

Die Wärmepumpe

Maximilian Sackel
Maximilian.sackel@gmx.de

Philip Schäfers
phil.schaefers@gmail.com

Durchführung: 17.11.2015

Abgabe: 24.11.2015

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlage	3
1.1	Güteziffer	3
1.2	Massendurchsatz	4
1.3	Mechanische Kompressorleistung	4
1.4	Allgemeiner Aufbau einer Wärmepumpe	5
1.5	Fehlerrechnung	6
1.5.1	Mittelwert	6
1.5.2	Gauß'sche Fehlerfortpflanzung	6
1.5.3	Lineare Regression	6
2	Durchführung und Aufbau	7
3	Auswertung	8
3.1	Messgrößen und Fehler	8
3.2	Näherungsfunktion	8
3.3	Differentialquotient	10
3.4	Güteziffer	11
3.5	Dampfdruckkurve	11
3.6	Massendurchsatz	12
3.7	Mechanische Kompressorleistung	13
3.8	Ermittlung der Messunsicherheiten	13
4	Diskussion	14
	Literatur	14

1 Theoretische Grundlage

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik sagt, dass Wärme von einem wärmeren zu einem kälteren Reservoir fließt. Mithilfe einer Wärmepumpe lässt sich dieser Prozess umkehren. Dazu wird weitere Energie benötigt, zum Beispiel mechanische Arbeit. Ziel des Versuches ist es, eine Aussage über die Qualität der Wärmepumpe zu treffen. Um dies zu realisieren, werden die Güteziffer und der Massendurchsatz untersucht.

1.1 Güteziffer

Der erste Hauptsatz der Wärmelehre verlangt, dass die vom Transportmedium an das wärmere Reservoir abgegebene Wärmemenge Q_1 gleich der Summe der aus dem kälteren Reservoir entnommenen Wärmemenge Q_2 und der aufgewendeten Arbeit A ist, also

$$Q_1 = Q_2 + A . \quad (1)$$

Die Güteziffer ν ist im idealisierten Fall das Verhältnis zwischen der transportierten Wärmemenge Q_1 und der verrichteten mechanischen Arbeit A :

$$\nu_{\text{ideal}} = \frac{Q_1}{A} . \quad (2)$$

Aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik lässt sich eine Beziehung zwischen den Wärmemengen Q_1 und Q_2 sowie den Temperaturen T_1 und T_2 der Reservoirs herstellen

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0 . \quad (3)$$

Allerdings ist die Gültigkeit der Formel 3 an die Forderung, dass die Wärmeübertragung reversibel verläuft, geknüpft. Dies bedeutet, dass der Prozess jederzeit umgekehrt ablaufen kann, wodurch die investierte mechanische Arbeit zurück gewonnen werden kann. Für den realistischen, irreversiblen Fall gilt eine andere Beziehung

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} > 0 . \quad (4)$$

Mit den Gleichungen 1 und 3 folgt nun

$$Q_1 = A + \frac{T_2}{T_1} Q_1 \quad (5)$$

und für die Güteziffer einer idealen Wärmepumpe

$$\nu_{\text{ideal}} = \frac{Q_1}{A} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} . \quad (6)$$

Die Güteziffer für eine reale Wärmepumpe folgt aus 1 und 4 zu

$$\nu_{\text{real}} < \frac{T_1}{T_1 - T_2} . \quad (7)$$

Die reale Güteziffer wird im folgenden über

$$\nu_{\text{real}} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t N} = (m_1 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_1}{\Delta t N} \quad (8)$$

berechnet, wobei N definiert ist, als gemittelte Leistungsaufnahme des Kompressors.

1.2 Massendurchsatz

Der Massendurchsatz für die Wärmepumpe berechnet sich nach [1,S.5] über den Differentialquotienten:

$$\frac{dQ_2}{dt} = (m_2 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_2}{\Delta t N} \quad (9)$$

und

$$\frac{dQ_2}{dt} = L \frac{dm}{dt} \quad (10)$$

nach einsetzen von 9 in 10 folgt:

$$\frac{dm}{dt} = (m_2 c_w + m_k c_k) \frac{\Delta T_2}{\Delta t L} \quad (11)$$

Wobei L die bekannte Verdampfungswärme ist.

