

Versuch: 354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Maximilian Sackel
Maximilian.sackel@gmx.de

Philip Schäfers
phil.schaefers@gmail.com

Durchführung: 05.01.2016

Abgabe: 12.01.2016

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlage	3
1.1	Ziel des Versuches	3
1.1.1	Differentialgleichung für die gedämpfte Schwingung	3
1.1.2	Differentialgleichung für die erzwungene Schwingung	5
1.2	Fehlerrechnung	6
1.2.1	Mittelwert	6
1.2.2	Gauß'sche Fehlerfortpflanzung	7
1.2.3	Lineare Regression	7
2	Durchführung und Aufbau	7
2.1	Zeitabhängigkeit der Schwingungsamplitude	7
2.2	Bestimmung des aperiodischen Grenzwiderstandes	8
2.3	Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung und der Phasenverschiebung	8
3	Auswertung	9
3.1	Zeitabhängigkeit der Amplitude und Dämpfungswiderstand einer Gedämpften Schwingung	9
3.2	Dämpfungswiderstand des Aperiodischen Grenzfalls	11
3.3	Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung eines Serienresonanzkreis	11
3.4	Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung	13
4	Diskussion	16
	Literatur	16

1 Theoretische Grundlage

1.1 Ziel des Versuches

In den folgenden Versuchen wird die Amplitude und der effektive Dämpfungswiderstand eines gedämpften Schwingkreises untersucht. Zusätzlich wird ermittelt bei welchem Widerstand der aperiodische Grenzfall eintritt. Zuletzt wird bei einer erzwungenen Schwingung die Frequenzabhängigkeit der Spannung und der Phasenverschiebung untersucht.

1.1.1 Differentialgleichung für die gedämpfte Schwingung

Ein Schwingkreis besteht im Idealfall aus einer Spule mit der Induktivität L und einem Kondensator mit der Kapazität C , die in diesem System eingespeicherte Energiemenge wird immer wieder zwischen dem Kondensator und der Spule ausgetauscht. Während sich der Kondensator entlädt, entsteht in der Spule durch Induktion ein Magnetfeld. Sobald das Magnetfeld zusammenbricht wird der Kondensator wieder aufgeladen und der Vorgang beginnt erneut.

Anders ist das bei einem gedämpften oder realen Schwingkreis, da dieser noch einen Widerstand R besitzt. Über diesen Widerstand wird laufend Energie in Wärme umgewandelt und geht entsprechend in dem Schwingkreis verloren. Daraus folgt das R als Dämpfungsfaktor anzusehen ist.

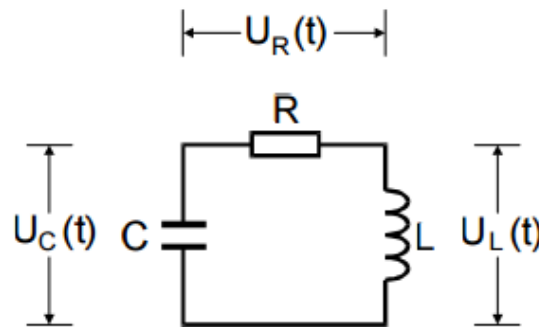


Abbildung 1: Schematischer Aufbau eines RCL-Schwingkreises [2, S. 284].

Die in der Abbildung 1 eingezeichneten Spannungen U_R , U_C und U_L sind die Spannungen die über die entsprechenden Bauteile abfallen. Das zweite Kirchhoffsche Gesetz besagt das sich alle Teilspannungen einer Masche zu null addieren, damit folgt:

$$U_R(t) + U_C(t) + U_L(t) = 0 . \quad (1)$$

Da nun

$$\begin{aligned} U_R(t) &= RI(t) , \\ U_C(t) &= \frac{Q(t)}{c} \quad \text{und} \\ U_L(t) &= L \frac{dI}{dt} \end{aligned}$$

ist, folgt mit weiteren Umformungen

$$\ddot{I}(t) + \frac{R}{L}\dot{I}(t) + \frac{1}{LC}I(t) = 0 . \quad (2)$$

Die Differentialgleichung hat folgende Lösung:

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} (Ae^{i2\pi\nu t} + Be^{-i2\pi\nu t}) , \quad (3)$$

wobei die Abkürzungen

$$\mu := \frac{R}{4\pi L} \quad (4)$$

$$\text{und } \nu := \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (5)$$

verwendet wurden.

