204

Wärmeleitung von Metallen

Maximilian Sackel
Maximilian.sackel@gmx.de

Philip Schäfers
phil.schaefers@gmail.com

Durchführung: 10.11.2015

Abgabe: 17.11.2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theoretische Grundlage

Im folgenden Versuch soll die Wärmeleitfähigkeit verschiedener Stoffe bestimmt werden. Zur Wärmeleitung kommt es wenn ein Temperaturgefälle $(\partial T/\partial x)$ auf dem Stab existiert. Dabei wird durch einem Querschnittsfläche A, in der Zeit dt die Wärmemenge dQ transportiert.

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt \tag{1}$$

κ ist eine materialäbhängige Konstante, names Wärmeleitfähigkeit und und dient als Proportionalitätsfaktor. In Analogie zur Elektrodynamik wird eine Wärmestromdichte

$$j_w = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \tag{2}$$

die den Verschiebungsstrom zwischen den Temperaturdifferenzen wiedergibt definiert. Damit lässt sich eine Kontinuitätsgleichung formulieren

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ , \tag{3}$$

die die räumliche als auch zeitliche Entwicklung der Temperatur beschreibt. Aus der Formel 3 lässt sich eine Temperaturleitfähigkeit von

$$\sigma T = \frac{\kappa}{\rho c} \tag{4}$$

ablesen. Dies ist ein Maß dafür wie schnell sich Temperaturunterschiede ausgleichen. Wenn ein Stab mit der Periode T abwechselnd erwärmt und gekühlt wird kommt es zu einer erzwungenen Schwingung der Form

$$T(x,t) = T_{max} e^{-\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x} cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x\right) \ . \tag{5}$$

Durch Ablesen der Koeffizienten der Wellengeleichung und dem Zusammenhang das die Phasengeschwindigkeit gleich der Kreisfrequenz durch die Wellenzahl ist erhält man eine Geschwindikeit von

$$v = \sqrt{\frac{2\kappa\omega}{\rho c}} \ . \tag{6}$$

Den Dämpfungsfaktor erhält man aus dem Amplitudenverhältniss A_{nah} und A_{fern} sowie Δx

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2 \Delta t \, ln(A_{nah}/A_{fern})} \tag{7}$$

1.1 Fehlerrechnung

Sämtliche Fehlerrechnungen werden mit Hilfe von Python 3.4.3 durchgeführt.

1.1.1 Mittelwert

Der Mittelwert einer Messreihe $x_1, ..., x_n$ lässt sich durch die Formel

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k \tag{8}$$

berechnen. Die Standardabweichung des Mittelwertes beträgt

$$\Delta\overline{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^{N} (x_k - \overline{x})^2} \tag{9}$$

1.1.2 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

Wenn $x_1, ..., x_n$ fehlerbehaftete Messgrößen im weiteren Verlauf benutzt werden, wird der neue Fehler Δf mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung angegeben.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 \cdot (\Delta x_k)^2} \ . \tag{10}$$

1.1.3 Lineare Regression

Die Steigung und y-Achsenabschnitt einer Ausgleichsgeraden werden gegebenfalls mittels Linearen Regression berechnet.

$$y = m \cdot x + b \tag{11}$$

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \tag{12}$$

$$b = \frac{\overline{x^2}\,\overline{y} - \overline{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \tag{13}$$

2 Durchführung und Aufbau

2.1 Versuchsaufbau

Zentrales Element des Versuchaufbaus ist ein Peltier Element womit vier verschiedene Metalle gekühlt bzw erwärmt werden. Die Temperatur der Stäbe wird an jeweils 2 verschieden Punkten gemessen und auf einem Messgerät ausgegeben. Die beiden Thermoelemente liegen jeweils 3 cm auseinander. Mittels GLX können die Temperaturverläufe dargestellt und Differenzen berechnet werden.