1.3 Mechanische Kompressorleistung

Wenn ein Kompressor ein Gasvolumen V_a auf das Volumen V_b verringert, leistet dieser die Arbeit A_m

$$A_m = - \int_{V_a}^{V_b} p dV . \quad (12)$$

Mit der Annahme, dass die Kompression adiabatisch verläuft, gilt die Poissonsche Gleichung:

$$p_a V_a^\kappa = p_b V_b^\kappa = p V^\kappa . \quad (13)$$

Eine adiabatische Zustandsänderung ist ein Prozess, bei dem ein System von einem Zustand in einen anderen übergeht, ohne Wärme mit der Umgebung auszutauschen.

Mit der Poissonschen Gleichung und

$$N_{\text{mech}} = \frac{dA_m}{dt} ,$$

folgt N_{mech} zu:

$$N_{\text{mech}} = \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_b \sqrt[\kappa]{\frac{p_a}{p_b}} - p_a \right) \frac{1}{\rho} \frac{dm}{dt} , \quad (14)$$

mit der Dichte ρ und dem Druck p_a .

1.4 Allgemeiner Aufbau einer Wärmepumpe

Im folgenden wird die prinzipielle Funktionsweise einer Wärmepumpe beschrieben. Diese kann schematisch wie folgt dargestellt werden:

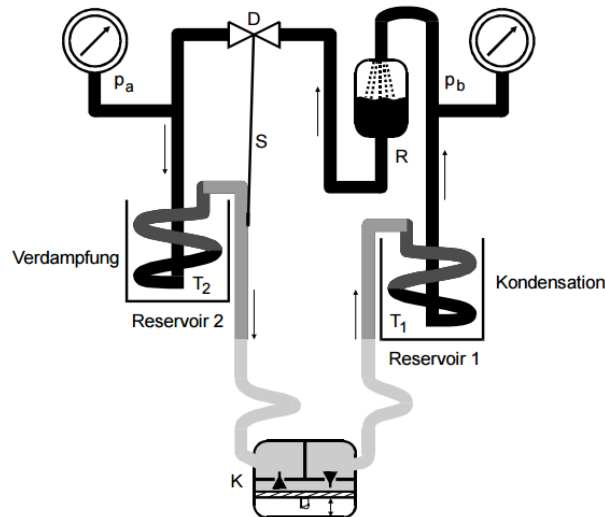


Abbildung 1: Allgemeiner Aufbau einer Wärmepumpe [2]

Für die Wärmepumpe wird ein reales Gas verwendet, welches Wärme beim Verdampfen aufnimmt und beim Kondensieren wieder abgibt. Die Wärme wird also in Form von Phasenumwandlungsenergie des Gases transportiert. Daraus folgt, dass das verwendete Gas eine hohe Kondensationswärme haben sollte. Der Kompressor K komprimiert das Gas adiabatisch und erzeugt einen Kreislauf des Mediums. Zwischen den Reservoiren ist ein Drosselventil D angebracht, welches das Gas bei einem bestimmten Druck passieren lässt. Dadurch entsteht ein Druckunterschied $p_b - p_a$. Das Gas mit dem Druck p_a und der Temperatur T_2 ist gasförmig, während es auf der anderen Seite bei p_b mit der Temperatur T_1 flüssig ist. Nachdem das flüssige Medium durch das Druckventil geströmt ist, verdampft dieses im Reservoir 2 und entzieht diesem die Verdampfungswärme L pro Gramm Substanz. Das zweite Reservoir ist damit das kältere und Wärme abgebende Reservoir. In dem Kompressor K wird das Gas komprimiert, wodurch es sich erwärmt. Durch die Erwärmung steigt der Druck p_a im Reservoir 1, bis sich das Gas verflüssigt, wodurch Wärme an die Umgebung abgegeben wird.

Wichtig ist, dass nur Gase in den Kompressor gelangen. Erreicht wird das mit diesen Apparaten:

- mit dem Reiniger R , werden Gasreste und damit Blasen entfernt
- mit der Steuervorrichtung S , die das Drosselventil D reguliert

1.5 Fehlerrechnung

Sämtliche Fehlerrechnungen werden mit Hilfe von Python 3.4.3 durchgeführt.

