>
	<b>Literatur</b>	<b>14</b>

# 1 Theoretische Grundlage

Ziel dieses Versuches ist es mit Hilfe verschiedener Brückenschaltungen unbekannte Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten auszumessen. Dies wird zum Beispiel mittels einer Abgleichbedingung realisiert. Jede Brückenschaltung wird prinzipiell von einer Speisepannung  $U_s$  und vier Widerständen betrieben, siehe Abbildung 1. Dies kann auch durch Scheinwiderstände realisiert werden, was impliziert das die Brückenschaltung je nach Aufbau mit Wechselstrom betrieben werden muss.

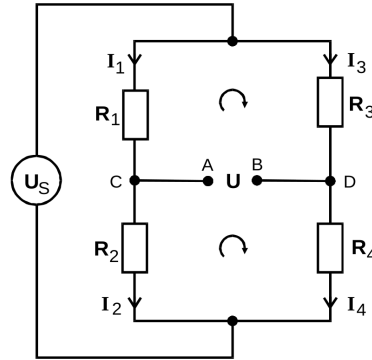


Abbildung 1: Wesentlicher Aufbau einer Brückenschaltung [1].

Die Brückenschaltung liegt dem Kirchhoffschen Regeln zu Grunde. Die erste der beiden Regeln besagt, dass die Summe der eingehenden und ausgehende Ströme an einem Knoten gleich Null ist.

$$\text{Knotenregel : } \sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad (1)$$

Die zweite Regel besagt, dass sich bei einer Geschlossenen Masche alle Teilspannungen, bei einem Umlauf zu Null addieren.

$$\text{Maschenregel : } \sum_{k=1}^n U_k = 0 . \quad (2)$$

Unter Berücksichtigung der Kirchhoffschen Gesetze ergibt sich für die einfachste Brückenschaltung eine Brückenspannung  $U_{Br}$  von

$$U_{Br} = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} . \quad (3)$$

Es wird das Widerstandverhältnis so gewählt, dass die Brückenspannung minimal wird. Daraus ergibt sich die Abgleichsbedingung

$$R_2 R_3 = R_1 R_4 . \quad (4)$$

Für komplexe Widerstände ändert sich die Abgleichsbedingung zu

$$\xi_1 \xi_4 = \xi_2 \xi_3 \quad (5)$$

mit  $\xi = X + iY$  .

Da zwei komplexe Zahlen nur dann gleich sind, wenn sie in Real- und Imaginärteil übereinstimmen, lautet 5 ausführlich geschrieben

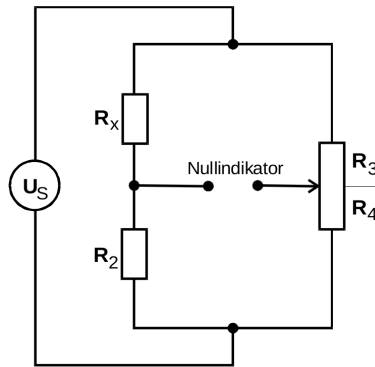
$$X_1 X_4 - Y_1 Y_4 = X_2 X_3 - Y_2 Y_3 \quad (6)$$

und

$$X_1 Y_4 + X_4 Y_1 = X_2 Y_3 + X_3 Y_2 . \quad (7)$$

## 1.1 Wheatston'sche Brückenschaltung

Die Wheatstone Brücke besteht ausschließlich aus ohmschen Widerständen. Sie ist dafür gedacht einen unbekannten Widerstand  $R_x$  mittels der oben genannten Abgleichmethode zu bestimmen. Der Schematische Aufbau einer Wheatstone Brücke ist in Abbildung 2 zu sehen.



**Abbildung 2:** Aufbau einer Wheatstone Brücke [1].

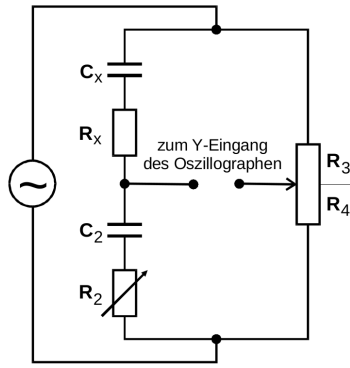
Der Widerstand  $R_x$  ergibt sich aus dem Umstellen der Gleichung 4 zu

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} . \quad (8)$$

Das Verhältniss  $R_3$  zu  $R_4$  lässt sich besonders gut mit Hilfe eines Potentiometer einstellen.

