Big-O Blue

LECTURE 13

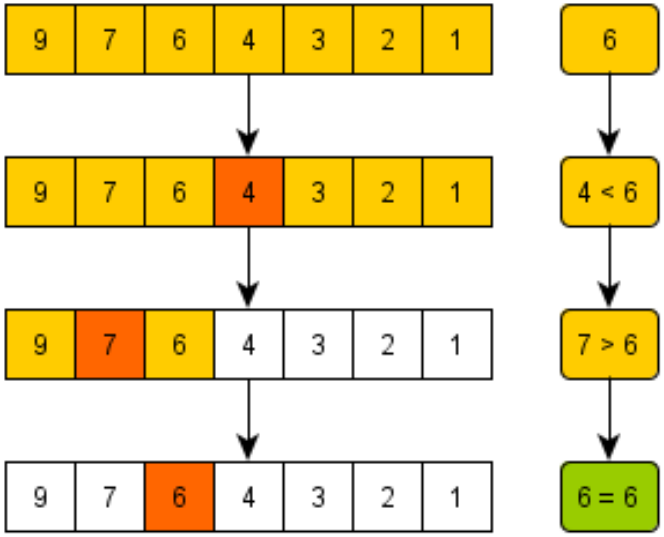
BINARY SEARCH

Phạm Nguyễn Sơn Tùng

Email: sontungtn@gmail.com

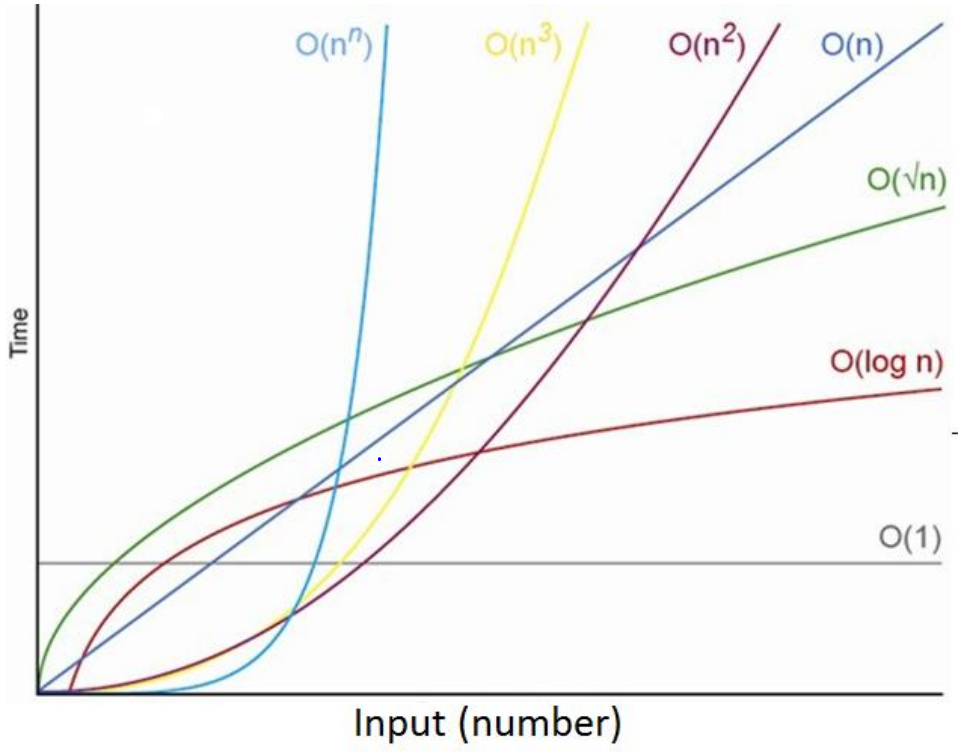
Định nghĩa Binary Search

Binary Search (tìm kiếm nhị phân hoặc tên gọi khác là chặt nhị phân) là phương pháp tìm kiếm một phần tử trong mảng đơn điệu.



Độ phức tạp của Binary Search

Độ phức tạp: O (LogN)



Ý tưởng của thuật toán

Trong mỗi bước, so sánh phần tử cần tìm với phần tử nằm ở chính giữa danh sách. Nếu hai phần tử bằng nhau thì phép tìm kiếm thành công và thuật toán kết thúc.

