

Elektrische Brückenschaltung

Maximilian Sackel
Maximilian.sackel@gmx.de

Philip Schäfers
phil.schaefers@gmail.com

Durchführung: 15.12.15

Abgabe: 05.01.2015

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlage	3
1.1	Wheatstone Brücke	4
1.2	Kapazitätsmessbrücke	4
1.3	Induktivitätsmessbrücke	5
1.4	Maxwell-Brücke	5
1.5	TT-Brücke	6
1.6	Fehlerrechnung	7
1.6.1	Mittelwert	7
1.6.2	Gauß'sche Fehlerfortpflanzung	7
1.6.3	Lineare Regression	8
2	Durchführung und Aufbau	8
2.1	Wheatstone Brücke	8
2.2	Kapazitätsmessbrücke	8
2.2.1	Idealer Kondensator	8
2.2.2	Realer Kondensator	8
2.3	Induktivitätsmessbrücke	8
2.4	Maxwell Brücke	9
2.5	TT-Brücke	9
3	Auswertung	9
3.1	Wheatston'sche Brückeschaltung	9
3.2	Kapazitätsmessbrücke	10
3.3	Induktivitätsmessbrücke	11
3.4	Maxwell-Brücke	11
3.5	TT-Brücke	12
4	Diskussion	14
	Literatur	14

1 Theoretische Grundlage

Ziel dieses Versuches ist es mit Hilfe verschiedener Brückenschaltungen unbekannte Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten auszumessen. Dies wird zum Beispiel mittels einer Abgleichbedingung realisiert. Jede Brückenschaltung wird prinzipiell von einer Speisepannung U_s und vier Widerständen betrieben. Dies kann auch durch Scheinwiderstände realisiert werden, was impliziert das die Brückenschaltung je nach Aufbau mit Wechselstrom betrieben werden muss. Die Brückenschaltung liegt dem Kirchhoffschen

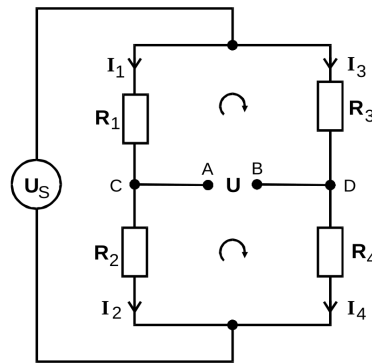


Abbildung 1: wesentlicher Aufbau einer Brückenschaltung [1]

Regeln zu Grunde. Die erste der beiden Regeln besagt, das die Summe der eingehenden und ausgehenden Ströme an eineme Knoten gleich Null ist.

$$Knotenregel : \sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad (1)$$

Die zweite Regel besagt, dass bei einer Geschlossenen Masche sich alle Teilspannungen, bei einem Umlauf zu Null addieren.

$$Maschenregel : \sum_{k=1}^n U_k = 0 \quad (2)$$

Unter Berücksichtigung der Kirchhoffschen Gesetzen ergibt sich für die einfachste Brückschaltung eine Brückenspannung U_{Br} von

$$U_{Br} = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)} \quad (3)$$

Es wird das Widerstandverhältnis so gewählt das die Brückenspannung minimal wird. Daraus ergibt sich die Abgleichsbedingung

$$R_2 R_3 = R_1 R_4 . \quad (4)$$

Dabei können die Widerstände auch komplex sein. Dabei kommt es jedoch zu Phasenverschiebungen.

1.1 Wheatstone Brücke

Die Wheatstone Brücke besteht ausschließlich aus Widerständen. Sie ist dafür gedacht einen Unbekannten Widerstand R_x mittels der oben genannten Abgleichmethode zu bestimmen. Der Schematische Aufbau einer Wheatstone Brücke ist in Abbildung 2 zu sehen. Durch umstellen der Gleichung 4 erhält man für die den gesuchten Widerstand

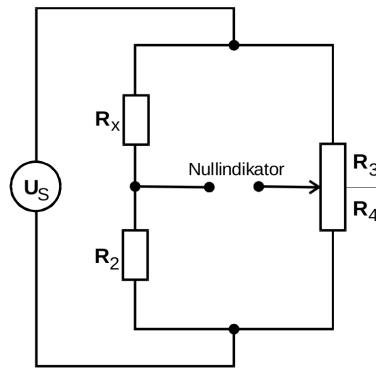


Abbildung 2: wesentlicher Aufbau einer Brückenschaltung

R_x die Formel,

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} . \quad (5)$$

Das Verhältniss R_3 zu R_4 lässt sich besonders gut mit Hilfe eines Potentiometer einstellen.

