

**VERSUCH NUMMER**

**TITEL**

Maximilian Sackel  
Maximilian.sackel@gmx.de

Philip Schäfers  
phil.schaefers@gmail.com

Durchführung: DATUM

Abgabe: DATUM

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theoretische Grundlage</b>	<b>3</b>
1.1	Ziel . . . . .	3
1.2	Normal-, Schubspannung und Hooksches Gesetz . . . . .	3
1.3	Elastische Konstanten isotroper Stoffe . . . . .	3
1.4	Bestimmung des Torsionsmoduls $G$ . . . . .	4
1.5	Magnetisches Moment eines Permanentmagnetens . . . . .	4
1.6	Fehlerrechnung . . . . .	5
1.6.1	Mittelwert . . . . .	5
1.6.2	Fehlerfortpflanzung . . . . .	5
1.6.3	Lineare Regression . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Durchführung und Aufbau</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>6</b>
3.1	Geometrische Daten der Messapparatur . . . . .	6
3.2	Bestimmung des Schubmoduls $G$ und der anderen elastischen Konstanten	6
3.3	Bestimmung des magnetischen Momentes $m$ . . . . .	7
3.4	Bestimmung der Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>10</b>
4.1	Elastische Konstanten . . . . .	10
4.2	Erdmagnetfeld . . . . .	10
	<b>Literatur</b>	<b>11</b>

# 1 Theoretische Grundlage

## 1.1 Ziel

Ziel des Versuches ist es der elastisches Modul eines Metalls mittels einer Drehschwingung zu bestimmen, als auch das magnetische Moment eines Permanentmagneten.

## 1.2 Normal-, Schubspannung und Hooksches Gesetz

Kräfte die an die Oberfläche eines elastischen Körper angreifen, verformen diesen. Aufgrund dessen werden die Größe Spannung definiert, welche ein Verhältniss von der Kraft zum ein Flächenelement herstellt.

$$\sigma = \frac{F}{m^2} \frac{N}{m^2} \quad (1)$$

Sie lassen sich in zwei Kategorien aufteilen. Als Normalspannung  $\sigma_N$  werden die Kräfte bezeichnet welche senkrecht zur Oberfläche stehen. Die Kräfte welche parallel zur Oberfläche stehen heißen Schubspannung  $\sigma_S$ . Desweiteren gibt es noch Volumenkräfte. Bei solchen greift die Kraft an jedem Volumenelement an, zum Beispiel die Schwerkraft.

Zwischen hinreichend kleinen Spannungen und Deformation besteht ein proportionaler Zusammenhang welcher als Hooksches bezeichnet wird.

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad \text{und} \quad P = Q \frac{\Delta V}{V} \quad (2)$$

Um alle Spannungen in einem Kristall vollständig zu beschreiben werden jeweils 6 Komponenten benötigt, wobei 3 für die Gestaltsund 3 für die Volumenelastizität zuständig sind. Bei einem einfachen Kristall mit niedriger Symmetrie entsteht deswegen eine 6x6-Matrix mit 36 Einträgen. Bei kubischen Kristallen lässt sich aufgrund der symmetrie der Matrix und des Körpers auf 3 Einträge verringern. Handelt sich zusätzlich um einen isotropen Körper, so lässt sich der Körper vollständig durch 2 Konstanten beschreiben.

## 1.3 Elastische Konstanten isotroper Stoffe

Zur Berechnung des elastizitschen Konstanten wird einerseits die Torsionsmodul  $G$  als auch das Komprssionsmodul  $Q$  benötigt bzw das Elastizitätsmodul  $\sigma$ . Die Poissonsche Querkontraktionszahl  $\mu$  Verknüpft die Längenänderung mit der Normalspannung. Die Abbildung 1 soll die anhand eines einseitig eingespannten Stab verdeulichen.

