

Versuch: 355

Gekoppelte Schwingkreise

Maximilian Sackel
Maximilian.sackel@gmx.de

Philip Schäfers
phil.schaefers@gmail.com

Durchführung: 19.01.2016

Abgabe: 26.01.2016

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Ziel des Versuches	3
2 Theoretische Grundlage	3
2.1 Verhalten kapazitiv gekoppelte Schwingkreise	3
2.2 Abhängigkeit des Stromes von der Frequenz	6
2.3 Fehlerrechnung	7
2.3.1 Mittelwert	7
2.3.2 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung	7
2.3.3 Lineare Regression	8
3 Durchführung und Aufbau	8
3.1 Voreinstellung der Schwingkreise	8
3.2 Messprogramm	9
3.2.1 Beobachtung des Energieaustausches	9
3.2.2 Bestimmung der Fundamentalfrequenzen über Lissajous-Figuren .	9
3.2.3 Bestimmung der Fundamentalfrequenzen über die Sweap-Methode	9
4 Auswertung	10
4.1 Justierung der beiden LC-Kreise	10
4.2 Frequenzverhältniss von Schwebung und Schwingung	10
4.3 Eigenfrequenzen des Systems (Lissajour Figur)	11
4.4 Eigenfrequenzen des Systems (Beepmethode)	11
5 Diskussion	12
Literatur	12

1 Ziel des Versuches

Wenn zwei schwingende Systeme so miteinander verbunden sind, dass diese aufeinander einwirken können, werden diese als gekoppelt bezeichnet. Von besonderem Interesse ist der Energieübergang, zwischen den gekoppelten Systemen. In diesem Versuch wird der gekoppelte Schwingkreis untersucht. Dafür werden die Resonanzeffekte und die Fundamentalschwingungen beobachtet.

2 Theoretische Grundlage

Für diesen Versuch wird ein Schwingkreis verwendet, da sich bei diesem die Frequenzen und Amplituden besser bestimmen lassen, als bei zwei Fadenpendeln welche über eine Feder gekoppelt sind.

2.1 Verhalten kapazitiv gekoppelte Schwingkreise

Im folgenden werden zwei gleiche Schwingkreise, welche durch die Kapazität C_K gekoppelt sind, untersucht (siehe Abbildung 1).

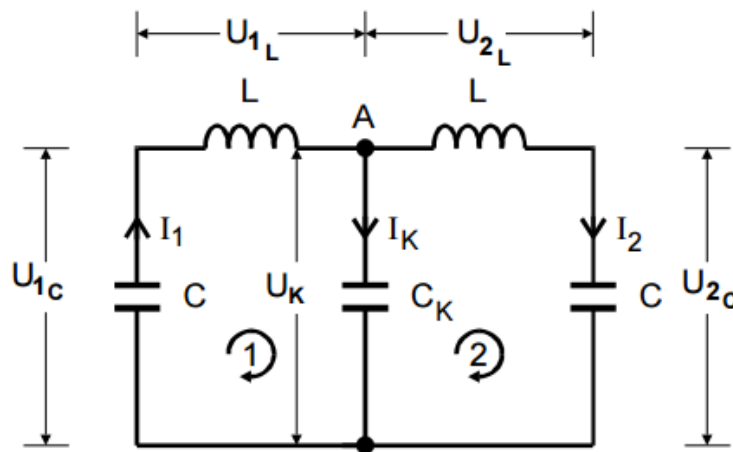


Abbildung 1: Schaltung eines kapazitiv gekoppeltem Schwingkreises [1].

