

**VERSUCH NUMMER**

**TITEL**

Maximilian Sackel

Maximilian.sackel@udo.edu

Philip Schäfers

philip.schaefers@udo.edu

Durchführung: DATUM

Abgabe: DATUM

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1 Theoretische Grundlage</b>  | <b>3</b>  |
| 1.1 Zusammenhang zwischen Bahndrehimpuls und magnetischem Moment . . . . . | 3         |
| 1.2 Drehimpulsquintelung und Energieniveaauaufspaltung in einem Magnetfeld | 4         |
| 1.3 Messprinzip . . . . .  | 4         |
| 1.4 Magnetfeld einer Helmholtzspule . . . . .                              | 5         |
| 1.5 Fehlerrechnung . . . . .   | 6         |
| 1.5.1 Mittelwert . . . . .   | 6         |
| 1.5.2 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung . . . . .                              | 6         |
| 1.5.3 Lineare Regression . . . . .   | 6         |
| <b>2 Aufbau</b>  | <b>7</b>  |
| <b>3 Durchführung</b>  | <b>8</b>  |
| <b>4 Auswertung</b>  | <b>9</b>  |
| 4.1 Kalibrierung der x-Achse . . . . .                                     | 9         |
| 4.2 Bestimmung der Feldstärken . . . . .                                   | 9         |
| 4.3 Landefaktoren und Erdmagnetfeld . . . . .                              | 12        |
| <b>5 Diskussion</b>  | <b>13</b> |

# 1 Theoretische Grundlage

Es ist bekannt, dass Hüllenelektronen mit Bahndrehimpulsen ein magnetisches Moment besitzen. Allerdings zeigen Experimente, dass auch Elektronen mit einem verschwindendem Bahndrehimpuls ein magnetisches Moment besitzen. Dieses Phänomen wurde 1925 zum ersten mal entdeckt und wird Eigendrehimpuls oder Spin genannt. In diesem Versuch soll das magnetische Moment eines freien Elektrons und die Stärke des Erdmagnetfeldes bestimmt werden.

## 1.1 Zusammenhang zwischen Bahndrehimpuls und magnetischem Moment

Die Wellenfunktion  $\Psi$  in der Einelektronennäherung eines Atoms ist gegeben als

$$\Psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r) \Theta_{l,m} \frac{e^{im\psi}}{\sqrt{2\pi}} . \quad (1)$$

( $n$  = Hauptquantenzahl,  $l$  = Bahndrehimpulsquantenzahl,  $m$  = Orientierungsquantenzahl)

Die Stromdichte eines Teilchenstroms ist gegeben durch

$$S = \frac{\hbar}{2i m_0} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) . \quad (2)$$

( $\hbar$  = reduziertes Plancksches Wirkungsquantum,  $m_0$  = Ruhemasse eines Elektrons)

Da der Radialanteil  $R$  und der Breitenkreisanteil  $\Theta$  reelle Funktionen sind verschwinden  $S_R$  und  $S_\Theta$ . Die azimutale Teilchenstromdichte ergibt sich zu

$$\begin{aligned} S_\psi &= \frac{\hbar R^2 \Theta^2}{2i m_0} \left( \frac{e^{-im\psi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{e^{im\psi}}{\sqrt{2\pi}} - \frac{e^{im\psi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{e^{-im\psi}}{\sqrt{2\pi}} \right) \\ &= \frac{\hbar R^2 \Theta^2}{2\pi m_0} \frac{m}{r \sin \theta} \end{aligned} \quad (3)$$

Der durch das Flächenelement  $df$  fließende Strom  $dI_\psi$  beträgt

$$dI_\psi = -e_0 \cdot S_\psi df \quad (4)$$

( $e_0$  = Elementarladung)

Ein magnetisches Moment  $d\mu_z$  entspricht dem Produkt aus dem Kreisstrom  $dI_\psi$  und der umlaufenen Fläche  $F(\theta) = \pi r^2 \sin^2 \theta$ . Mit den Gleichungen (3) und (4) ergibt sich

$$d\mu_z = F(\theta) dI_\psi = -\frac{e_0 \hbar R^2 \Theta^2}{2 m_0} r^2 \sin \theta dr d\theta . \quad (5)$$