Nếu chúng không bằng nhau thì tùy vào phần tử nào lớn hơn, thuật toán lặp lại bước so sánh trên với nửa đầu hoặc nửa sau của danh sách. Mỗi lần lặp như vậy số lượng phần tử trong danh sách cần xem xét giảm đi một nửa sau mỗi bước.

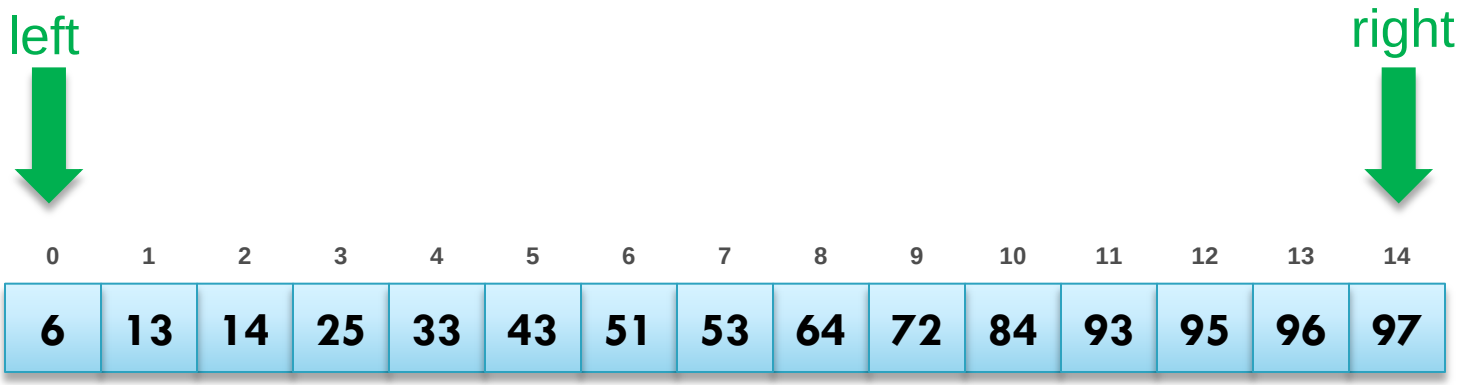
Bài toán minh họa

Cho mảng đã được sắp xếp **tăng dần**, hãy tìm vị trí chứa giá trị **x = 33** trong mảng.

Bước 0: Chuẩn bị dữ liệu

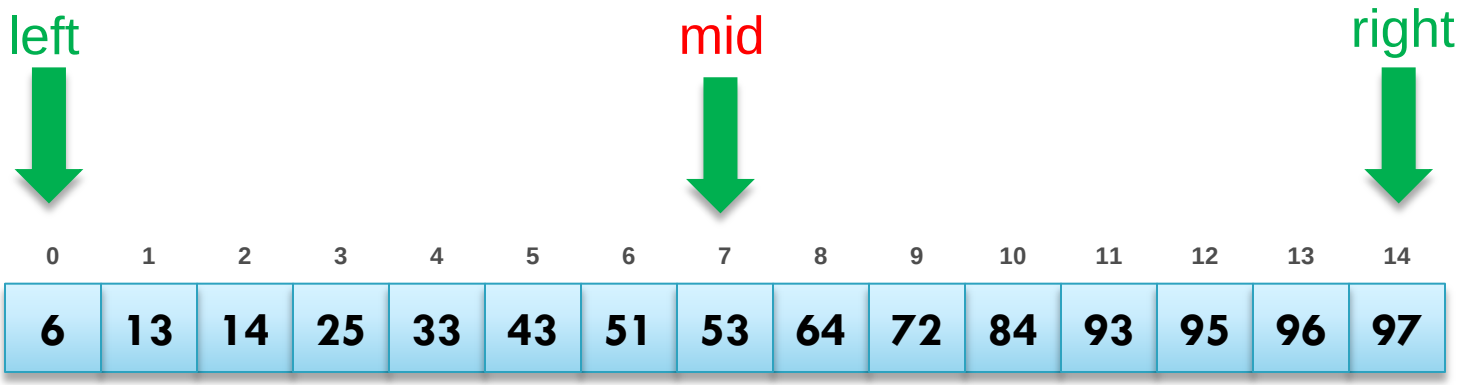
Đặt các giá trị ban đầu cho các biến.