Der Schwingkreis liegt den Kirchhoffschen Regeln zu Grunde. Die erste der beiden Regeln besagt, dass die Summe der eingehenden und ausgehenden Ströme an einem Knoten gleich Null ist.

$$\text{Knotenregel: } \sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad (1)$$

Die zweite Regel besagt, dass sich bei einer Geschlossenen Masche alle Teilspannungen, bei einem Umlauf zu Null addieren.

$$\text{Maschenregel: } \sum_{k=1}^n U_k = 0 \quad (2)$$

Damit ergibt sich für beide Maschen

$$U_C + U_L + U_K = 0 , \quad (3)$$

wobei für die Spannung in der Spule

$$U_L = L\dot{I}$$

gilt und für die Kondensatorspannung gilt

$$U_C = \frac{1}{C} \int I dt .$$

Außerdem ergibt sich für den Strom am Knotenpunkt A

$$I_1 = I_K + I_2 .$$

Mit diesen Beziehungen ergeben sich für beide Maschen mit anschließender Differentiation nach t folgende Differentialgleichungen

$$L\ddot{I}_1 + \frac{1}{C}I_1 + \frac{1}{C_K}(I_1 - I_2) = 0 \quad (4)$$

und

$$L\ddot{I}_2 + \frac{1}{C}I_2 + \frac{1}{C_K}(I_1 - I_2) = 0 . \quad (5)$$

Um die beiden Differentialgleichungssysteme zu lösen werden neue Variablen eingeführt und zwar Summe und Differenz der Einzelströme. Damit ergeben sich aus 4 und 5

$$L\frac{d^2}{dt^2}(I_1 + I_2) + \frac{1}{C}(I_1 + I_2) = 0 \quad (6)$$

und

$$L\frac{d^2}{dt^2}(I_1 - I_2) + \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)(I_1 - I_2) = 0 . \quad (7)$$

Die Lösung von 6 ist

$$(I_1 + I_2)(t) = (I_{1_0} + I_{2_0}) \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) , \quad (8)$$

mit der Schwingungsfrequenz

$$\nu^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} . \quad (9)$$

Die Lösung von 7 ist

$$(I_1 - I_2)(t) = (I_{1_0} - I_{2_0}) \cos\left(\frac{t}{\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)^{-1}}}\right) , \quad (10)$$

mit der Schwingungsfrequenz

$$\nu^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)^{-1}}} . \quad (11)$$

Für die ursprünglichen Variablen I_1 und I_2 ergibt sich nun

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(I_{1_0} + I_{2_0}) \cos(2\pi\nu^+t) + \frac{1}{2}(I_{1_0} - I_{2_0}) \cos(2\pi\nu^-t) \quad (12)$$

und

$$I_2(t) = \frac{1}{2}(I_{1_0} + I_{2_0}) \cos(2\pi\nu^+t) - \frac{1}{2}(I_{1_0} - I_{2_0}) \cos(2\pi\nu^-t) . \quad (13)$$

An dieser Stelle werden nun zwei Spezialfälle des gekoppelten Systems betrachtet.

erster Spezialfall: ($I_{1_0} = I_{2_0}$)

Wenn zu Beginn des Versuches die Schwingkreise gleich stark und in Phase ausgelenkt werden, fällt in den Gleichungen 12 und 13 jeweils die Differenzschwingung raus. Das heißt beide Systeme schwingen mit der Frequenz ν^+ und es liegt zu keinem Zeitpunkt eine Spannung an dem Koppelkondensator an.

zweiter Spezialfall: ($I_{1_0} = -I_{2_0}$)

Wenn zu Beginn des Versuches die Schwingkreise gleichstark und mit entgegengesetzter Phase ausgelenkt werden, fällt in den Gleichungen 12 und 13 jeweils die Summenschwingung raus. Das heißt beide Systeme schwingen mit der Frequenz ν^- und es liegt die maximale Spannung an dem Koppelkondensator an.

Die beiden Spezialfälle werden auch als Fundamentalschwingungen des gekoppelten Systems bezeichnet.