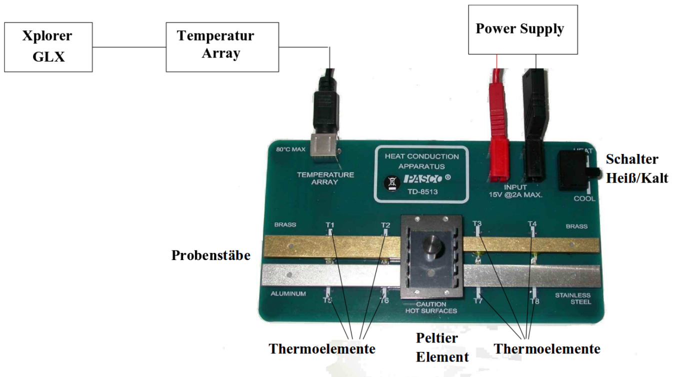


Abbildung 1: Experimenteller Aufbau zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit [1].

2.2 Peltier Element

Die Funktionsweise eines Peltier Elements beruht auf dem Seebeck-Effekt bzw. Peltiereffekt. Grundlage dessen sind zwei miteinander verbundene Halbleiter mit unterschiedlichen Energieniveaus. Bei einem Stromfluss durch die Metalle kommt es durch den Kontakt zu einem Potentialausgleich. Wenn die Elektronen durch den Stromfluss in ein energetisch günstigeren Zustand übergehen wird Wärme frei, falls sie in einen höherenergetischen Zustand gelangen wird der Umgebung Wärme entzogen um die Potentialdifferenz zu überbrücken.

2.3 Statische Methode

Hierbei werden die vier Stäbe durch das Peltier Element solange geheizt bis das siebte Thermoelement (siehe Abbildung 1) eine Temperatur von 45° Celsius misst. Das Peltier Element wird mit einer Eingangsspannung von 7 Volt betrieben bei maximaler Stromstärke. Die Temperatur der einzelnen Thermomelemente wird jede fünf Sekunden mittels des GLX Xplorers ausgelesen. Auf diesem werden die Temperaturverläufe T1 und T4 sowie T5 und T8 graphisch gegeinander aufgetragen. Zusätzlich wird eine Temperaturmessung nach 700 Sekunden an dem ersten, vierten, fünften und achten Thermoelement durchgeführt um die beste Wärmeleitung der Stäbe zu bestimmen. Außerdem sollen die Temperaturdifferenzen T2-T1 und T7-T8 graphisch dargestellt werden.

2.4 Dynamische Methode

Mittels des Angström-Messverfahren wird der Stab nun periodisch geheizt, so dass eine Temperaturwelle entsteht. Durch die Phasengeschwindigkeit der Welle lässt sich die Wärmeleitfähigkeit bestimmen.

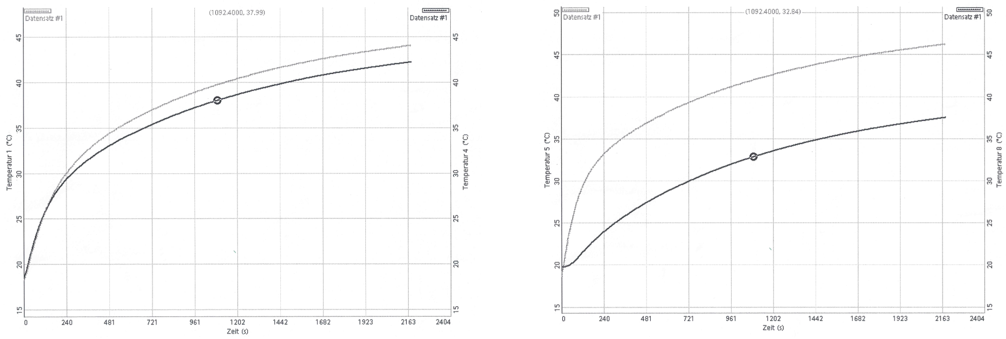
Bei dem Versuchsaufbau wird eine Abtastrate der Temperatur von zwei Sekunden und eine Periodendauer von 80 Sekunden der Heiz- bzw. Kühlphase eingestellt. Das Peltier Element wird mit einer Eingangsspannung von 10 Volt bei maximaler Stromstärke betrieben. Die Messung wird über 10 Perioden betrieben und anschließend der Temperaturverlauf für den breiten Messingstab (T1 und T2) graphisch dargestellt. Im Anschluss kühlen die Stäbe auf minimal 30° Celsius herunter und der Versuch wird analog mit einer Periodendauer von 200 Sekunden durchgeführt. Dieses mal wird der temperaturverlauf an den Thermoelementen T7 und T8 welche an einem Edelstahlstab befestigt sind graphisch dargestellt.

