

Versuch 102

Drehschwingungen

Maximilian Sackel
Maximilian.sackel@gmx.de

Philip Schäfers
phil.schaefers@gmail.com

Durchführung: 26.01.16

Abgabe: 03.02.16

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlage	3
1.1	Ziel	3
1.2	Normal-, Schubspannung und Hooksches Gesetz	3
1.3	Elastische Konstanten isotroper Stoffe	3
1.4	Bestimmung des Torsionsmoduls G	4
1.5	Magnetisches Moment eines Permanentmagnetens	4
1.6	Fehlerrechnung	5
1.6.1	Mittelwert	5
1.6.2	Fehlerfortpflanzung	6
1.6.3	Lineare Regression	6
2	Durchführung und Aufbau	6
2.1	Daten der Messapparatur	6
2.2	Schwingungsdauer des Torsionsmodul ohne magnetisches Moment	7
2.3	Messung des Erdmagnetfeldes	7
2.4	Messung des Erdmagnetfeldes	7
3	Auswertung	8
3.1	Geometrische Daten der Messapparatur	8
3.2	Bestimmung des Schubmoduls G und der anderen elastischen Konstanten	9
3.3	Bestimmung des magnetischen Momentes m	10
3.4	Bestimmung der Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes	11
4	Diskussion	12
4.1	Elastische Konstanten	12
4.2	Erdmagnetfeld	12
	Literatur	13

1 Theoretische Grundlage

1.1 Ziel

Ziel des Versuches ist es den elastischen Modul eines Metalls mittels einer Drehschwingung zu bestimmen, als auch das magnetische Moment eines Permanentmagneten.

1.2 Normal-, Schubspannung und Hooksches Gesetz

Kräfte die an die Oberfläche eines elastischen Körper angreifen, verformen diesen. Aufgrund dessen wird die Größe Spannung definiert, welche ein Verhältniss von der Kraft zu einem Flächenelement herstellt.

$$\sigma = \frac{Kraft}{Fläche} = \frac{N}{m^2} \quad (1)$$

Sie lassen sich in zwei Kategorien aufteilen. Als Normalspannung σ_N werden die Kräfte bezeichnet welche senkrecht zur Oberfläche stehen. Die Kräfte welche parallel zur Oberfläche stehen heißen Schubspannung σ_S . Desweiteren gibt es noch Volumenkräfte. Bei solchen greift die Kraft an jedem Volumenelement an, zum Beispiel die Schwerkraft.

Zwischen hinreichend kleinen Spannungen und Deformationen besteht ein proportionaler Zusammenhang welcher als Hooksches Gesetz bezeichnet wird.

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad \text{und} \quad P = Q \frac{\Delta V}{V} \quad (2)$$

Um alle Spannungen in einem Kristall vollständig zu beschreiben werden jeweils sechs Komponenten benötigt, wobei drei für die Gestalts- und drei für die Volumenelastizität zuständig sind. Bei einem einfachen Kristall mit niedriger Symmetrie entsteht deswegen eine 6x6-Matrix mit 36 Einträgen. Bei kubischen Kristallen lassen sich aufgrund der Symmetrie der Matrix und des Körpers die Einträge auf 3 verringern. Handelt es sich zusätzlich um einen isotropen Körper, so lässt sich der Körper vollständig durch 2 Konstanten beschreiben.

1.3 Elastische Konstanten isotroper Stoffe

Zur Berechnung der elastischen Konstanten wird einerseits der Torsionsmodul G , als auch der Kompressionsmodul Q benötigt bzw. der Elastizitätsmodul σ . Die Poissonsche Querkontraktionszahl μ verknüpft die Längenänderung mit der Normalspannung. Die Abbildung 1 soll dies anhand eines einseitig eingespannten Stabes verdeutlichen.

$$\mu := -\frac{\Delta B}{B} \cdot \frac{L}{\Delta L} = \frac{E}{2G} - 1 \quad (3)$$

Das Kompressionsmodul Q berechnet sich aus dem Elastizitätsmodul so wie der Querkontraktionszahl.

$$Q = \frac{E}{-6\mu + 3} \quad (4)$$

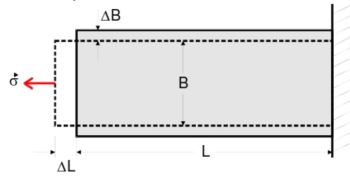


Abbildung 1: Längenänderung durch Normalspannung [1].