Im folgenden müssen nun zwei Fälle unterschieden werden.

Erster Fall:

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}$$

Im reellen Fall, lässt sich Formel 3 mit Hilfe der Eulerschen Formel zu

$$I(t) = Ce^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t + \eta) \quad (6)$$

umformen. Unter der genannten Bedingung ist zu erkennen das es sich um eine gedämpfte Schwingung handelt, die für $t \rightarrow \infty$ gegen Null strebt. Die Abklingdauer ist definiert als:

$$T_{\text{ex}} = \frac{1}{2\pi\mu} . \quad (7)$$

Nach der Abklingdauer hat sich die Amplitude auf den e-ten Teil ihres ursprünglichen Wertes verringert.

Zweiter Fall:

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$$

Im imaginären Fall, kann Formel 3, nach einer hinreichend großen Zeit zu

$$I(t) \propto e^{-(2\pi\mu - i2\pi\nu)t} \quad (8)$$

umgeschrieben werden.

Von Bedeutung ist der Spezialfall:

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_{\text{ap}}^2}{4L^2} \quad \text{d.h. } \nu = 0 , \quad (9)$$

$$\text{dann wird} \quad (10)$$

$$I(t) = Ce^{-\frac{t}{\sqrt{LC}}} . \quad (11)$$

Der Spezialfall stellt den aperiodischen Grenzfall dar, die Amplitude des Stromes fällt hier am schnellsten ab ohne über zu schwingen.

1.1.2 Differentialgleichung für die erzwungene Schwingung

In diesem Versuch wird ein von außen angeregter RCL-Schwingkreis untersucht. Dafür wird ein Sinusgenerator in die Schaltung eingebaut. Der schematische Aufbau ist in Abbildung 2 dargestellt.

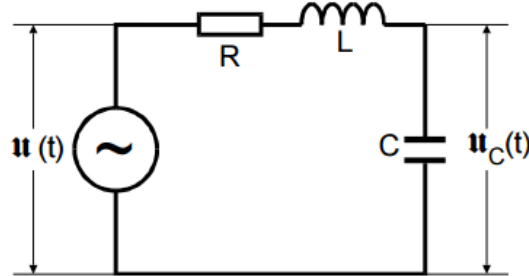


Abbildung 2: Schematischer Aufbau eines angeregten RCL-Schwingkreises [2, S. 289].

Die Differentialgleichung für dieses Problem ist nun inhomogen und lautet:

$$LC\ddot{U}_C(t) + RC\dot{U}_C(t) + U_C(t) = U_0 e^{i\omega t} . \quad (12)$$

Daraus folgt die Lösung für die Spannung zu:

$$U = \frac{U_0(1 - LC\omega^2 - i\omega RC)}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (13)$$

Die Phasenverschiebung ergibt sich aus dem Vergleich von Real- und Imaginärteil von U :

$$\Phi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right) \quad (14)$$

Es wird deutlich, dass sich die Frequenzen ω_1 und ω_2 , bei denen die Phasenverschiebung die Werte $\frac{\pi}{4}$ bzw. $\frac{3\pi}{4}$ hat, zu

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \quad (15)$$

ergeben. Der Betrag von U entspricht der gesuchten Lösungsfunktion $U_C(\omega)$, damit folgt:

$$U_C(\omega) = |U| = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} . \quad (16)$$

Es wird deutlich das $U_C(\omega)$ für $\omega \rightarrow \infty$ gegen Null strebt und für $\omega \rightarrow 0$ gegen U_0 strebt. Außerdem gibt es eine Frequenz bei der U_C seinen Maximalwert erreicht, diese Frequenz wird Resonanzfrequenz genannt.