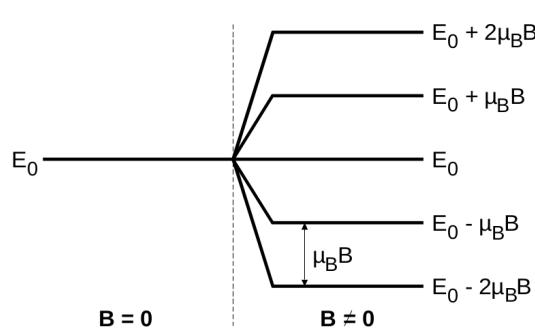
Durch Integration über die Elektronenhülle ergibt sich das gesamte magnetische Moment  $\mu_z$  zu

$$\mu_z = -\frac{e_0 \hbar}{2 m_0} m \quad (6)$$

Daraus folgt das Bohrsche Magneton  $\mu_B$  [V28]

$$\mu_B = -\frac{e_0 \hbar}{2 m_0} = (9.274\,015 \pm 0.000\,003) \cdot 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}} . \quad (7)$$

## 1.2 Drehimpulsquantelung und Energieniveaupspaltung in einem Magnetfeld



**Abb. 1:** Energieaufspaltung eines Hückelelektrons in einem Magnetfeld mit  $l = 2$ .  
[V28]

Diese Aufspaltung wird auch als Zeeman-Effekt bezeichnet. In Abbildung (1) ist die Energieaufspaltung für  $l = 2$  aufgezeigt.

Wird nun ein Elektronenstrahl durch ein in  $z$ -Richtung inhomogenes Magnetfeld geschickt, spaltet sich dieser in zwei Strahlen auf. Aus dieser Beobachtung folgt, dass Elektronen einen Spin mit zwei Ausrichtungsmöglichkeiten haben. Die Spinquantenzahl berechnet sich also mit

$$2s + 1 = 2 \\ \Leftrightarrow s = \frac{1}{2} .$$

Daraus folgt für das magnetische Moment (siehe Gl. (6))

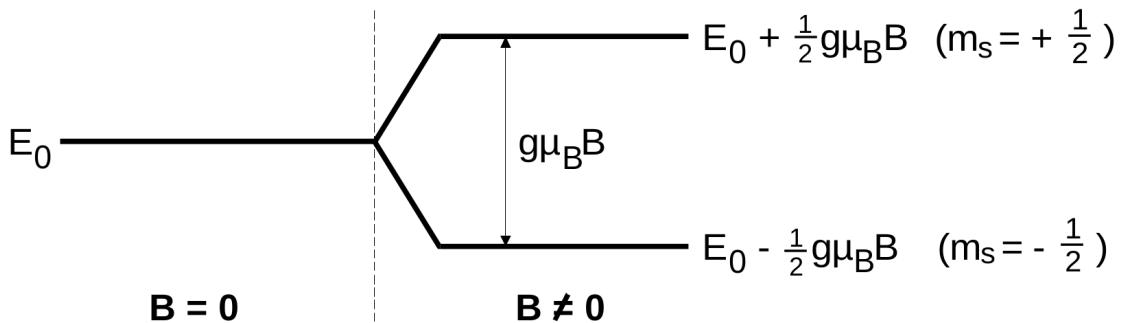
$$\mu_{s_z} = -g m_s \mu_B = -\frac{\mu_B}{2} g$$

( $g$  = Gyromagnetisches Verhältnis)

Ziel dieses Versuches ist es, dass Gyromagnetische Verhältnis zu bestimmen. Im Folgenden wird das, dafür verwendete, Messprinzip beschrieben.

## 1.3 Messprinzip

Das Gyromagnetische Verhältnis wird mit der Elektronenspin-Resonanz-Methode (kurz ESR) bestimmt. Dafür werden freie Elektronen in ein homogenes Magnetfeld gebracht, wodurch sich das Energieniveau in zwei Unterniveaus aufspaltet.



**Abb. 2:** Energieniveaus eines freien Elektrons in einem Magnetfeld. [V28]

Nach der Maxwell-Boltzmann-Statistik ist der obere Zustand im thermischen Gleichgewicht weniger besetzt als der untere. Das Besetzungsverhältnis ergibt sich zu

$$\frac{N(m_s = -1/2)}{N(m_s = 1/2)} = \exp\left(\frac{-g\mu_B B}{k_B T}\right) \quad (10)$$

Die Elektronen können durch Photonen mit der richtigen Energie von dem Unteren Energieniveau in das höhere gehoben werden. Dazu muss die Energie der Photonen genau der Energiedifferenz zwischen den beiden Energieniveaus des Elektrons entsprechen.

$$h\nu = g\mu_B B \quad (11)$$

Dieser Vorgang wird als Elektronenspin-Resonanz bezeichnet.

