302

Elektrische Brückenschaltung

Maximilian Sackel
Maximilian.sackel@gmx.de

Philip Schäfers
phil.schaefers@gmail.com

Durchführung: 15.12.15

Abgabe: 05.01.2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theoretische Grundlage

Ziel dieses Versuches ist es mit Hilfe verschiedener Brückenschaltungen unbekannte Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten auszumessen. Dies wird zum Beispiel mittels einer Abgleichbedingung realisiert. Jede Brückenschaltung wird prinzipiell von einer Speisepannung U_s und vier Widerständen betrieben, siehe Abbildung 1. Dies kann auch durch Scheinwiderstände realisiert werden, was impliziert das die Brückenschaltung je nach Aufbau mit Wechselstrom betrieben werden muss.

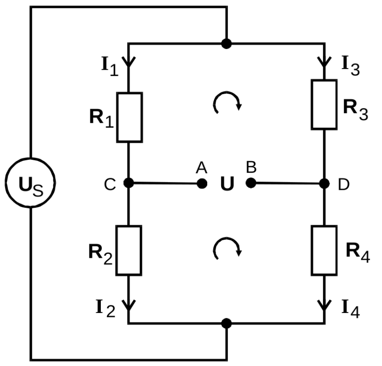

Abbildung 1: Wesentlicher Aufbau einer Brückenschaltung [1].

Die Brückenschaltung liegt dem Kirchhoffschen Regeln zu Grunde. Die erste der beiden Regeln besagt, das die Summe der eingehenden und ausgehende Ströme an eineme Knoten gleich Null ist.

$$\text{Knotenregel}: \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} I_\mathrm{k} = 0 \tag{1}$$

Die zweite Regel besagt, dass bei einer Geschlossenen Masche sich alle Teilspannungen, bei einem Umlauf zu Null addieren.

$$\text{Maschenregel}: \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} U_\mathrm{k} = 0 \tag{2}$$

Unter Berücksichtigung der Kirchhoffschen Gesetzen ergibt sich für die einfachste Brückschaltung eine Brückenspannung U_Br von

$$U_\mathrm{Br} = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} \tag{3}$$

Es wird das Widerstandverhältnis so gewählt das die Brückenspannung minimal wird. Daraus ergibt sich die Abgleichsbedingung

$$R_2 R_3 = R_1 R_4 \ . \tag{4}$$

Für komplexe Widerstände ändert sich die Abgleichsbedingung zu

$$\xi_1 \xi_4 = \xi_2 \xi_3 \tag{5}$$

$$\text{mit } \xi = X + iY \ .$$

Da zwei komplexe Zahlen nur dann gleich sind, wenn sie in Real- und Imaginärteil übereinstimmen, lautet 5 ausführlich geschrieben

$$X_1X_4 - Y_1Y_4 = X_2X_3 - Y_2Y_3 \tag{6}$$

und

$$X_1Y_4 + X_4Y_1 = X_2Y_3 + X_3Y_2 \ . \tag{7}$$

1.1 Wheatstone Brücke

Die Wheatstone Brücke besteht ausschließlich aus ohmschen Widerständen. Sie ist dafür gedacht einen unbekannten Widerstand R_x mittels der oben genannten Abgleichmethode zu bestimmen. Der Schematische Aufbau einer Wheatstone Brücke ist in Abbildung 2 zu sehen.

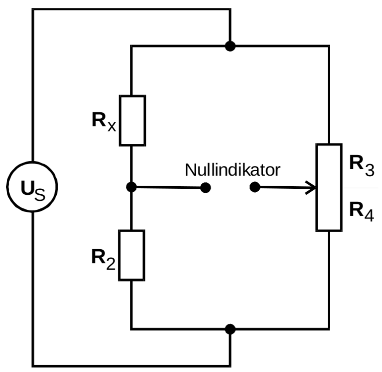

Abbildung 2: Aufbau einer Wheatstone Brücke [1].

Der Widerstand R_x ergibt sich aus dem Umstellen der Gleichung 4 zu

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} \ . \tag{8}$$

Das Verhältniss R_3 zu R_4 lässt sich besonders gut mit Hilfe eines Potentiometer einstellen.