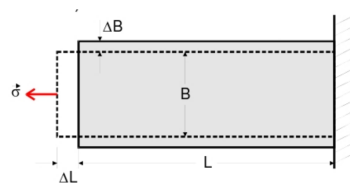


Abbildung 1: <+caption text+>

$$\mu := -\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{L}{\Delta L} = \frac{E}{2G} - 1 \quad (3)$$

Das Kompressionsmodul  $Q$  berechnet sich aus dem Elastizitätsmodul so wie der Querkontraktionszahl  $\mu$ .

$$Q = \frac{E}{-6\mu + 3} \quad (4)$$

## 1.4 Bestimmung des Torsionsmoduls $G$

Um die elastische Nachwirkung vernachlässigen zu können, wird zur Bestimmung des Torsionsmoduls eine dynamische Methode gewählt. Als elastische Nachwirkung wird die Zeit benötigt bis gewisse Materialien nach einer Belastung wieder in ihren Ausgangszustand zurückkehrt. Für die Dynamische Methode wird ein zylinderförmiger Draht an einem Ende eingespannt und auf der anderen Seite wirkt über ein Kräftepaar ein Drehmoment auf diesen. Durch die Scherung des Drahtes um den Winkel kommt es zu einer Drehmoment welche infinitesimalen Drehmomente über den Radius des Zylinders integriert werden.

$$M = \frac{\pi G R^4 \varphi}{2L} =: D\varphi \quad (5)$$

In Analogie zur Federkonstante wird  $D$  als Richtgröße bezeichnet. Durch eine kleine Auslenkung aus der Ruhelage im Rahmen der Kleinwinkelnäherung lässt sich das Schwingungsfähige System durch die Differentialgleichung

$$D\varphi + \theta\varphi = 0 \quad (6)$$

beschreiben, wobei das Trägheitsmoment des Systems ist. Der Differentialgleichung wird eine Periodendauer von

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\theta}{D}} \quad (7)$$

entnommen und das Trägheitsmoment der Kugel aus der Formel

$$\theta_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5}m_k R_k^2 \quad (8)$$

berechnet. Somit ergibt sich aus Formel 5, 7 und 8 ein Torsionsmodul  $G$  von

$$G = \frac{16\pi m_k R_k^2 L}{5T^2 R^4} . \quad (9)$$

## 1.5 Magnetisches Moment eines Permanentmagnetens

Das magnetische Moment  $\vec{m}$  eines Permanentmagneten ist definiert als

$$\vec{m} := p\vec{a} \quad (10)$$

wobei  $p$  die Polstärke und  $\vec{a}$  die Abstände der beiden Pole ist. Auf dem Magneten wirkt in einem B-Feld wie in Abbildung ?? zu sehen, dass Magnetische Moment  $M_{\text{Mag}}$  zweier entgegengesetzter Kräfte. Der Betrag des magnetische Momentens ist

$$|M_{\text{Mag}}| = mB \sin(\gamma) \quad (11)$$

Daraus ergibt sich die nicht lineare Differentialgleichung

$$mB \sin \varphi + D\varphi + \theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \quad (12)$$

welche sich jedoch durch die Kleinwinkelnäherung  $\sin \varphi \sim \varphi$  in eine homogene Umschreiben lässt. Daraus lässt sich die Schwingungsdauer

$$T_{\text{Mag}} = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{mB + D}} \quad (13)$$

entnehmen.

## 1.6 Fehlerrechnung

### 1.6.1 Mittelwert

Der Mittelwert einer Messreihe  $x_1, \dots, x_n$  lässt sich durch die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad (14)$$

berechnen. Die Standardabweichung des Mittelwertes beträgt

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \quad (15)$$

### 1.6.2 Fehlerfortpflanzung

Die Fehlerfortpflanzung übernimmt Python 3.4.3 mit der Funktion "ufloat" aus "Python-Uncertainties".

### 1.6.3 Lineare Regression

Die Lineare Regression und sämtliche andere Rechnungen wurden ebenfalls mit Python 3.4.3 durchgeführt.

## 2 Durchführung und Aufbau

## 3 Auswertung

### 3.1 Geometrische Daten der Messapparatur

Im weiteren werden der Kugelradius  $R_K$ , die Kugelmasse  $m_K$ , das Trägheitsmoment der Kugelhalterung  $\theta_H$ , die Windungszahl der Helmholtzspule  $N$  und der Radius der Helmholtzspule  $R_H$  aufgelistet.

$$R_K = (0.025\,38 \pm 0.000\,01) \text{ m}$$

$$m_K = (0.5122 \pm 0.0002) \text{ kg}$$

$$\theta_H = 2.25 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$$

$$N = 390$$

$$R_H = 0.078 \text{ m}$$

Die Abmessungen des Drahtes sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

