206

Die Wärmepumpe

Maximilian Sackel
Maximilian.sackel@gmx.de

Philip Schäfers
phil.schaefers@gmail.com

Durchführung: 17.11.2015

Abgabe: 24.11.2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theoretische Grundlage

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik sagt, dass Wärme von einem wärmeren zu einem kälteren Reservoir fließt. Mithilfe einer Wärmepumpe lässt sich dieser Prozess umkehren. Dazu wird weitere Energie benötigt, zum Beispiel mechanische Arbeit. Ziel des Versuches ist es, eine Aussage über die Qualität der Wärmepumpe zu treffen. Um dies zu realisieren, werden die Güteziffer und der Massendurchsatz untersucht.

1.1 Güteziffer

Der erste Hauptsatz der Wärmelehre verlangt, dass die vom Transportmedium an das wärmere Reservoir abgegebene Wärmemenge Q_1 gleich der Summe der aus dem kälteren Reservoir entnommenen Wärmemenge Q_2 und der aufgewendeten Arbeit A ist, also

$$Q_1 = Q_2 + A \ . \tag{1}$$

Die Güteziffer ν ist im idealisierten Fall das Verhältnis zwischen der transportierten Wärmemenge Q_1 und der verrichteten mechanischen Arbeit A:

$$\nu_{\text{ideal}} = \frac{Q_1}{A} \ . \tag{2}$$

Aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik lässt sich eine Beziehung zwischen den Wärmemengen Q_1 und Q_2 sowie den Temperaturen T_1 und T_2 der Reservoire herstellen

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0 \ . \tag{3}$$

Allerdings ist die Gültigkeit der Formel 3 an die Forderung, dass die Wärmeübertragung reversibel verläuft, geknüpft. Dies bedeutet, dass der Prozess jederzeit umgekehrt ablaufen kann, wodurch die investierte mechanische Arbeit zurück gewonnen werden kann. Für den realistischen, irreversiblen Fall gilt eine andere Beziehung

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} > 0 \ . \tag{4}$$

Mit den Gleichungen 1 und 3 folgt nun

$$Q_1 = A + \frac{T_2}{T_1} Q_1 \tag{5}$$

und für die Güteziffer einer idealen Wärmepumpe

$$\nu_{\text{ideal}} = \frac{Q_1}{A} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \ . \tag{6}$$

Die Güteziffer für eine reale Wärmepumpe folgt aus 1 und 4 zu

$$\nu_{\text{real}} < \frac{T_1}{T_1 - T_2} \ . \tag{7}$$

Die reale Güteziffer wird im folgenden über

$$\nu_{\text{real}} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t N} = (m_1 c_{\text{w}} + m_{\text{k}} c_{\text{k}}) \frac{\Delta T_1}{\Delta t N} \tag{8}$$

berechnet, wobei $N :=$ gemittelte Leistungsaufnahme des Kompressors.

1.2 Massendurchsatz

Der Massendurchsatz für die Wärmepumpe berechnet sich nach [1,S.5] über den Differentialquotienten:

$$\frac{dQ_2}{dt} = (m_2 c_{\text{w}} + m_{\text{k}} c_{\text{k}}) \frac{\Delta T_2}{\Delta t N} \tag{9}$$

und

$$\frac{dQ_2}{dt} = L \frac{dm}{dt} \tag{10}$$

nach einsetzen von 9 in 10 folgt:

$$\frac{dm}{dt} = (m_2 c_{\text{w}} + m_{\text{k}} c_{\text{k}}) \frac{\Delta T_2}{\Delta t L} \tag{11}$$

Wobei $L :=$ bekannte Verdampfungswärme.