1.4 Bestimmung des Torsionsmoduls G

Um die elastische Nachwirkung vernachlässigen zu können, wird zur Bestimmung des Torsionsmoduls eine dynamische Methode gewählt. Als elastische Nachwirkung wird die Zeit, die benötigt wird bis gewisse Materialien nach einer Belastung wieder in ihren Ausgangszustand zurückgekehrt sind bezeichnet. Für die Dynamische Methode wird ein zylinderförmiger Draht an einem Ende eingespannt und auf der anderen Seite wirkt über ein Kräftepaar ein Drehmoment auf diesen. Durch die Scherung des Drahtes um den Winkel α kommt es zu einem Drehmoment. Dieses infinitesimale Drehmomente wird über den Radius des Zylinders integriert.

$$M = \frac{\pi G R^4 \varphi}{2L} =: D\varphi \quad (5)$$

In Analogie zur Federkonstante wird D als Richtgröße bezeichnet. Durch eine kleine Auslenkung aus der Ruhelage im Rahmen der Kleinwinkelnäherung lässt sich das Schwingungsfähige System durch die Differentialgleichung

$$D\varphi + \theta\varphi = 0 \quad (6)$$

beschreiben, wobei θ das Trägheitsmoment des Systems ist. Der Differentialgleichung wird eine Periodendauer von

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\theta}{D}} \quad (7)$$

entnommen und das Trägheitsmoment der Kugel aus der Formel

$$\theta_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5}m_k R_k^2 \quad (8)$$

berechnet. Somit ergibt sich aus Formel 5, 7 und 8 ein Torsionsmodul G von

$$G = \frac{16\pi m_k R_k^2 L}{5T^2 R^4} . \quad (9)$$

1.5 Magnetisches Moment eines Permanentmagnetens

Das magnetische Moment \vec{m} eines Permanentmagnetens ist definiert als

$$\vec{m} := p\vec{a} \quad (10)$$

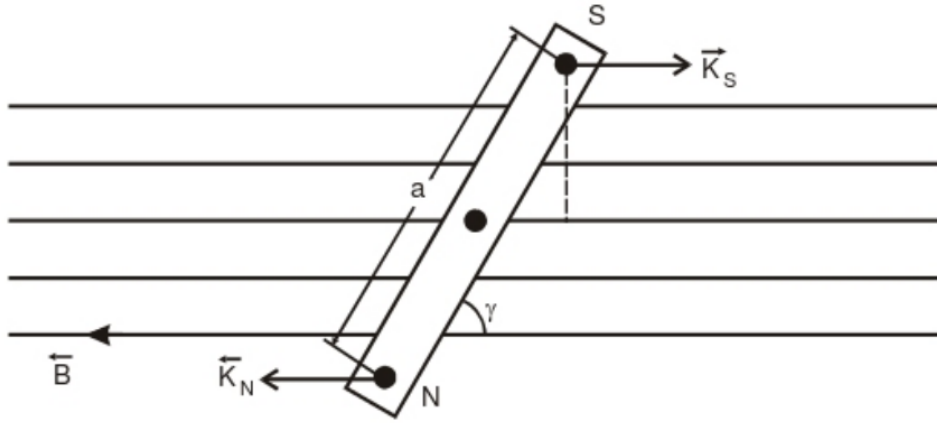


Abbildung 2: Magnetisches Moment eines Permanentmagneten im B-Feld [1].

wobei p die Polstärke ist und \vec{a} die Abstände der beiden Pole sind. Auf den Magneten wirkt in einem B-Feld wie in Abbildung 2 zu sehen, dass magnetische Moment M_{Mag} zweier entgegengesetzter Kräfte. Der Betrag des magnetischen Momentes ist

$$|M_{\text{Mag}}| = mB \sin(\gamma) \quad (11)$$

Daraus ergibt sich die nicht lineare Differentialgleichung

$$mB \sin(\varphi) + D\varphi + \theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (12)$$

welche sich jedoch durch die Kleinwinkelnäherung $\sin \varphi \sim \varphi$ in eine homogene Umschreiben lässt. Daraus lässt sich die Schwingungsdauer

$$T_{\text{Mag}} = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{mB + D}} \quad (13)$$

entnehmen.

1.6 Fehlerrechnung

1.6.1 Mittelwert

Der Mittelwert einer Messreihe x_1, \dots, x_n lässt sich durch die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad (14)$$

berechnen. Die Standardabweichung des Mittelwertes beträgt

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \quad (15)$$

1.6.2 Fehlerfortpflanzung

Die Fehlerfortpflanzung übernimmt Python 3.4.3 mit der Funktion "ufloat" aus "Python-Uncertainties".

1.6.3 Lineare Regression

Die Lineare Regression und sämtliche andere Rechnungen wurden ebenfalls mit Python 3.4.3 durchgeführt.

