ECONOMETRIA I
TAREA 8
MAESTRIA EN ECONOMIA, 2023-2025
EL COLEGIO DE MEXICO

Profr. Eneas A. Caldiño García
Entrega: 13 de marzo de 2024

1. $\left\{ \begin{pmatrix} Y_j \\ X_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{n}$ vectores aleatorios bidimensionales i.i.d.

Para j = 1,2,..,n $\begin{pmatrix} Y_j \\ X_j \end{pmatrix}$ ~ distribución del estudiante bivariada con $v > 2$ grados de libertad.

$$\begin{pmatrix} Y_j \\ X_j \end{pmatrix} \sim St\left(\begin{pmatrix} \mu_y \\ \mu_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_x^2 \end{pmatrix}, v \right) \qquad j = 1,2,..,n$$

Se sabe que la función de regresión de Y sobre X es:

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$g(x) \equiv E[Y|_{X=x}] = \mu_y - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\mu_x + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}x$$

La función de cedasticidad es:

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$h(x) \equiv var[Y|_{X=x}] = \frac{v\left(\sigma_y^2 - \dfrac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2}\right)}{v - 1}\left[1 + \frac{1}{v\sigma_x^2}(x-\mu_x)^2\right]$$

i) Graficar la función de regresión $g(x) \equiv E[Y|_{X=x}]$ con $\mu_x = 0$, $\mu_y = 1$, $\sigma_x^2 = 1$, $\sigma_y^2 = 1.64$, $\sigma_{xy} = -0.8$ y $v = 3$.

ii) Graficar la función de cedasticidad $h(x) \equiv var[Y|_{X=x}]$ con $\mu_x = 0$, $\sigma_x^2 = 1$, $\sigma_y^2 = 1.64$, $\sigma_{xy} = -0.8$ y $v = 3$.

iii) Generar una muestra aleatoria $\left\{ \begin{pmatrix} Y_j \\ X_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{120}$ (vectores aleatorios bidimensionales i.i.d.) con distribución

$$\begin{pmatrix} Y_j \\ X_j \end{pmatrix} \sim St \left(\begin{pmatrix} \mu_y \\ \mu_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_x^2 \end{pmatrix}, v \right) \qquad j = 1,2,..,120$$

Graficar en $\mathbb{R}^2$ la muestra obtenida junto con la curva de regresión.

2. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espacio de probabilidad. $\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ vector aleatorio con distribución exponencial bivariada de Gumbel:

$$f_{y,x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f_{y,x}(y,x) = \begin{cases} [(1+\lambda x)(1+\lambda y) - \lambda] e^{-(x+y+\lambda xy)} & \text{si } (y,x) \in (0,\infty)\times(0,\infty) \\ 0 & \text{si } (y,x) \notin (0,\infty)\times(0,\infty) \end{cases}$$

donde $\lambda \in [0,1]$.

Se sabe que la *función de regresión* de Y sobre X es:

$$g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1+\lambda+\lambda x}{(1+\lambda x)^2}$$

La función de cedasticidad es:

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$h(x) \equiv var[Y|_{X=x}] = \frac{(1+\lambda+\lambda x)^2 - 2\lambda^2}{(1+\lambda x)^4}$$

i) En un mismo plano graficar las funciones de regresión

$g(\ |\lambda):(0,\infty) \to \mathbb{R}$

correspondientes a $\lambda = 0.01$, $\lambda = 0.5$ y $\lambda = 1$.

ii) En un mismo plano graficar las funciones de cedasticidad

$h(\ |\lambda):(0,\infty) \to \mathbb{R}$

correspondientes a $\lambda = 0.01$, $\lambda = 0.5$ y $\lambda = 1$.

iii) Generar una muestra aleatoria $\left\{ \begin{pmatrix} Y_j \\ X_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{120}$ (vectores aleatorios bidimensionales i.i.d.) con distribución exponencial bivariada de Gumbel, con $\lambda = 0.5$

Graficar en un mismo plano la curva de regresión y la muestra obtenida.

3. Generar 30 observaciones i.i.d. $\left\{ \begin{pmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ V_i \end{pmatrix} \right\}_{i=1}^{30}$

donde $\begin{pmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ V_i \end{pmatrix} \sim N_3\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.04 & -0.03 & 0 \\ -0.03 & 0.09 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & 0.01 \end{pmatrix} \right)$

Generar

$$Y_i = e^{X_{i1}} - \operatorname{sen}(X_{2i}) + V_i \qquad i = 1,2,..,30.$$

Para explicar la variable Y en función de las variables explicativas X_1 y X_2 se propone el "modelo":

$$Y_i = 10 + \pi X_{i1} + e X_{i2} + U_i \qquad i = 1,2,..,30$$

¿Se cumple este modelo? (i.e. ¿Se satisfacen las 30 ecuaciones con los datos dados?).