1.3 Mechanische Kompressorleistung

Wenn ein Kompressor ein Gasvolumen V_{a} auf das Volumen V_{b} verringert, leistet dieser die Arbeit A_{m}

$$A_{\text{m}} = -\int_{V_{\text{a}}}^{V_{\text{b}}} p \, dV \ . \tag{12}$$

Mit der Annahme, dass die Kompression adiabatisch verläuft, gilt die Poissonsche Gleichung:

$$p_{\text{a}} V_{\text{a}}^{\kappa} = p_{\text{b}} V_{\text{b}}^{\kappa} = p V^{\kappa} \ . \tag{13}$$

Eine adiabatische Zustandsänderung ist ein Prozess, bei dem ein System von einem Zustand in einen anderen übergeht, ohne Wärme mit der Umgebung auszutauschen.
Mit der Poissonschen Gleichung und

$$N_{\text{mech}} = \frac{dA_{\text{m}}}{dt} \ ,$$

folgt N_{mech} zu:

$$N_{\text{mech}} = \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_{\text{b}} \sqrt[\kappa]{\frac{p_{\text{a}}}{p_{\text{b}}}} - p_{\text{a}} \right) \frac{1}{\rho} \frac{dm}{dt} \ , \tag{14}$$

mit der Dichte ρ und dem Druck p_{a}.

1.4 Allgemeiner Aufbau einer Wärmepumpe

Im folgenden wird die prinzipielle Funktionsweise einer Wärmepumpe beschrieben. Diese kann schematisch wie folgt dargestellt werden:

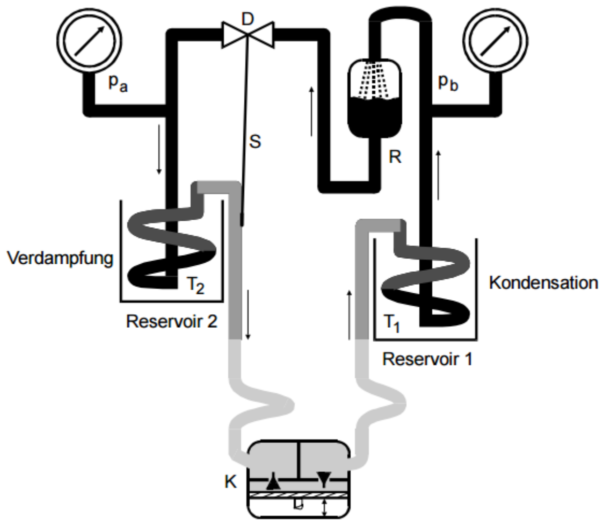

Abbildung 1: Allgemeiner Aufbau einer Wärmepumpe [1]

Für die Wärmepumpe wird ein reales Gas verwendet, welches Wärme beim Verdampfen aufnimmt und beim Kondensieren wieder abgibt. Die Wärme wird also in Form von Phasenumwandlungsenergie des Gases transportiert. Daraus folgt, dass das verwendete Gas eine hohe Kondensationswärme haben sollte. Der Kompressor K komprimiert das Gas adiabatisch und erzeugt einen Kreislauf des Mediums. Zwischen den Reservoiren ist ein Drosselventil D angebracht, welches das Gas bei einem bestimmten Druck passieren lässt. Dadurch entsteht ein Druckunterschied $p_\mathrm{b} - p_\mathrm{a}$. Das Gas mit dem Druck p_a und der Temperatur T_2 ist gasförmig, während es auf der anderen Seite bei p_b mit der Temperatur T_1 flüssig ist. Nachdem das flüssige Medium durch das Druckventil geströmt ist, verdampft dieses im Reservoir 2 und entzieht diesem die Verdampfungswärme L pro Gramm Substanz. Das zweite Reservoir ist damit das kältere und Wärme abgebende Reservoir. In dem Kompressor K wird das Gas komprimiert, wodurch es sich erwärmt. Durch die Erwärmung steigt der Druck p_a im Reservoir 1, bis sich das Gas verflüssigt, wodurch Wärme an die Umgebung abgegeben wird.
Wichtig ist, dass nur Gase in den Kompressor gelangen. Erreicht wird das mit diesen Apparaten:

- mit dem Reiniger R, werden Gasreste und damit Blasen entfernt
- mit der Steuervorrichtung S, die das Drosselventil D reguliert

1.5 Fehlerrechnung

Sämtliche Fehlerrechnungen werden mit Hilfe von Python 3.4.3 durchgeführt.