Wird hingegen nur einer der Schwingkreise ausgelenkt ($I_{2_0} = 0$ oder $I_{1_0} = 0$) folgt:

$$I_1(t) = I_{1_0} \cos(\pi(\nu^+ + \nu^-)t) \cos(\pi(\nu^+ - \nu^-)t) \quad (14)$$

$$I_2(t) = I_{2_0} \sin(\pi(\nu^+ + \nu^-)t) \sin(\pi(\nu^+ - \nu^-)t) . \quad (15)$$

In der folgenden Abbildung wird der Verlauf der Ströme $I_1(t)$ und $I_2(t)$ dargestellt.

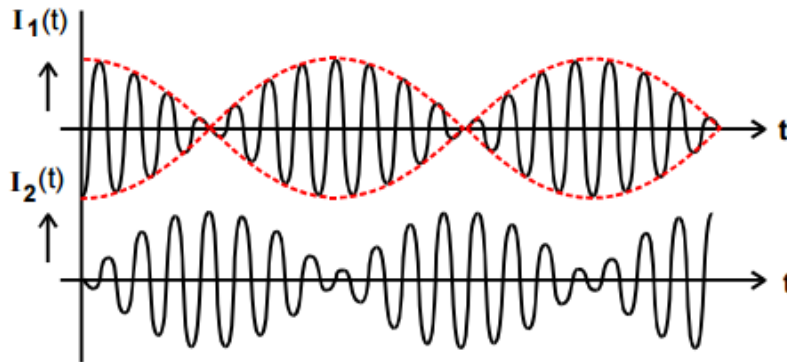


Abbildung 2: Zeitabhängigkeit der Ströme in den Schwingkreisen im Falle einer Schwebung [1].

Die Amplitude der Schwingung ändert sich mit der Schwebungsfrequenz $\nu^- - \nu^+$, während das System mit der Frequenz

$$\frac{\nu^+ + \nu^-}{2} \approx \nu^+$$

schwingt.

2.2 Abhängigkeit des Stromes von der Frequenz

Wenn einer der Schwingkreise von einer angelegten Sinusspannung angeregt wird (siehe Abb. 3),

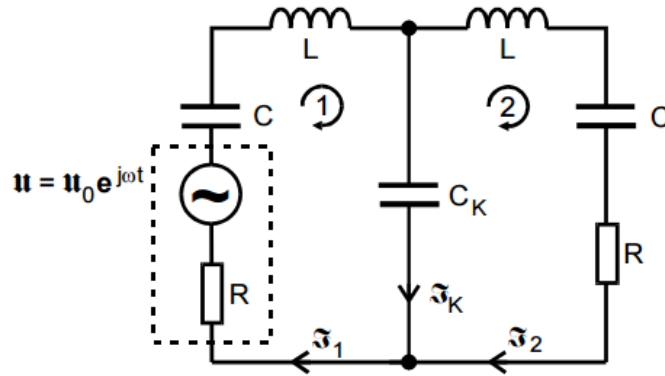


Abbildung 3: Gekoppelte Schwingkreise mit eingebautem Sinusgenerator [1].

so ergibt sich über die Kirchhoffsche Maschenregel zu

$$\text{Kreis 1: } U = (z_C + z_L + z_{C_K} + z_R)I_1 - z_{C_K}I_2 \quad (16)$$

und

$$\text{Kreis 2: } 0 = (z_C + z_L + z_{C_K} + z_R)I_2 - z_{C_K}I_1 . \quad (17)$$

Für die einzelnen Impedanzen gilt

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{1}{i\omega C} , \\ z_L &= i\omega L \quad \text{und} \\ z_R &= R . \end{aligned}$$

Nach Elimination von I_1 folgt für I_2

$$I_2 = U \frac{\frac{-i}{\omega C_K}}{\left(i\omega L - i \left(\frac{1}{\omega C} + \frac{1}{\omega C_K} \right) + R \right)^2 + \frac{1}{\omega^2 C_K^2}} . \quad (18)$$