1.2 Kapazitätsmessbrücke

Mit dieser Messbrücke soll die Kapazität des Kondensators bestimmt werden. Dies geschieht über die Impedanz des Kondensators, daher muss der Aufbau mit Wechselstrom betrieben werden. Da es sich im Versuch um keinen idealen Kondensator handelt wird im Schaltbild ein fiktiver Widerstand R_x vor den Kondensator geschaltet. Mittels der

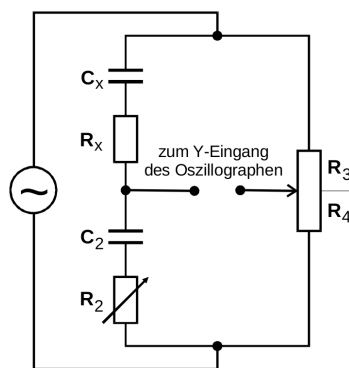


Abbildung 3: Messung der Kapazität eines realen Kondensators

Abgleichbedingung gibt sich analog zu Formel 5 ein Widerstand von

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} ,$$

und für den Kondensator unter Berücksichtigung der Scheinwiderstände

$$C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3} . \quad (6)$$

1.3 Induktivitätsmessbrücke

Mittels der Messbrücke aus der Abbildung 4 soll die Induktivität einer Spule bestimmt werden. Dies geschieht Analogie zur Kapazitätsmessbrücke über die Impedanz der Spule, daher muss der Aufbau mit Wechselstrom betrieben werden.

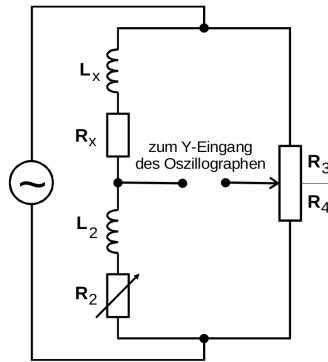


Abbildung 4: Messung der Induktivität einer realen Spule

Mittels der Abgleichbedingung gibt sich analog zu Formel 5 ein Widerstand von

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4} ,$$

und für den Kondensator unter Berücksichtigung der Scheinwiderstände

$$L_x = L_2 \frac{R_3}{R_4} . \quad (7)$$

1.4 Maxwell-Brücke

Es soll die Induktivität einer Spule mit Hilfe der Maxwell-Brücke bestimmt werden. Dafür wird anstelle einer Spule, wie im vorherigen Kapitel beschrieben, ein Kondensator verwendet und wie in Abbildung 5 aufgebaut. Es muss darauf geachtet werden, dass einerseits, die Frequenz hoch genug ist, damit sich der Einschwingvorgang hinreichend schnell einstellt und andererseits die Frequenz niedrig genug ist, damit die Streukapazitäten niedrig genug sind um einen Abgleich zu ermöglichen. Mit Hilfe der Maschenregel

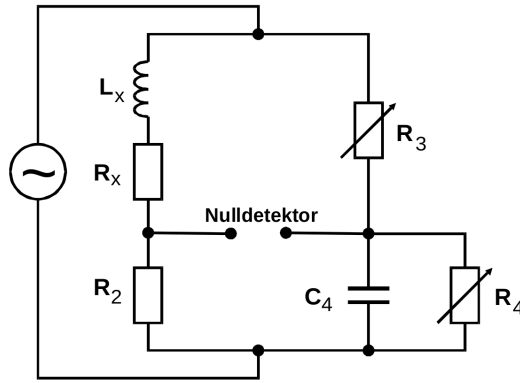


Abbildung 5: Messung der Induktivität durch eine Maxwell-Brücke

ergeben sich die Gleichungen zu Bestimmung der Induktion

$$L_x = R_2 R_3 C_4 \quad (8)$$

sowie für den fiktiven Widerstand

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4}$$

1.5 TT-Brücke

Mittels einer TT-Brücke soll die Funktion des elektrischen Filters genauer bestimmt werden. Dafür wird die Schaltung Abbildung 6 entsprechend aufgebaut. Das Spannungsver-