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} . \quad (17)$$

Wenn

$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC} ,$$

dann wird von einer schwachen Dämpfung gesprochen. Es gilt $\omega_{\text{res}} \approx \omega_0$ wobei ω_0 die Erregerfrequenz ist.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} . \quad (18)$$

Die Güte des Schwingkreises lässt sich über:

$$q = \frac{1}{\omega_0 RC} \quad (19)$$

berechnen. Die maximale Spannung an dem Kondensator ist um den Faktor der Güte größer als die Erregerspannung. Es wird nun die Breite der Resonanzkurve betrachtet, welche durch Formel 16 beschrieben wird. Wenn

$$\frac{R^2}{L^2} \ll \omega_0^2$$

berücksichtigt wird, folgt die Breite zu:

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L} . \quad (20)$$

Die Güte folgt damit zu:

$$q = \frac{\omega_0}{\omega_+ - \omega_-} \quad (21)$$

1.2 Fehlerrechnung

Sämtliche Fehlerrechnungen werden mit Hilfe von Python 3.4.3 durchgeführt.

1.2.1 Mittelwert

Der Mittelwert einer Messreihe x_1, \dots, x_n lässt sich durch die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad (22)$$

berechnen. Die Standardabweichung des Mittelwertes beträgt

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \quad (23)$$

1.2.2 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

Wenn x_1, \dots, x_n fehlerbehaftete Messgrößen im weiteren Verlauf benutzt werden, wird der neue Fehler Δf mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung angegeben.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \cdot (\Delta x_k)^2} \quad (24)$$

1.2.3 Lineare Regression

Die Steigung und y-Achsenabschnitt einer Ausgleichsgeraden werden gegebenenfalls mittels Linearen Regression berechnet.

$$y = m \cdot x + b \quad (25)$$

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (26)$$

$$b = \frac{\overline{x^2y} - \bar{x}\bar{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (27)$$

2 Durchführung und Aufbau

2.1 Zeitabhängigkeit der Schwingungsamplitude

In der Abbildung 3 ist eine Schaltung aufgebaut, mit welcher die Zeitabhängigkeit der Schwingungsamplitude untersucht werden kann. Um die Abklingdauer T_{ex} und den effektiven Dämpfungswiderstand R_{eff} zu bestimmen, wird die Amplitudenabnahme eines gedämpften RCL-Schwingkreises untersucht.

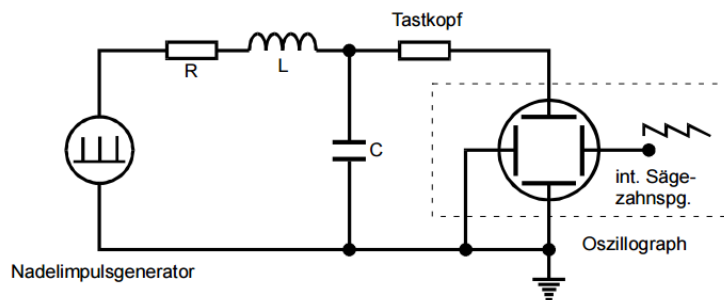


Abbildung 3: Aufbau eines RCL-Schwingkreises zur Untersuchung der Spannung am Kondensator [2, S. 294].

Der Nadelimpulsgenerator wird so eingestellt, dass die Spannungsamplitude U_C , welche am Kondensator abgenommen wird, um den Faktor 3 bis 8 kleiner wird. Die Spannung wird am Oszilloskop gegen die Zeit aufgetragen, die Werte werden auf einem USB-Stick gespeichert und mit Hilfe von Python 3.4.3 ausgewertet.