1.5.1 Mittelwert

Der Mittelwert einer Messreihe $x_1, ..., x_\mathrm{n}$ lässt sich durch die Formel

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} x_\mathrm{k} \tag{15}$$

berechnen. Die Standardabweichung des Mittelwertes beträgt

$$\Delta\overline{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} (x_\mathrm{k} - \overline{x})^2} \tag{16}$$

1.5.2 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

Wenn $x_1, ..., x_\mathrm{n}$ fehlerbehaftete Messgrößen im weiteren Verlauf benutzt werden, wird der neue Fehler Δf mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung angegeben.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\mathrm{k}}\right)^2 \cdot (\Delta x_\mathrm{k})^2} \tag{17}$$

1.5.3 Lineare Regression

Die Steigung und y-Achsenabschnitt einer Ausgleichsgeraden werden gegebenfalls mittels Linearen Regression berechnet.

$$y = m \cdot x + b \tag{18}$$

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \tag{19}$$

$$b = \frac{\overline{x^2}\,\overline{y} - \overline{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \tag{20}$$

2 Durchführung und Aufbau

Die in diesem Versuch verwendete Wärmepumpe hat den in Abbildung **??** gezeigten Aufbau. Zu Beginn werden die Ruhedrücke und Temperaturen, sowie die spezifische Wärmekapazität des Kupfers aufgenommen. Nachdem die beiden Wasserreservoire befüllt wurden, werden die Rührmotoren angeschaltet, um die Wassertemperatur in den Reservoiren konstant zu halten. Sodann wird der Kompressor eingeschaltet und die Messreihe gestartet. Dazu werden die Messdaten der Mano- und Thermometer, sowie die Leistungsaufnahme des Kompressors im Minutentakt notiert. Die Messreihe wird beendet, wenn die Temperatur T_1 50°C erreicht hat.
Wichtig ist, dass sämtliche Leitungen und die beiden Reservoire wärmeisoliert sind, um die Wärmeverluste zu minimieren.

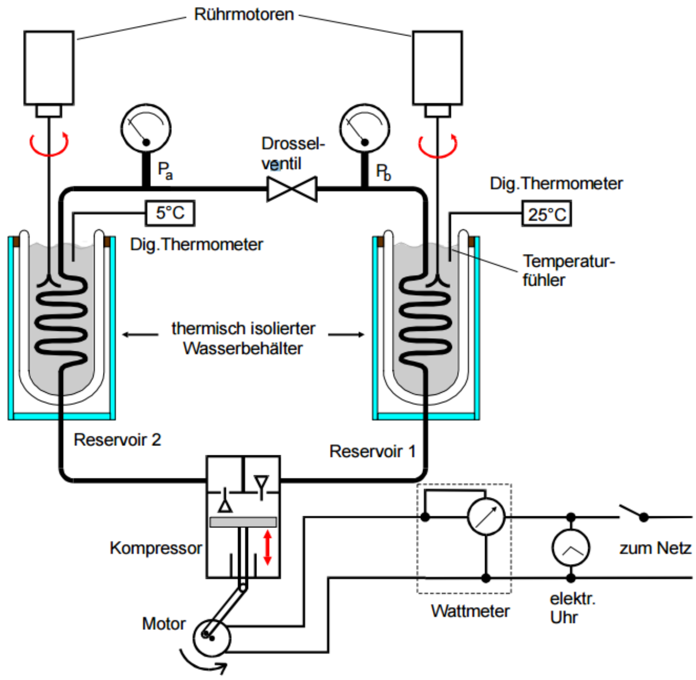

Abbildung 2: Verwendete Wärmepumpe

3 Auswertung

3.1 Messgrößen und Fehler

Die Reservoire werden jeweils mit 4 Liter Wasser befüllt. Die Messdaten werden in Tabelle 1 aufgelistet. Die Wärmekapazität der Reservoire beträgt

$$C_{\mathrm{Reservoire}} = 750 \pm 10 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \tag{21}$$

Zu beachten ist, dass alle Messgrößen eine Messunsicherheit besitzen, einerseits einen Ablesefehler bei analogen Messinstrumenten als auch einen technischen.

$$\begin{aligned} \Delta p &= \quad \pm 10\mathrm{kp} \\ \Delta C &= \quad \pm 10 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \\ \Delta V &= \quad \pm 1.6\mathrm{mL} \\ \Delta \rho &= \quad \pm 13 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \end{aligned}$$

Die Messunsicherheit der Dichte für Wasser kommt dadurch zu stande, dass Wasser bei verschiedenen Temperaturen seine Dichte ändert.