## 1.4 Magnetfeld einer Helmholtzspule

Das Magnetfeld einer Helmholtzspule kann über

$$B = \frac{8}{\sqrt{125}} \frac{\mu_0 n}{r} I \quad (12)$$

( $\mu_0$  = Induktionskonstante,  $n$  = Windungszahl,  $r$  = Spulenradius,  $I$  = Feldstrom)

berechnet werden.

## 1.5 Fehlerrechnung

Sämtliche Fehlerrechnungen werden mit Hilfe von Python 3.4.3 durchgeführt.

### 1.5.1 Mittelwert

Der Mittelwert einer Messreihe  $x_1, \dots, x_n$  lässt sich durch die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k \quad (13)$$

berechnen. Die Standardabweichung des Mittelwertes beträgt

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2} \quad (14)$$

### 1.5.2 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

Wenn  $x_1, \dots, x_n$  fehlerbehaftete Messgrößen im weiteren Verlauf benutzt werden, wird der neue Fehler  $\Delta f$  mit Hilfe der Gaußschen Fehlerfortpflanzung angegeben.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \cdot (\Delta x_k)^2} \quad (15)$$

### 1.5.3 Lineare Regression

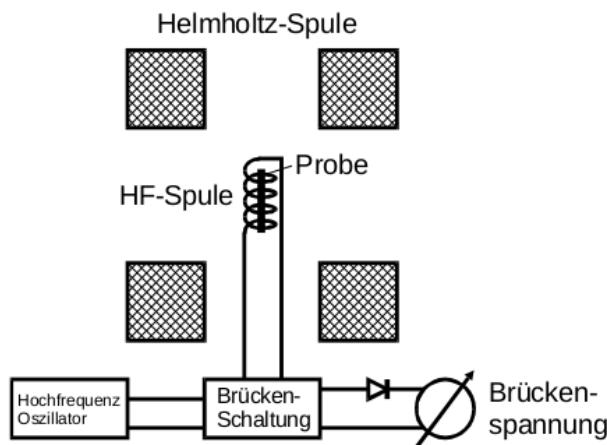
Die Steigung und y-Achsenabschnitt einer Ausgleichsgeraden werden gegebenfalls mittels Linearen Regression berechnet.

$$y = m \cdot x + b \quad (16)$$

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \quad (17)$$

$$b = \frac{\overline{x^2y} - \overline{x}\overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \quad (18)$$

## 2 Aufbau



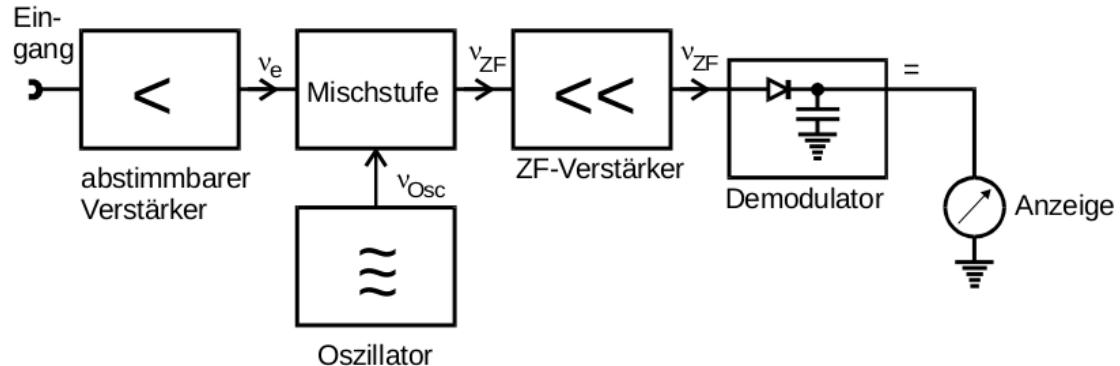
**Abb. 3:** Schematischer Aufbau einer Elektronenspinresonanz Apparatur. [V28]

