206

Die Wärmepumpe

Maximilian Sackel Philip Schäfers Maximilian.sackel@gmx.de phil.schaefers@gmail.com

Durchführung: 17.11.2015 Abgabe: 24.11.2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	The	oretische Grundlage	3
	1.1	Güteziffer	3
	1.2	Massendurchsatz	4
	1.3	Mechanische Kompressorleistung	4
	1.4	Allgemeiner Aufbau einer Wärmepumpe	5
	1.5	Fehlerrechnung	6
		1.5.1 Mittelwert	6
		1.5.2 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung	6
		1.5.3 Lineare Regression	6
2	Dur	chführung und Aufbau	7
3	Aus	wertung	8
	3.1	Messgrößen und Fehler	8
	3.2	Näherungsfunktion	8
	3.3		8
	3.4		10
	3.5	Dampfdruckkurve	11
	3.6	Massendurchsatz	11
	3.7	Mechanische Kompressorleistung	13
	3.8	Ermittlung der Messunsicherheiten	13
4	Disk	xussion 1	L4
Lit	eratı	ır 1	L 4

1 Theoretische Grundlage

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik sagt, dass Wärme von einem wärmeren zu einem kälteren Reservoir fließt. Mithilfe einer Wärmepumpe lässt sich dieser Prozess umkehren. Dazu wird weitere Energie benötigt, zum Beispiel mechanische Arbeit. Ziel des Versuches ist es, eine Aussage über die Qualität der Wärmepumpe zu treffen. Um dies zu realisieren, werden die Güteziffer und der Massendurchsatz untersucht.

1.1 Güteziffer

Der erste Hauptsatz der Wärmelehre verlangt, dass die vom Transportmedium an das wärmere Reservoir abgegebene Wärmemenge Q_1 gleich der Summe der aus dem kälteren Reservoir entnommenen Wärmemenge Q_2 und der aufgewendeten Arbeit A ist, also

$$Q_1 = Q_2 + A . (1)$$

Die Güteziffer ν ist im idealisierten Fall das Verhältnis zwischen der transportierten Wärmemenge Q_1 und der verrichteten mechanischen Arbeit A:

$$\nu_{\text{ideal}} = \frac{Q_1}{A} \ . \tag{2}$$

Aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik lässt sich eine Beziehung zwischen den Wärmemengen Q_1 und Q_2 sowie den Temperaturen T_1 und T_2 der Reservoire herstellen

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0 \ . \tag{3}$$

Allerdings ist die Gültigkeit der Formel 3 an die Forderung, dass die Wärmeübertragung reversibel verläuft, geknüpft. Dies bedeutet, dass der Prozess jederzeit umgekehrt ablaufen kann, wodurch die investierte mechanische Arbeit zurück gewonnen werden kann. Für den realistischen, irreversiblen Fall gilt eine andere Beziehung

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} > 0 \ . \tag{4}$$

Mit den Gleichungen 1 und 3 folgt nun

$$Q_1 = A + \frac{T_2}{T_1} Q_1 \tag{5}$$

und für die Güteziffer einer idealen Wärmepumpe

$$\nu_{\text{ideal}} = \frac{Q_1}{A} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \ .$$
(6)

Die Güteziffer für eine reale Wärmepumpe folgt aus 1 und 4 zu

$$\nu_{\rm real} < \frac{T_1}{T_1 - T_2} \ .$$
(7)

Die reale Güteziffer wird im folgenden über

$$\nu_{\text{real}} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta t N} = (m_1 c_{\text{w}} + m_{\text{k}} c_{\text{k}}) \frac{\Delta T_1}{\Delta t N}$$
(8)

berechnet, wobei N definiert ist, als gemittelte Leistungsaufnahme des Kompressors.

1.2 Massendurchsatz

Der Massendurchsatz für die Wärmepumpe berechnet sich nach [1,S.5] über den Differentialquotienten:

$$\frac{dQ_2}{dt} = (m_2 c_{\rm w} + m_{\rm k} c_{\rm k}) \frac{\Delta T_2}{\Delta t N} \tag{9}$$

und

$$\frac{dQ_2}{dt} = L\frac{dm}{dt} \tag{10}$$

nach einsetzen von 9 in 10 folgt:

$$\frac{dm}{dt} = (m_2 c_{\rm w} + m_{\rm k} c_{\rm k}) \frac{\Delta T_2}{\Delta t L} \tag{11}$$

Wobei L die bekannte Verdampfungswärme ist.