## 1.2 Kapazitätsmessbrücke

In Abbildung 3 ist der Aufbau einer Kapazitätsmessbrücke dargestellt, mit Hilfe der Kapazitätsmessbrücke soll die Kapazität des Kondensators bestimmt werden. Dies geschieht über die Impedanz des Kondensators, daher muss der Aufbau mit Wechselstrom betrieben werden. Da es sich im Versuch um keinen idealen Kondensator handelt wird im Schaltbild ein fiktiver Widerstand  $R_x$  vor den Kondensator geschaltet.



**Abbildung 3:** Messung der Kapazität eines realen Kondensators [1].

Mittels der Abgleichbedingung gibt sich analog zu Formel 8 ein Widerstand von

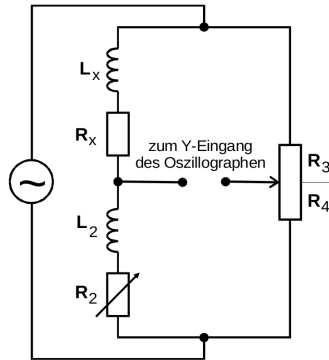
$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} ,$$

und für die Kapazität des Kondensators unter Berücksichtigung der Scheinwiderstände nach Gleichung 7 folgt

$$C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3} . \quad (9)$$

### 1.3 Induktivitätsmessbrücke

Mittels der Messbrücke aus der Abbildung 4 soll die Induktivität einer Spule bestimmt werden. Dies geschieht Analogie zur Kapazitätsmessbrücke über die Impedanz der Spule, daher muss der Aufbau mit Wechselstrom betrieben werden.



**Abbildung 4:** Messung der Induktivität einer realen Spule [1].

Mittels der Abgleichbedingung gibt sich analog zu Formel 8 ein Widerstand von

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} ,$$

und für die Induktivität der Spule unter Berücksichtigung der Scheinwiderstände nach Gleichung 7 folgt

$$L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4} . \quad (10)$$

## 1.4 Maxwell-Brücke

Es soll die Induktivität einer Spule mit Hilfe der Maxwell-Brücke bestimmt werden. Dafür wird anstelle einer Spule, wie im vorherigen Kapitel beschrieben, ein Kondensator verwendet und wie in Abbildung 5 aufgebaut. Es muss darauf geachtet werden, dass einerseits, die Frequenz hoch genug ist, damit sich der Einschwingvorgang hinreichend schnell einstellt und andererseits die Frequenz niedrig genug ist, damit die Streukapazitäten niedrig genug sind um einen Abgleich zu ermöglichen. Aus den Gleichungen 6 und 7

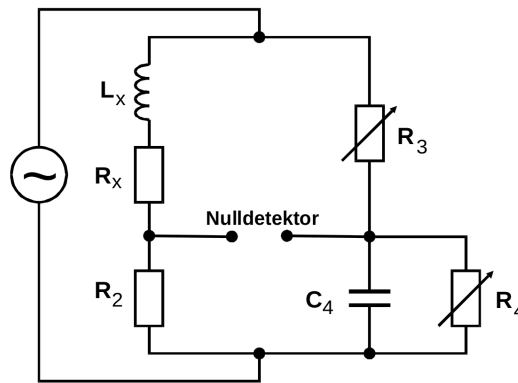


Abbildung 5: Messung der Induktivität durch eine Maxwell-Brücke [1].

ergeben sich  $L_x$  und  $R_x$  zu

$$L_x = R_2 R_3 C_4 \quad (11)$$

und

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} .$$

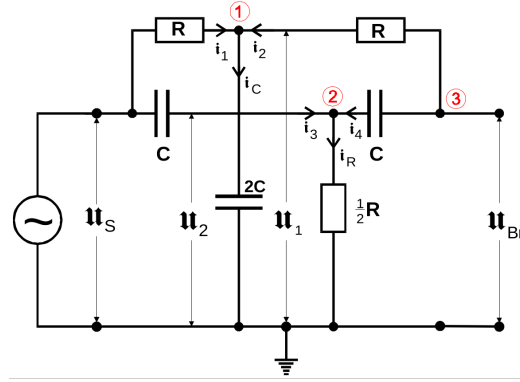
## 1.5 TT-Brücke

Mittels einer TT-Brücke soll die Funktion des elektrischen Filters genauer bestimmt werden. Dafür wird die Schaltung Abbildung 6 entsprechend aufgebaut. Das Spannungsverhältnis  $U_{Br}$  zu  $U_S$  zu berechnen werden die Ströme an den Knoten 1, 2 und 3 betrachtet. Für den ersten Knoten ergibt sich nach der Kirchhoffschen Knotenregel