Der schematische Aufbau einer ESR-Apparatur ist in Abbildung (3) zu sehen. In dem homogenen Magnetfeld der Helmholtzspulen befindet sich die zu untersuchende Probe. Um die Probe ist eine Hochfrequenz-Spule gewickelt, diese Spule wird über eine Brückenschaltung von einem Hochfrequenz-Generator gespeist (vgl. [V28]). Für diesen Aufbau übernimmt das hochfrequente Magnetfeld die Aufgabe der Photonen und induziert den Übergang. Dadurch ändert sich die Magnetisierung der Probe und in folge dessen auch der komplexe Widerstand der Hochfrequenz-Spule. An der vorher abgeglichenen Brückenschaltung tritt nun eine Brückenspannung auf, welche mit einem empfindlichen Messinstrument nachgewiesen werden kann. Die Brückenschaltung ist in Abbildung (5) zu sehen. Da die dabei auftretenden Spannungen sehr klein sind, müssen diese verstärkt werden. Für diesen Zweck wird ein Überlagerungsempfänger verwendet.

Der Aufbau ist in Abbildung (4) dargestellt. Zu Beginn verstärkt der Vorverstärker die Signalfrequenz  $\nu_e$  leicht. Dieses Signal wird in einer Mischstufe mit einem Signal  $\nu_{Osz}$  überlagert, wodurch Schwebungerscheinungen mit der Frequenz

$$\nu_{ZF} = \nu_e - \nu_{Osz} \quad (19)$$

auftreten. Der Selektiv-Verstärker verstärkt nun das Signal  $\nu_{Osz}$  stark und unterdrückt Störfrequenzen. Je weiter die Störfrequenzen von der Signalfrequenz entfernt sind, desto besser werden die Störfrequenzen unterdrückt. Zuletzt wird die hochfrequente Wechselspannung durch eine Demodulatorstufe gleichgerichtet und geglättet.