- n = 15
- left = 0
- right = n – 1 = 14



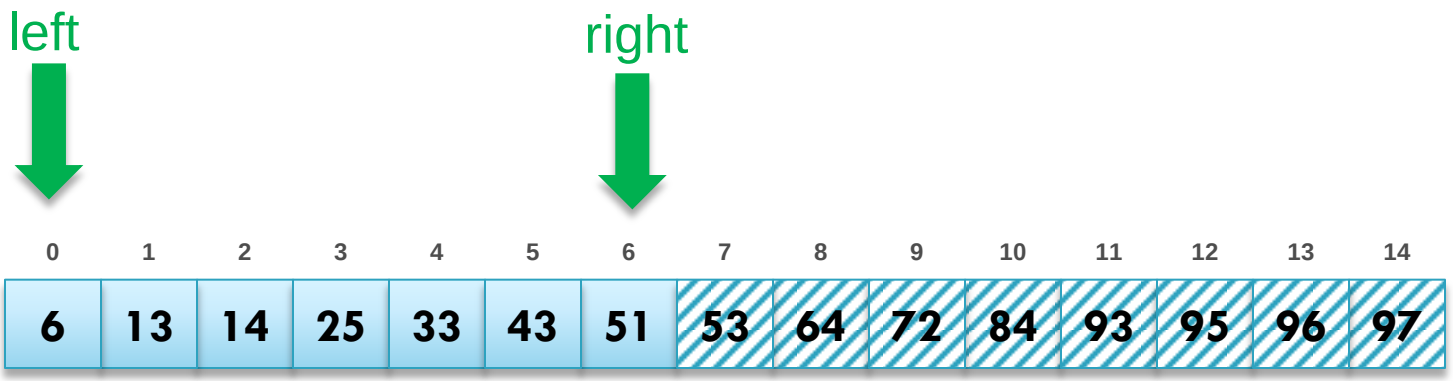
Bước 1: Chạy thuật toán lần 1

- mid = (left + right)/2 = 7
- x (33) < a[mid] (53)
- left = 0
- right = mid – 1 = 6



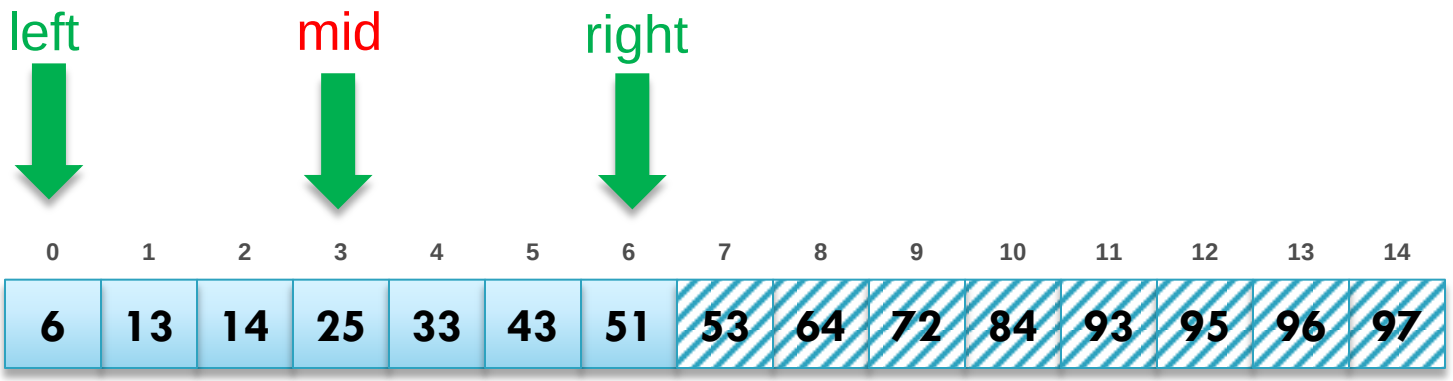
Bước 1: Chạy thuật toán lần 1

- mid = (left + right)/2 = 7
- x (33) < a[mid] (53)
- left = 0
- right = mid – 1 = 6