1.2 Kapazitätsmessbrücke

In Abbildung 3 ist der Aufbau einer Kapazitätsmessbrücke dargestellt, mit Hilfe der Kapazitätsmessbrücke soll die Kapazität des Kondensators bestimmt werden. Dies geschieht über die Impedanz des Kondensators, daher muss der Aufbau mit Wechselstrom betrieben werden. Da es sich im Versuch um keinen idealen Kondensator handelt wird im Schaltbild ein fiktiver Widerstand R_x vor den Kondensator geschaltet.

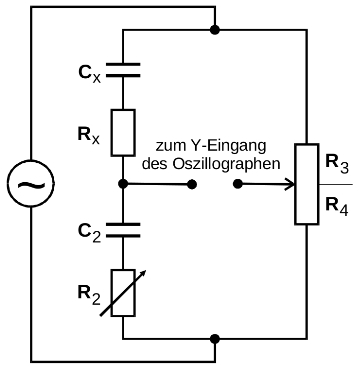

Abbildung 3: Messung der Kapazität eines realen Kondensators [1].

Mittels der Abgleichbedingung gibt sich analog zu Formel 8 ein Widerstand von

$$R_\mathrm{x} = R_2 \frac{R_3}{R_4} \ ,$$

und für die Kapazität des Kondensators unter Berücksichtigung der Scheinwiderstände nach GLeichung 7 folgt

$$C_\mathrm{x} = C_2 \frac{R_4}{R_3} \ . \tag{9}$$

1.3 Induktivitätsmessbrücke

Mittels der Messbrücke aus der Abbildung 4 soll die Induktivität einer Spule bestimmt werden. Dies geschieht Analogie zur Kapazitätsmessbrücke über die Impedanz der Spule,daher muss der Aufbau mit Wechselstrom betrieben werden.

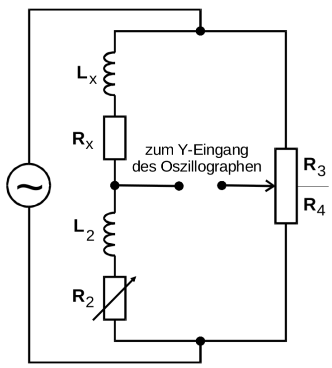

Abbildung 4: Messung der Induktivität einer realen Spule [1].

Mittels der Abgleichbedingung gibt sich analog zu Formel 8 ein Widerstand von

$$R_\mathrm{x} = R_2 \frac{R_3}{R_4} \ ,$$

und für die Induktivität der Spule unter Berücksichtigung der Scheinwiderstände nach GLeichung 7 folgt

$$L_\mathrm{x} = L_2 \frac{R_3}{R_4} \ . \tag{10}$$

1.4 Maxwell-Brücke

Es soll die Induktivität einer Spule mit Hilfe der Maxwell-Brücke bestimmt werden. Dafür wird anstelle einer Spule, wie im vorherigen Kapitel beschrieben, ein Kondensator verwendet und wie in Abbildung 5 aufgebaut. Es muss darauf geachtet werden, dass einerseits, die Frequenz hoch genug ist, damit sich der Einschwingvorgang hinreichend schnell einstellt und andererseits die Frequenz niedrig genug ist, damit die Streukapazitäten niedrig genug sind um einen Abgleich zu ermöglichen. Aus den Gleichungen 6 und 7

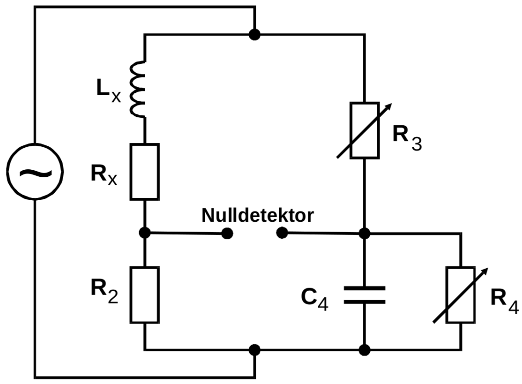

Abbildung 5: Messung der Induktivität durch eine Maxwell-Brücke [1].