**Abb. 4:** Blockschaltbild eines Überlagerungsempfängers. [V28]

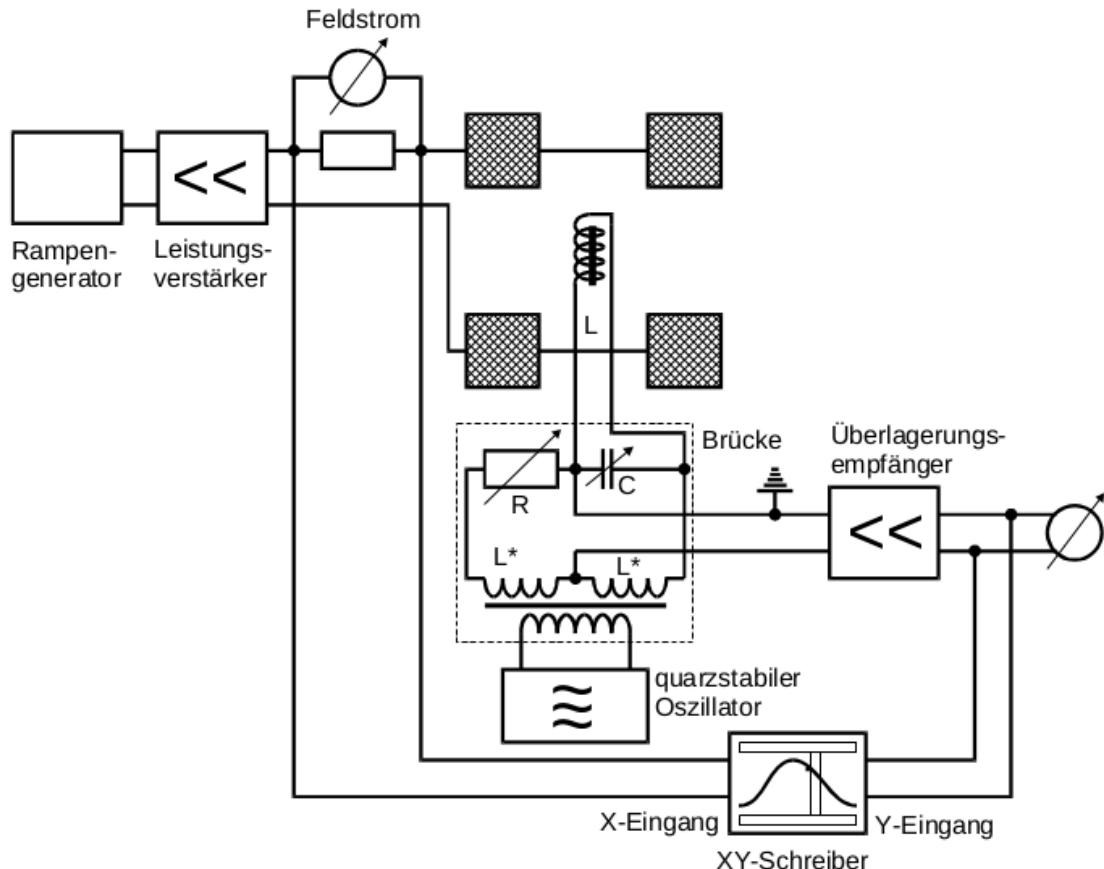


Abb. 5: Detaillierter Versuchsaufbau für die Elektronenspin-Resonanz. [V28]

### 3 Durchführung

Da mit Magnetfeldern im Bereich von mT gearbeitet wird, muss das Erdmagnetfeld beachtet werden. Deshalb werden alle Messungen sowohl parallel, als auch antiparallel zum Erdmagnetfeld durchgeführt. Im nächsten Schritt wird die Brücke und der Empfänger auf die gewünschte Frequenz abgestimmt. Dazu wird die Oszillatoren-Frequenz  $\nu_{\text{Osz}}$  so eingestellt, dass

$$\nu_{\text{Osz}} + \nu_{\text{ZF}} = \nu_e \quad (20)$$

gilt. Die Verstärker werden auf die maximale Verstärkung eingestellt. Dann wird versucht die Brückenspannung, mit Hilfe von zwei Kapazitäten  $C_{\text{grob}}$  und  $C_{\text{fein}}$  und einem Widerstand  $R$  zu minimieren. Danach wird der Feldstrom an den  $x$ -Eingang des XY-Schreibers angeschlossen und die Brückenspannung an den  $y$ -Eingang. Dann wird über einen Rampengenerator ein gleichmäßig steigender Feldstrom auf die Helmholzspule gegeben.

Zu letzt wird die  $x$ -Achse des XY-Schreibers kalkuliert, in dem mehrere Punkte mit bekanntem Strom auf dem Papier gesetzt werden. Dadurch kann der Strom pro cm bestimmt werden.

Der gesamte Vorgang wird für fünf verschiedene Frequenzen wiederholt.

## 4 Auswertung

### 4.1 Kalibrierung der x-Achse

Zur Bestimmung des Lande-Faktors der Elektronen und des Erdmagnetfeldes in Dortmund, werden zunächst die x-Koordinaten in Abbildung 6 zu sehenden Graphen normiert. Dazu werden die Graphen eingescannt. Mittels eines Bildbearbeitungsprogramm wird die Pixelanzahl der x-Koordinate für die gekennzeichneten Spulenströme bestimmt. Die Messwerte sind in Tabelle 1 und 2 aufgetragen. Die Tupel

**Tab. 1:** Pixelzahl in Abhängigkeit des Spulenstroms bei  $\nu_{\text{Osz.}} = 10\text{-}20 \text{ MHz}$

| $I_{10\text{MHz}} / \text{mA}$ | Pixel | $I_{15\text{MHz}} / \text{mA}$ | Pixel | $I_{20\text{MHz}} / \text{mA}$ | Pixel |
|--------------------------------|-------|--------------------------------|-------|--------------------------------|-------|
| 0                              | 5911  | 201                            | 5980  | 200                            | 5928  |
| 100                            | 4572  | 300                            | 4763  | 303                            | 5018  |
| 200                            | 3351  | 403                            | 3477  | 401                            | 4064  |
| 300                            | 2070  | 500                            | 2245  | 499                            | 3138  |
| 400                            | 792   | 600                            | 960   | 600                            | 2245  |
| 460                            | 52    | 670                            | 120   | 700                            | 1246  |
| —                              | —     | —                              | —     | 801                            | 362   |

**Tab. 2:** Pixelzahl in Abhängigkeit des Spulenstroms bei  $\nu_{\text{Osz.}} = 25\text{-}30 \text{ MHz}$

| $I_{25\text{MHz}} / \text{mA}$ | Pixel | $I_{30\text{MHz}} / \text{mA}$ | Pixel |
|--------------------------------|-------|--------------------------------|-------|
| 300                            | 5823  | 300                            | 6062  |
| 404                            | 4830  | 400                            | 5220  |
| 496                            | 3815  | 496                            | 4308  |
| 602                            | 2870  | 601                            | 3470  |
| 700                            | 1953  | 700                            | 2528  |
| 805                            | 896   | 800                            | 1624  |
| —                              | —     | 900                            | 762   |