3 Auswertung

3.1 Statische Methode

Mit Hilfe der geplotteten Graphen und der Temperaturmessung nach 700 Sekunden soll quantitativ die Wärmeleitfähigkeit der verschieden Proben bestimmt werden. In den Plots sind die Temperaturverläufe der Thermoelemente die am weitesten von dem Peltier Element entfernt sind zu sehen. Auffällig ist das alle Graphen exponentiell ansteigen und

Abbildung 2: Temperaturverlauf



(a) breiter (Temperatur 1) und schmaler (Temperatur 4) Messingstab

(b) Aluminium (Temperatur 5) und Edelstahl (Temperatur 8)

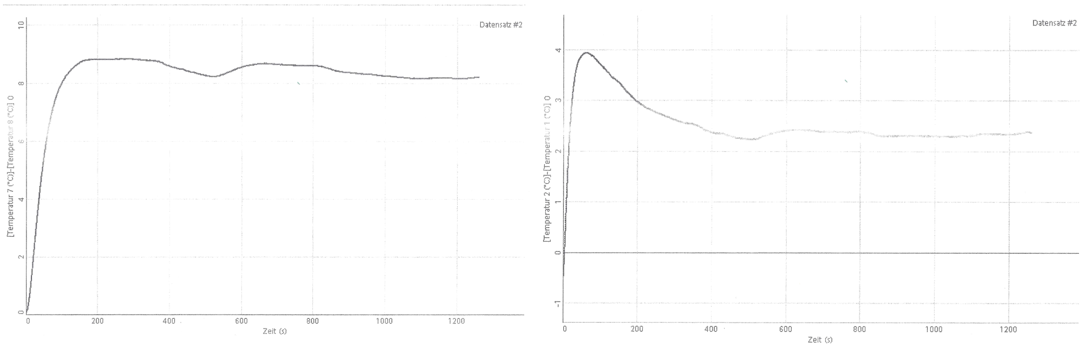
nach einer bestimmten Zeit gegen unterschiedliche Sättigungswerte streben. Dabei ist der größte Anstieg in den ersten 240 Sekunden zu verzeichnen. Mit Hilfe der Ergebnisse der Temperaturmessung nach 700 Sekunden (siehe Tabelle 1) und der Steigung der Graphen lassen sich Rückschlüsse auf die Wärmeleitfähigkeit ziehen. Da die Steigung des Graphen für Aluminium am größten ist und die Temperatur am meisten angesteigt, lässt sich daraus schließen das Aluminium die größte Wärmeleitfähigkeit κ besitzt. Um den

Tabelle 1: Temperatur nach 700 Sekunden

T [K]
$T_1 = 309.65$ K
$T_4 = 308.03$ K
$T_5 = 311.99$ K
$T_8 = 302.59$ K

Wärmestrom von Messing zu berechnen, wird $T_2 - T_1$ für den breiten Messingstab und $T_7 - T_8$ für den Edelstahlstab in einem Diagramm aufgetragen. Beide Graphen steigen

Abbildung 4: Temperaturdifferenz



(a) Edelstahlstab **(b)** breiter Messingstab

zu beginn in etwa gleich schnell an. Der Edelstahlstab erreicht nach fast 200 Sekunden seinen Grenzwert von 8 Kelvin. Der Messingstab hat nach ca. 50 Sekunden einen Peak und flacht danach gegen seinen Grenzwert von ca. 2.4 Kelvin ab. Der Peak lässt sich dadurch erklären, dass das an dem Peltier Element nahe Thermoelement schon von dem Wärmestrom erhitzt wird und das ferne Thermoelemt noch nicht. Aufgrund der höheren Wärmeleitfähigkeit von Messing breitet sich die Temperatur schneller auf dem Stab aus und daraus resultiert eine geringere Differenz der Temperaturen. Die Wärmemenge pro Zeit lässt sich durch Division der Gleichung 1 durch dt berechnen. Dafür wurde der Wert κ aus der Literatur entnommen und der Querschnitt der Versuchsanleitung entnommen.

$$\begin{aligned}
\kappa_{Messing} &= 120 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}} \\
A_{Messing} &= 4.8 \cdot 10^{-5} \mathrm{m}^2 \\
\Delta x_{Messing} &= 0.03\,\mathrm{m} \\
\kappa_{Edelstahl} &= 15 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}} \\
A_{Edelstahl} &= 4.8 \cdot 10^{-5} \mathrm{m}^2 \\
\Delta x_{Edelstahl} &= 0.03\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Die Messergebnisse des Wärmestrom pro Zeit wurden in Tabelle 2 für die verschieden Zeiten berechnet.