Nach Trennung in Real- und Imaginärteil erhält man für $|I_2|$ mit der Abkürzung

$$Z(\omega) := \omega L - \frac{1}{\omega C} - \frac{1}{\omega C_K}$$

$$|I_2| = |U| \frac{1}{\sqrt{4\omega^2 C_K^2 R^2 Z(\omega)^2 + \left(\frac{1}{\omega C_K} - \omega C_K Z(\omega)^2 + \omega R^2 C_K\right)^2}} := |U| \cdot |\varrho| \quad (19)$$

An der Gleichung 19 wird deutlich, dass $|I_2|$ für $\omega \rightarrow 0$ und für $\omega \rightarrow \infty$ gegen null geht und bei den Frequenzen ω^+ und ω^- seine Maxima besitzt.

$$|\varrho(\omega^+)| = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_K^2}{LC}}} \quad (20)$$

$$|\varrho(\omega^-)| = \frac{1}{R\sqrt{4 + \frac{R^2 C_K^2}{LC} \left(1 + \frac{C}{C_K}\right)}} \quad (21)$$

Im folgenden wird $|\varrho(\omega^{+/-})|$ zu $\frac{1}{2R}$ genähert.

2.3 Fehlerrechnung

Sämtliche Fehlerrechnungen werden mit Hilfe von Python 3.4.3 durchgeführt.

2.3.1 Mittelwert

Der Mittelwert einer Messreihe x_1, \dots, x_n lässt sich durch die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad (22)$$

berechnen. Die Standardabweichung des Mittelwertes beträgt

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \quad (23)$$

2.3.2 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

Wenn x_1, \dots, x_n fehlerbehaftete Messgrößen im weiteren Verlauf benutzt werden, wird der neue Fehler Δf mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung angegeben.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 \cdot (\Delta x_k)^2} \quad (24)$$

2.3.3 Lineare Regression

Die Steigung und y-Achsenabschnitt einer Ausgleichsgeraden werden gegebenenfalls mittels Linearen Regression berechnet.

$$y = m \cdot x + b \quad (25)$$

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \quad (26)$$

$$b = \frac{\overline{x^2}\overline{y} - \overline{x}\overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \quad (27)$$

3 Durchführung und Aufbau

3.1 Voreinstellung der Schwingkreise

Die beiden Schwingkreise besitzen nicht dieselbe Resonanzfrequenz, deshalb müssen sie zunächst aufeinander abgestimmt werden. Dazu wird zunächst die Resonanzfrequenz des fest abgestimmten Schwingkreises bestimmt, dies geschieht mit der in Abbildung 4 dargestellten Schaltung.

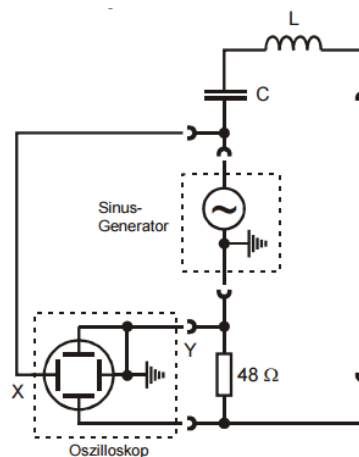


Abbildung 4: Messschaltung zur genauen Bestimmung der Resonanzfrequenz eines Schwingkreises [1].

Für eine grobe Abschätzung der Resonanzfrequenz wird die Frequenz gesucht, bei der ein Strom Maximum auftritt. Für eine genauere Bestimmung der Frequenz wird das Oszilloskop in den XY-Betrieb umgeschaltet, es wird die Spannung des Generators auf den X-Eingang gegeben und die Spannung an dem Widerstand auf den Y-Eingang. Die beiden Schwingungen sind in Phase wenn die Lissajous-Figur in eine Gerade übergeht. Diese Frequenz wird notiert und die Schaltung wird nun mit dem abstimmbaren Schwingkreis aufgebaut. Nun wird die in den Schwingkreis eingebaute Kapazität solange verändert bis sich die Lissajous-Figur wieder einer Geraden annähert. Sobald diese Einstellung gefunden wurde, wird diese für alle weiteren Versuche beibehalten.