2.2 Bestimmung des aperiodischen Grenzwiderstandes

In der Abbildung 4 ist eine Schaltung aufgebaut, mit welcher der aperiodische Grenzwiderstand R_{ap} bestimmt werden kann.

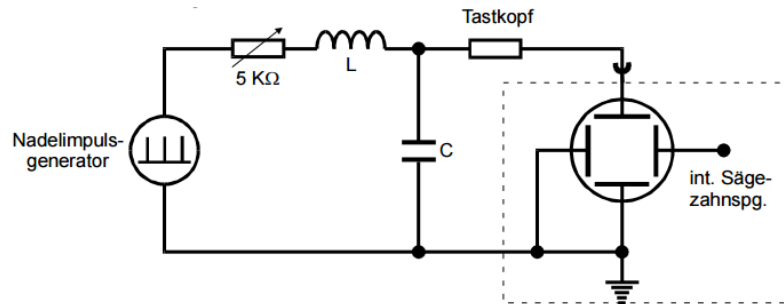


Abbildung 4: Aufbau eines RCL-Schwingkreises zur Bestimmung des aperiodischen Grenzwiderstandes [2, S. 295].

Der regelbare Widerstand wird auf seinen maximalen Wert eingestellt, so dass der Schwingkreis ein reines Relaxationsverhalten, also eine monoton abfallende Spannung, zeigt. Nun wird der regelbare Widerstand solange verringert, bis ein Überschwingen der Spannung zu sehen ist. Allerdings ist der Schwingfall dann bereits eingetreten und der Widerstand muss nun solange erhöht werden, bis dieses Phänomen gerade wieder verschwindet. Der nun eingestellte Widerstand wird als R_{ap} notiert.

2.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung und der Phasenverschiebung

In der Abbildung 5 ist eine Schaltung aufgebaut, mit welcher die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung und der Phasenverschiebung (zwischen Erreger- und Kondensatorspannung) untersucht wird.

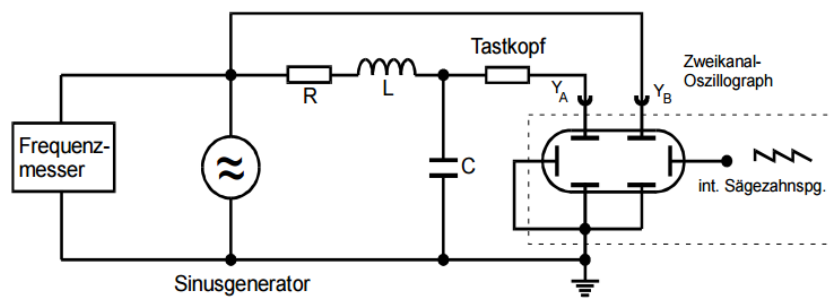


Abbildung 5: Schaltung zur Messung der Frequenzabhängigkeit von der Kondensatorspannung und der Phasenverschiebung [2, S. 296].

Auf dem Oszilloskop wird nun, wie in Abbildung 6 schematisch dargestellt, die Erreger- und die Kondensatorspannung gegen die Zeit aufgetragen. Daraufhin wird die Frequenz ν

am Sinusgenerator im Bereich von 1 Hz bis 100 kHz variiert. Dabei werden etwa 30 Wertepaare aus der Spannung U_C , der Frequenz ν und der berechneten Phasenverschiebung Φ notiert. Der Bereich um die Resonanzfrequenz wird in kleineren Schritten gemessen, weil diese in der Auswertung genauer betrachtet werden soll. Für die Phasenverschiebung Φ wird der zeitliche Unterschied der Nulldurchgänge a gemessen und die Periodenlänge b aus der Frequenz ν berechnet.

