101

Das Trägheitsmoment

Maximilian Sackel
maximilian.sackel@gmx.de

Philip Schaefers
phil.schaefers@gmail.com

Durchführung: 03.11.2015

Abgabe: 10.11.2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Versuch

Ziel des Versuches ist die Bestimmung der Trägheitsmomente von verschiedenen Objekten. Dazu führen die Versuchsobjekte eine Rotationsbewegung aus, welche durch das Drehmoment M, den Auslenkwinkel φ und dem Trägheitsmoment I charakterisiert ist.

Das Trägheitsmoment ist ein Maß des Widerstandes einer Rotationsbewegung um die Drehachse. Im einfachsten Fall dreht sich ein Massepunkt mit dem Abstand r um die Drehachse. Dabei fallen Drehachse und Schwerpunkt des Systems auf die selbe Achse.

$$I = \sum_{\mathrm{i}} \vec{r}_{\mathrm{i}}^{\,2} \cdot m_{\mathrm{i}} \tag{1}$$

Falls jedoch das getestete Objekt ein Volumen besitzt muss über die einzelnen Masseelemente dm integriert werden. Bei einer kontinuierlichen Masseverteilung kann auch analog dazu die Dichte ϱ über das Volumen dV integriert werden.

$$I = \int r^2 \,\mathrm{dm} \tag{2}$$

Wenn der Schwerpunkt von der Drehachse parallel um den Abstand a verschoben ist wird ein Korrekturfaktor nötig. Dieser folgt aus dem Steiner'schen Satz und berechnet sich aus der Verschiebung des Schwerpunktes um die Distanz a und der Masse des Objetktes. Das gesamte Trägheitsmoment eines Objekts ist also die Summe aus dem Trägheitsmoment des Schwerpunktes (I_{s}) und des Steiner'schens Anteils.

$$I = I_{\mathrm{s}} + m \cdot a^2 \tag{3}$$

Die Bewegung des schwingungsfähigen Objektes um den Winkel φ mit dem Moment $\vec{M} = D \cdot \varphi$ lässt sich durch die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\alpha} = -\frac{D}{I} \cdot \alpha \tag{4}$$

beschreiben. Dieser entnimmt man eine Schwingungsdauer von

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \tag{5}$$

1.2 Fehlerrechnung

Sämtliche Fehlerrechnungen werden mit Hilfe von Python 3.4.3 durchgeführt.

1.2.1 Mittelwert

Der Mittelwert einer Messreihe $x_1, ..., x_\text{n}$ lässt sich durch die Formel

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{\text{k}=1}^{\text{N}} x_\text{k} \tag{6}$$

berechnen. Die Standardabweichung des Mittelwertes beträgt

$$\Delta\overline{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{\text{k}=1}^{\text{N}} (x_\text{k} - \overline{x})^2} \tag{7}$$

1.2.2 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

Wenn $x_1, ..., x_\text{n}$ fehlerbehaftete Messgrößen im weiteren Verlauf benutzt werden, wird der neue Fehler Δf mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung angegeben.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{\text{k}=1}^{\text{N}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\text{k}}\right)^2 \cdot (\Delta x_\text{k})^2} \tag{8}$$

1.2.3 Lineare Regression

Die Steigung und der y-Achsenabschnitt einer Ausgleichsgeraden werden gegebenfalls einer mittels Linearen Regression berechnet.

$$y = m \cdot x + b \tag{9}$$

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \tag{10}$$

$$b = \frac{\overline{x^2}\,\overline{y} - \overline{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \tag{11}$$

2 Durchführung und Aufbau

Um das Trägheitsmoment verschiedener Objekte I_O zu bestimmen, werden diese an einer Drillachse fixiert und deren Schwingungsdauern gemessen. Die Drillachse besteht aus einem Rahmen, woran eine Torsionsfeder befestigt ist. Diese ist des weiteren mit einer Achse verbunden, wo verschiedene Testobjekte eingespannt werden können, wie in Abbildung 1 zu sehen ist.

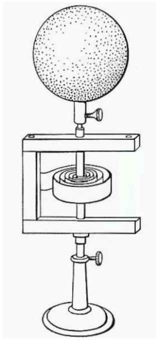

Abbildung 1: Versuchsaufbau[1]

Um zunächst die Winkelrichtgöße D der Drillasches zu bestimmen, wird ein nahezu masseloser Stab an der Drillachse befestigt und mittels einer Federwaage die benötigte Kraft für die Auslenkung aus der Ruheposition gemessen. Aus der Proportionalität der Kraft mit dem Winkel soll D bestimmt werden.