$$\frac{U_1 - U_S}{R} + \frac{U_1 - U_{Br}}{R} = 2i\omega C U_1 . \quad (12)$$

Mit Hilfe der Ströme an dem zweiten

$$(U_S - U_2) i\omega C + (U_{Br} - U_2) i\omega C = \frac{2}{R} U_2 \quad (13)$$



**Abbildung 6:** Messung der Induktivität durch eine TT-Brücke [1].

und dritten Knoten

$$(U_2 - U_{Br}) i \omega C + \frac{U_q - U_{Br}}{R} = 0 \quad (14)$$

lässt sich durch Auflösen der Gleichungen 12, 13 nach  $U_1$  und  $U_2$  und deren Ergebnisse in 14 eingesetzt, die Brückenspannung ermitteln.

$$U_{Br} = U_S \frac{1 - \omega^2 R^2 C^2}{1 - \omega^2 R^2 C^2 + 4i\omega RC} \quad (15)$$

Durch das Umstellen der Gleichung 15 und das Einführen von  $\Omega$  folgt

$$\Omega = \omega RC ,$$

die Form

$$\frac{U_{Br}}{U_S} = \frac{1 - \Omega^2}{1 - \Omega^2 + 4i\Omega} .$$

Hieraus erhält man durch Multiplikation mit dem konjugiert komplexen Wert des Nenners den Ausdruck:

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_S} \right|^2 = \frac{(1 - \Omega^2)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 16 \cdot \Omega^2} . \quad (16)$$

## 1.6 Fehlerrechnung

### 1.6.1 Mittelwert

Der Mittelwert einer Messreihe  $x_1, \dots, x_n$  lässt sich durch die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad (17)$$

berechnen. Die Standardabweichung des Mittelwertes beträgt

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \quad (18)$$

### 1.6.2 Fehlerfortpflanzung mit Python

Die Fehlerfortpflanzung wird im folgenden mit Hilfe von der Funktion "ufloat" aus "python-uncertainties" durchgeführt. Die dafür verwendete Versionsnummer von Python ist 3.4.3.

## 2 Durchführung und Aufbau

### 2.1 Wheatston'sche Brückenschaltung

Zwei verschiedene unbekannte Widerstände sollen durch die Brückenschaltung vermessen werden. Dafür wird die Schaltung wie in Abbildung 1 aufgebaut. Anschließend wird das Potentiometer so lange variiert, bis die Brückenspannung minimal wird/verschwindet. Dies wird für drei verschiedenen Widerstände  $R_2$  wiederholt.

### 2.2 Kapazitätsmessbrücke

#### 2.2.1 Idealer Kondensator

Es soll die Kapazität eines Kondensators ausgemessen werden. Dafür wird die Schaltung wie in Abbildung 3 aufgebaut. Es kann jedoch der Widerstand  $R_2$  vernachlässigt werden, da die Innenwiderstände verschwindend gering sind. Daraufhin wird das Potentiometer erneut so lange variiert, bis die Brückenspannung verschwindet. Dem Versuch werden die Werte  $C_2$ ,  $R_3$  und  $R_4$  entnommen. Der Versuch wird mit einer weiteren Kapazität  $C_2$  durchgeführt.

#### 2.2.2 Realer Kondensator

Ziel ist es eine RC-Kombination auszumessen. Dazu wird in die Schaltung der Abbildung entsprechend der Widerstand  $R_2$  ergänzt. Die Messung wird mit 2 verschiedenen Kondensatoren  $C_2$  wiederholt. Das Potentiometer wird erneut so eingestellt, dass die Brückenspannung minimal wird und die Werte  $C_2$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , sowie  $R_4$  werden notiert.