1.3 Mechanische Kompressorleistung

Wenn ein Kompressor ein Gasvolumen $V_{\rm a}$ auf das Volumen $V_{\rm b}$ verringert, leistet dieser die Arbeit $A_{\rm m}$

$$A_{\rm m} = -\int_{V_{\rm a}}^{V_{\rm b}} p \, dV \ . \tag{12}$$

Mit der Annahme, dass die Kompression adiabatisch verläuft, gilt die Poissonsche Gleichung:

$$p_{\rm a}V_{\rm a}^{\kappa} = p_{\rm b}V_{\rm b}^{\kappa} = pV^{\kappa} \ . \tag{13}$$

Eine adiabatische Zustandsänderung ist ein Prozess, bei dem ein System von einem Zustand in einen anderen übergeht, ohne Wärme mit der Umgebung auszutauschen. Mit der Poissonschen Gleichung und

$$N_{\rm mech} = \frac{dA_{\rm m}}{dt} ,$$

folgt $N_{\rm mech}$ zu:

$$N_{\rm mech} = \frac{1}{\kappa - 1} \left(p_{\rm b} \sqrt[\kappa]{\frac{p_{\rm a}}{p_{\rm b}}} - p_{\rm a} \right) \frac{1}{\rho} \frac{dm}{dt} , \qquad (14)$$

mit der Dichte ρ und dem Druck p_a .

1.4 Allgemeiner Aufbau einer Wärmepumpe

Im folgenden wird die prinzipielle Funktionsweise einer Wärmepumpe beschrieben. Diese kann schematisch wie folgt dargestellt werden:

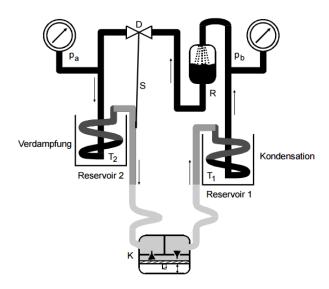


Abbildung 1: Allgemeiner Aufbau einer Wärmepumpe [2]

Für die Wärmepumpe wird ein reales Gas verwendet, welches Wärme beim Verdampfen aufnimmt und beim Kondensieren wieder abgibt. Die Wärme wird also in Form von Phasenumwandlungsenergie des Gases transportiert. Daraus folgt, dass das verwendete Gas eine hohe Kondensationswärme haben sollte. Der Kompressor K komprimiert das Gas adiabatisch und erzeugt einen Kreislauf des Mediums. Zwischen den Reservoiren ist ein Drosselventil D angebracht, welches das Gas bei einem bestimmten Druck passieren lässt. Dadurch entsteht ein Druckunterschied $p_{\rm b}-p_{\rm a}$. Das Gas mit dem Druck $p_{\rm a}$ und der Temperatur $p_{\rm b}$ ist gasförmig, während es auf der anderen Seite bei $p_{\rm b}$ mit der Temperatur $p_{\rm b}$

Wichtig ist, dass nur Gase in den Kompressor gelangen. Erreicht wird das mit diesen Apparaten:

- $\bullet\,$ mit dem Reiniger R, werden Gasreste und damit Blasen entfernt
- mit der Steuervorrichtung S, die das Drosselventil D reguliert

1.5 Fehlerrechnung

Sämtliche Fehlerrechnungen werden mit Hilfe von Python 3.4.3 durchgeführt.

1.5.1 Mittelwert

Der Mittelwert einer Messreihe $x_1,...,x_{\rm n}$ lässt sich durch die Formel

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k \tag{15}$$

berechnen. Die Standardabweichung des Mittelwertes beträgt

$$\Delta \overline{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^{N} (x_k - \overline{x})^2}$$
 (16)

1.5.2 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

Wenn $x_1, ..., x_n$ fehlerbehaftete Messgrößen im weiteren Verlauf benutzt werden, wird der neue Fehler Δf mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung angegeben.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 \cdot (\Delta x_k)^2}$$
 (17)

1.5.3 Lineare Regression

Die Steigung und y-Achsenabschnitt einer Ausgleichsgeraden werden gegebenfalls mittels Linearen Regression berechnet.