Nachdem die Winkelrichtgröße mittels einer statischen Methode bestimmt wurde, soll nun das Eigenträgheitsmoment der Drillachse bestimmt werden. Dazu wird an der Achse einen nahezu masseloser Stab befestigt, an welchem im Abstand r zur Drehachse Gewichte fixiert werden. Nun wird der Stab ausgelenkt und die fünffache Schwingungsdauer gemessen. Aus der Schwingungsdauer und der Kenntnis des Trägheitsmoments der fixierten Gewichtes und des Stabes, lässt sich das Trägheitsmoment der Drillachse I_D bestimmen.

Anschließend soll das Trägheitsmoment zweier Körper bestimmt werden. Dazu wird die Masse und das Volumen der Körper bestimmt, um sie später mit dem theoretischen Trägheitsmomenten vergleichen zu können. Als nächstes wird der Körper auf der Drillachse befestigt und ausgelenkt, um eine Schwingung zu erzeugen. Es werden 5 Schwingungsdauern je 5 mal gemessen und die Werte anschließend gemittelt.

Zur Bestimmung des Trägheitsmoments einer Puppe wird diese an der Drillachse befestigt. Es werden zwei verschiedene Positionen der Puppe gewählt und deren Schwingungsdauer bestimmt. Desweiteren muss die Puppe in geeignete mathematische Körper zerlegt werden und dessen Abmaße bestimmt werden, um die einzelen Trägheitsmomente der verschiedenen Körperteile zu errechnen. Die Summe aus den verschiedenen Körperteilen entspricht dann dem Trägheitsmoment der gesamten Puppe.

3 Auswertung

3.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße

Durch Aufstellung der Drehmomentsgleichung der Drillachse und dem Umstellen nach der Winkelrichtgröße folgt

$$D = \frac{|F| \cdot |r|}{\varphi} \ . \tag{12}$$

Für die verwendete Torsionsfeder folgt, für die gemessenen Kräfte und einem Radius von

$$r = (90.7 \pm 0.4)\,\mathrm{mm}$$

Winkelrichtgrößen von

Tabelle 1: Winkelrichtgrößen für die einzelen gemessenen Daten

φ / Grad	φ / rad	F / 10^{-1} N	D / 10^{-2} Nm
15	0.26	0.6	2.1 ± 1.4
30	0.52	1.2	2.1 ± 0.7
45	0.79	1.5	1.7 ± 0.4
50	0.87	2.2	2.3 ± 0.5
60	1.05	2.8	2.4 ± 0.5
75	1.31	3.4	2.4 ± 0.3
90	1.57	3.7	2.1 ± 0.3
105	1.83	4.4	2.2 ± 0.2
120	2.10	5.1	2.2 ± 0.2
135	2.36	5.6	2.2 ± 0.2

Die Messunsicherheit berechnet sich aus einem Ablesefehler des Winkels von $\leq 3^\circ$ und der Kraft von ≤ 0.02 N. Nach Mittelung der Werte und Fehlerfortpflanzung (siehe Formel 8) erhält man eine Winkelrichtgröße von

$$D_0 = (2.16 \pm 0.19) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{Nm} \ .$$

3.2 Bestimmung des Eigenträgheitsmoments

Um das Trägheitsmoment der Drillachse I_D zu berechnen muss zuerst einmal das Trägheitsmoment des nahezu masselosen Stabes I_S bestimmt werden. Zusätzlich muss das Trägheitsmoment der beiden am Stab befestigten Gewichte $2 \cdot I_\mathrm{G}$ berechnet werden. Das Trägheitsmoment des Stabes beträgt in dem gewählten Versuchsaufbau bei einer Masse von

$$m = 96,26\,\mathrm{g}$$

und einer Länge von

$$l = 60\,\text{cm}$$

$$I_\text{S} = \frac{ml^2}{12} = 2.85 \cdot 10^{-3}\,\text{kg m} \;. \tag{13}$$

Für die vom Schwerpunkt um die Strecke a verschobenen Zylinder ergibt sich nach Formel 3 ein Trägheitsmoment I_G von (siehe Tabelle 2)

$$I_\text{G} = I_\text{Schwerpunkt} + I_\text{Steiner} = m(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}) + m \cdot a^2 \tag{14}$$