2 Durchführung und Aufbau

Anhand der Messaperatur aus Abbildung 3 soll der Torsionsmodul bestimmt werden.

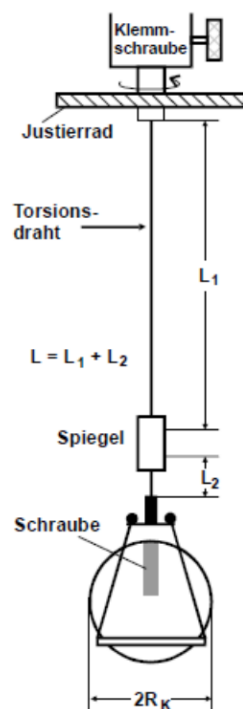


Abbildung 3: Apparatur zur Bestimmung des Torsionsmodul [1].

2.1 Daten der Messaperatur

Dafür wird zunächst die Länge L_1 sowie L_2 je drei mal und der Durchmesser D an verschiedenen Stellen insgesamt fünf mal vermessen. Die weiteren Daten mit den entsprechenden Messunsicherheiten werden dem Versuchsaufbau entnommen.

2.2 Schwingungsdauer des Torsionsmodul ohne magnetisches Moment

Es ist darauf zu achten, dass die Dipolachse des Magneten senkrecht zum Erdmagnetfeld steht. Anschließend wird der Draht am Justierrad um kleine Winkel ausgelenkt, so dass der Lichtstrahl welcher von der Lichtquelle den Spiegel trifft aufgrund der Torsion um den Lichtdetektor pendelt (siehe Abbildung 4). Um unerwünschte Pendelbewegung zu verhindern wird mittels eines Dämpfers versucht die Pendelbewegungen zu minimieren. Die Taktung des Lichtdetektors soll so geschaltet werden, dass bei dem ersten Durchlauf jeweils das Zählwerk startet, beim dritten Stopt und beim vierten mal das Zählwerk zurückgestellt wird. Es werden 10 Perioden gemessen und die Werte notiert.

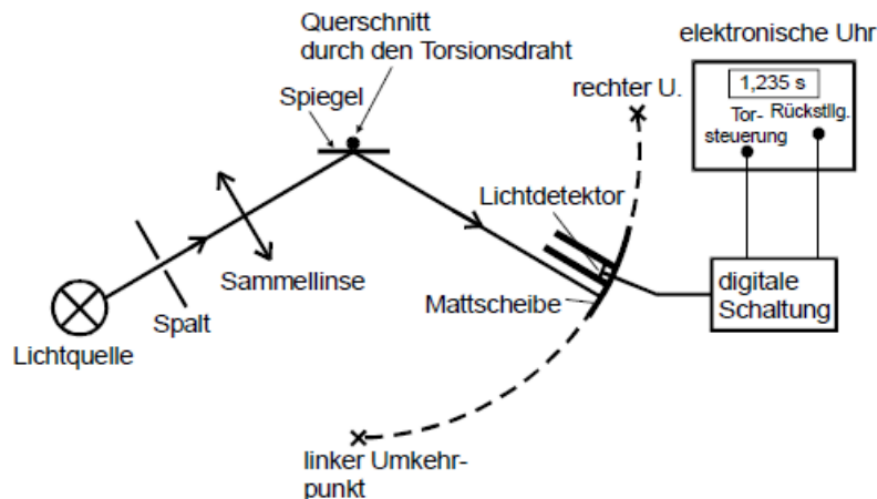


Abbildung 4: Aufbau der Messapparatur [1].

2.3 Messung des Erdmagnetfeldes

Die Dipolachse des Magneten wird entsprechend der Feldlinien des Erdmagnetfeldes parallel gelegt und die Schwingungsdauer erneut 10 mal bestimmt. Anhand dessen lässt sich die Stärke des Erdmagnetfeldes ableiten.

2.4 Messung des Erdmagnetfeldes

Um das magnetische Moment des Stabmagneten zu messen wird der Aufbau aus Abbildung 5 aufgebaut. Es werden die Schwingungsdauern von fünf Perioden entnommen bei fünf verschiedenen Feldstärken der Helmholtzspulen. Dabei ist darauf zu achten, dass die Dipolachse möglichst parallel zu dem Magnetfeld der Helmholtzspulen ausgerichtet ist.