ergeben sich L_x und R_x zu

$$L_\mathrm{x} = R_2 R_3 C_4 \tag{11}$$

und

$$R_\mathrm{x} = R_2 \frac{R_3}{R_4} \ .$$

1.5 TT-Brücke

Mittels einer TT-Brücke soll die Funktion des elektrischen Filters genauer bestimmt werden. Dafür wird die Schaltung Abbildung 6 entsprechend aufgebaut. Das Spannungverhältniss U_Br zu U_S zu berechnen werden die Ströme an den Knoten 1, 2 und 3 betrachtet. Für den ersten Knoten ergibt sich nach der Kirchhoffschen Knotenregel

$$\frac{U_1 - U_\mathrm{S}}{R} + \frac{U_1 - U_\mathrm{Br}}{R} = 2i\omega C U_1 \ . \tag{12}$$

Mit Hilfe der Ströme an dem zweiten

$$\left(U_\mathrm{S} - U_2\right) i\omega C + \left(U_\mathrm{Br} - U_2\right) i\omega C = \frac{2}{R} U_2 \tag{13}$$

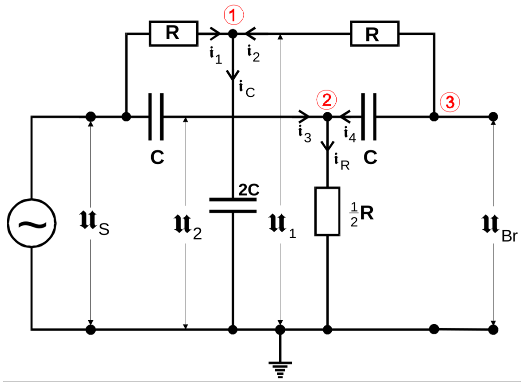

Abbildung 6: Messung der Induktivität durch eine TT-Brücke [1].

und dritten Knoten

$$(U_2 - U_{\text{Br}})\, i\omega C + \frac{U_q - U_{\text{Br}}}{R} = 0 \tag{14}$$

lässt sich durch Auflösen der Gleichungen 12, 13 nach U_1 und U_2 und deren Ergebnisse in 14 eingesetzt, die Brückenspannung ermitteln.

$$U_{\text{Br}} = U_{\text{S}} \frac{1 - \omega^2 R^2 C^2}{1 - \omega^2 R^2 C^2 + 4 i\omega RC} \tag{15}$$

Als Spannungsverhältniss erhält man durch umstellen der Gleichung 15 und der Einführung von

$$\Omega = \omega RC$$

die Form

$$\frac{U_{\text{Br}}}{U_{\text{S}}} = \frac{1 - \Omega^2}{1 - \Omega^2 + 4i\Omega} \; .$$

Hieraus erhält man durch Multiplikation mit dem konjugiert komplexen Wert des Nenners den Ausdruck:

$$\left| \frac{U_{\text{Br}}}{U_{\text{S}}} \right|^2 = \frac{(1 - \Omega^2)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 16 \cdot \Omega^2} \; . \tag{16}$$

1.6 Fehlerrechnung

1.6.1 Mittelwert

Der Mittelwert einer Messreihe $x_1, ..., x_{\text{n}}$ lässt sich durch die Formel

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{\text{k=1}}^{\text{N}} x_k \tag{17}$$

berechnen. Die Standardabweichung des Mittelwertes beträgt

$$\Delta \overline{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{\text{k=1}}^{\text{N}} (x_{\text{k}} - \overline{x})^2} \tag{18}$$

1.6.2 Fehlerfortpflanzung mit Python

Die Fehlerfortpflanzung wird im folgenden mit Hilfe von der Funktion "ufloat" aus "python-uncertainties" durchgeführt. Die dafür verwendete Versionsnummer von Python ist 3.4.3.

2 Durchführung und Aufbau

2.1 Wheatstone Brücke

Zwei verschiedene unbekannte Widerstände sollen durch die Brückenschaltung vermessen werden. Dafür wird die Schaltung wie in Abbildung 1 aufgebaut. Anschließend wird das Potentiometer so lange varriert, bis die Brückenspannung minimal wird/verschwindet. Dies wird für drei verschieden Widerstände R_2 wiederholt.