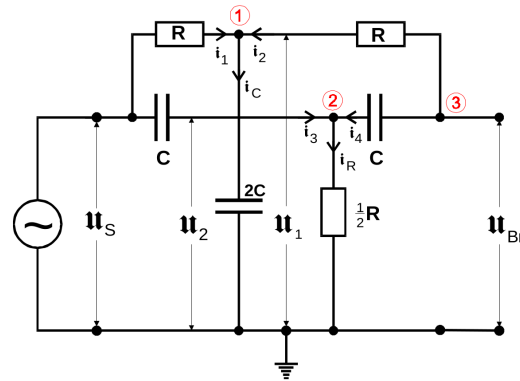


Abbildung 6: Messung der Induktivität durch eine TT-Brücke

hältniss U_{Br} zu U_S zu berechnen werden die Ströme an den Knoten 1, 2 und 3 betrachtet. Für den ersten Knoten ergibt sich nach der Kirchhoffschen Knotenregel

$$\frac{U_1 - U_S}{R} + \frac{U_1 - U_{Br}}{R} = 2j\omega C U_1 \quad (9)$$

Mit Hilfe der Ströme an dem zweiten

$$(U_S - U_2) j\omega C + (U_{Br} - U_2) j\omega C = \frac{2}{R} U_2 \quad (10)$$

und dritten Knoten

$$(U_2 - U_{Br}) j\omega C + \frac{U_q - U_{Br}}{R} = 0 \quad (11)$$

lässt sich durch Auflösen der Gleichungen 9, 10 nach U_1 und U_2 und deren Ergebnisse in 11 eingesetzt, die Brückenspannung ermitteln.

$$U_{Br} = U_S \frac{1 - \omega^2 R^2 C^2}{1 - \omega^2 R^2 C^2 + 4j\omega RC} \quad (12)$$

Als Spannungsverhältniss erhält man durch umstellen der Gleichung 12 und der Einführung von

$$\Omega = \omega RC$$

die Form

$$\frac{U_{Br}}{U_S} = \frac{1 - \Omega^2}{1 - \Omega^2 + 4j\Omega} .$$

Hieraus erhält man durch Multiplikation mit dem konjugiert komplexen Wert des Nenners den Ausdruck:

$$\left| \frac{U_{Br}}{U_S} \right|^2 = \frac{(1 - \Omega^2)^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 16 \cdot \Omega^2} . \quad (13)$$

1.6 Fehlerrechnung

Sämtliche Fehlerrechnungen werden mit Hilfe von Python 3.4.3 durchgeführt.

1.6.1 Mittelwert

Der Mittelwert einer Messreihe x_1, \dots, x_n lässt sich durch die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad (14)$$

berechnen. Die Standardabweichung des Mittelwertes beträgt

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \quad (15)$$

1.6.2 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

Wenn x_1, \dots, x_n fehlerbehaftete Messgrößen im weiteren Verlauf benutzt werden, wird der neue Fehler Δf mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung angegeben.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \cdot (\Delta x_k)^2} \quad (16)$$

1.6.3 Lineare Regression

Die Steigung und y-Achsenabschnitt einer Ausgleichsgeraden werden gegebenenfalls mittels Linearen Regression berechnet.

$$y = m \cdot x + b \quad (17)$$

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \quad (18)$$

$$b = \frac{\overline{x^2y} - \overline{x}\overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \quad (19)$$

2 Durchführung und Aufbau

2.1 Wheatstone Brücke

Zwei verschiedene Widerstände sollen durch die Brückenschaltung vermessen werden. Dafür wird die Schaltung wie in Abbildung ?? aufgebaut. Anschließend wird das Potentiometer so lange variiert, bis die Brückenspannung minimal wird/verschwindet. Dies wird für drei verschiedenen Widerstände R_2 wiederholt.

2.2 Kapazitätsmessbrücke

2.2.1 Idealer Kondensator

Es soll die Kapazität eines Kondensators ausgemessen werden. Dafür wird die Schaltung wie in Abbildung 3 aufgebaut. Es kann jedoch der Widerstand R_2 vernachlässigt werden, da die Innenwiderstände verschwindend gering sind. Daraufhin wird das Potentiometer erneut so lange variiert, bis die Brückenspannung verschwindet. Dem Versuch werden die Werte C_2 , R_3 und R_4 entnommen um im weiteren Verlauf die Kapazität des Kondensators zu berechnen.