	L / m	2R / $10^{-3}$ m
	0.598	0.210
	0.597	0.205
	0.600	0.210
		0.200
		0.205
Mittelwert(nach Gl. (14))	0.5983	0.2060
Standardabweichung(nach Gl. (15))	0.0008	0.0004

**Tabelle 1:** Die Abmessung des Drahtes.

Das Gesamtträgheitsmoment ergibt sich aus der Summation von dem Trägheitsmoment der Kugel und der Halterung.

$$\theta_k = \frac{2}{5} m_k r_k^2 = (1.3197 \pm 0.0012) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

$$\theta_{\text{ges}} = \theta_K + \theta_H = (1.3422 \pm 0.0012) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

### 3.2 Bestimmung des Schubmoduls $G$ und der anderen elastischen Konstanten

Mit den Tabellen 1 und 2 und der Gleichung (9) folgt der Schubmodul  $G$  zu

$$G = (4.99 \pm 0.04) \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} .$$

	T / s
1.	18.798
2.	18.800
3.	18.800
4.	18.751
5.	18.794
6.	18.799
7.	18.798
8.	18.795
9.	18.797
10.	18.800
Mittelwert(nach Gl. (14))	18.793
Standardabweichung(nach Gl. (15))	0.014

**Tabelle 2:** Periodendauer der Schwingung ohne Magnet.

Die Werte für den Elastizitätsmodul und den Schubmodul wurden vorgegeben:

$$E = 21 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$G = 8.2 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Im weiteren Verlauf wird das gegebene  $G$  verwendet. Mit Hilfe von  $E$  und  $G$  werden nun die poissonsche Querkontraktionszahl  $\mu$  und der Kompressionsmodul  $Q$  bestimmt. Mit den Gleichungen (3) und (4) ergeben sich:

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1 = 0.28 \quad (16)$$

und

$$Q = \frac{E}{-6\mu + 3} = 1.59 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} . \quad (17)$$

### 3.3 Bestimmung des magnetischen Momentes $m$

Zur Bestimmung des magnetischen Momentes, wird die Periodendauer  $T_m$  in Abhängigkeit vom Spulenstrom  $I$  gemessen, sämtliche Messwerte sind in Tabelle 3 angegeben.

	I = 0.2A	I = 0.4A	I = 0.6A	I = 0.8A	I = 1.0A
$T_m / s$	17.184	16.027	15.081	14.152	13.197
$T_m / s$	17.166	15.992	15.048	14.104	13.251
$T_m / s$	17.378	16.005	15.052	14.142	13.163
$T_m / s$	17.333	16.006	15.041	14.109	13.244
$T_m / s$	17.336	15.992	15.026	14.104	13.174
Mittelwert(nach Gl. (14))	17.280	16.004	15.050	14.122	13.210
Standardabweichung(nach Gl. (15))	0.090	0.013	0.018	0.021	0.040

**Tabelle 3:** Messwerte für die Schwingungsdauern in Abhängigkeit vom Spulenstrom.

Zunächst wird über den Spulenstrom das Magnetfeld im Zentrum der Spule mit Hilfe von Gleichung (18) berechnet.

$$B = \frac{8\mu_0 NI}{\sqrt{125}R} . \quad (18)$$

Mit  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$ . Nun kann Gleichung (13) zu