3.2 Messprogramm

3.2.1 Beobachtung des Energieaustausches

Für diesen Aufgabenteil wird die in Abbildung 5 dargestellte Schaltung aufgebaut.

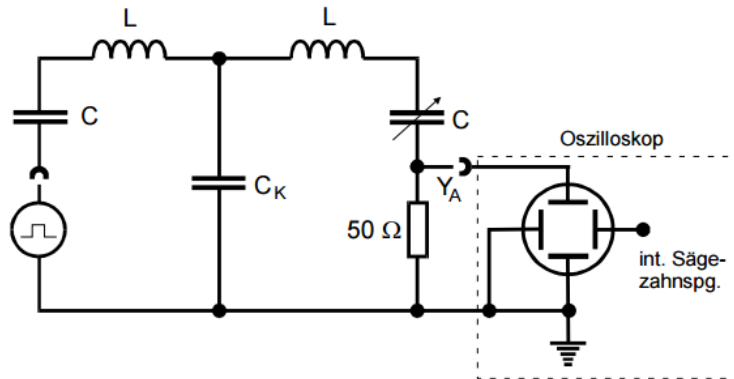


Abbildung 5: Schaltung zur Beobachtung des Energieaustausches [1].

Nun wird der linke Schwingkreis mit einem Rechteckimpuls angeregt. Die Änderung des Stromes wird über den Spannungsabfall am $48\ \Omega$ Widerstand auf dem Oszilloskop sichtbar gemacht. Auf dem Oszilloskop lassen sich nun Schwebungen, wie in Abbildung 2 dargestellt, erkennen. Nun wird das Verhältniss der Schwebungs- und der Schwingungsfrequenz bestimmt. Dafür werden die Maxima der Schwingungsfrequenz in einer Schwebung gezählt. Dies wird für unterschiedliche Koppelkondensatoren wiederholt, um einen Zusammenhang zwischen dem Frequenzverhältniss und der Kapazität des Kondensators zu erkennen.

3.2.2 Bestimmung der Fundamentalfrequenzen über Lissajous-Figuren

Es wird die Schaltung aus dem vorherigen Versuch übernommen, allerdings wird nun eine Sinusschwingung verwendet. Außerdem wird die Generatorspannung an den X-Eingang des Oszilloskops gegeben und das Oszilloskop wird auf den XY-Betrieb gestellt, dadurch sind nun wieder Lissajous-Figuren zu erkennen. Die Frequenzen, bei denen die Lissajous-Figuren in eine Gerade übergehen, sind die Fundamentalfrequenzen. Dies wird wieder für unterschiedliche Kapazitäten des Koppelkondensators wiederholt.

3.2.3 Bestimmung der Fundamentalfrequenzen über die Sweep-Methode

Bei diesem Versuch wird die Schaltung aus Abbildung 5 übernommen. Allerdings wird dieses mal keine konstante Sinusschwingung verwendet, sondern eine ansteigende Sinusschwingung, ein sogenannter Sweep. Bedeutet, dass die Sinusschwingung bei einer Startfrequenz anfängt und über einen Zeitraum linear bis zur Endfrequenz ansteigt. Die Start- und Endfrequenzen werden so gewählt, dass die Fundamentalfrequenzen innerhalb dieses Bereiches liegen. Das Oszilloskop wird so angeschlossen, dass es die Spannung an dem $48\ \Omega$ Widerstand abnimmt. Desweiteren soll das Bild nach genau einem Sweep einfrieren,

damit die Zeitabstände zwischen dem Start des Sweaps und den beiden Maxima gemessen werden können. Dies geschieht mit Hilfe der Cursor-Funktion des Oszilloskops. Die Beiden Maxima stellen in diesem Fall die Fundamentalfrequenzen bzw. Resonanzfrequenzen da. Aus den Zeitabständen können nun die Fundamentalfrequenzen berechnet werden.