### 2.3 Induktivitätsmessbrücke

Um die Induktivität und den fiktiven Widerstand der Schaltung zu vermessen, wird die Schaltung wie in Abbildung 4 aufgebaut. Die Messung wird mit 2 verschiedenen Spulen  $L_2$  wiederholt. Das Potentiometer wird erneut so eingestellt, dass die Brückenspannung minimal wird und die Werte  $L_2$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , sowie  $R_4$  notiert.

### 2.4 Maxwell Brücke

Die Schaltung ist wie in Abbildung 5 zu sehen ist aufgebaut. Dabei werden die Widerstände  $R_3$  sowie  $R_4$  nicht mehr als Potentiometer, sondern jeweils als regelbarer Widerstand benutzt. Bei der Brückenspannung wird durch abwechselndes justieren der beiden Widerstände das Minimum der Brückenspannung gesucht. Die Werte  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$



und  $C_4$  werde notiert und die Messung ein zweites mal für einen anderen Widerstand  $R_2$  durchgeführt.

## 2.5 TT-Brücke

Die Schaltung wird Abbildung 6 entsprechend aufgebaut. Zunächst wird die Speisenspannung  $U_S$  des Systems ermittelt. Es wird die Brückenspannung  $U_{Br}$  im Bereich von (20-30000) Hz variiert. Dabei wird das Minimum der Brückenspannung des Frequenzspektrums  $f$  ermittelt und dem Aufbau Datentupel aus der Frequenz  $f$  und der Brückenspannung genommen.

## 3 Auswertung

### 3.1 Wheatston'sche Brückenschaltung

Mit Hilfe der Wheatston'schen Brückenschaltung werden zwei unbekannte Widerstände  $R_{13} = \text{Wert13}$  und  $R_{14} = \text{Wert14}$  bestimmt. Dies geschieht mit Formel 8, die Werte und Ergebnisse sind in den Tabellen 1 und 2 aufgeführt.  $\overline{R_{13,14}}$  entspricht hierbei den gemittelten Werten für die gesuchten Widerstände. Der Wert  $R_2$  hat eine Toleranz von 0.2% und  $\frac{R_3}{R_4}$  hat eine Toleranz von 0.5%.

$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$	$R_{13} / \Omega$	$\overline{R_{13}} / \Omega$
332	735	265	$322.8 \pm 1.7$	
500	648	352	$321.0 \pm 1.7$	$326.6 \pm 1.0$
664	582	418	$336.0 \pm 1.8$	

**Tabelle 1:** Werte für die Bestimmung von  $R_{13}$ .

$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$	$R_{14} / \Omega$	$\overline{R_{14}} / \Omega$
332	493	507	$920.8 \pm 5.0$	
500	391	609	$920.5 \pm 5.0$	$921.9 \pm 2.9$
664	336	664	$924.5 \pm 5.0$	

**Tabelle 2:** Werte für die Bestimmung von  $R_{14}$ .

### 3.2 Kapazitätsmessbrücke

Mit Hilfe der Kapazitätsmessbrücke werden zwei unbekannte verlustfreie Kapazitäten  $C_2 = \text{Wert2}$  und  $C_3 = \text{Wert3}$  und eine verlustbehaftete Kapazität  $C_8 = \text{Wert8}$  bestimmt. Dies geschieht mit Formel 8 für  $C_2$ ,  $C_3$  und mit den Formeln 8, 9 für  $C_8$  und  $R_8$ . Die Messwerte und Ergebnisse sind in den Tabellen 3 bis 5 aufgeführt.  $\overline{C_{2,3,8}}$  entspricht hierbei den gemittelten Werten für die gesuchten Kapazitäten. Der Wert  $C_2$  hat eine Toleranz

von 0.2% und  $\frac{R_3}{R_4}$  hat eine Toleranz von 0.5%, allerdings hat  $R_2$  nun eine Toleranz von 3%.