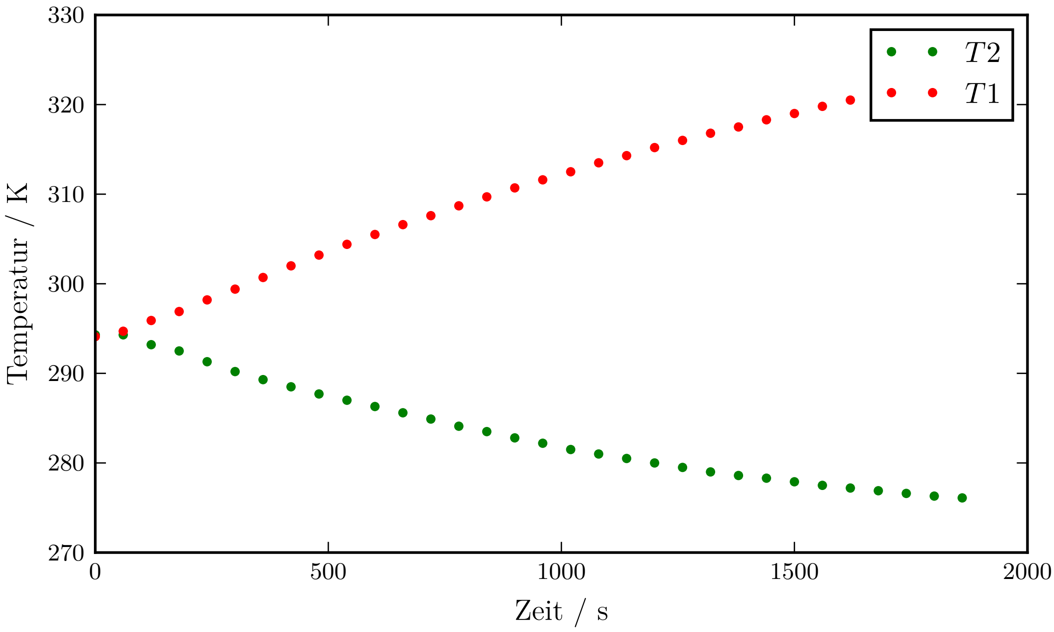

Abbildung 3: Temperaturverläufe T_1 und T_2

t / min	T_1 / K	p_b / kPa	T_2 / K	P_a / kPa	Leistung / kW
0	294.1	466	294.3	496	0
1	294.7	608	294.3	425	1.18
2	295.9	618	293.2	446	1.2
3	296.9	638	292.5	466	1.25
4	298.2	628	291.3	466	1.25
5	299.4	709	290.2	466	1.25
6	300.7	730	289.3	466	1.25
7	302.0	760	288.5	455	1.25
8	303.2	790	287.7	445	1.25
9	304.4	812	287.0	425	1.24
10	305.5	820	286.3	425	1.24
11	306.6	840	285.6	415	1.23
12	307.6	861	284.9	405	1.23
13	308.7	891	284.1	405	1.23
14	309.7	911	283.5	395	1.23
15	310.7	922	282.8	395	1.24
16	311.6	963	282.2	385	1.25
17	312.5	993	281.5	385	1.25
18	313.5	1003	281.0	375	1.25
19	314.3	1023	280.5	365	1.25
20	315.2	1044	280.0	365	1.25
21	316.0	1064	279.5	365	1.25
22	316.8	1094	279.0	365	1.25
23	317.5	1104	278.6	355	1.25
24	318.3	1115	278.3	355	1.25
25	319.0	1135	277.9	355	1.25
26	319.8	1155	277.5	345	1.25
27	320.5	1175	277.2	345	1.25
28	321.2	1196	276.9	345	1.25
29	321.8	1216	276.6	345	1.25
30	322.5	1226	276.3	345	1.25
31	323.3	1236	276.1	354	1.25