1.5.1 Mittelwert

Der Mittelwert einer Messreihe x_1, \dots, x_n lässt sich durch die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad (15)$$

berechnen. Die Standardabweichung des Mittelwertes beträgt

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \quad (16)$$

1.5.2 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

Wenn x_1, \dots, x_n fehlerbehaftete Messgrößen im weiteren Verlauf benutzt werden, wird der neue Fehler Δf mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung angegeben.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \cdot (\Delta x_k)^2} \quad (17)$$

1.5.3 Lineare Regression

Die Steigung und y-Achsenabschnitt einer Ausgleichsgeraden werden gegebenenfalls mittels Linearen Regression berechnet.

$$y = m \cdot x + b \quad (18)$$

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (19)$$

$$b = \frac{\overline{x^2\bar{y}} - \bar{x}\bar{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (20)$$

2 Durchführung und Aufbau

Die in diesem Versuch verwendete Wärmepumpe hat den in Abbildung 2 gezeigten Aufbau. Zu Beginn werden die Ruhedrucke und Temperaturen, sowie die spezifische Wärmekapazität des Kupfers aufgenommen. Nachdem die beiden Wasserreservoir befüllt wurden, werden die Rührmotoren angeschaltet, um die Wassertemperatur in den Reservoiren konstant zu halten. Sodann wird der Kompressor eingeschaltet und die Messreihe gestartet. Dazu werden die Messdaten der Mano- und Thermometer, sowie die Leistungsaufnahme des Kompressors im Minutentakt notiert. Die Messreihe wird beendet, wenn die Temperatur T_1 50°C erreicht hat.

Wichtig ist, dass sämtliche Leitungen und die beiden Reservoir wärmeisoliert sind, um die Wärmeverluste zu minimieren.

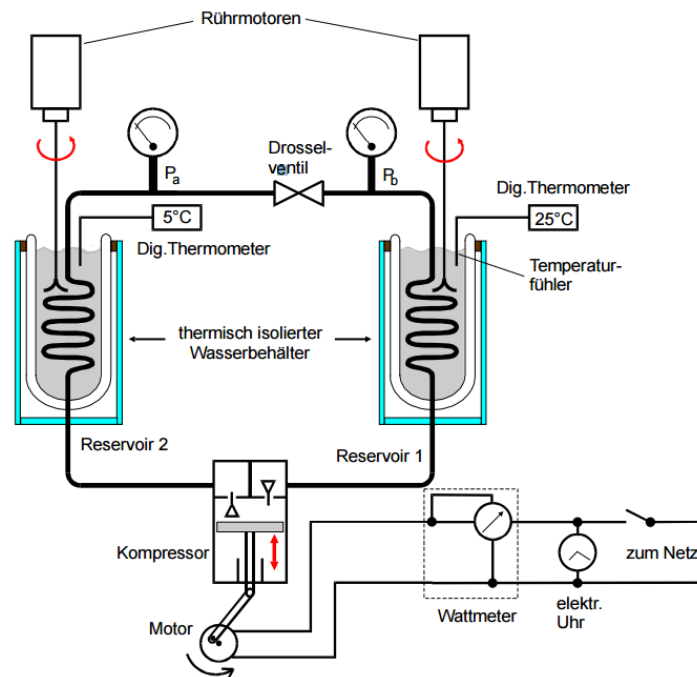


Abbildung 2: Verwendete Wärmepumpe [2]

3 Auswertung

3.1 Messgrößen und Fehler

Die Reservoirs werden jeweils mit 4 Liter Wasser befüllt. Die Messdaten werden in Tabelle 1 aufgelistet. Die Wärmekapazität der Reservoirs beträgt

$$C_{\text{Reservoir}} = 750 \pm 10 \frac{\text{J}}{\text{K}} . \quad (21)$$

Zu beachten ist, dass alle Messgrößen eine Messunsicherheit besitzen, einerseits einen Ablesefehler bei analogen Messinstrumenten als auch einen technischen.

$$\begin{aligned} \Delta p &= \pm 10 \cdot 10^3 \text{ p} \\ \Delta C &= \pm 10 \frac{\text{J}}{\text{K}} \\ \Delta V &= \pm 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ l} \\ \Delta \rho_{\text{Wasser}} &= \pm 13 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \end{aligned}$$

Die Messunsicherheit der Dichte für Wasser kommt dadurch zu stande, dass Wasser bei verschiedenen Temperaturen seine Dichte ändert.