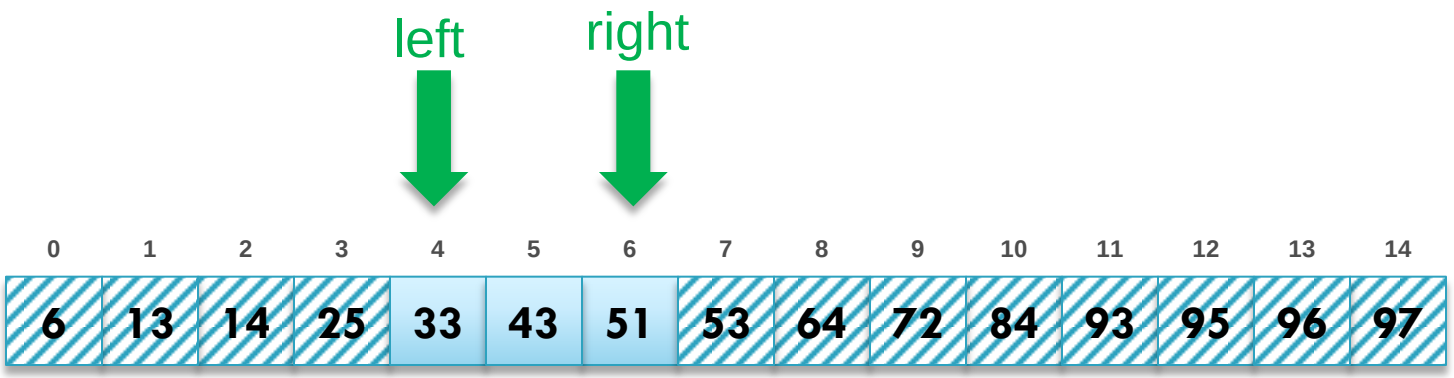
Bước 2: Chạy thuật toán lần 2

- mid = (left + right)/2 = 3
- x (33) > a[mid] (25)
- left = mid + 1 = 4
- right = 6



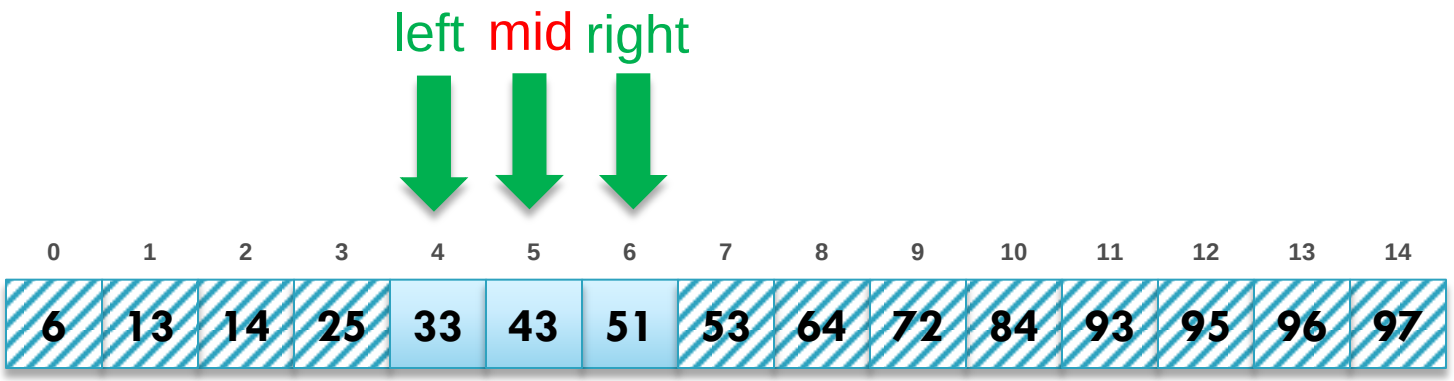
Bước 2: Chạy thuật toán lần 2

- mid = (left + right)/2 = 3
- x (33) > a[mid] (25)
- left = mid + 1 = 4
- right = 6