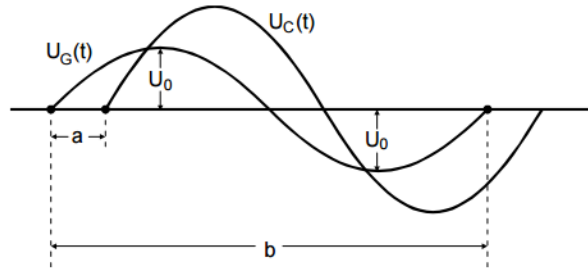


Abbildung 6: Schematische Darstellung des am Oszilloskop zu sehenden Bildes [1, S. 282].

3 Auswertung

Die für den Versuch relevanten Bauteile haben die Werte

$$L = (16.78 \pm 0.09)\text{mH} \quad (28)$$

$$C = (2.066 \pm 0.006)\text{nF} \quad (29)$$

$$R_1 = (67.2 \pm 0.2)\Omega \quad (30)$$

$$R_2 = (682 \pm 1)\Omega \quad (31)$$

Für den Versuch 3.2 wurde aufgrund eines Defektes des regelbaren Widerstands der Aufbau gewechselt. Die Daten für den Aufgabenteil sind,

$$L_2 = (3.53 \pm 0.03)\text{mH} \quad (32)$$

$$C_2 = (5.08 \pm 0.01)\mu\text{F} \quad (33)$$

3.1 Zeitabhängigkeit der Amplitude und Dämpfungswiderstand einer Gedämpften Schwingung

Die durch das Oszilloskop gemessene Spannungsspeaks werden mittels einer CWD-Funktion ermittelt und mit deren dazugehörige Zeit in Tabelle 1 aufgetragen. Anhand der Daten lassen sich durch eine Fit-Funktion die Koeffizienten der Einhüllenden berechnen, welche in Gleichung 3 beschrieben ist.

$$A_0 = (30.6 \pm 0.9)\text{V} \quad (34)$$

$$f = (680 \pm 60)\text{Hz} \quad (35)$$

U_C / V	$t / 10^{-3} \text{ s}$
52.0 ± 0.1	0.18 ± 0.01
48.8 ± 0.1	0.54 ± 0.01
45.6 ± 0.1	0.93 ± 0.01
41.6 ± 0.1	1.30 ± 0.01
38.4 ± 0.1	1.69 ± 0.01
36.6 ± 0.1	2.09 ± 0.01
34.2 ± 0.1	2.46 ± 0.01
33.3 ± 0.1	2.82 ± 0.01
32.0 ± 0.1	3.20 ± 0.01
31.4 ± 0.1	3.59 ± 0.01
29.6 ± 0.1	3.96 ± 0.01
28.8 ± 0.1	4.32 ± 0.01

Tabelle 1: Spannung am Kondensator zur Bestimmung des Abklingverhalten und des Dämpfungswiderstandes.

Die Einhüllende und die Messdaten sind in Abbildung 7 dargestellt. Nach Formel 5 und

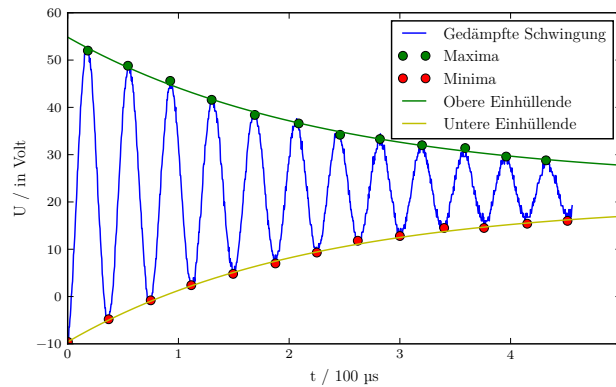


Abbildung 7: Messdaten mit Einhüllender

7 lässt sich der effektive Dämpfungswiderstand sowie die Abklingdauer berechnen.

$$R_{\text{eff}} = (140 \pm 10) \, \Omega \quad (36)$$

$$T_{\text{ex}} = (230 \pm 10) \cdot 10^{-6} \text{ s} \quad (37)$$

Der praktisch bestimmte Wert weicht vom errechneten Wert um $75 \, \Omega$ ab. Dies lässt sich einerseits dadurch erklären, dass der Innenwiderstand von $50 \, \Omega$ nicht berücksichtigt wurde. Andererseits kann es bei der gewählten Frequenz zu Impedanzen der verschiedenen Bauteile gekommen sein. Für die weiteren Aufgaben wird der Widerstand des Generators berücksichtigt.