3.2 Näherungsfunktion

Mit einer nicht-linearen Ausgleichsgeraden soll der Temperaturverlauf mit Hilfe der Gleichung 22 approximiert werden.

$$T(t) = At^2 + Bt + C \quad (22)$$

Die Ermittlung der Ausgleichsgeraden erfolgt mit Hilfe von Python 3.4.3. Mittels einer fit Funktion werden die Koeffizienten bestimmt. Für die Temperatur T_1 ergeben sich die Koeffizienten

$$\begin{aligned} A_1 &= (-3.23 \pm 0.12) \cdot 10^{-6} \frac{\text{K}}{\text{s}^2} \\ B_1 &= (2.20 \pm 0.02) \cdot 10^{-2} \frac{\text{K}}{\text{s}} \\ C_1 &= (293.39 \pm 0.09) \cdot \text{K} \end{aligned}$$

und für T_2

$$\begin{aligned} A_2 &= (3.49 \pm 0.11) \cdot 10^{-6} \frac{\text{K}}{\text{s}^2} \\ B_2 &= (-1.67 \pm 0.02) \cdot 10^{-2} \frac{\text{K}}{\text{s}} \\ C_2 &= (294.97 \pm 0.09) \cdot \text{K} \end{aligned}$$

t / min	T_1 / K	p_b / kPa	T_2 / K	P_a / kPa	Leistung / W
0	294.1	466	294.3	496	0
1	294.7	608	294.3	425	118
2	295.9	618	293.2	446	120
3	296.9	638	292.5	466	125
4	298.2	628	291.3	466	125
5	299.4	709	290.2	466	125
6	300.7	730	289.3	466	125
7	302.0	760	288.5	455	125
8	303.2	790	287.7	445	125
9	304.4	812	287.0	425	124
10	305.5	820	286.3	425	124
11	306.6	840	285.6	415	123
12	307.6	861	284.9	405	123
13	308.7	891	284.1	405	123
14	309.7	911	283.5	395	123
15	310.7	922	282.8	395	124
16	311.6	963	282.2	385	125
17	312.5	993	281.5	385	125
18	313.5	1003	281.0	375	125
19	314.3	1023	280.5	365	125
20	315.2	1044	280.0	365	125
21	316.0	1064	279.5	365	125
22	316.8	1094	279.0	365	125
23	317.5	1104	278.6	355	125
24	318.3	1115	278.3	355	125
25	319.0	1135	277.9	355	125
26	319.8	1155	277.5	345	125
27	320.5	1175	277.2	345	125
28	321.2	1196	276.9	345	125
29	321.8	1216	276.6	345	125
30	322.5	1226	276.3	345	125
31	323.3	1236	276.1	354	125

Tabelle 1: Dem Versuchsaufbau entommene Messgrößen

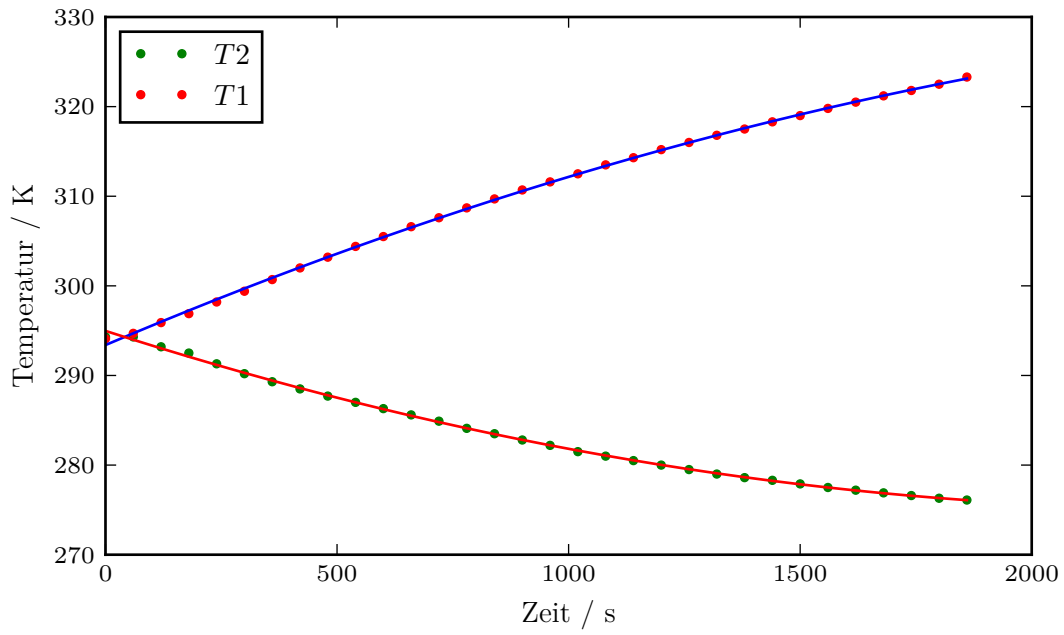


Abbildung 3: nicht-lineare Ausgleichsgrade

3.3 Differentialquotient

Der Differentialquotient berechnet sich aus einmaligem Ableiten der Gleichung 22 nach der Zeit.