$$y = m \cdot x + b \tag{18}$$

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \tag{19}$$

$$b = \frac{\overline{x^2}\overline{y} - \overline{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \tag{20}$$

2 Durchführung und Aufbau

Die in diesem Versuch verwendete Wärmepumpe hat den in Abbildung 2 gezeigten Aufbau. Zu Beginn werden die Ruhedrücke und Temperaturen, sowie die spezifische Wärmekapazität des Kupfers aufgenommen. Nachdem die beiden Wasserreservoire befüllt wurden, werden die Rührmotoren angeschaltet, um die Wassertemperatur in den Reservoiren konstant zu halten. Sodann wird der Kompressor eingeschaltet und die Messreihe gestartet. Dazu werden die Messdaten der Mano- und Thermometer, sowie die Leistungsaufnahme des Kompressors im Minutentakt notiert. Die Messreihe wird beendet, wenn die Temperatur T_1 50°C erreicht hat. Für den Versuch wurde Dichlordifluormethan verwendet.

Wichtig ist, dass sämtliche Leitungen und die beiden Reservoire wärmeisoliert sind, um die Wärmeverluste zu minimieren.

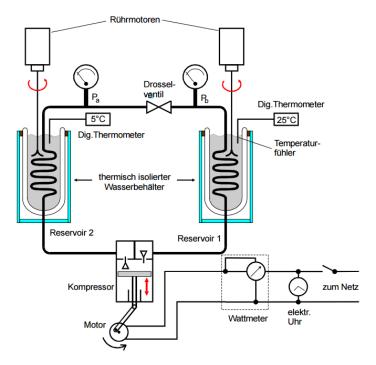


Abbildung 2: Verwendete Wärmepumpe [2]

3 Auswertung

3.1 Messgrößen und Fehler

Die Reservoire werden jeweils mit 4 Liter Wasser befüllt. Die Messdaten werden in Tabelle 1 aufgelistet. Die Wärmekapazität der Reservoire beträgt

$$C_{\text{Reservoire}} = 750 \pm 10 \frac{\text{J}}{\text{K}} \ . \tag{21}$$

Zu beachten ist, dass alle Messgrößen eine Messunsicherheit besitzen, einerseits einen Ablesefehler bei analogen Messinstrumenten als auch einen technischen.

$$\Delta p = \pm 10 \cdot 10^{3} \text{p}$$

$$\Delta C = \pm 10 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$\Delta V = \pm 1.6 \cdot 10^{-3} \text{l}$$

3.2 Näherungsfunktion

Mit einer nicht-linearen Ausgleichsgeraden soll der Temperaturverlauf mit Hilfe der Gleichung 22 approximiert werden.

$$T(t) = At^2 + Bt + C (22)$$

Die Ermittlung der Ausgleichsgeraden erfolgt mit Hilfe von Python 3.4.3. Mittels einer fit Funktion werden die Koeffizienten bestimmt. Für die Temperatur T_1 ergeben sich die Koeffizienten

$$\begin{split} A_1 = & \quad (-3.23 \pm 0.12) \cdot 10^{-6} \, \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}^2} \\ B_1 = & \quad (2.20 \pm 0.02) \cdot 10^{-2} \, \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}} \\ C_1 = & \quad (293.39 \pm 0.09) \cdot \, \mathrm{K} \end{split}$$

und für T_2

$$\begin{split} A_2 &= \quad (3.49 \pm 0.11) \cdot 10^{-6} \, \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}^2} \\ B_2 &= \quad (-1.67 \pm 0.02) \cdot 10^{-2} \, \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}} \\ C_2 &= \quad (294.97 \pm 0.09) \cdot \, \mathrm{K} \end{split}$$

3.3 Differential quotient

Der Differentialquotient berechnet sich aus einmaligem Ableiten der Gleichung 22 nach der Zeit.

$$\frac{dT_{\rm i}}{dt} = 2At + B \tag{23}$$

Aus der Funktion wird der Differentialquotient für T_1 und T_2 für vier verschiedene Zeiten berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 aufgeführt.