3.2 Dämpfungswiderstand des Aperiodischen Grenzfalls

Der im Experiment bestimmte Widerstand, bei dem der Aperiodische Grenzfall eintritt, beträgt

$$R_{\text{Praxis}} = 1.25 \, \Omega . \quad (38)$$

Der Theoretische Widerstand wird mittels Formel 10 ausgerechnet und beträgt

$$R_{\text{Theorie}} = (2.75 \pm 0.23) . \quad (39)$$

Zwischen dem theoretisch und dem praktisch ermittelten Wert ist eine Differenz von $1.5 \, \Omega$. Mögliche Ursachen für den Fehler sind, die vernachlässigte Impedanz des Aufbaus, als auch die Schwierigkeit den Punkt des Aperiodischen Grenzfalls zu treffen, da keine wesentliche Änderung zu erkennen sind.

3.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung eines Serienresonanzkreises

In Tabelle 2 sind die Spannung am Kondensator und die entsprechenden Frequenzen hinterlegt. Bei den Frequenzen wird ein Ablesefehler von $0.1 \, \text{V}$ angenommen, da immer auf die erste Stelle nach dem Komma auf- bzw. abgerundet wird. Anhand derer und der Abbildung 8 lässt sich die Güte ablesen. Er beträgt

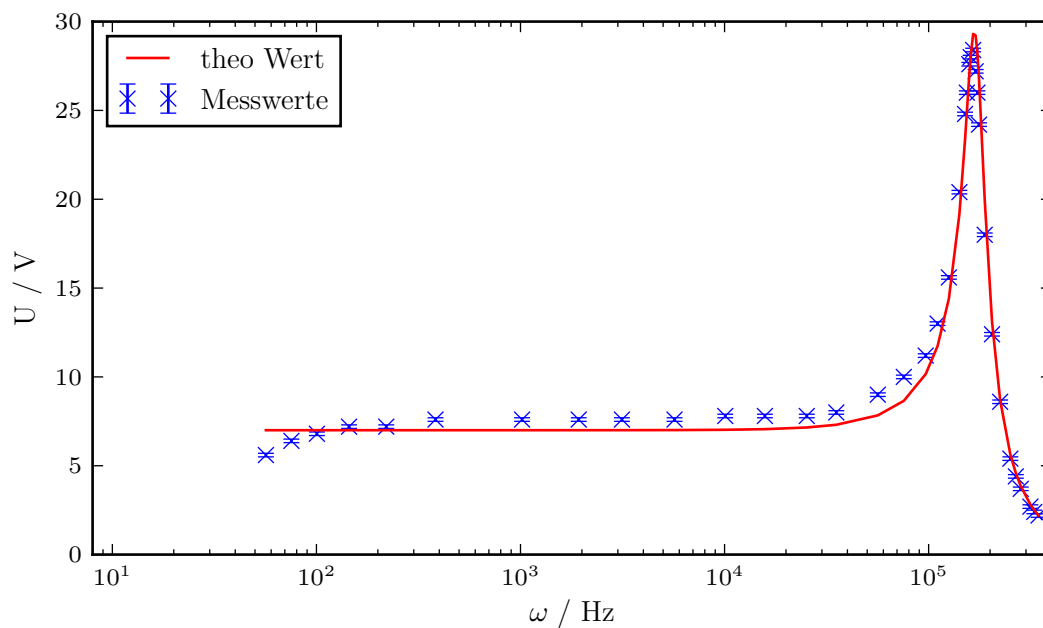


Abbildung 8: Halblogarithmisch aufgetragene Kondensatorspannung gegen die Frequenz