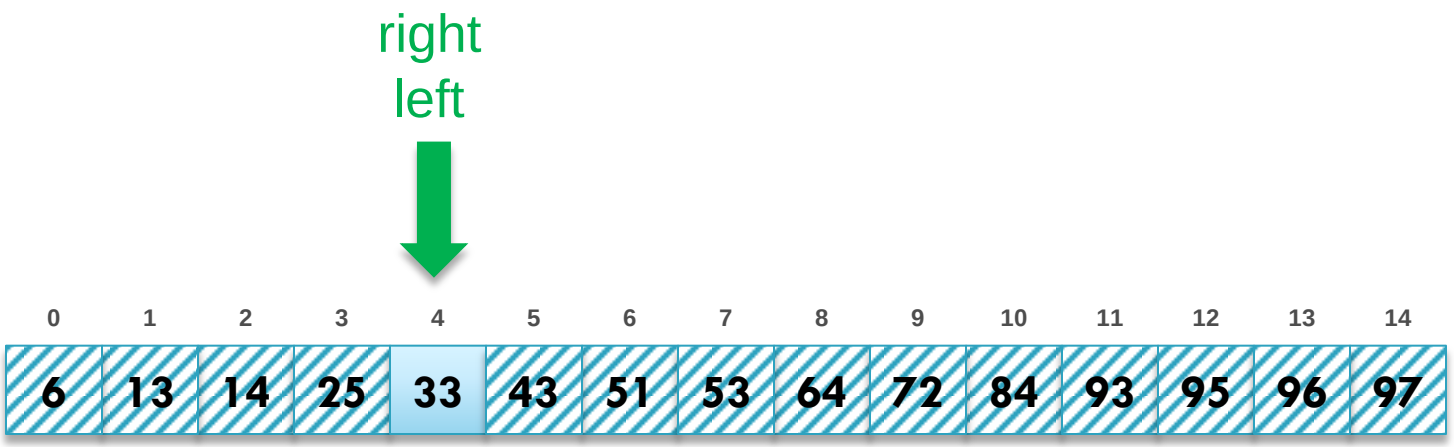
Bước 3: Chạy thuật toán lần 3

- mid = (left + right)/2 = 5
- x (33) < a[mid] (43)
- left = 4
- right = mid – 1 = 4



Bước 3: Chạy thuật toán lần 3

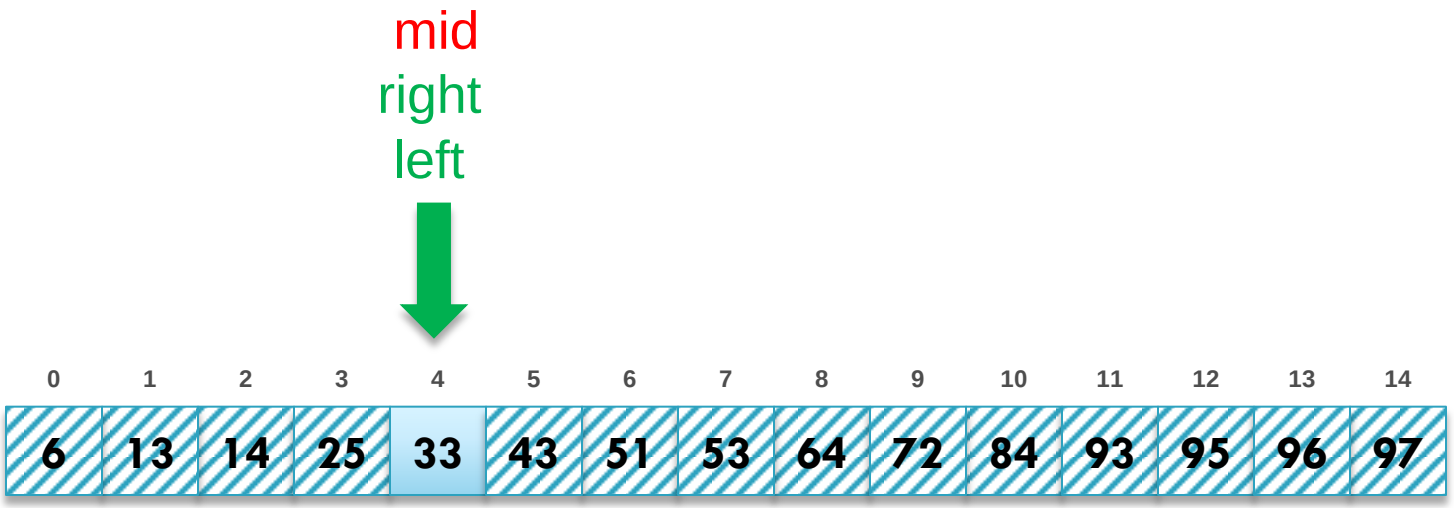
- mid = (left + right)/2 = 5
- x (33) < a[mid] (43)
- left = 4
- right = mid – 1 = 4



Bước 4: Chạy thuật toán lần 4

- mid = (left + right)/2 = 4
- x (33) == a[mid] (33)

Kết quả Tìm được vị trí của **x là 4**. Dừng thuật toán.