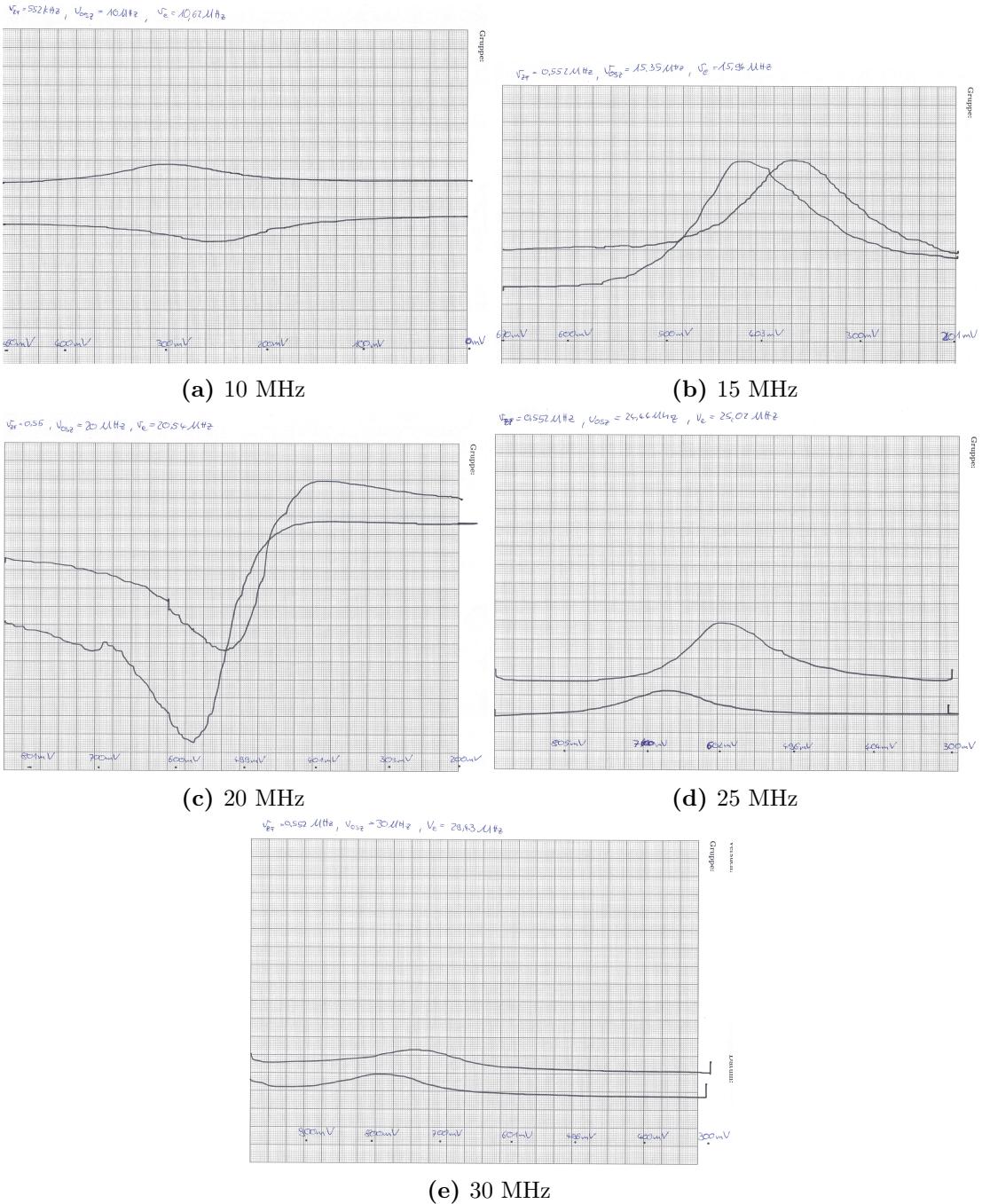
aus Pixelzahl und Spulenstrom werden genutzt um die Pixelzahl auf den Spulenstrom zu kalibrieren. Dafür wird eine lineare Regression durchgeführt. Anhand der Steigung  $m$  und des Bios  $b$  der linearen Regression