$$q_{\text{exp}} = 4.30 \pm 0.01 . \quad (40)$$

f / Hz	U / V
9	5.6 ± 0.1
12	6.4 ± 0.1
16	6.8 ± 0.1
23	7.2 ± 0.1
35	7.2 ± 0.1
61	7.6 ± 0.1
162	7.6 ± 0.1
307	7.6 ± 0.1
500	7.6 ± 0.1
905	7.6 ± 0.1
1604	7.8 ± 0.1
2509	7.8 ± 0.1
4025	7.8 ± 0.1
5615	8.0 ± 0.1
8970	9.0 ± 0.1
12030	10.0 ± 0.1
15400	11.2 ± 0.1
17610	13.0 ± 0.1
20000	15.6 ± 0.1
22520	20.4 ± 0.1
24000	24.8 ± 0.1
24490	26.0 ± 0.1
25180	27.6 ± 0.1
25570	28.0 ± 0.1
26300	28.4 ± 0.1
27060	27.2 ± 0.1
27610	26.0 ± 0.1
28100	24.2 ± 0.1
29970	18.0 ± 0.1
32540	12.4 ± 0.1
35660	8.6 ± 0.1
40030	5.4 ± 0.1
42580	4.4 ± 0.1
45000	3.7 ± 0.1
50180	2.7 ± 0.1
52430	2.4 ± 0.1
55010	2.2 ± 0.1

Tabelle 2: Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Aus Formel 19 lässt sich der theoretische Wert der Güte berechnen. Sie beträgt

$$q_{\text{theo}} = (4.18 \pm 0.01) \quad (41)$$

und ist somit 3 % größer als der praktisch ermittelte Wert. Mittels eines linearen Plot (siehe Abbildung 9) soll die breite der Resonanzkurve bestimmt werden. Durch Ablesen

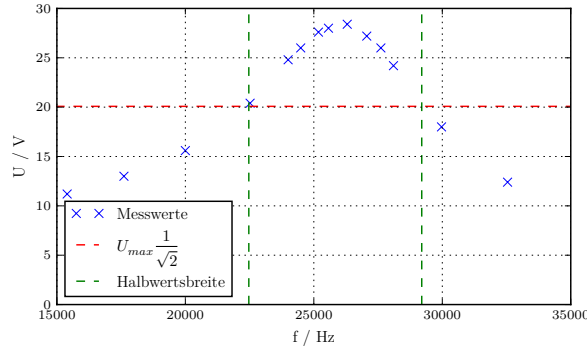


Abbildung 9: Frequenzabhängige Kondensatorspannung

wird die Breite der Resonanzkurve bestimmt welche

$$v_+ - v_- = 6.72 \text{ kHz} \quad (42)$$

entspricht. Die theoretische breite berechnet sich nach Formel 20. Sie beträgt

$$v_+ - v_- = (6.47 \pm 0.04) \text{ kHz} . \quad (43)$$

Der experimentell bestimmte Wert weicht vom theoretischen Wert um 3.9 % ab.

3.4 Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung

Ziel ist es die Resonanzfrequenz f_{res} zu bestimmen, sowie die Frequenz f_1 und f_2 , welche eine Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$ ergeben. Die der Schaltung entnommen Frequenzen sind in Tabelle 3 aufgetragen und in Abbildung 10 in einem halblogarithmischen Plot dargestellt. Dem Plot kann man entnehmen, dass erst ab einer Frequenz von ca. 10 kHz eine Phasenverschiebung zu bemerken ist. Um die Resonanz besser bestimmen zu können werden die Werte in Abbildung 11 linear um die Resonanzfrequenz dargestellt. Der Abbildung 11 lassen sich die Resonanzfrequenz, sowie die Frequenzen f_1 und f_2 entnehmen. Die theoretische Resonanzfrequenz berechnet sich aus Formel 17 und die Frequenzen f_1 und f_2 aus der Formel 15. In Gleichung 46 wird die theoretisch ermittelte mit der praktisch ermittelten Güte verglichen und der Fehler berechnet.