Tabelle 1: Dem Versuchsaufbau entommene Messgrößen

3.2 Näherungsfunktion

Mit einer nicht-linearen Ausgleichsgeraden soll der Temperaturverlauf mit Hilfe der Gleichung 22 approximiert werden.

$$T(t) = At^2 + Bt + C \tag{22}$$

Die Ermittlung der Ausgleichsgeraden erfolgt mit Hilfe von Python 3.4.3. Mittels einer

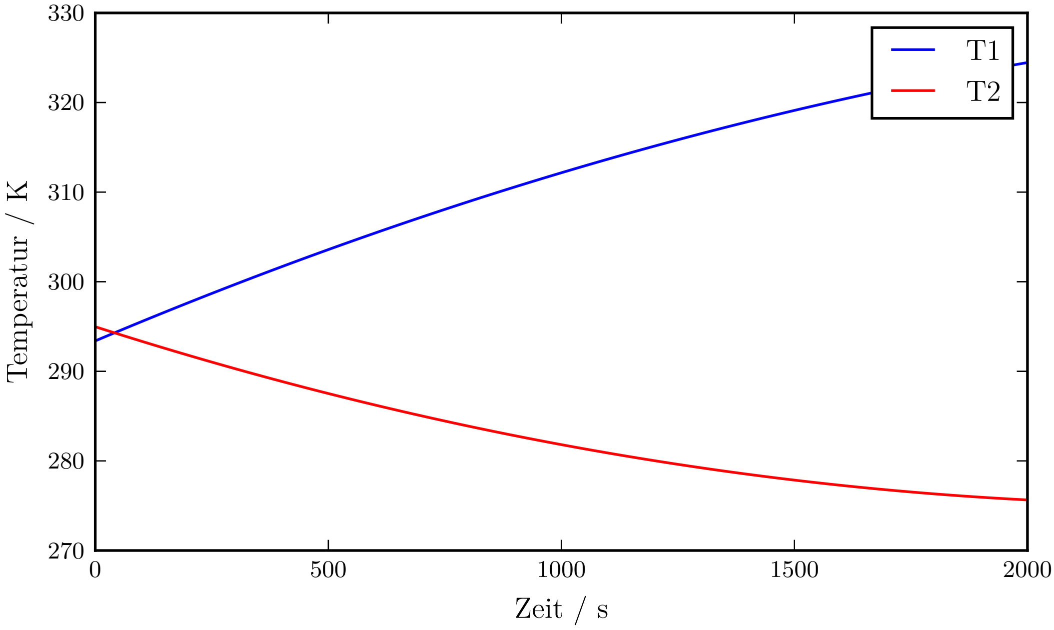

Abbildung 4: nicht-lineare Ausgleichsgrade

fit Funktion werden die Koeffizienten bestimmt. Für die Temperatur T_1 ergeben sich die Koeffizienten

$$\begin{aligned} A &= -3.23 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}^2} \\ B &= 2.20 \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}} \\ C &= 2.93 \cdot 10^{2}\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

und für T_2

$$\begin{aligned} A &= 3.49 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}^2} \\ B &= -1.67 \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}} \\ C &= 2.94 \cdot 10^{2}\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

Dabei wird vernachlässigt, dass die Koeffizienten fehlerbehaftet sind, weil dies nicht mittels fit Funktion ermittelt werden kann.

3.3 Differentialquotient

Der Differentialquotient berechnet sich aus einmaligem Ableiten der Gleichung 22 nach der Zeit.

$$\frac{dT_\mathrm{i}}{dt} = 2At + B \tag{23}$$

Aus der Funktion wird der Differentialquotient für T_1 und T_2 für vier verschiedene Zeiten berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 aufgeführt.

t / s	T_1 / K	$\frac{dT1}{dt}$ / 10^{-2} s/K	T_2 / K	$\frac{dT2}{dt}$ / 10^{-2} s/K
60	294.7	2.16	294.0	-1.62
400	301.7	1.94	288.9	-1.35
1000	312.2	1.55	281.8	-0.97
1500	319.1	1.23	277.9	-0.62