t / \min	T_1 / K	$p_{\rm b}$ / kPa	T_2 / K	$P_{\rm a}$ / kPa	Leistung / W
0	294.1	466	294.3	496	0
1	294.7	608	294.3	425	118
2	295.9	618	293.2	446	120
3	296.9	638	292.5	466	125
4	298.2	628	291.3	466	125
5	299.4	709	290.2	466	125
6	300.7	730	289.3	466	125
7	302.0	760	288.5	455	125
8	303.2	790	287.7	445	125
9	304.4	812	287.0	425	124
10	305.5	820	286.3	425	124
11	306.6	840	285.6	415	123
12	307.6	861	284.9	405	123
13	308.7	891	284.1	405	123
14	309.7	911	283.5	395	123
15	310.7	922	282.8	395	124
16	311.6	963	282.2	385	125
17	312.5	993	281.5	385	125
18	313.5	1003	281.0	375	125
19	314.3	1023	280.5	365	125
20	315.2	1044	280.0	365	125
21	316.0	1064	279.5	365	125
22	316.8	1094	279.0	365	125
23	317.5	1104	278.6	355	125
24	318.3	1115	278.3	355	125
25	319.0	1135	277.9	355	125
26	319.8	1155	277.5	345	125
27	320.5	1175	277.2	345	125
28	321.2	1196	276.9	345	125
29	321.8	1216	276.6	345	125
30	322.5	1226	276.3	345	125
31	323.3	1236	276.1	354	125

Tabelle 1: Dem Versuchsaufbau entommene Messgrößen

t / s	T_1 / K	$\frac{dT1}{dt} / 10^{-2} \text{ s/K}$	T_2 / K	$\frac{dT^2}{dt} / 10^{-2} \text{ s/K}$
60	294.7	2.16 ± 0.02	294.0	-1.62 ± 0.02
420	302.0	1.94 ± 0.03	288.5	-1.37 ± 0.02
1020	312.5	1.55 ± 0.03	281.5	-0.95 ± 0.03
1500	319.0	1.23 ± 0.04	277.9	-0.620 ± 0.004

Tabelle 2: Differential
quotient für ${\cal T}_1$ und ${\cal T}_2$

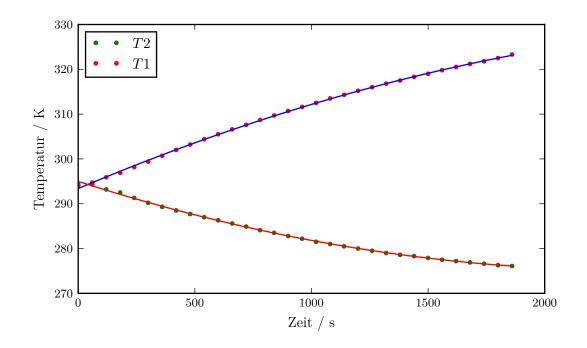


Abbildung 3: nicht-lineare Ausgleichsgrade

3.4 Güteziffer

Mit Hilfe des Differentialquotienten und der Wärmekapazität der mit Wasser befüllten Reservoire

$$c_{\rm w} m_{\rm w} = 4186.8 \cdot (4.00 \pm 0.16) \, \frac{\rm J}{\rm K} = (16.7 \pm 0.7) \cdot 10^3 \, \frac{\rm J}{\rm K} \eqno(24)$$

soll die Güteziffer der Wärmepumpe bestimmt werden. Die theoretische Güteziffer lässt sich mit Hilfe der Gleichung 8 berechnen und ist in Tabelle 3 aufgeführt. Die praktisch bestimmte Güteziffer errechnet sich nach Gleichung 8 aus der Wärmekapazität der Reservoire und der Wärmekapazität der Leitungen sowie mit den in Tabelle 1 bestimmten Differentialquotienten, sowie mit der nach Formel 15 und 16 gemittelten Leistung. Gründe für die Abweichung zwischen der theoretischen Güteziffer und der

t / s	$\nu_{ m theo}$	ν_{exp}	
60	700 ± 100	3.04 ± 0.05	
420	22.4 ± 0.1	2.72 ± 0.05	
1020	3.2 ± 0.6	2.17 ± 0.05	
1500	2.8 ± 0.5	1.73 ± 0.06	

Tabelle 3: theoretisch und praktisch bestimmte Güteziffer

experimentell ermittelten Güteziffer werden in der Diskussion aufgeführt.