4 Auswertung

Das Experiment wurde mit der zweiten Schaltung durchgeführt. Die Schaltung hat die Kenngrößen

$$L = (23.954 \pm 0.001)\text{mH} \quad (28)$$

$$C = (0.7932 \pm 0.0001)\text{nF} \quad (29)$$

$$C_{\text{Sp}} = (0.028 \pm 0.001)\text{nF} \quad (30)$$

$$R = 48\Omega \quad (31)$$

Als Koppelkondensator wurde ein variabler Kondensator benutzt der einen relativen Messfehler von 0.5 % besitzt und Kapazitäten von 12.00 nF, 9.99 nF, 8.18 nF, 6.86 nF, 4.74 nF, 2.86 nF, 2.19 nF und 0.997 nF.

4.1 Justierung der beiden LC-Kreise

Um die beiden Resonanzfrequenzen miteinander abzustimmen, wird zunächst die Resonanzfrequenz ν^+ des Kreises mit der nicht regelbaren Kapazität mittels Lissajou-Figur bestimmt. Dafür wird die Phase gesucht, welche zwischen Generatorspannung und Schwingkreis verschwindet. Es wird nun der Funktionsgenerator an den zweiten Kreis angeschlossen und die Kapazität entsprechend eingestellt, so dass die selbe Lissajou-Figur wie im anderen Kreis zu sehen ist. Als Resonanzfrequenz wird eine Frequenz von

$$\nu^+ = 35.46\text{kHz} \quad (32)$$

gemessen.

4.2 Frequenzverhältniss von Schwebung und Schwingung

Die dem experimentellen Aufbau entnommene Verhältniss aus Schwingungs- und Schwebungsfrequenz n_{exp} ist in Tabelle 1 aufgeführt. Aus Formel ?? und ??, lässt sich das theoretische Frequenzverhältniss berechnen.

$$n_t = \frac{v_t^+ + v_t^-}{2(v_t^- - v_t^+)} \quad (33)$$

Die theoretischen Frequenzverhältnisse n_t für die einzelnen Kondensatoren sind in Tabelle 1 aufgetragen. Die Abweichung des praktisch ermittelten Wertes vom theoretischen berechnet sich aus

$$\sigma = \frac{|n_{\text{exp}} - n_t|}{n_{\text{exp}}} \quad (34)$$

C_k / nF	n_{exp}	n_t	$\sigma / \%$
12.00	15	16.7	11.3
9.99	13	14.1	8.5
8.18	11	11.7	6.4
6.86	9	10.0	11.1
4.74	7	7.2	2.9
2.86	4	4.8	20
2.19	3	3.9	30
0.997	/	2.3	/

Tabelle 1: Frequenzverhältniss der verschiedenen Koppelkondensatoren

Ursachen für die Abweichungen vom Theoriewert liegen einerseits dran, dass immer nur die Maxima eine einzige Schwebung gezählt wurden. Ein Verbesserungspotential besteht darin, mehrere Schwingungen zu betrachten und den Wert anschließend zu mitteln.

4.3 Eigenfrequenzen des Systems (Lissajour Figur)

Sowohl die experimentell ermittelten Werte v_e^+ und v_e^- , als auch die Theoriewerte die sich nach Formel ?? und ?? berechnen sind in Tabelle 2 aufgeführt. Von diesen Werten wurde die Abweichung berechnet und ebenfalls in der Tabelle aufgeführt. Der Fehler der