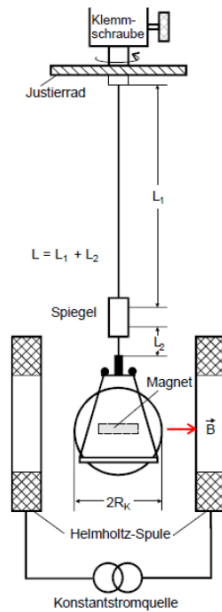


Abbildung 5: Messapparatur zur Vermessung des Dipolmoments [1].

3 Auswertung

3.1 Geometrische Daten der Messapparatur

Im weiteren werden der Kugelradius R_K , die Kugelmasse m_K , das Trägheitsmoment der Kugelhalterung θ_H , die Windungszahl der Helmholtzspule N und der Radius der Helmholtzspule R_H aufgelistet.

$$R_K = (0.025\,38 \pm 0.000\,01) \text{ m}$$

$$m_K = (0.5122 \pm 0.0002) \text{ kg}$$

$$\theta_H = 2.25 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2$$

$$N = 390$$

$$R_H = 0.078 \text{ m}$$

Die Abmessungen des Drahtes sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

	L / m	2R / 10 ⁻³ m
	0.598	0.210
	0.597	0.205
	0.600	0.210
		0.200
		0.205
Mittelwert(nach Gl. (14))	0.5983	0.2060
Standardabweichung(nach Gl. (15))	0.0008	0.0004

Tabelle 1: Die Abmessung des Drahtes.

Das Gesamtträgheitsmoment ergibt sich aus der Summation von dem Trägheitsmoment der Kugel(siehe Gl. (8)) und der Halterung.

$$\theta_k = (1.3197 \pm 0.0012) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

$$\theta_{\text{ges}} = \theta_K + \theta_H = (1.3422 \pm 0.0012) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

3.2 Bestimmung des Schubmoduls G und der anderen elastischen Konstanten

Mit den Tabellen 1 und 2 und der Gleichung (9) folgt der Schubmodul G zu

$$G = (4.99 \pm 0.04) \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} .$$

	T / s
1.	18.798
2.	18.800
3.	18.800
4.	18.751
5.	18.794
6.	18.799
7.	18.798
8.	18.795
9.	18.797
10.	18.800
Mittelwert(nach Gl. (14))	18.793
Standardabweichung(nach Gl. (15))	0.014

Tabelle 2: Periodendauer der Schwingung ohne Magnet.

Die Werte für den Elastizitätsmodul und den Schubmodul wurden vorgegeben:

$$E = 21 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$G = 8.2 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Im weiteren Verlauf wird das gegebene G verwendet. Mit Hilfe von E und G werden nun die poissonsche Querkontraktionszahl μ und der Kompressionsmodul Q bestimmt. Mit den Gleichungen (3) und (4) ergeben sich:

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1 = 0.28 \quad (16)$$

und

$$Q = \frac{E}{-6\mu + 3} = 1.59 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} . \quad (17)$$

3.3 Bestimmung des magnetischen Momentes m

Zur Bestimmung des magnetischen Momentes, wird die Periodendauer T_m in Abhängigkeit vom Spulenstrom I gemessen, sämtliche Messwerte sind in Tabelle 3 angegeben.

	I = 0.2A	I = 0.4A	I = 0.6A	I = 0.8A	I = 1.0A
T_m / s	17.184	16.027	15.081	14.152	13.197
T_m / s	17.166	15.992	15.048	14.104	13.251
T_m / s	17.378	16.005	15.052	14.142	13.163
T_m / s	17.333	16.006	15.041	14.109	13.244
T_m / s	17.336	15.992	15.026	14.104	13.174
Mittelwert(nach Gl. (14))	17.280	16.004	15.050	14.122	13.210
Standardabweichung(nach Gl. (15))	0.090	0.013	0.018	0.021	0.040

Tabelle 3: Messwerte für die Schwingungsdauern in Abhängigkeit vom Spulenstrom.

Zunächst wird über den Spulenstrom das Magnetfeld im Zentrum der Spule mit Hilfe von Gleichung (18) berechnet.

$$B = \frac{8\mu_0 N I}{\sqrt{125} R} . \quad (18)$$

Mit $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$. Nun kann Gleichung (13) zu

$$mB + D = \frac{4\pi^2 \theta}{T_m^2} \quad (19)$$

umgestellt werden. Das magnetische Moment wird nun mit Hilfe einer linearen Regression bestimmt. Die Steigung der Geraden entspricht dann dem magnetischen Moment. In Tabelle 4 sind B und $\frac{4\pi^2 \theta}{T_m^2}$ aufgelistet.