2.2 Kapazitätsmessbrücke

2.2.1 Idealer Kondensator

Es soll die Kapazität eines Kondensators ausgemessen werden. Dafür wird die Schaltung wie in Abbildung 3 aufgebaut. Es kann jedoch der Widerstand R_2 vernachlässigt werden, da die Innenwiderstände verschwindend gering sind. Daraufhin wird das Potentiometer erneut so lange variiert, bis die Brückenspannung verschwindet. Dem Versuch werden die Werte C_2, R_3 und R_4 entnommen. Der Versuch wird mit einer weiteren Kapazität C_2 durchgeführt.

2.2.2 Realer Kondensator

Ziel ist es eine RC-Kombination auszumessen. Dazu wird in die Schaltung der Abbildung entsprechend der Widerstand R_2 ergänzt. Die Messung wird mit 2 verschiedenen Kondensatoren C_2 wiederholt. Das Potentiometer wird erneut so eingestellt, dass die Brückenspannung minimal wird und die Werte C_2, R_2, R_3, sowie R_4 werden notiert.

2.3 Induktivitätsmessbrücke

Um die Induktivität und den fiktiven Widerstand der Schaltung zu vermesen, wir die Schaltung wie in Abbildung 4 aufgebaut. Die Messung wird mit 2 verschiedenen Spulen L_2 wiederholt. Das Potentiometer wird erneut so eingestellt das die Brückenspannung minimal wird und die werte L_2, R_2, R_3, sowie R_4 notiert.

2.4 Maxwell Brücke

Die Schaltung ist wie in Abbildung 5 zu sehen ist aufgebaut. Dabei werden die Widerstände R_3 sowie R_4 nicht mehr als Potentiometer, sondern jeweils als regelbarer Widerstand benutzt. Bei der Brückenspannung wird durch abwechselndes justieren der beiden Widerstände das Minimum der Brückensapnnung gesucht. Die Werte R_2, R_3, R_4

und C_4 werde notiert und die Messung ein zweites mal für einen anderen Widerstand R_2 durchgeführt.

2.5 TT-Brücke

Die Schaltung wird Abbildung 6 enstprechend aufgebaut. Zunächst wird die Speisespannung U_S des Systems ermittelt. Es wird die Brückenspannung U_{Br} im Bereich von (20-30000) Hz variiert. Dabei wird das Minimum der Brückensapnnung des Frequenzspektrums f ermittelt und dem Aufbau Datentupel aus der Frequenz f und der Brückenspannung genommen.

3 Auswertung

3.1 Wheatston'sche Brückeschaltung

Mit Hilfe der Wheatston'schen Brückenschaltung werden zwei unbekannte Widerstände R_{13} = Wert13 und R_{14} = Wert14 bestimmt. Dies geschieht mit Formel 8, die Werte und Ergebnisse sind in den Tabellen 1 und 2 aufgeführt. $\overline{R_{13,14}}$ entspricht hierbei den gemittelten Werten für die gesuchten Widerstände. Der Wert R_2 hat eine Toleranz von 0.2% und $\frac{R_3}{R_4}$ hat eine Toleranz von 0.5%.

R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	R_{13} / Ω	$\overline{R_{13}}$ / Ω
332	735	265	322.8 ± 1.7	
500	648	352	321.0 ± 1.7	326.6 ± 1.0
664	582	418	336.0 ± 1.8	

Tabelle 1: Werte für die Bestimmung von R_{13}.

R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	R_{14} / Ω	$\overline{R_{14}}$ / Ω
332	493	507	920.8 ± 5.0	
500	391	609	920.5 ± 5.0	921.9 ± 2.9
664	336	664	924.5 ± 5.0	

Tabelle 2: Werte für die Bestimmung von R_{14}.

3.2 Kapazitätsmessbrücke

Mit Hilfe der Kapazitätsmessbrücke werden zwei unbekannte verlustfreie Kapazitäten C_2 = Wert2 und C_3 = Wert3 und eine verlustbehaftete Kapazität C_8 = Wert8 bestimmt. Dies geschieht mit Formel 8 für C_2, C_3 und mit den Formeln 8, 9 für C_8 und R_8. Die Messwerte und Ergebnisse sind in den Tabellen 3 bis 5 aufgeführt. $\overline{C_{2,3,8}}$ entspricht hierbei den gemittelten Werten für die gesuchten Kapazitäten. Der Wert C_2 hat eine Toleranz von 0.2% und $\frac{R_3}{R_4}$ hat eine Toleranz von 0.5%, allerdings hat R_2 nun eine Toleranz von 3%.