$$\frac{dT_i}{dt} = 2At + B \quad (23)$$

Aus der Funktion wird der Differentialquotient für T_1 und T_2 für vier verschiedene Zeiten berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 aufgeführt.

t / s	T_1 / K	$\frac{dT_1}{dt} / 10^{-2} \text{ s/K}$	T_2 / K	$\frac{dT_2}{dt} / 10^{-2} \text{ s/K}$
60	294.7	2.16 ± 0.02	294.0	-1.62 ± 0.02
420	302.0	1.94 ± 0.03	288.5	-1.37 ± 0.02
1020	312.5	1.55 ± 0.03	281.5	-0.95 ± 0.03
1500	319.0	1.23 ± 0.04	277.9	-0.620 ± 0.004

Tabelle 2: Differentialquotient für T_1 und T_2

3.4 Güteziffer

Mit Hilfe des Differentialquotienten und der Wärmekapazität der mit Wasser befüllten Reservoirs

$$c_w m_w = 4186.8 \cdot (4.00 \pm 0.16) \frac{\text{J}}{\text{K}} = (24.9 \pm 0.0) \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{K}} \quad (24)$$

soll die Güteziffer der Wärmepumpe bestimmt werden. Die theoretische Güteziffer lässt sich mit Hilfe der Gleichung 8 berechnen und ist in Tabelle 3 aufgeführt. Die praktisch bestimmte Güteziffer errechnet sich nach Gleichung 8 aus der Wärmekapazität der Reservoirs und der Wärmekapazität der Leitungen sowie mit den in Tabelle 1 bestimmten Differentialquotienten, sowie mit der nach Formel 15 und 16 gemittelten Leistung. Gründe für die Abweichung zwischen der theoretischen Güteziffer und der

t / s	ν_{theo}	ν_{exp}
60	700 ± 100	3.04 ± 0.05
420	22.4 ± 0.1	2.72 ± 0.05
1020	3.2 ± 0.6	2.17 ± 0.05
1500	2.8 ± 0.5	1.73 ± 0.06

Tabelle 3: theoretisch und praktisch bestimmte Güteziffer

experimentell ermittelten Güteziffer werden in der Diskussion aufgeführt.

3.5 Dampfdruckkurve

Die Verdampfungswärme L wird mit Hilfe einer Verdampfungskurve ermittelt. In Tabelle 4 sind die Dürcke mit den entsprechenden Temperaturen aufgelistet. Dafür wird im

p / bar	T / Kelvin
0	-60
1	-30
2	-12
3	-1
4	8
5	15
6	23
7	28
8	33
9	39
10	42

Tabelle 4: Wertepaare zur Dampfdruckkurve von $\text{Cl}_2\text{F}_2\text{C}$

Diagramm 4 $1/T$ gegen $\log(p/p_0)$ aufgetragen und die Steigung der Geraden in die Formel