3.2 Dynamische Methode

3.2.1 Aluminium und Messing

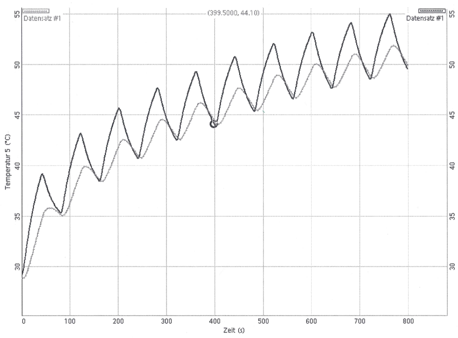
Mit Hilfe von periodischen Heizen soll nun die Materialkonstante κ bestimmt werden. Die graphischen Verläufe beider Thermoelemente sind in Diagramm 6 a und b zu sehen.

Tabelle 2: Temperaturdifferenz des breiten Messingstabes $(T_2 - T_1)$ und des Edelstahlstabes $(T_7 - T_8)$

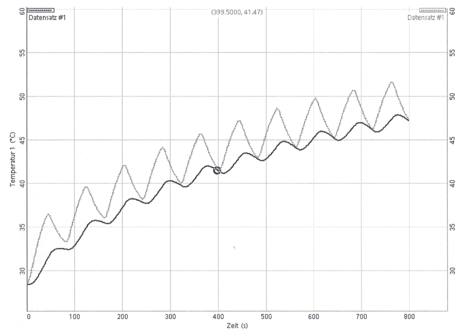
Messzeit [s]	$(T_2 - T_1)$ [K]	$\frac{\Delta Q_{21}}{\Delta t}$ [W]	$(T_7 - T_8)$ [K]	$\frac{\Delta Q_{78}}{\Delta t}$ [W]
200	3.0	-0.5760	8.8	-0.2112
400	2.4	-0.4608	8.6	-0.2064
600	2.4	-0.4608	8.6	-0.2064
800	2.4	-0.4608	8.6	-0.2064
1000	2.3	-0.4416	8.4	-0.2016

Durch bestimmung des Amplitudenverhältnisses A_{nah} und A_{fern} und der Phasendifferenz Δt lässt sich durch einsetzen in Gleichung 7 die Materialkonstante κ bestimmen. Für Aluminium und Messing sind in Tabelle 3 deren Amplituden, Amplitudenverhält-

Abbildung 6: Temperatur der Thermoelemente bei periodischem Heizem



(a) Aluminium



(b) breiter Messingstab

nisse sowie Phasendifferenz bei einer Periodendauer von 80 Sekunden aufgeführt. In dem Versuschsaufbau wird durch Mittelung (siehe Formel 8 und 9 der Messwerte die Wärmeleitung bestimmt.

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= (3.0 \pm 0.1)\text{cm} \\
\Delta t_{Aluminium} &= (6.8 \pm 1.8)\text{s} \\
\Delta t_{Messing} &= (10.9 \pm 3.1)\text{s} \\
\rho_{Aluminium} &= 2800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\
\rho_{Messing} &= 8520 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\
c_{Aluminium} &= 830 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \\
c_{Messing} &= 385 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}
\end{aligned}
$$