Tabelle 2: Differentialquotient für T_1 und T_2

3.4 Güteziffer

Mit Hilfe des Differentialquotienten und der Wärmekapazität der mit Wasser befüllten Reservoire

$$c_\mathrm{w} m_\mathrm{w} = 6230.64 \cdot (4.00 \pm 0.16)\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} = (24.9 \pm 0.0) \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \tag{24}$$

soll die Güteziffer der Wärmepumpe bestimmt werden. Die theoretische Güteziffer lässt sich mit Hilfe der Gleichung 8 berechnen und ist in Tabelle 3 aufgeführt. Die praktisch bestimmte Güteziffer errechnet sich nach Gleichung 8 aus der Wärmekapazität der Reservoire und der Wärmekapazität der Leitungen

$$c_\mathrm{k} m_\mathrm{k} = (750 \pm 10)\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\ , \tag{25}$$

sowie mit den in Tabelle 1 bestimmten Differentialquotienten, sowie mit der nach Formel 15 und 16 gemittelten Leistung. Gründe für die Abweichung zwischen der theoreti-

t / s	ν_theo	ν_exp
60	421.0	3.2 ± 0.6
400	23.6	2.8 ± 0.5
1000	10.3	2.3 ± 0.4
1500	7.6	1.8 ± 0.3

Tabelle 3: theoretisch und praktisch bestimmte Güteziffer

schen Güteziffer und der experimentell ermittelten Güteziffer werden in der Diskussion aufgeführt.

3.5 Dampfdruckkurve

Die Verdampfungswärme L wird mit Hilfe einer Verdampfungskurve ermittelt. Dafür wird im Diagramm 5 $1/T$ gegen $log(p/p_0)$ aufgetragen und die Steigung der Graden in

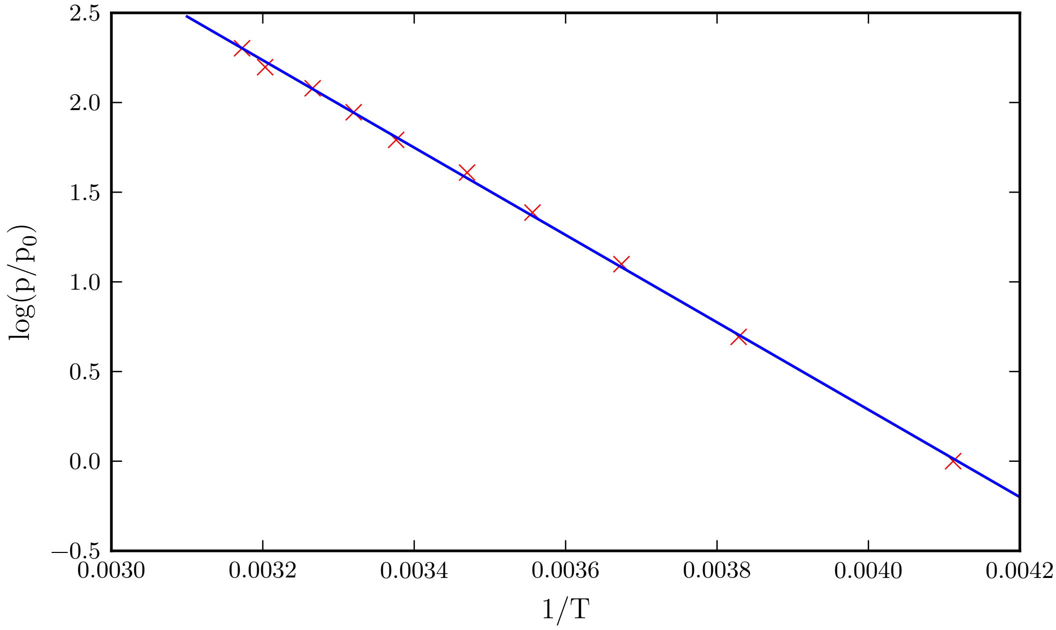

Abbildung 5: Dampfdruckkurve

die Formel 26 eingesetzt.