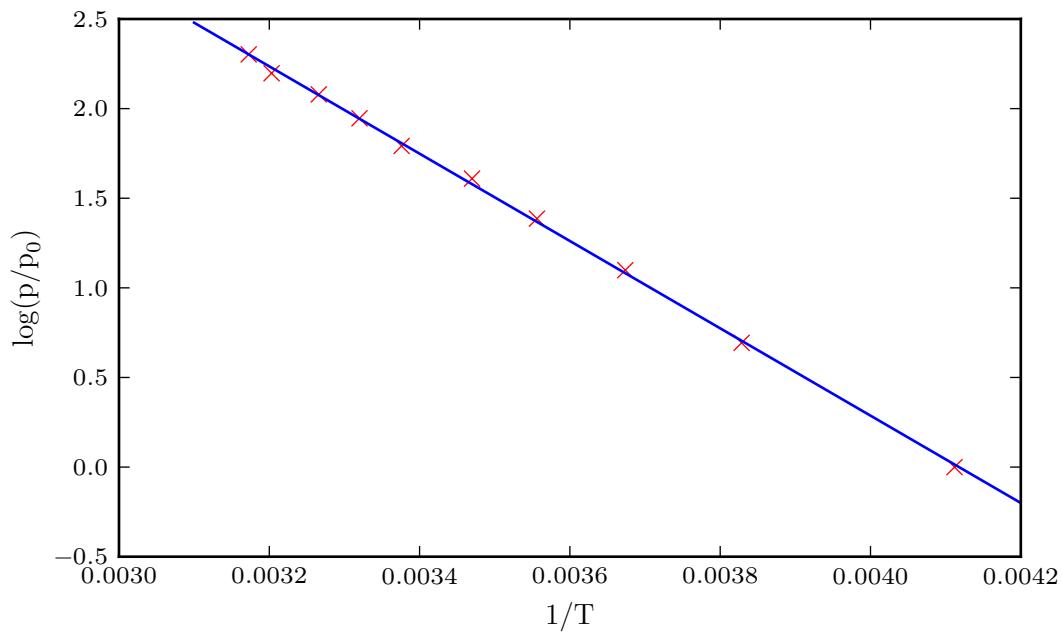


Abbildung 4: Dampfdruckkurve

25 eingesetzt.

$$L = \log\left(\frac{p}{p_o}\right) \cdot T \cdot \frac{1}{R} \quad (25)$$

Die Steigung der Ausgleichsgeraden wird mittels einer linearen Regression berechnet und beträgt

$$m = -2430 \pm 20 \text{ s}.$$

Daraus ergibt sich eine Verdampfungswärme von

$$L = (20\,200 \pm 170) \frac{\text{J}}{\text{K}}. \quad (26)$$

3.6 Massendurchsatz

Die Verdampfungswärme wird nun in Formel 11 eingesetzt und damit der Massendurchsatz ermittelt. Die Massendurchsätze der verschiedenen Zeiten sind in Tabelle 5 aufgetragen. Sie werden mit der Molaren Masse von Dichlordifluormethan multipliziert um sie für die weiteren Aufgabenteile bereits umzurechnen.

$$M_{\text{Dichlordifluormethan}} = 120.91 \frac{\text{g}}{\text{mol}} [1] \quad (27)$$

Für die weiteren Rechnungen wird der Massendurchsatz durch Multiplikation mit der Molaren Masse in die SI-Einheit umgerechnet.

T / s	$\frac{dm}{dt} / (\text{mol/s})$	$\frac{dm}{dt} / (\text{g/s})$
60	0.0140 ± 0.0002	1.69 ± 0.02
420	0.0119 ± 0.0002	1.44 ± 0.02
1020	0.0082 ± 0.0003	1.00 ± 0.04
1500	0.0053 ± 0.0003	0.64 ± 0.04

Tabelle 5: Massendurchsatz dm/dt

3.7 Mechanische Kompressorleistung

Aus der idealen Gasgleichung lässt sich die Dichte in den Rohren berechnen. Dafür muss jedoch die Dichte von Dichlordifluormethan bei 1 Bar Druck und 273 Kelvin bekannt sein.

$$\rho_0 = 5.51 \frac{\text{g}}{\text{l}} [2] . \quad (28)$$

Zusätzlich wird gefordert, dass

$$nR = \textit{konstant} \quad (29)$$

ist und das die Dichte homogen verteilt ist. Daraus lässt sich die ideale Gasgleichung umstellen und man erhält

$$\begin{aligned} \frac{pV}{T} &= nR = \textit{konstant} \\ \frac{p_0 V_0}{T_0} &= \frac{p_2 V_2}{T_2} \Leftrightarrow \frac{p_0 m}{\rho_0 T_0} = \frac{p_2 m}{T_2 \rho_2} \\ \frac{p_0}{\rho_0 T_0} &= \frac{p_2}{T_2 \rho} \Leftrightarrow \rho = \frac{\rho_0 T_0 p_2}{T_2 p_0} \end{aligned}$$

einen Ausdruck für die Dichte in Abhängigkeit der Temperaturen und Drücke. Dies wird in Formel 14 eingesetzt und die Ergebnisse für die verschiedenen Zeitpunkte in Tabelle 6 eingetragen.

t / s	$\rho / \frac{10^{-3} \text{kg}}{\text{l}}$	N / W
60	21.7 ± 0.5	10.6 ± 0.7
420	23.7 ± 0.5	12.8 ± 0.5
1020	20.6 ± 0.5	16.4 ± 0.6
1500	19.2 ± 0.5	13.0 ± 0.9

Tabelle 6: Leistung des Kompressors

3.8 Ermittlung der Messunsicherheiten

Der Fehler der Ausgleichsgraden wird mittels einer Fitfunktion berechnet.