$$f(x) = m \cdot x + b \quad (21)$$

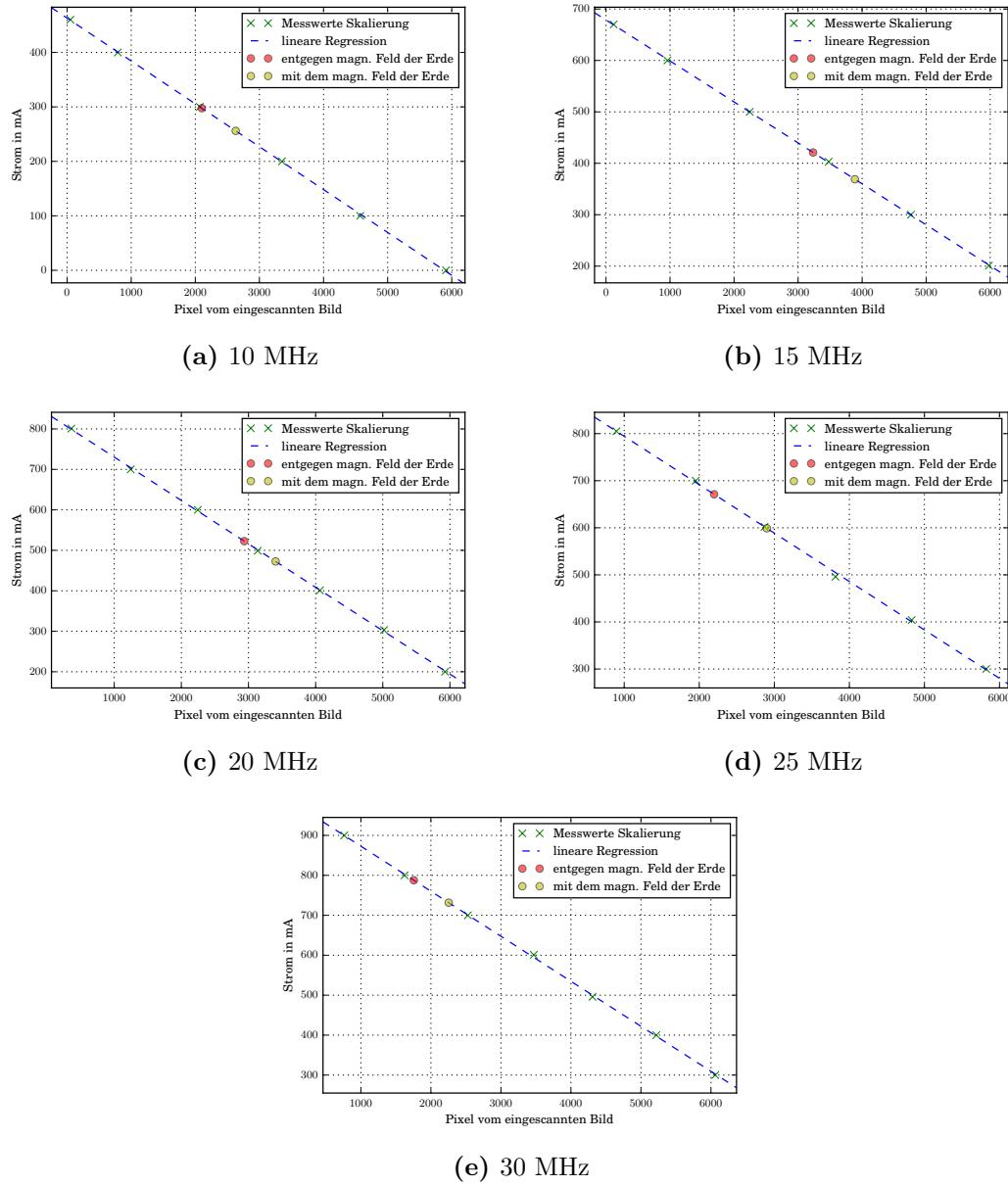
ergeben sich die in Tabelle 3 aufgeführten Koeffizienten.