Tabelle 3: Amplitudenverhältnisse und Phasendifferenz

Aluminium				Messing			
A_{nah} [K]	A_{fern} [K]	10^{-1} ln $\left(\frac{A_{nah}}{A_{fern}}\right)$	Δt / s	A_{nah} [K]	A_{fern} [K]	ln $\left(\frac{A_{nah}}{A_{fern}}\right)$	Δt / s
2.86	3.10	-0.8	8	6.66	3.54	0.63	4
5.00	2.62	6.4	8	7.07	2.91	0.89	4
4.52	2.38	6.4	8	6.86	2.70	0.93	8
4.52	2.14	7.5	8	6.45	2.29	1.04	8
4.28	2.14	6.9	8	6.66	2.29	1.07	8
4.28	2.14	6.9	13	6.45	2.29	1.04	8
4.05	2.14	6.4	13	6.45	2.08	1.31	8
4.05	1.90	7.5	13	6.24	2.08	1.10	4
4.05	1.90	7.5	13	6.24	2.08	1.10	8
3.81	1.94	6.9	17	6.24	2.08	1.10	8

Die Phasenverschiebung wird durch Messung des Abstands der Wellentiefpunkte der beiden Amplituden ermittelt. Die Werte für die Dichte als auch Spezifischer Wärmekapazität wurden dem Versuchsanleitung entnommen. Es ergibt sich eine Wärmeleitfähigkeit für Aluminium von

$$\kappa_{Aluminium} = (160 \pm 80)\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}\ , \tag{14}$$

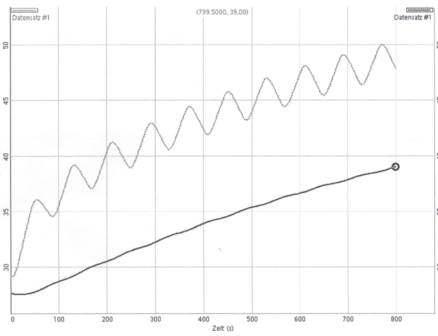
und für Messing

$$\kappa_{Messing} = (150 \pm 50)\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\ K}}\ , \tag{15}$$

3.2.2 Edelstahl

Die Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Edelstahl ist nicht möglich da sich am weiter entfernten Thermoelement keine Amplituden der Schwingung auf dem Graphen 8 mehr zu erkennen sind. Somit lässt sich keine Phasenverschiebung als auch Amplitudenverhältniss mehr errechnen.

Abbildung 8: Temperatur von Edelstahl bei periodischem Heizem



3.3 Frequenz und Wellenlänge

Die Frequenz der Wellen erhält ist der Kehrwert der Heizungsperioden. Somit beträgt die Frequenz

$$f = 0.013\frac{1}{s} \ . \tag{16}$$

Um die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der verschiedenen Stoffe zu berechnen werden die zuvor errrechneten Werte von κ in Formel 6 eingesetzt und es ergeben sich Geschwindigkeiten von

$$v_{Aluminium} = (3.5 \pm 7.0) \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{17}$$

und

$$v_{Messing} = (2.8 \pm 8.4) \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{18}$$

Aus den Ergebnissen ergibt sich aus der Beziehung

$$c = \lambda \cdot f \tag{19}$$

eine Wellenlänge von Aluminium von

$$\lambda_{Aluminium} = (0.0035 \pm 0.0070)\mathrm{m} \tag{20}$$

und für Messing

$$\lambda_{Messing} = (0.002 \pm 0.006)\mathrm{m} \tag{21}$$

4 Diskussion

4.1 Aluminium und Messing

Die Abweichungen der ermitteltete Wärmekapazität von Messing und der des Literaturwertes liegt bei 37,6 % und die Abweichung bei Messing beträgt 28,1 %. Mögliche Gründe für die Abweichung sind Ablesefehler bei der Auswertung des Graphens. Eine Fehlerreduzierung wäre durch eine elektronische Auswertung des Graphens möglich. Desweiteren waren die Stäbe nicht optimal von der Umgebung abgeschirmt und die Netzspannung des Netzgerätes im Laufe der Messung um 0.1 Volt geschwankt hat.

4.2 Edelstahl

Eine Auswertung des Graphens ist nicht möglich, da keine Amplituden beim weiter entferneten Temperaturverlauf des Termoelementes mehr erkennen zu sind. Ursache dafür könnte eine zu geringe Wärmeleitfähigkeit seien. Auffällig ist zudem auch, dass die Skallierung der Zeitachse nicht mit dem Graphen übereinstimmt.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung 204 Wärmeleitung von Metallen.* 2015.