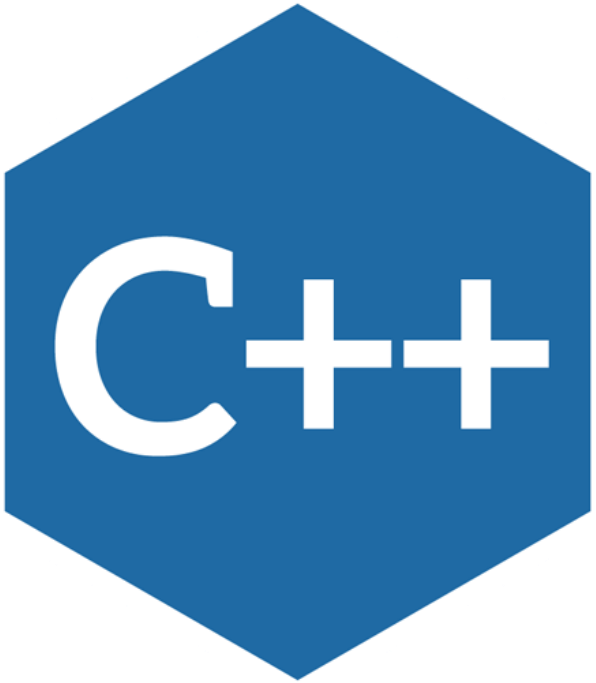


Một số nhận xét

Tìm kiếm nhị phân dựa vào **quan hệ giá trị** của các phần tử mảng để định hướng trong quá trình tìm kiếm, do vậy chỉ áp dụng được cho các dãy **đã có thứ tự**.

Khi mảng có biến động cần phải tiến hành sắp xếp lại. Tìm kiếm nhị phân cần phải xét đến thời gian sắp xếp lại mảng, thời gian sắp xếp này không nhỏ, phải cân nhắc khi thực hiện.

MÃ NGUỒN MINH HỌA BẰNG C++



Source Code Binary Search C++

```
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;
int binarySearch(vector<int> a, int left, int right, int x)
{
    while (left <= right)
    {
        int mid = (left + right) / 2;
        if (x == a[mid])
            return mid;
        else if (x < a[mid])
            right = mid - 1;
        else if (x > a[mid])
            left = mid + 1;
    }
    return -1;
}
```

Source Code Binary Search C++

Hàm main.

```
int main()
{
    freopen("INPUT.INP", "rt", stdin);
    vector<int> a;
    int n, x, value;
    cin >> n >> x;
    for (int i = 0; i < n; i++)
    {
        cin >> value;
        a.push_back(value);
    }
    int result = binarySearch(a, 0, n - 1, x);
    cout << result;
    return 0;
}
```

Binary Search (Đệ quy) C++

```
int binarySearch(vector<int> a, int left, int right, int x)
{
    if (left <= right)
    {
        int mid = left + (right - left) / 2;

        if (a[mid] == x)
            return mid;

        if (a[mid] > x)
            return binarySearch(a, left, mid - 1, x);

        return binarySearch(a, mid + 1, right, x);
    }
    return -1;
}
```

MÃ NGUỒN MINH HỌA BẰNG PYTHON

Source Code Binary Search - python

```
def binarySearch(a, left, right, x):
    while left <= right:
        mid = (left + right) // 2
        if x == a[mid]:
            return mid
        elif x < a[mid]:
            right = mid - 1
        else:
            left = mid + 1
    return -1
```

```
if __name__ == '__main__':
    n, x = map(int, input().split())
    a = list(map(int, input().split()))
    result = binarySearch(a, 0, n-1, x)
    print(result)
```

Binary Search (Đệ quy)

```
def binarySearch(a, left, right, x):
    if left <= right:
        mid = (left + right) // 2
        if a[mid] == x:
            return mid;
        if a[mid] > x:
            return binarySearch(a, left, mid - 1, x)
        return binarySearch(a, mid + 1, right, x)
    return -1
```

MỘT SỐ HÀM BINARY SEARCH KHÁC CẦN LƯU Ý

Binary Search (tìm phần tử đầu tiên) C++

```
int BS_first(vector<int> &a, int left, int right, int x)
{
    if (left <= right)
    {
        int mid = left + (right - left) / 2;
        if ((mid == 0 || x > a[mid - 1]) && a[mid] == x)
            return mid;
        else if (x > a[mid])
            return BS_first(a, (mid + 1), right, x);
        else
            return BS_first(a, left, (mid - 1), x);
    }
    return -1;
}
```