Mit Hilfe einer linearen Regression soll das Trägheitsmoment der Drillachse bestimmt werden. Dafür wird Formel 5 quadriert und das Trägheitsmoment

$$I_\text{ges} = I_\text{D} + 2 \cdot I_\text{G}$$

in die Formel eingesetzt. Um einen Koeffizientenvergleich zwischen der Regression und

Tabelle 2: Abstände der Gewichte von der Drehachse und fünfache Periodendauer

a / mm	T / s
40	2.53
65	2.95
90	3.50
115	3.99
140	4.59
165	5.22
190	5.90
215	6.55
240	7.11
265	7.85

der quadratischen Schwingungsdauer zu machen, werden die Therme wie folgt sortiert.

$$\underbrace{T^2}_{y} = \underbrace{\frac{8\pi^2 m_\text{G}}{D}}_{m} \underbrace{a^2}_{x} + \underbrace{\frac{4\pi^2 I_\text{D}}{D} + \frac{8\pi^2 m_\text{G}}{D}\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right)}_{b} \tag{15}$$

Die Steigung m berechnet sich nach Formel 10 und der Koeffizeientvergleich ergibt

$$m = 798 \pm 6 = \frac{8\pi^2 m_\text{G}}{D} \tag{16}$$

Daraus ergibt sich eine Winkelrichtgröße von

$$D = (2.16 \pm 0.02) \cdot 10^{-2}\,\text{Nm} \;. \tag{17}$$

Das Trägheitsmoment der Drillachse errechnet sich aus dem vergleich zwischen dem errechnetem Wert der Regression und der gemessenen Werte.

$$b = \frac{4\pi^2 I_\mathrm{D}}{D} + \frac{8\pi^2 m_\mathrm{G}}{D}\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) = 5.48 \tag{18}$$

Nach Umstellen der Formel nach I_D, beträgt das Trägheitsmoment der Drillachse

$$I_\mathrm{D} = (2.8 \pm 1.9) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\ m}^2\ .$$

3.3 Trägheitsmomente verschiedener Objekte

3.3.1 Kugel

Durch Mittelung und Gauß'scher Fehlerfortpfortpflanzung (siehe Kapitel 1.2) erhält man einen Wert für den Durchmesser von

$$d = (137.440 \pm 0.022)\,\mathrm{mm}\ . \tag{19}$$

Das Trägheitsmoment einer Kugel berechnet sich aus

$$I_\mathrm{K,theo} = \frac{2}{5} m r^2\ . \tag{20}$$

Bei einer Masse von

$$m = 0.8126\,\mathrm{kg}$$

beträgt das theoretische Trägheitsmoment der Kugel

$$I_\mathrm{K,theo} = 1.53 \pm 0.00\,\mathrm{kg\ m}^2\ . \tag{21}$$

Das experimentell ermittelte Trägheitsmoment errechnet sich durch Umformung der Formel 5 und ergibt nach Mittelung der Periodendauer

$$I_\mathrm{K,exp} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \cdot D = (1.62 \pm 0.14) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\ m}^2 \tag{22}$$

3.3.2 Zylinder

Das theoretische Trägheitsmoment des Zylinders wird aus

$$I_\mathrm{Z,theo} = \frac{1}{2} m r^2 \tag{23}$$

berechnet. Durch Einsetzen des Radius von

$$r = (4.0 \pm 0.0) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

ergibt sich ein Trägheitsmoment von

$$I_\mathrm{Z,theo} = 1.58 \pm 0.00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\ m}^2\ . \tag{24}$$

Das experimentelle Trägheitsmoment berechnet sich analog zur Kugel (siehe Formel 22) und beträgt

$$I_\mathrm{Z,exp} = (1.54 \pm 0.13) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\ m}^2\ . \tag{25}$$

3.4 Trägheitsmoment der Puppe

Durch Einteilen der Puppe in verschieden große Zylinder soll das Trägheitsmoment der Puppe bestimmt werden. Dafür werden mehrere Maße der einzelnen Zylinder genommen um einen möglichst genauen Mittelwert zu erlangen. Die Maße, Massen und Trägheitsmomente der Zylinder sind der Tabelle zu entnehmen. Dabei wird angenommen, dass die