Der Fehler des Differentialquotienten ergibt sich aus

$$\Delta \frac{dT_i}{dt} = \sqrt{4A^2 \cdot (\Delta T_i)^2} \quad (30)$$

Der Fehler für die Theoretische Gütezahl berechnet sich aus

$$\Delta \nu_{\text{theo}} = \sqrt{\left(\frac{T_2}{(T_1 - T_2)^2}\right)^2 \cdot (\Delta T_1)^2 + \left(\frac{T_1}{(T_1 - T_2)^2}\right)^2 \cdot (\Delta T_2)^2} \quad (31)$$

$$\Delta v_{\text{real}} = \sqrt{\begin{aligned} &(\partial_{m1} \cdot v_{\text{real}})^2 \cdot (\Delta m_1)^2 + (\partial_{mc} \cdot v_{\text{real}})^2 \cdot (\Delta m_k c_k)^2 \\ &+ \left(\partial_{\frac{\Delta T_1}{\Delta t}} \cdot v_{\text{real}}\right)^2 \cdot \left(\Delta \frac{\Delta T_1}{\Delta t}\right)^2 + (\partial_N \cdot v_{\text{real}})^2 \cdot (\Delta N)^2 \end{aligned}} \quad (32)$$

Der Fehler der Verdampfungswärme wurde von Python mittels Linearer Regression ermittelt.

$$\Delta \frac{dm}{dt} = \sqrt{\begin{aligned} &(\partial_{m2} \cdot \frac{dm}{dt})^2 \cdot (\Delta m_2)^2 + (\partial_{mc} \cdot \frac{dm}{dt})^2 \cdot (\Delta m_k c_k)^2 \\ &+ \left(\partial_{\frac{\Delta T_2}{\Delta t}} \cdot \frac{dm}{dt}\right)^2 \cdot \left(\Delta \frac{\Delta T_2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\partial_L \cdot \frac{dm}{dt}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2 \end{aligned}} \quad (33)$$

$$\Delta \rho = \sqrt{\left(\frac{\rho_0 T_0}{T_2 P_0}\right)^2 \cdot (\Delta P_2)^2 + \left(\frac{\rho_0 T_0 P_2}{(T_2)^2 P_0}\right)^2 \cdot (\Delta T_2)^2} \quad (34)$$

$$\Delta N_{\text{mech}} = \sqrt{\begin{aligned} &(\partial_{pb} \cdot N_{\text{mech}})^2 \cdot (\Delta p_b)^2 + (\partial_{pa} \cdot N_{\text{mech}})^2 \cdot (\Delta p_a)^2 \\ &+ (\partial_{\rho} N_{\text{mech}})^2 \cdot (\Delta \rho)^2 + \left(\partial_{\frac{dm}{dt}} \cdot N_{\text{mech}}\right)^2 \cdot \left(\Delta \frac{dm}{dt}\right)^2 \end{aligned}} \quad (35)$$

4 Diskussion

Da alle Messgrößen fehlerbehaftet sind kommt es zur Fehlerfortpflanzung und daraus resultiert, dass auch die davon abgeleiteten Größen fehlerbehaftet sind. Zusätzlich ist der Versuchsaufbau nicht ideal isoliert und somit kommt es zum Wärmeaustausch mit der Umgebung. Desweiteren wird die Reibung des Gases an der Leitungswand als auch durch die Propeller erzeugte vernachlässigt. Im Fehler der Dichte des Wassers wird zwar berücksichtigt, dass das Wasser mit der Änderung der Temperatur seine Dichte ändert, jedoch ändert sich der Mittelwert des Wasserdichte nicht mit. Die Abdichtung der Reservoirs sind nicht ideal, da sie nicht optimal an dem Versuchsaufbau anschließen. Somit kann Wasser außerhalb des Kreislaufes verdunsten und Wärme mit der Umgebung ausgetauscht werden.

Literatur

- [1] GESTIS-Stoffdatenbank des BGIA. *Eintrag zu Dichlordifluormethan*. 2015.
- [2] TU Dortmund. *Versuchsanleitung 206 Die Wärmepumpe*. 2015.