Binary Search (tìm phần tử cuối cùng) C++

```
int BS_last(vector<int> a, int left, int right, int x)
{
    if (left <= right)
    {
        int mid = left + (right - left) / 2;
        if ((mid == right || x < a[mid + 1]) && a[mid] == x)
            return mid;
        else if (x < a[mid])
            return BS_last(a, left, (mid - 1), x);
        else
            return BS_last(a, (mid + 1), right, x);
    }
    return -1;
}
```

Binary Search (tìm phần tử đầu tiên) python

```
def bsFirst(a, left, right, x):
    if left <= right:
        mid = (left + right) // 2
        if (mid == 0 or x > a[mid - 1]) and a[mid] == x:
            return mid
        elif x > a[mid]:
            return bsFirst(a, mid + 1, right, x)
        else:
            return bsFirst(a, left, mid - 1, x)
    return -1
```

Binary Search (tìm phần tử cuối cùng) python

```
def bsLast(a, left, right, x):
    if left <= right:
        mid = (left + right) // 2
        if (mid == right or x < a[mid + 1]) and a[mid] == x:
            return mid
        elif x < a[mid]:
            return bsLast(a, left, mid - 1, x)
        else:
            return bsLast(a, mid + 1, right, x)
    return -1
```

DÙNG BINARY SEARCH TRONG THƯ VIỆN STL CỦA C++ VÀ BISECT CỦA PYTHON

Hàm tìm kiếm nhị phân

binary_search: Trả về giá trị **đúng/sai** khi tìm kiếm phần tử.

```
int a[] = {1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 7};
int n = 9;
vector<int> v(a, a + n);
int x = 3;
bool result = binary_search(v.begin(), v.end(), x);
```

true

~~**binary_search:**~~ Python không có hàm tương ứng, có thể sử dụng bisect_left để kiểm tra.

Hàm tìm cận dưới

lower_bound: Trả về phần tử **đầu tiên không bé hơn** giá trị khóa tìm kiếm **[first**, last).

```cpp
int a[] = {1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 7};
int n = 9;
vector<int> v(a, a + n);
int x = 3;
vector<int>::iterator low_value;
low_value = lower_bound(v.begin(), v.end(), x);
int index = low_value - v.begin();
```

bisect_left: Trả về ***vị trí*** **đầu tiên không bé hơn** giá trị khóa tìm kiếm **[first**, last).

Cú pháp: bisect_left(a, x, lo = 0, hi = len(a))

```python
if __name__ == '__main__':
    a = [1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 7]
    n, x = 9, 3
    pos = bisect.bisect_left(a, x, 0, n)
    # hoặc pos = bisect.bisect_left(a, x)
    print(pos)
```

(***NOTE***: *C++ trả về phần tử nhưng Python trả về index).*

Kết quả

value: 3
index: 5

Hàm tìm cận trên

upper_bound: Trả về phần tử **đầu tiên** lớn hơn giá trị **khóa tìm kiếm** [first, **last).**

```
int a[] = {1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 7};
int n = 9;
vector<int> v(a, a + n);
int x = 3;
vector<int>::iterator upp_value;
upp_value = upper_bound(v.begin(), v.end(), x);
int index = upp_value - v.begin();
```

bisect_right: Trả về vị trí **đầu tiên** lớn hơn giá trị **khóa tìm kiếm** [first, **last).**

```
if __name__ == '__main__':
    a = [1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 7]
    n, x = 9, 3
    pos = bisect.bisect_right(a, x, 0, n)
    # hoặc pos = bisect.bisect_right(a, x)
    print(pos)
```

*(**NOTE**: C++ trả về phần tử nhưng Python trả về index).*

value: 4
index: 6

Hàm tìm đoạn, khoảng

equal_range: Trả về đoạn [**first, last**) thuộc kết quả tìm kiếm.

```
int a[] = {1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 7};
int n = 9;
vector<int> v(a, a + n);
int x = 2;
pair<vector<int>::iterator, vector<int>::iterator> bounds;
bounds = equal_range(v.begin(), v.end(), x);
cout << "bounds at positions "<< (bounds.first - v.begin());
cout << " and " << (bounds.second - v.begin()) <<endl;
```

bounds at positions 2 and 5

python ~~***equal_range:***~~ *Python không có hàm tương ứng, dùng bisect_left và bisect_right để thực hiện thức năng này.*

Hỏi đáp