3.5 Dampfdruckkurve

Die Verdampfungswärme L wird mit Hilfe einer Verdampfungskurve ermittelt. In Tabelle 4 sind die Dürcke mit den entsprechenden Temperaturen aufgelistet. Dafür wird im

p / bar	T / Kelvin
0	-60
1	-30
2	-12
3	-1
4	8
5	15
6	23
7	28
8	33
9	39
10	42

Tabelle 4: Wertepaare zur Dampfdruckkurve von Cl_2F_2C

Diagramm 4 1/T gegen $\log(p/p_0)$ aufgetragen und die Steigung der Graden in die Formel 25 eingesetzt.

$$L = log\left(\frac{p}{p_o}\right) \cdot T \cdot \frac{1}{R} \tag{25}$$

Die Steigung der Ausgleichsgeraden wird mittels einer linearen Regression berechnet und beträgt

$$m = -2430 \pm 20 \,\mathrm{s}$$
.

Daraus ergibt sich eine Verdampfungswärme von

$$L = (20200 \pm 170) \frac{J}{K} . {26}$$

3.6 Massendurchsatz

Die Verdampfungswärme wird nun in Formel 11 eingesetzt und damit der Massendurchsatz ermittelt. Die Massendurchsätze der verschiedenen Zeiten sind in Tabelle 5 aufgetragen. Sie werden mit der Molaren Masse von Dicholdifluormethan multipliziert um sie für die weiteren Aufgabenteile bereits umzurechen.

$$M_{\rm Dichlordifluor methan} = 120.91 \frac{g}{mol} [1]$$
 (27)

Für die weiteren Rechnungen wird der Massendurchsatz durch Multiplikation mit der Molaren Masse in die SI-Einheit umgerechnet.

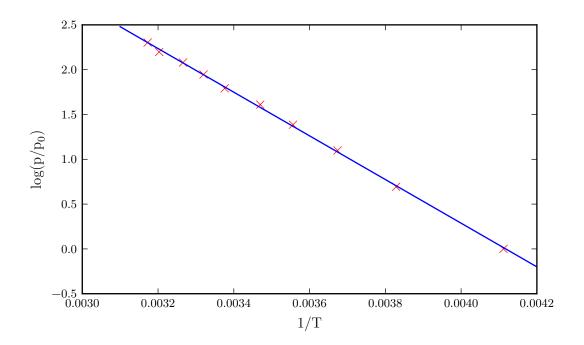


Abbildung 4: Dampfdruckkurve

T / s	$\frac{dm}{dt}$ / (mol/s)	$\frac{dm}{dt}$ / (g/s)
60	0.0140 ± 0.0002	1.69 ± 0.02
420	0.0119 ± 0.0002	1.44 ± 0.02
1020	0.0082 ± 0.0003	1.00 ± 0.04
1500	0.0053 ± 0.0003	0.64 ± 0.04

Tabelle 5: Massendurchsatz dm/dt

3.7 Mechanische Kompressorleistung

Aus der idealen Gasgleichung lässt sich die Dichte in den Rohren berechnen. Dafür muss jedoch die Dichte von Dichlordifluormethan bei 1 Bar Druck und 273 Kelvin bekannt sein.

$$\rho_0 = 5.51 \,\frac{g}{l} \,[2] \ . \tag{28}$$

Zusätzlich wird gefordert, dass

$$nR = konstant$$
 (29)

ist und das die Dichte homogen verteilt ist. Daraus lässt sich die ideale Gasgleichung umstellen und man erhält

$$\begin{split} \frac{pV}{T} &= nR = & konstant \\ \frac{p_0V_0}{T_0} &= \frac{p_2V_2}{T_2} \Leftrightarrow & \frac{p_0m}{\rho_0T_0} = \frac{p_2m}{T_2\rho_2} \\ \frac{p_0}{\rho_0T_0} &= \frac{p_2}{T_2\rho} \Leftrightarrow & \rho = \frac{\rho_oT_oP_2}{T_2P_0} \end{split}$$

einen Ausdruck für die Dichte in Abhängigkeit der Temperaturen und Drücke. Dies wird in Formel 14 eingesetzt und die Ergebnisse für die verschiedenen Zeitpunkte in Tabelle 6 eingetragen.

t/s	$\rho/\frac{10^{-3}kg}{l}$	N / W
60	21.7 ± 0.5	10.6 ± 0.7
420	23.7 ± 0.5	12.8 ± 0.5
1020	20.6 ± 0.5	16.4 ± 0.6
1500	19.2 ± 0.5	13.0 ± 0.9

Tabelle 6: Leistung des Kompressors

3.8 Ermittlung der Messunsicherheiten

Der Fehler der Ausgleichsgraden wird mittels einer Fitfunktion berechnet.