C_2 / nF	R_3 / Ω	R_4 / Ω	C_2 / μF	$\overline{C_2}$ / μF
597	285	715	1.498 ± 0.008	
750	329	671	1.530 ± 0.008	1.517 ± 0.005
994	395	605	1.522 ± 0.008	

Tabelle 3: Werte für die Bestimmung von C_2.

C_2 / nF	R_3 / Ω	R_4 / Ω	C_3 / μF	$\overline{C_3}$ / μF
597	593	607	40.97 ± 0.22	
750	639	361	42.37 ± 0.23	41.65 ± 0.13
994	705	295	41.59 ± 0.22	

Tabelle 4: Werte für die Bestimmung von C_3.

C_2 / nF	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	C_8 / μF	R_8 / Ω	$\overline{C_8}$ / μF	$\overline{R_8}$ / Ω
597	304	671	329	29.27 ± 0.16	149.1 ± 4.5		
750	228	722	278	28.88 ± 0.16	87.8 ± 2.7	29.11 ± 0.09	96.5 ± 1.8
994	179	773	227	29.19 ± 0.16	52.6 ± 1.6		

Tabelle 5: Werte für die Bestimmung von C_8 und R_8.

3.3 Induktivitätsmessbrücke

Mit Hilfe der Induktivitätsmessbrücke wird die verlustbehaftete Induktivität L_{19}, R_{19} = Wert19 einer unbekannten Spule bestimmt. Dies geschieht mit den Formeln 8 und 10. Die Messwerte und Ergebnisse sind in der Tabelle 6 aufgeführt. Die baubedingten Fehler von R_2 und $\frac{R_3}{R_4}$ sind die gleichen wie im vorangegangenen Kapitel, der Fehler von L_2 beträgt 0.2%.

L_2 / mH	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	L_{19} / mH	R_{19} / Ω	$\overline{L_{19}}$ / mH	$\overline{R_{19}}$ / Ω
14.6	286	281	719	5.706 ± 0.029	111.8 ± 0.6		
20.1	287	287	713	8.090 ± 0.040	115.5 ± 0.6	6.898 ± 0.027	113.6 ± 2.4

Tabelle 6: Werte für die Bestimmung von L_{19} und R_{19}.

3.4 Maxwell-Brücke

Mit Hilfe der Maxwell-Brücke soll die gleiche Spule untersucht werden welche auch für die Induktivitätsmessbrücke verwendet wurde. Die verwendete Kapazität $C_4 = 750$ nF bleibt für die gesamte Messung unverändert. L_{19} und R_{19} werden durch einsetzen in die Gleichungen 8 und 11 ermittelt. Die Messwerte und Ergebnisse sind in Tabelle 7 aufgelistet.

R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	L_{19} / mH	R_{19} / Ω	$\overline{L_{19}}$ / mH	$\overline{R_{19}}$ / Ω
332	215	655	53.5 ± 1.6	109.0 ± 4.6		
664	95	538	47.3 ± 1.4	117.2 ± 5.0	57.6 ± 1.0	115.6 ± 2.8
1000	96	796	72.0 ± 2.2	120.6 ± 5.1		

Tabelle 7: Werte für die Bestimmung von L_{19} und R_{19}.

3.5 TT-Brücke

In der Tabelle 8 wird deutlich, dass die Brückenspannung bei ca. 380 Hz minimal wird und in etwa 0.02 V beträgt.
Der theoretische minimal Wert lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$$f_{0,\text{theo}} = \frac{1}{2\pi RC} = (382.1 \pm 1.2)\,\text{Hz}$$
$$R = 1000\,\Omega$$
$$C = (4.165 \pm 0.013) \cdot 10^{-7}\,\text{F}.$$

f / Hz	U_{br} / V
20	4.56
70	3.76
180	1.78
200	1.51
220	1.28
240	1.07
260	0.88
280	0.70
300	0.56
320	0.40
340	0.26
360	0.14
380	0.02
400	0.21
420	0.23
440	0.33
460	0.43
480	0.52
500	0.61
520	0.70
540	0.78
560	0.87
580	0.96
700	1.37
1000	2.14
2000	3.26
7000	3.90
15000	3.92
30000	3.92

Tabelle 8: Messwerte der Brückenspannung und der Frequenz von der TT-Brückenschaltung.