$C_2 / \text{nF}$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$	$C_2 / \mu\text{F}$	$\overline{C_2} / \mu\text{F}$
597	285	715	$1.498 \pm 0.008$	
750	329	671	$1.530 \pm 0.008$	$1.517 \pm 0.005$
994	395	605	$1.522 \pm 0.008$	

**Tabelle 3:** Werte für die Bestimmung von  $C_2$ .

$C_2 / \text{nF}$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$	$C_3 / \mu\text{F}$	$\overline{C_3} / \mu\text{F}$
597	593	607	$40.97 \pm 0.22$	
750	639	361	$42.37 \pm 0.23$	$41.65 \pm 0.13$
994	705	295	$41.59 \pm 0.22$	

**Tabelle 4:** Werte für die Bestimmung von  $C_3$ .

$C_2 / \text{nF}$	$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$	$C_8 / \mu\text{F}$	$R_8 / \Omega$	$\overline{C_8} / \mu\text{F}$	$\overline{R_8} / \Omega$
597	304	671	329	$29.27 \pm 0.16$	$149.1 \pm 4.5$		
750	228	722	278	$28.88 \pm 0.16$	$87.8 \pm 2.7$	$29.11 \pm 0.09$	$96.5 \pm 1.8$
994	179	773	227	$29.19 \pm 0.16$	$52.6 \pm 1.6$		

**Tabelle 5:** Werte für die Bestimmung von  $C_8$  und  $R_8$ .

### 3.3 Induktivitätsmessbrücke

Mit Hilfe der Induktivitätsmessbrücke wird die verlustbehaftete Induktivität  $L_{19}, R_{19} = \text{Wert}_{19}$  einer unbekannten Spule bestimmt. Dies geschieht mit den Formeln 8 und 10. Die Messwerte und Ergebnisse sind in der Tabelle 6 aufgeführt. Die baubedingten Fehler von  $R_2$  und  $\frac{R_3}{R_4}$  sind die gleichen wie im vorangegangenen Kapitel, der Fehler von  $L_2$  beträgt 0.2%.

$L_2 / \text{mH}$	$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$	$L_{19} / \text{mH}$	$R_{19} / \Omega$	$\overline{L_{19}} / \text{mH}$	$\overline{R_{19}} / \Omega$
14.6	286	281	719	$5.706 \pm 0.029$	$111.8 \pm 0.6$		
20.1	287	287	713	$8.090 \pm 0.040$	$115.5 \pm 0.6$	$6.898 \pm 0.027$	$113.6 \pm 2.4$

**Tabelle 6:** Werte für die Bestimmung von  $L_{19}$  und  $R_{19}$ .

### 3.4 Maxwell-Brücke

Mit Hilfe der Maxwell-Brücke soll die gleiche Spule untersucht werden welche auch für die Induktivitätsmessbrücke verwendet wurde. Die verwendete Kapazität  $C_4 = 750 \text{ nF}$  bleibt für die gesamte Messung unverändert.  $L_{19}$  und  $R_{19}$  werden durch einsetzen in die Gleichungen 8 und 11 ermittelt. Die Messwerte und Ergebnisse sind in Tabelle 7 aufgelistet.

$R_2 / \Omega$	$R_3 / \Omega$	$R_4 / \Omega$	$L_{19} / \text{mH}$	$R_{19} / \Omega$	$\overline{L_{19}} / \text{mH}$	$\overline{R_{19}} / \Omega$
332	215	655	$53.5 \pm 1.6$	$109.0 \pm 4.6$		
664	95	538	$47.3 \pm 1.4$	$117.2 \pm 5.0$	$57.6 \pm 1.0$	$115.6 \pm 2.8$
1000	96	796	$72.0 \pm 2.2$	$120.6 \pm 5.1$		

**Tabelle 7:** Werte für die Bestimmung von  $L_{19}$  und  $R_{19}$ .

### 3.5 TT-Brücke

In der Tabelle 8 wird deutlich, dass die Brückenspannung bei ca. 380 Hz minimal wird und in etwa 0.02 V beträgt.

Der theoretische minimal Wert lässt sich mit folgender Formel berechnen:

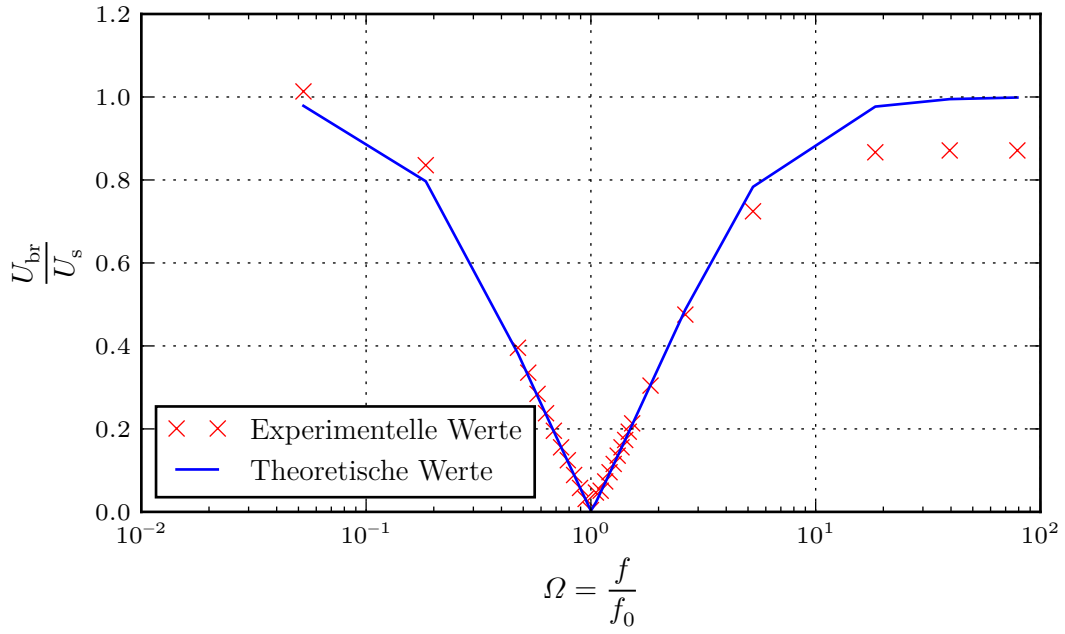
$$f_{0,\text{theo}} = \frac{1}{2\pi RC} = (382.1 \pm 1.2) \text{ Hz}$$

$$R = 1000 \Omega$$

$$C = (4.165 \pm 0.013) \cdot 10^{-7} \text{ F.}$$

f / Hz	$U_{\text{br}}$ / V
20	4.56
70	3.76
180	1.78
200	1.51
220	1.28
240	1.07
260	0.88
280	0.70
300	0.56
320	0.40
340	0.26
360	0.14
380	0.02
400	0.21
420	0.23
440	0.33
460	0.43
480	0.52
500	0.61
520	0.70
540	0.78
560	0.87
580	0.96
700	1.37
1000	2.14
2000	3.26
7000	3.90
15000	3.92
30000	3.92

**Tabelle 8:** Messwerte der Brückenspannung und der Frequenz von der TT-Brückenschaltung.



**Abbildung 7:** Theoretische und experimentelle Werte der TT-Brückenschaltung.

Für die Bestimmung des Klirrfaktors  $k$  wird zunächst genähert, dass die Summe der Oberwellen nur von dem Term der zweiten Oberwelle bestimmt wird. Damit folgt, dass

$$k = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots}}{U_1} = \frac{U_2}{U_1} \quad (19)$$

$$U_1 = 4.5 \text{ V} \quad (20)$$

$$U_2 = \frac{U_{br}}{f(2)} \quad (21)$$

$$U_{br} = 0.02 \text{ V} \quad (22)$$

$$f^2(2) = \frac{(1 - 2^2)^2}{(1 - 2^2)^2 + 16 \cdot 2^2} = 0.1233 \quad (23)$$

$$U_2 = \frac{0.02 \text{ V}}{\sqrt{0.1233}} = 0.057 \text{ V} \quad (24)$$

$$k = \frac{0.057 \text{ V}}{4.5 \text{ V}} = 0.0127 \quad (25)$$

ist.

## 4 Diskussion

In allen Versuchen sind die Fehler sehr klein und meist unter 1%. Auffällig sind vor allem Kapitel 3.3 und 3.4. Für beide Versuche wurde die gleiche Spule verwendet und für den Widerstand  $R_{19}$  kommt das gleiche Ergebniss raus, allerdings ist die Induktivität bei der Maxwell-Brückenschaltung um ca. 835 % größer als bei der Induktivitätsmessbrücke. Daraus lässt sich ein Fehler bei dem notieren der Daten folgern, da alle anderen Versuche sehr genau waren.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *V302: Brückenschaltung*. <http://129.217.224.2/HOME PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V302.pdf>, 2014.