Tabelle 3: Maße, Gewicht und Trägheitsmomente der Körperteile

	$Kopf$	$Rumpf$	$Bein$	Arm
Durchmesser 10^{-3} m	24.5 ± 7.1	35.0 ± 5.8	15.5 ± 2.8	13.1 ± 3.1
Höhe 10^{-3} m	56.0 ± 0.5	97.2 ± 2.5	150.0 ± 4.0	139.6 ± 0.8
Volumen 10^{-5} m^3	2.2 ± 1.3	9.4 ± 3.1	2.8 ± 1.0	1.9 ± 0.9
Masse 10^{-2} kg	2.0 ± 1.2	7.1 ± 2.8	2.1 ± 0.9	1.4 ± 0.7
Trägheitsmoment				
angelegt 10^{-6} kg m^2	1.5 ± 1.3	10.9 ± 5.6	1.9 ± 1.0	5.3 ± 3.1
ausgestreckt 10^{-6} kg m^2	1.5 ± 1.3	10.9 ± 5.6	1.9 ± 1.0	110 ± 60

Puppe eine homogene Dichte und die Masse besitzt. Aus der Beziehung

$$M = \varrho \cdot V = 162.7\,\mathrm{g} \tag{26}$$

lassen sich die Massen der unterschiedlichen Zylinder bestimmen. Die einzelnen Trägheitsmomente setzen sich jeweils aus den Schwerpunktsträgheitsmomenten der Zylinder zusammen und dem Steiner Anteil. Daraus ergeben sich nach Summe der einzelnen Trägheitsmomente aus Tabelle 3 ein Gesamtträgheitsmoment für die Puppe mit angelegten Armen von

$$I_{\mathrm{an}} = (2.7 \pm 1.0) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\ m}^2 \tag{27}$$

und für die Puppe mit ausgestreckten Armen von

$$I_{\mathrm{aus}} = (2.5 \pm 1.2) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\ m}^2\ . \tag{28}$$

Die praktische Bestimmung des Trägheitsmoments der Puppe erfolgt durch die Messung der Schwingungsdauer. Durch Anwendung der Formel 22 ergibt sich ein Trägheitsmoment I_{aus} für die gesamte Puppe mit ausgestreckten Armen von

$$I_{\mathrm{aus}} = (3.17 \pm 0.30) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\ m}^2 \tag{29}$$

Die Berechnung des Trägheitsmomentes mit angelegten Armen folgt analog und beträgt

$$I_{\mathrm{an}} = (1.86 \pm 0.19) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\ m}^2\ . \tag{30}$$

Tabelle 4: Fünfache Periodendauer der Puppe

t_{an} / s	t_{aus} / s
2.80	3.84
3.00	3.64
3.01	3.87
2.90	3.83
2.87	3.84

4 Diskussion

4.1 Drillachse

Aufgrund der großen Messunsicherheit der Zeit bei der Bestimmung der Drillachse wird ein negatives Trägheitsmoment ermittelt. Dies hatt keinen erklärlichen physikalischen Sinn und wird deswegen im weiteren Verlauf vernachlässigt.

4.2 Verschiedene Objekte

Die Abweichung der praktisch ermittelten Werte von den theoretischen beträgt beim Zylinder 2.6 % und bei der Kugel 5.9 %. Diese Abweichung können durch die ungenaue Zeitmessung erklärt werden und auf die Messfehler bei der Volumen Bestimmung.

4.3 Puppe

Der Fehler bei der Messung des Trägheitsmomentes der Puppe mit den ausgestreckten Armen beträgt 26.8 %. Dies lässt sich durch die geringe Periodendauer der Schwingung erklären. Außerdem werden die Körperteile der Puppe als Zylinder genähert wobei große unterschiede zwischen dem theoretischem Wert und der Realität auftreten können. Zusätzlich verändert die Puppe ihre Haltung während sie schwingt.
Bei der Puppe mit den angelegten Armen kommt zusätzlich das Problem hinzu, dass das Trägheitsmoment zu klein wird, wobei das Trägheitsmoment der Drillachse berücksichtigt werden müsste. Dies ist jedoch mit dem Aufbau nicht genau genug bestimmbar. Der Fehler zwischen dem theoretischem und gemessenen Wert liegt in einer Größenordnung.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Das Trägheitsmoment.* 2015.