Se propone un segundo "modelo":

$$Y_i = 13 + 3\ X_{i1} + 2024\ X_{i2} + \varepsilon_i \qquad i = 1,2,..,30$$

(Los coeficientes vienen de que la fecha de entrega de esta tarea es 13/03/2024).

¿Se cumple este modelo? (i.e. ¿Se satisfacen las 30 ecuaciones con los datos dados?)

4. $\left\{ \begin{pmatrix} Y_j \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{n}$ vectores aleatorios de dimensión k i.i.d.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{U}$$

$$Y_j = \alpha + \beta' \mathbf{X}_j \qquad j = 1,2,..,n$$

$$Y_j = \alpha + \beta_1 X_{j1} + \beta_2 X_{j2} + .. + \beta_m X_{jm} + .. + \beta_{k-1} X_{j,k-1} + U_j \qquad j = 1,2,..,n$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ : \\ Y_n \end{pmatrix}_{nx1} ; \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ : \\ U_n \end{pmatrix}_{nx1} ; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha_{1x1} \\ \beta_{(k-1)x1} \end{pmatrix}_{kx1}$$

$$\mathbf{X}_j = \begin{pmatrix} X_{j1} \\ X_{j2} \\ : \\ X_{j,k-1} \end{pmatrix}_{(k-1)x1} ; \quad \mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix}_{kx1}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{X}_1' \\ 1 & \mathbf{X}_2' \\ : & : \\ 1 & \mathbf{X}_j' \\ : & : \\ 1 & \mathbf{X}_n' \end{pmatrix}_{nxk} = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & .. & X_{1m} & .. & X_{1,k-1} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & .. & X_{2m} & .. & X_{2,k-1} \\ : & : & : & & : & & : \\ 1 & X_{j1} & X_{j2} & .. & X_{jm} & .. & X_{j,k-1} \\ : & : & : & & : & & : \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & .. & X_{nm} & .. & X_{n,k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1' \\ \mathbf{x}_2' \\ : \\ \mathbf{x}_j' \\ : \\ \mathbf{x}_n' \end{pmatrix}_{nxk} \qquad j = 1,2,..,n$$

i) Demostrar:

a) $\{U_j\}_{j=1}^{n}$ son v.a.s i.i.d.

b) $\left\{ \begin{pmatrix} U_j \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{n}$ son vectores aleatorios i.i.d.

c) $\{\mathbf{X}_j U_j\}_{j=1}^{n} = \left\{ \begin{pmatrix} X_{j1}U_j \\ X_{j2}U_j \\ : \\ X_{jm}U_j \\ : \\ X_{j,k-1}U_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{n}$ son vectores aleatorios i.i.d.

d) $\operatorname{cov}(U_j, X_{im}) = 0 \quad j = 1,2,..,n; \quad i = 1,2,..,n; \quad i \neq j, \quad m = 1,2,..,k-1$

ii) Demostrar:

$E[\mathbf{X}'\mathbf{U}] = \mathbf{0}_{kx1}$

$\Longleftrightarrow \quad E[\mathbf{x}_j U_j] = \mathbf{0}_{kx1} \quad j = 1,2,..,n$

$\Longleftrightarrow \quad E(U_j) = 0 \;\; y \;\; E(\mathbf{X}_j U_j) = \mathbf{0}_{(k-1)x1} \quad j = 1,2,..,n$

$\Longleftrightarrow \quad E(U_j) = 0 \;\; y \;\; E(X_{ji} U_j) = 0_{1x1} \quad j = 1,2,..,n; \; i = 1,2,..,k-1$

$\Longleftrightarrow \quad E(U_j) = 0 \;\; y \;\; \operatorname{cov}(\mathbf{X}_j, U_j) = \mathbf{0}_{(k-1)x1} \quad j = 1,2,..,n$

$\Longleftrightarrow \quad E(U_j) = 0 \;\; y \;\; \operatorname{cov}(X_{ji}, U_j) = 0 \quad j = 1,2,..,n; \; i = 1,2,..,k-1$

5. Estudiar las sección 2-2 Deriving the Ordinary Least Squares Estimates del capítulo 2 de Wooldridge J.M., Introductory Econometrics: A Modern Approach, 5th, 6th or 7th Edition, South-Western CENGAGE Learning.