2.2.2 Realer Kondensator

Ziel ist es eine RC-Kombination auszumessen. Dazu wird in die Schaltung der Abbildung entsprechend der Widerstand R_2 ergänzt. Die Messung wird mit 2 verschiedenen Kondensatoren C_2 wiederholt. Das Potentiometer wird erneut so eingestellt dass die Brückenspannung minimal wird und die Werte C_2 , R_2 , R_3 , sowie R_4 notiert.

2.3 Induktivitätsmessbrücke

Um die Induktivität und den fiktiven Widerstand der Schaltung zu vermessen, wird die Schaltung wie in Abbildung 4 aufgebaut. Die Messung wird mit 2 verschiedenen Spulen L_2 wiederholt. Das Potentiometer wird erneut so eingestellt dass die Brückenspannung minimal wird und die Werte L_2 , R_2 , R_3 , sowie R_4 notiert.

2.4 Maxwell Brücke

Die Schaltung ist wie in Abbildung 5 zu sehen ist aufgebaut. Dabei werden die Widerstände R_3 sowie R_4 nicht mehr als Potentiometer, sondern jeweils als Regelbarer widerstand benutzt. Bei der Brückenspannung wird durchabwechselndes justieren der beider Widerstände das Minimum der Brückenspannung gesucht. Die Werte R_2, R_3, R_4 und C_4 werde notiert und die messung ein zweites mal für einen anderen Widerstand R_2 durchgeführt.

2.5 TT-Brücke

Die Schaltung wird Abbildung 6 entsprechend aufgebaut. Zunächst wird die Speisenspannung U_S des Systems ermittelt. Es wird die Brückenspannung U_{Br} im Bereich von (20-30000) Hz variiert. Dabei wird das Minimum der Brückenspannung des Frequenzspektrums f ermittelt und dem Aufbau Datentupel aus der Frequenz f und der Brückenspannung genommen.

3 Auswertung

3.1 Wheatston'sche Brückeschaltung

Mit Hilfe der Wheatston'schen Brückenschaltung werden zwei unbekannte Widerstände $R_{13} = \text{Wert13}$ und $R_{14} = \text{Wert14}$ bestimmt. Dies geschieht mit Formel 5, die Werte und Ergebnisse sind in den Tabellen 1 und 2 aufgeführt. $\overline{R_{13,14}}$ entspricht hierbei den gemittelten Werten für die gesuchten Widerstände. Der Wert R_2 hat eine Toleranz von 0.2% und $\frac{R_3}{R_4}$ hat eine Toleranz von 0.5%.

R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	R_{13} / Ω	$\overline{R_{13}} / \Omega$
332	735	265	322.8 ± 1.7	
500	648	352	321.0 ± 1.7	326.6 ± 1.0
664	582	418	336.0 ± 1.8	

Tabelle 1: Werte für die Bestimmung von R_{13} .

R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	R_{14} / Ω	$\overline{R_{14}} / \Omega$
332	493	507	920.8 ± 5.0	
500	391	609	920.5 ± 5.0	921.9 ± 2.9
664	336	664	924.5 ± 5.0	

Tabelle 2: Werte für die Bestimmung von R_{14} .

3.2 Kapazitätsmessbrücke

Mit Hilfe der Kapazitätsmessbrücke werden zwei unbekannte verlustfreie Kapazitäten $C_2 = \text{Wert2}$ und $C_3 = \text{Wert3}$ und eine verlustbehaftete Kapazität $C_8 = \text{Wert8}$ bestimmt. Dies geschieht mit Formel 5 für C_2 , C_3 und mit den Formeln 5, 6 für C_8 und R_8 . Die Messwerte und Ergebnisse sind in den Tabellen 3 bis 5 aufgeführt. $C_{2,3,8}$ entspricht hierbei den gemittelten Werten für die gesuchten Kapazitäten. Der Wert C_2 hat eine Toleranz von 0.2% und $\frac{R_3}{R_4}$ hat eine Toleranz von 0.5%, allerdings hat R_2 nun eine Toleranz von 3%.