$$mB + D = \frac{4\pi^2\theta}{T_m^2} \quad (19)$$

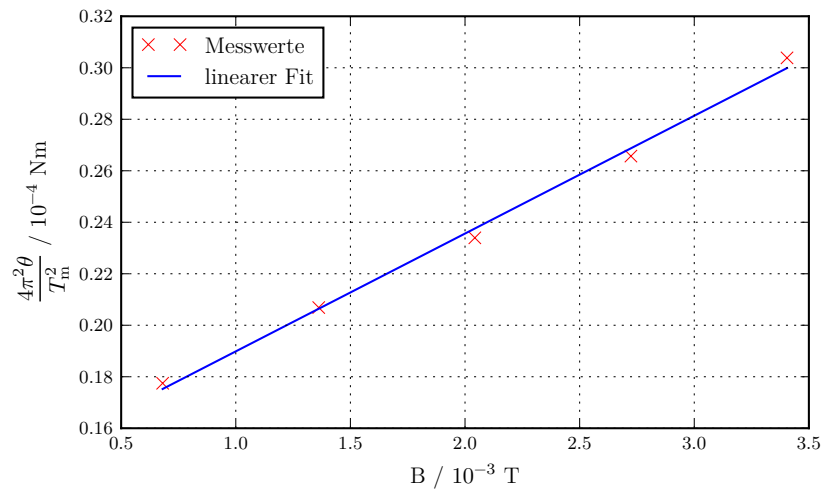
umgestellt werden. Das magnetische Moment wird nun mit Hilfe einer linearen Regression bestimmt. Die Steigung der Geraden entspricht dann dem magnetischen Moment. In Tabelle 4 sind  $B$  und  $\frac{4\pi^2\theta}{T_m^2}$  aufgelistet.

B / mT	$\frac{4\pi^2\theta}{T_m^2} / 10^{-4} \text{ Nm}$
0.68	1.77
1.36	2.07
2.04	2.34
2.72	2.66
3.40	3.04

**Tabelle 4**

In Abbildung 2 ist  $B$  gegen  $\frac{4\pi^2\theta}{T_m^2}$  aufgetragen und es wurde zusätzlich eine Ausgleichsgerade eingezeichnet.





**Abbildung 2:** Messpunkte und Ausgleichsgerade zur Messung des magnetischen Moments  $m$ .

Damit folgt das magnetische Moment  $m$  zu

$$m = (4.58 \pm 0.18) \cdot 10^{-3} \frac{\text{Nm}}{\text{T}} \quad (20)$$

### 3.4 Bestimmung der Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes

Aufgrund der Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes, wirkt auf den Magneten in der Kugel ein zusätzliches Drehmoment. Dazu muss der Dipolmagnet in der Kugel in Richtung des Erdmagnetfeldes zeigen. Je nach Orientierung geht davon eine Vergrößerung oder Verkleinerung der Periodendauer aus. Für die Periodendauer im Erdmagnetfeld siehe Tabelle 5.

	$T_E / s$
1.	18.638
2.	18.607
3.	18.582
4.	18.592
5.	18.625
6.	18.629
7.	18.613
8.	18.588
9.	18.599
10.	18.620
Mittelwert(nach Gl. (14))	18.609
Standardabweichung(nach Gl. (15))	0.018

**Tabelle 5:** Periodendauer der Schwingung mit Magnet.

Die Horizontalkomponente lässt sich aus Gleichung (19) nach  $B$  umgestellt bestimmen.

$$B_h = \frac{4\pi^2 I_{\text{ges}}}{m} \left( \frac{1}{T_E^2} - \frac{1}{T^2} \right) = (65.0 \pm 8.0) \mu\text{T} \quad (21)$$

## 4 Diskussion

### 4.1 Elastische Konstanten

Aus dem gegebenen Wert für den Elastizitätsmodul  $E = 21 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$  lässt sich vermuten, dass der Draht aus Stahl besteht. Der Unterschied zwischen dem Literaturwert für den Schubmodul und dem praktisch ermittelten Schubmodul beträgt:

$$G_{\text{Literatur}} = 8.2 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$G_{\text{exp}} = (4.99 \pm 0.04) \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Abweichung von: 40.9 %

Da der Unterschied sehr groß ist, ist vermutlich der Magnet in der Kugel nicht richtig ausgerichtet gewesen, wodurch sich die Periodendauer verändert. Außerdem kann es sein, dass die Helmholtzspulen unter dem Effekt der Hysterese litten, da sie vorher bereits verwendet wurden.

### 4.2 Erdmagnetfeld

Der Literaturwert der Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes ist  $B_{H,\text{Literatur}} = 19.304 \mu\text{T}$  [1]. Der in diesem Versuch ermittelte Wert

$B_h = (65.0 \pm 8.0) \mu\text{T}$  weicht sehr stark von dem Literaturwert ab, dies kann unter anderem an der falschen Ausrichtung des Dipolmagneten in der Kugel liegen.

## Literatur

- [1] *Horizontale Erdmagnetfeldkomponente für Dortmund*. <http://www-appl.gfz-potsdam.de/cgi-bin/igrf.pl>, 2016.