### 4.2 Bestimmung der Feldstärken

Aus der zuvor berechneten Regression lassen sich die Spulenströme für den Resonanzfall berechnen, indem die Extrema der Graphen 6 bestimmt werden. Anschließend wird die magnetischen Feldstärke anhand von Formel ?? berechnet. Die magnetische Feldstärke entsprechend gegen und in Richtung des Erdmagnetfeldes



**Abb. 6:** Brückenstrom in abhängigkeit des Spulenstrom für verschiedene  $\nu_{\text{Osz}}$



**Abb. 7:** Lineare Regression zwischen der Pixel und des Spuelnstroms für unterschiedliche Frequenzen

**Tab. 3**

| $\nu_{\text{Osz}}$ | Steigung m       | Bios b          |
|--------------------|------------------|-----------------|
| 10 MHz             | $7.87 \pm 0.04$  | $463.0 \pm 1.4$ |
| 15 MHz             | $7.97 \pm 0.03$  | $678.6 \pm 1.1$ |
| 20 MHz             | $10.73 \pm 0.07$ | $837 \pm 2$     |
| 25 MHz             | $10.2 \pm 0.1$   | $897 \pm 5$     |
| 30 MHz             | $11.27 \pm 0.08$ | $986.0 \pm 3.3$ |

gerichteten Aufbau sind in Tabelle 4 in Abhängigkeit von  $\nu_{\text{Osz}}$  aufgetragen. Der Mittelwert aus den

**Tab. 4**

| $\nu_{\text{Osz}}$ | B-Feld in Richtung des Erdmagnetfeld / $\mu T$ | B-Feld entgen der Richtung des Erdmagnetfeld / $\mu T$ | gemitteltes B-Feld / $\mu T$ |
|--------------------|--|--|------------------------------|
| 10 MHz             | $417 \pm 2$                                    | $359 \pm 3$  | $388 \pm 2$                  |
| 15 MHz             | $590 \pm 2$                                    | $518 \pm 2$  | $554 \pm 2$                  |
| 20 MHz             | $733 \pm 4$                                    | $663 \pm 5$  | $698 \pm 4$                  |
| 25 MHz             | $941 \pm 8$                                    | $840 \pm 8$  | $891 \pm 8$                  |
| 30 MHz             | $1105 \pm 5$                                   | $1026 \pm 5$   | $1066 \pm 5$                 |

beiden Fällen entspricht dementsprechend den feldfreien Fall.

### 4.3 Landefaktoren und Erdmagnetfeld

Ebenso lässt sich aus der halben Differenz der beiden magnetischen Feldstärken das magn Feld der Erde in Dortmund berechnen. Für die verschiedenen  $\nu_{\text{Osz}}$  sind diese aufgeführt. Mittels Formel ?? werden die Landefaktoren berchent und sind ebenfalls in 5 aufgetragen.

**Tab. 5:** Landefaktoren und Stärke des Erdmagnetfeldes

| $\nu_{\text{Osz}}$ | Erdmagnetfeld / $\mu T$ | Lande Faktor    |
|--------------------|-------------------------|-----------------|
| 10 MHz             | $29.2 \pm 0.2$          | $1.95 \pm 0.01$ |
| 15 MHz             | $36.5 \pm 0.1$          | $2.06 \pm 0.01$ |
| 20 MHz             | $35.1 \pm 0.2$          | $2.10 \pm 0.01$ |
| 25 MHz             | $50.6 \pm 0.6$          | $2.01 \pm 0.02$ |
| 30 MHz             | $39.4 \pm 0.3$          | $2.01 \pm 0.01$ |
| Mittel             | $38.4 \pm 1.5$          | $2.02 \pm 0.01$ |

## 5 Diskussion

Aufgrund dessen das die Brückenspannung bei konstanten B-Feld variiert, kann nicht immer der ganze Punkt der maxima der Graphen bestimmt werden. Die Fitparameter der linearen Regression weisen einen Fehler von  $<1\%$  auf, sodass die Methode der Bestimmung der x-Achse mittels Pixelbestimmung als geglungen erscheint. Aus den Spuelenströmen werden B-Felder von 388 bis 1066  $\mu\text{T}$  berechnet. Anhand der Graphen wird die magn. Komponente des Erdmagnetfeldes von  $38.4 \pm 1.5$  bestimmt, was anbetracht der geographischen Breite als realistisch erscheint. Für den Versuch ergibt sich ein Landefaktor von 2.02 was den Erwartungen entspricht.