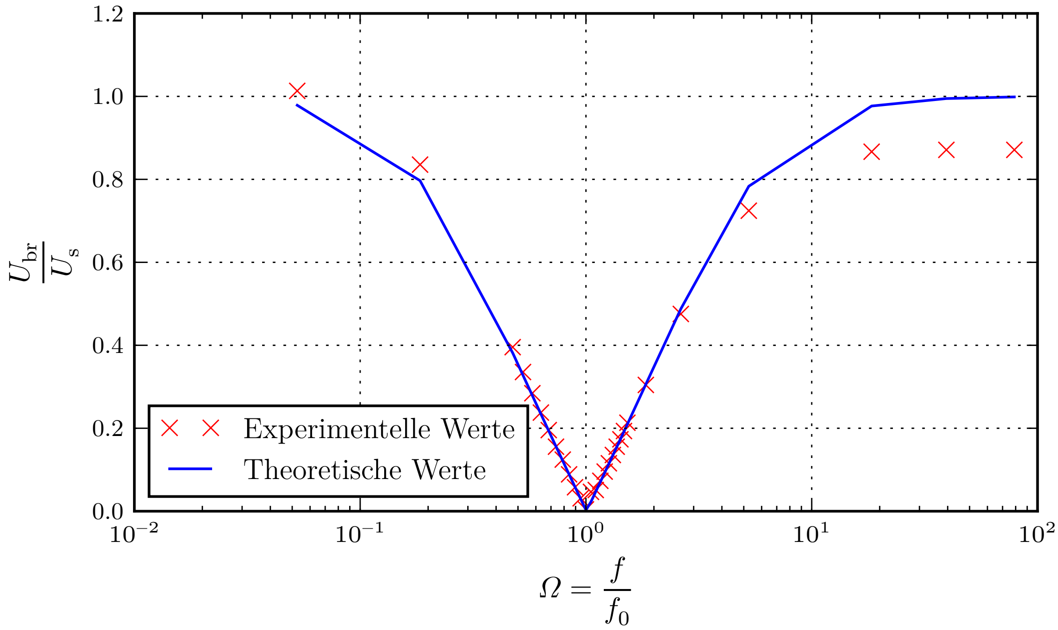

Abbildung 7: Theoretische und experimentelle Werte der TT-Brückenschaltung.

Für die Bestimmung des Klirrfaktors k wird zunächst genähert, dass die Summe der Oberwellen nur von dem Term der zweiten Oberwelle bestimmt wird. Damit folgt, dass

$$k = \frac{\sqrt{{U_2}^2 + {U_3}^2 + \dots}}{U_1} = \frac{U_2}{U_1} \tag{19}$$

$$U_1 = 4.5\,\mathrm{V} \tag{20}$$

$$U_2 = \frac{U_{\mathrm{br}}}{f(2)} \tag{21}$$

$$U_{\mathrm{br}} = 0.02\,\mathrm{V} \tag{22}$$

$$f^2(2) = \frac{(1-2^2)^2}{(1-2^2)^2 + 16 \cdot 2^2} = 0.1233 \tag{23}$$

$$U_2 = \frac{0.02\mathrm{V}}{\sqrt{0.1233}} = 0.057\,\mathrm{V} \tag{24}$$

$$k = \frac{0.057\mathrm{V}}{4.5\,\mathrm{V}} = 0.0127 \tag{25}$$

ist.

.

4 Diskussion

In allen Versuchen sind die Fehler sehr klein und meist unter 1%. Aufällig sind vorallem Kapitel 3.3 und 3.4. Für beide Versuche wurde die gleiche Spule verwendet und für den den Widerstand R_{19} kommt das gleiche Ergebniss raus, allerdings ist die Induktiviät bei der Maxwell-Brückenschaltung um ca. 835 % größer als bei der Induktivitätsmessbrücke. Daraus lässt sich ein Fehler bei dem notieren der Daten folgern, da alle anderen Versuche sehr genau waren.

Literatur

[1] TU Dortmund. *V302: Brückenschaltung*. http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V302.pdf, 2014.