C_2 / nF	R_3 / Ω	R_4 / Ω	$C_2 / \mu\text{F}$	$\overline{C_2} / \mu\text{F}$
597	285	715	1.498 ± 0.008	
750	329	671	1.530 ± 0.008	1.517 ± 0.005
994	395	605	1.522 ± 0.008	

Tabelle 3: Werte für die Bestimmung von C_2 .

C_2 / nF	R_3 / Ω	R_4 / Ω	$C_3 / \mu\text{F}$	$\overline{C_3} / \mu\text{F}$
597	593	607	40.97 ± 0.22	
750	639	361	42.37 ± 0.23	41.65 ± 0.13
994	705	295	41.59 ± 0.22	

Tabelle 4: Werte für die Bestimmung von C_3 .

C_2 / nF	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	$C_8 / \mu\text{F}$	R_8 / Ω	$\overline{C_8} / \mu\text{F}$	$\overline{R_8} / \Omega$
597	304	671	329	29.27 ± 0.16	149.1 ± 4.5		
750	228	722	278	28.88 ± 0.16	87.8 ± 2.7	29.11 ± 0.09	96.5 ± 1.8
994	179	773	227	29.19 ± 0.16	52.6 ± 1.6		

Tabelle 5: Werte für die Bestimmung von C_8 und R_8 .

3.3 Induktivitätsmessbrücke

Mit Hilfe der Induktivitätsmessbrücke wird die verlustbehaftete Induktivität $L_{19}, R_{19} =$ Wert19 einer unbekannten Spule bestimmt. Dies geschieht mit den Formeln 5 und 7. Die Messwerte und Ergebnisse sind in der Tabelle 6 aufgeführt. Die baubedingten Fehler von R_2 und $\frac{R_3}{R_4}$ sind die gleichen wie im vorangegangenen Kapitel, der Fehler von L_2 beträgt 0.2%.

L_2 / mH	R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	L_{19} / mH	R_{19} / Ω	$\overline{L_{19}} / \text{mH}$	$\overline{R_{19}} / \Omega$
14.6	286	281	719	5.706 ± 0.029	111.8 ± 0.6		
20.1	287	287	713	8.090 ± 0.040	115.5 ± 0.6	6.898 ± 0.025	113.6 ± 0.4

Tabelle 6: Werte für die Bestimmung von L_{19} und R_{19} .

3.4 Maxwell-Brücke

Mit Hilfe der Maxwell-Brücke soll die gleiche Spule untersucht werden welche auch für die Induktivitätsmessbrücke verwendet wurde, dadurch erhält man einen vergleichbaren Wert. Die verwendete Kapazität $C_4 = 750 \text{ nF}$ bleibt für die gesamte Messung unverändert. Durch einsetzen in die Formeln 5, 8 erhält man L_{19} und R_{19} . Die Messwerte und Ergebnisse sind in Tabelle 7 aufgelistet.

R_2 / Ω	R_3 / Ω	R_4 / Ω	L_{19} / mH	R_{19} / Ω	$\overline{L_{19}} / \text{mH}$	$\overline{R_{19}} / \Omega$
332	215	655	53.5 ± 1.6	109.0 ± 4.6		
664	95	538	47.3 ± 1.4	117.2 ± 5.0	57.6 ± 1.0	115.6 ± 2.8
1000	96	796	72.0 ± 2.2	120.6 ± 5.1		

Tabelle 7: Werte für die Bestimmung von L_{19} und R_{19} .

3.5 TT-Brücke

Wie man in der Tabelle 8 erkennen kann, wird die Brückenspannung bei ca. 380 Hz minimal und beträgt in etwa 0.02 V.

Der theoretische minimal Wert lässt sich mit folgender Formel berechnen:

$$f_{0,\text{theo}} = \frac{1}{RC} = (382.1 \pm 1.2) \text{ Hz}$$

$$R = 1000 \, \Omega$$

$$C = (4.165 \pm 0.013) \cdot 10^{-7} \text{ F.}$$

f / Hz	U_{br} / V
20	4.56
70	3.76
180	1.78
200	1.51
220	1.28
240	1.07
260	0.88
280	0.70
300	0.56
320	0.40
340	0.26
360	0.14
380	0.02
400	0.21
420	0.23
440	0.33
460	0.43
480	0.52
500	0.61
520	0.70
540	0.78
560	0.87
580	0.96
700	1.37
1000	2.14
2000	3.26
7000	3.90
15000	3.92
30000	3.92

Tabelle 8: Messwerte der Brückenspannung und der Frequenz von der TT-Brückenschaltung.