$$f_{\text{res,exp}} = 26.800 \text{ kHz} \quad (44)$$

$$f_{\text{res,theo}} = (26.58 \pm 0.08) \text{ kHz} \quad (45)$$

$$\text{Abweichung} = 1\% \quad (46)$$

f / Hz	Φ / rad
9	0.00
12	0.00
16	0.00
23	0.00
35	0.00
61	0.00
162	0.00
307	0.00
500	0.00
905	0.00
1604	0.00
2509	0.00
4025	0.00
5615	0.00
8970	0.00
12030	0.12
15400	0.27
17610	0.33
20000	0.42
22520	0.62
24000	0.87
24490	0.95
25180	1.20
25570	1.25
26300	1.45
27060	1.70
27610	1.97
28100	1.90
29970	2.37
32540	2.69
35660	2.82
40030	3.16
42580	2.88
45000	2.88
50180	2.96
52430	3.09
55010	3.11

Tabelle 3: Phasenverschiebung in Abhängigkeit der Frequenz

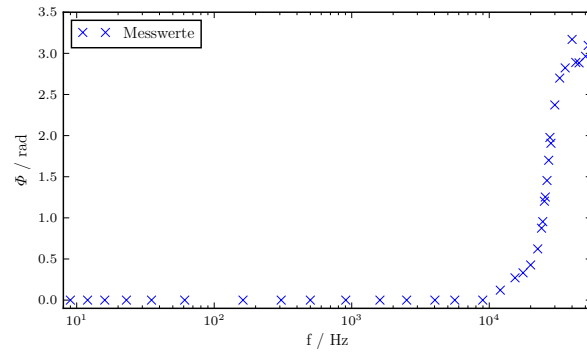


Abbildung 10: Phasenverschiebung zwischen Erreger- und Kondensatorspannung

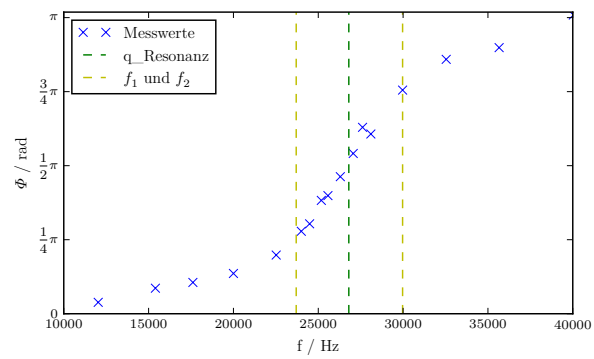


Abbildung 11: Phasenverschiebung zwischen Erreger- und Kondensatorspannung

Analog wird mit den Werten für f_1 und f_2 vorgegangen.

$$f_{1,\text{exp}} = 23.700\text{kHz} \quad (47)$$

$$f_{1,\text{theo}} = (23.78 \pm 0.07)\text{kHz} \quad (48)$$

$$\text{Abweichung} = 1\% \quad (49)$$

$$f_{1,\text{exp}} = 29.970\text{kHz} \quad (50)$$

$$f_{1,\text{theo}} = (30.7 \pm 0.1)\text{kHz} \quad (51)$$

$$\text{Abweichung} = 1\% \quad (52)$$

4 Diskussion

Alle experimentell ermittelten Messwerte liegen in etwa im Toleranzbereich der Messgrößen, bis auf die Güte. Es scheint so, als ob ein systematischer Fehler vorliegt. Ausschließlich bei $f \rightarrow \infty$ und $f \rightarrow 0$ wird der Erwartungswert erfüllt.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 353: Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 2014.
- [2] TU Dortmund. *Versuch 354: gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. 2014.