Der Fehler des Differentialquotienten ergibt sich aus

$$\Delta \frac{dT_{\rm i}}{dt} = \sqrt{4A^2 \cdot (\Delta T_{\rm i})^2} \tag{30}$$

Der Fehler für die Theoretische Güteziffer berechnet sich aus

$$\Delta\nu_{\text{theo}} = \sqrt{\left(\frac{T_2}{(T_1 - T_2)^2}\right)^2 \cdot (\Delta T_1)^2 + \left(\frac{T_1}{(T_1 - T_2)^2}\right)^2 \cdot (\Delta T_2)^2}$$
(31)

$$\Delta v_{\text{real}} = \sqrt{\frac{(\partial_{\text{m1}} \cdot v_{\text{real}})^2 \cdot (\Delta m_1)^2 + (\partial_{\text{mc}} \cdot v_{\text{real}})^2 \cdot (\Delta m_k c_k)^2}{+ \left(\partial_{\frac{\Delta T_1}{\Delta t}} \cdot v_{\text{real}}\right)^2 \cdot \left(\Delta \frac{\Delta T_1}{\Delta t}\right)^2 + (\partial_{\text{N}} \cdot v_{\text{real}})^2 \cdot (\Delta N)^2}}$$
(32)

Der Fehler der Verdampfungswärme wurde von Python mittels Linearer Regression ermittelt.

$$\Delta \frac{dm}{dt} = \sqrt{\frac{\left(\partial_{\text{m2}} \cdot \frac{dm}{dt}\right)^2 \cdot (\Delta m_2)^2 + \left(\partial_{\text{mc}} \cdot \frac{dm}{dt}\right)^2 \cdot (\Delta m_k c_k)^2}{+ \left(\partial_{\frac{\Delta T_2}{\Delta t}} \cdot \frac{dm}{dt}\right)^2 \cdot \left(\Delta \frac{\Delta T_2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\partial_{\text{L}} \cdot \frac{dm}{dt}\right)^2 \cdot (\Delta L)^2}}$$
(33)

$$\Delta \rho = \sqrt{\left(\frac{\rho_0 T_0}{T_2 P_0}\right)^2 \cdot (\Delta P_2)^2 + \left(\frac{\rho_0 T_0 P_2}{(T_2)^2 P_0}\right)^2 \cdot (\Delta T_2)^2}$$
 (34)

$$\Delta N_{\rm mech} = \sqrt{\frac{\left(\partial_{pb} \cdot N_{\rm mech}\right)^2 \cdot (\Delta p_{\rm b})^2 + \left(\partial_{pa} \cdot N_{\rm mech}\right)^2 \cdot (\Delta p_{\rm a})^2}{+\left(\partial_{\rho} N_{\rm mech}\right)^2 \cdot (\Delta \rho)^2 + \left(\partial_{\frac{dm}{dt}} \cdot N_{\rm mech}\right)^2 \cdot (\Delta \frac{dm}{dt})^2}}$$
(35)

4 Diskussion

Da alle Messgrößen fehlerbehaftet sind kommt es zur Fehlerfortpflanzung und daraus resultiert, dass auch die davon abgeleiteten Größen fehlerbehaftet sind. Zusätzlich ist der Versuchsaufbau nicht ideal isoliert und somit kommt es zum Wärmeaustausch mit der Umgebung. Desweiteren wird die Reibung des Gases an der Leitungswand als auch durch die Propeller erzeugte vernachlässigt. Die Abdichtung der Reservoire sind nicht ideal, da sie nicht optimal an dem Versuchsaufbau anschließen. Somit kann Wasser außerhalb des Kreislaufes verdunsten und Wärme mit der Umgebung ausgetauscht werden.

Literatur

- [1] GESTIS-Stoffdatenbank des BGIA. Eintrag zu Dichlordifluormethan. 2015.
- [2] TU Dortmund. Versuchsanleitung 206 Die Wärmepumpe. 2015.