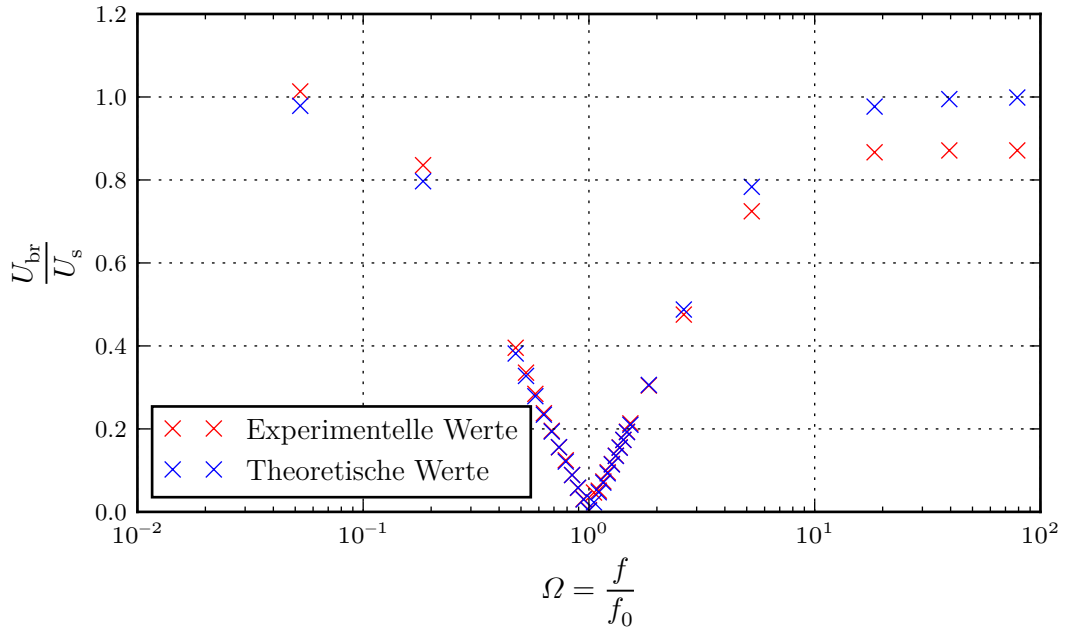


Abbildung 7: Theoretische und experimentelle Werte der TT-Brückenschaltung.

Für die Bestimmung des Klirrfaktors k wird zunächst genähert, dass die Summe der Oberwellen nur von dem Term der zweiten Oberwelle bestimmt wird. Damit folgt, dass

$$k = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots}}{U_1} = \frac{U_2}{U_1} \quad (20)$$

$$U_1 = 4.5 \text{ V} \quad (21)$$

$$U_2 = \frac{U_{br}}{f(2)} \quad (22)$$

$$U_{br} = 0.02 \text{ V} \quad (23)$$

$$f(2) = \frac{(1 - 2^2)^2}{(1 - 2^2)^2 + 16 \cdot 2^2} = 0.1233 \quad (24)$$

$$U_2 = \frac{0.02 \text{ V}}{0.1233} = 0.1622 \text{ V} \quad (25)$$

$$k = \frac{0.1622 \text{ V}}{4.5 \text{ V}} = 0.036 \quad (26)$$

ist.

4 Diskussion

In allen Versuchen sind die Fehler sehr klein und meist unter 1%. Auffällig sind vor allem Kapitel 3.3 und 3.4. Für beide Versuche wurde die gleiche Spule verwendet und für den Widerstand R_{19} kommt das gleiche Ergebniss raus, allerdings ist die Induktivität bei der Maxwell-Brückenschaltung um ca. 835 % größer als bei der Induktivitätsmessbrücke. Daraus lässt sich ein Fehler bei dem notieren der Daten folgern, da alle anderen Versuche sehr genau waren.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *V302: Brückenschaltung*. 2014.