$$L = log\left(\frac{p}{p_o}\right) \cdot T \cdot \frac{1}{R} \tag{26}$$

Die Steigung der Ausgleichsgeraden wird mittels einer linearen Regression berechnet und beträgt

$$m = -2430 \pm 20 \ .$$

Daraus ergibt sich eine Verdampfungswärme von

$$L = (20\,200 \pm 170)\,\frac{\mathrm{Js}}{\mathrm{molK}} \ . \tag{27}$$

3.6 Massendurchsatz

Die Verdampfungswärme wird nun in Formel ?? eingesetzt und damit der Massendurchsatz ermittelt. Die Massendurchsätze der verschiedenen Zeiten sind in Tabelle 4 aufgetragen. Für die weiteren Rechnungen wird der Massendurchsatz durch Multiplikation mit der Molaren Masse in die SI-Einheit umgerechnet.

T / s	$\frac{dm}{dt}$ / (mol/s)	$\frac{dm}{dt}$ / (g/s)
60	0.0140 ± 0.0010	1.69 ± 0.10
400	0.0120 ± 0.0010	1.45 ± 0.10
1000	0.0083 ± 0.0010	1.00 ± 0.10
1500	0.0053 ± 0.0010	0.64 ± 0.10

Tabelle 4: Massendurchsatz dm/dt

3.7 Mechanische Kompressorleistung

Aus der idealen Gasgleichung lässt sich die Dichte in den Rohren berechnen. Dafür muss jedoch die Dichte von Dichlordifluormethan bei 1 Bar Druck und 273 Kelvin bekannt sein.

$$\rho_0 = 5.51 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}} \ . \tag{28}$$

Zusätzlich wird gefordert, dass

$$nR = konstant \tag{29}$$

ist und das die Dichte homogen verteilt ist. Daraus lässt sich die ideale Gasgleichung umstellen und man erhält

$$\begin{aligned} \frac{pV}{T} = nR = & \quad konstant \\ \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_2 V_2}{T_2} \Leftrightarrow & \quad \frac{p_0 m}{\rho_0 T_0} = \frac{p_2 m}{T_2 \rho_2} \\ \frac{p_0}{\rho_0 T_0} = \frac{p_2}{T_2 \rho} \Leftrightarrow & \quad \rho = \frac{\rho_o T_o P_2}{T_2 P_0} \end{aligned}$$

einen Ausdruck für die Dichte in Abhängigkeit der Temperaturen und Drücke. Dies wird in Formel 14 eingesetzt und die Ergebnisse für die verschiedenen Zeitpunkte in Tabelle 5 eingetragen. Die Leistung wird nach Formel 15 gemittelt und der Fehler mit Formel 16

t/ s	ρ/ $\frac{10^{-3} kg}{l}$	Leistung / (N/W)
60	16.37	13.86
400	18.27	16.51
1000	14.98	21.58
1500	13.55	18.38

Tabelle 5: Leistung des Kompressors

ermittelt.

$$N_{\mathrm{mech}} = (17 \pm 2)\,\mathrm{W} \ . \tag{30}$$

4 Diskussion

Da alle Messgrößen fehlerbehaftet sind kommt es zur Fehlerfortpflanzung und daraus resultiert, dass auch die davon abgeleiteten Größen fehlerbehaftet sind. Zusätzlich ist der Versuchsaufbau nicht ideal isoliert und somit kommt es zum Wärmeaustausch mit der Umgebung. Desweiteren wird die Reibung des Gases an der Leitungswand als auch durch die Propeller erzeugte vernachlässigt. Im Fehler der Dichte des Wassers wird zwar berücksichtigt, dass das Wasser mit der Änderung der Temperatur seine Dichte ändert, jedoch ändert sich der Mittelwert des Wasserdichte nicht mit. Die Abbdichtung der Reservoire sind nicht ideal, da sie nicht optimal an dem Versuchsaufbau anschließen. Somit kann Wasser außerhalb des Kreislaufes verdunsten und Wärme mit der Umgebung ausgetauscht werden.

5 Literaturverzeichnis

[1] : TU Dortmund. Versuchsanleitung zum Experiment V206 - Die Wärmepumpe. 2015