B / mT	$\frac{4\pi^2\theta}{T_m^2} / 10^{-4} \text{ Nm}$
0.68	1.77
1.36	2.07
2.04	2.34
2.72	2.66
3.40	3.04

Tabelle 4

In Abbildung 6 ist B gegen $\frac{4\pi^2\theta}{T_m^2}$ aufgetragen und es wurde zusätzlich eine Ausgleichsgerade eingezeichnet.

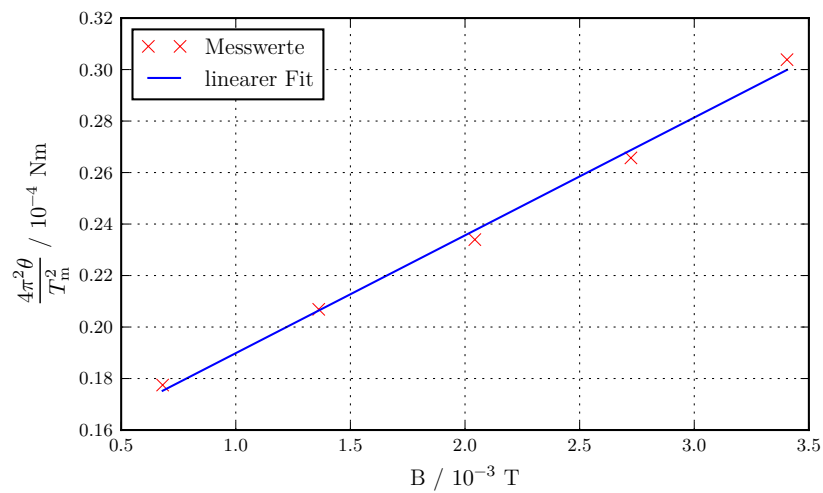


Abbildung 6: Messpunkte und Ausgleichsgerade zur Messung des magnetischen Moments m .

Damit folgt das magnetische Moment m zu

$$m = (4.58 \pm 0.18) \cdot 10^{-3} \frac{\text{Nm}}{\text{T}} \quad (20)$$

3.4 Bestimmung der Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes

Aufgrund der Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes, wirkt auf den Magneten in der Kugel ein zusätzliches Drehmoment. Dazu muss der Dipolmagnet in der Kugel in Richtung des Erdmagnetfeldes zeigen. Je nach Orientierung geht davon eine Vergrößerung oder Verkleinerung der Periodendauer aus. Für die Periodendauer im Erdmagnetfeld siehe Tabelle 5.

	T_E / s
1.	18.638
2.	18.607
3.	18.582
4.	18.592
5.	18.625
6.	18.629
7.	18.613
8.	18.588
9.	18.599
10.	18.620
Mittelwert(nach Gl. (14))	18.609
Standardabweichung(nach Gl. (15))	0.018

Tabelle 5: Periodendauer der Schwingung mit Magnet.

Die Horizontalkomponente lässt sich aus Gleichung (19) nach B umgestellt bestimmen.

$$B_h = \frac{4\pi^2 I_{\text{ges}}}{m} \left(\frac{1}{T_E^2} - \frac{1}{T^2} \right) = (65.0 \pm 8.0) \mu\text{T} \quad (21)$$

4 Diskussion

4.1 Elastische Konstanten

Aus dem gegebenen Wert für den Elastizitätsmodul $E = 21 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ lässt sich vermuten, dass der Draht aus Stahl besteht. Der Unterschied zwischen dem Literaturwert für den Schubmodul und dem praktisch ermittelten Schubmodul beträgt:

$$G_{\text{Literatur}} = 8.2 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$G_{\text{exp}} = (4.99 \pm 0.04) \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Abweichung von: 40.9 %

Da der Unterschied sehr groß ist, ist vermutlich der Magnet in der Kugel nicht richtig ausgerichtet gewesen, wodurch sich die Periodendauer verändert. Außerdem kann es sein, dass die Helmholtzspulen unter dem Effekt der Hysterese litten, da sie vorher bereits verwendet wurden.

4.2 Erdmagnetfeld

Der Literaturwert der Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes ist $B_{H,\text{Literatur}} = 19.304 \mu\text{T}$ [2]. Der in diesem Versuch ermittelte Wert

$B_h = (65.0 \pm 8.0) \mu\text{T}$ weicht sehr stark von dem Literaturwert ab, dies kann unter anderem an der falschen Ausrichtung des Dipolmagneten in der Kugel liegen.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch 102: Drehschwingungen*. <http://129.217.224.2/HOME PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V102.pdf>, 2016.
- [2] *Horizontale Erdmagnetfeldkomponente für Dortmund*. <http://www-app1.gfz-potsdam.de/cgi-bin/igrf.pl>, Feb. 2016.