C_k / nF	v_e^+ / kHz	v_t^+ / kHz	$\sigma^+ / \%$	v_e^- / kHz	v_t^- / kHz	$\sigma^- / \%$
12.00 ± 0.06	37.32	38.10 ± 0.01	2	35.37	35.88	2
9.99 ± 0.04	38.28	38.52 ± 0.01	1	35.22	35.88	2
8.18 ± 0.04	38.67	39.08 ± 0.01	1	35.22	35.88	2
6.86 ± 0.03	39.06	39.66 ± 0.02	2	35.22	35.88	2
4.74 ± 0.02	40.53	41.22 ± 0.02	2	35.22	35.88	2
2.86 ± 0.01	43.59	44.33 ± 0.03	2	35.22	35.88	2
2.19 ± 0.01	46.02	46.55 ± 0.04	1	35.22	35.88	2
0.997 ± 0.005	55.86	56.25 ± 0.08	1	35.22	35.88	2

Tabelle 2: Eigenfrequenzen der Schwingkreise in Abhängigkeit der Koppelkondensatoren

gemessenen Eigenschwingung sowohl für ν^+ als auch ν^- ist 1-2 %. Aufgrund der geringen relativen Abweichung können keine systematischen Fehler erkannt werden.

4.4 Eigenfrequenzen des Systems (Beepmethode)

Die gewählte Startfrequenz des Beeps beträgt

$$\nu_{\text{Start}} = 30.13 \text{kHz} \quad (35)$$

und die Endfrequenz

$$\nu_{\text{Ende}} = 60.98 \text{ kHz} \quad (36)$$

Aufgrund des nicht immer eindeutigen Maxima wird ein Ablesefehler der Zeit von 2 ms berücksichtigt. Aus Formel ?? lässt sich die gemessene Zeit, in die entsprechende Frequenz umrechnen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 aufgelistet, ebenso wie die Zeiten vom Start der Messung bis zum Peak und die Fehler der praktisch ermittelten Fehler zum theoretischen Wert. Auffällig ist auch das diese Messung einen fürs Praktikum

C_k / nF	t bis zum 1 Peak / ms	v_e^+ / kHz	σ^+ / %	t bis zum 2 Peak / ms	v_e^- / kHz	σ^- / %
12.00 ± 0.06	240 ± 2	37.53 ± 0.06	2	176 ± 2	35.55 ± 0.06	1
9.99 ± 0.04	256 ± 2	38.02 ± 0.06	1	168 ± 2	35.30 ± 0.06	2
8.18 ± 0.04	264 ± 2	38.27 ± 0.06	2	160 ± 2	35.06 ± 0.06	2
6.86 ± 0.03	312 ± 2	39.75 ± 0.06	1	176 ± 2	35.55 ± 0.06	1
4.74 ± 0.02	328 ± 2	40.24 ± 0.06	2	160 ± 2	35.06 ± 0.06	2
2.86 ± 0.01	432 ± 2	43.45 ± 0.06	2	176 ± 2	35.55 ± 0.06	1
2.19 ± 0.01	512 ± 2	45.92 ± 0.06	1	176 ± 2	35.55 ± 0.06	1
0.997 ± 0.005	816 ± 2	55.30 ± 0.06	2	176 ± 2	35.55 ± 0.06	1

Tabelle 3: <+Caption text+>

relativ geringe Messunsicherheit von 2 % aufweist. Daher kann die Messung als gelungen bezeichnet werden.

5 Diskussion

Ein Vergleich zwischen den beiden Messmethoden ist schwierig, da beide ungefähr gleich genau sind. Lediglich der Aufwand ist nach subjektiver Beurteilung, bei einer längeren Messreihe bei der Sweepmethode kleiner, da nicht jedes mal die entsprechende Lissajourfigur gesucht werden muss. Ein Nachteil ist jedoch, dass das grobe Frequenzspektrum schon bekannt sein muss. Desweiteren muss ein Frequenzgenerator vorhanden sein welche solche Swipes generieren kann. Für die Methode mit den Lissajourfiguren ist dies nicht von Nöten und es reicht lediglich ein Funktionsgenerator und ein Zwei-Kanal-Oszilloskop.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 355: Gekoppelte Schwingkreise*. 2014.