ECONOMETRIA I

TAREA 7

MAESTRIA EN ECONOMIA, 2023-2025

EL COLEGIO DE MEXICO

Profr. Eneas A. Caldiño García

Entrega: 6 de marzo de 2024

1. La función de densidad del vector aleatorio $\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$ es:

$$f_{y,x}:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_{y,x}(y,x) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y} & \text{si } 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

$\lambda > 0$. El valor de λ es desconocido.

Se sabe que la *función de regresión* de Y sobre X es:

$$g:[0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{\lambda} + x$$

i) En un mismo plano graficar las *funciones de regresión*

$$g(\ \mid\lambda):(0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

correspondientes a $\lambda = 0.5$, $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$.

ii) Escribir los mejores modelos para explicar Y en función de X cuando se sabe que $\lambda = 0.5$, $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$.

2. Distribución logística univariada.

Definición: La v.a. X tiene distribución logística ($X \sim Lg(\alpha,\beta)$) si y solo si

$F_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F_x(x) = \frac{\exp\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)}{1 + \exp\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)} = \frac{1}{1 + \exp\left(-\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in (0,\infty)$.

$E(X) = \alpha$, $\operatorname{var}(X) = \dfrac{\beta^2\pi^2}{3}$.

i) Encontrar la función de densidad $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ii) En un mismo plano graficar la función de densidad f_x con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ y la función de densidad ϕ de la Normal univariada estándar, $N(0,1)$.

iii) En un mismo plano graficar la función de distribución acumulativa F_x con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ y la función de distribución acumulativa Φ de la $N(0,1)$.

3. Modelo logit. Ilustración de lo visto en clase.

i) Generar (usando algún paquete estadístico) una muestra $\{U_i\}_{i=1}^{200}$ i.i.d. donde $U_i \sim Lg(0,1)$ $\forall$ $i \in \{1,2,..,200\}$.

ii) Generar (usando algún paquete estadístico) una muestra $\{X_i\}_{i=1}^{200}$ i.i.d. (de cualquier distribución), tal que $E[U_i | X_i] = 0$ $\forall$ $i \in \{1,2,..,200\}$.

iii) Generar $\{Y_i^*\}_{i=1}^{200}$, donde $Y_i^* = a + bX_i + U_i$ $i = 1,2,...,200$; con $a = 0.5$ y $b = 0.4$

iv) Generar la muestra $\left\{ \begin{pmatrix} Y_i \\ X_i \end{pmatrix} \right\}_{i=1}^{200}$

$$\text{donde } Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad Y_i^* > 0 \\ 0 & \text{si} \quad Y_i^* \leq 0 \end{cases} \qquad i = 1,2,..,200$$

v) En un mismo plano, graficar (usando los valores dados de a y b) la función de regresión (obtenida en clase)

$$E[Y|X=x] = 1 - \frac{1}{1 + \exp(a+bx)}$$

junto con la muestra $\left\{ \begin{pmatrix} Y_i \\ X_i \end{pmatrix} \right\}_{i=1}^{200}$ obtenida en iv).

4. Modelo probit (normit). Ilustración de lo visto en clase.

i) Generar (usando algún paquete estadístico) una muestra $\{U_i\}_{i=1}^{200}$ i.i.d. donde $U_i \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \forall\ i \in \{1,2,..,200\}$.

ii) Generar (usando algún paquete estadístico) una muestra $\{X_i\}_{i=1}^{200}$ i.i.d. (de cualquier distribución continua), tal que $E[U_i|X_i] = 0 \quad \forall\ i \in \{1,2,..,200\}$.

iii) Generar $\{Y_i^*\}_{i=1}^{200}$, donde $Y_i^* = a + bX_i + U_i \qquad i = 1,2,..,200$; con $a = 0.5$ y $b = 0.4$

iv) Generar la muestra $\left\{ \begin{pmatrix} Y_i \\ X_i \end{pmatrix} \right\}_{i=1}^{200}$

$$\text{donde } Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad Y_i^* > 0 \\ 0 & \text{si} \quad Y_i^* \leq 0 \end{cases} \qquad i = 1,2,..,200$$

v) En un mismo plano, graficar (usando los valores dados de a y b) la función de regresión (obtenida en clase)

$$g(x) = E[Y|X=x] = 1 - \Phi(-(a+bx)) = \Phi(a+bx)$$

junto con la muestra $\left\{ \begin{pmatrix} Y_i \\ X_i \end{pmatrix} \right\}_{i=1}^{200}$ obtenida en iv).

5. $\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$ vector aleatorio bidimensional.

$$f_{x,y}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f_{x,y}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } x\in(0,1) \text{ e } y\in(0,1) \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Sabemos que la función de regresión es:

$$g:(0,1) \to \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{x + 2/3}{2x + 1}$$

i) Graficar la función de regresión $g:(0,1) \to \mathbb{R}$

ii) Verificar que la función de cedasticidad es:

$$h:(0,1) \to \mathbb{R}$$

$$h(x) = \frac{2x^2 + 2x + 1/3}{6(2x+1)^2}$$

iii) Graficar la función de cedasticidad $h:(0,1) \to \mathbb{R}$

6. Estudiar las sección 2-1 Definition of the Simple Regression Model del capítulo 2 de Wooldridge J.M., Introductory Econometrics: A Modern Approach, 5th, 6th or 7th Edition, South-Western CENGAGE Learning.

1. La función de densidad del vector aleatorio $\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$ es:

$f_{Y,X} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_{Y,X}(y,x) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y} & \text{si } 0 \le x \le y \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

$\lambda > 0$. El valor de λ es desconocido.

Se sabe que la *función de regresión* de Y sobre X es:

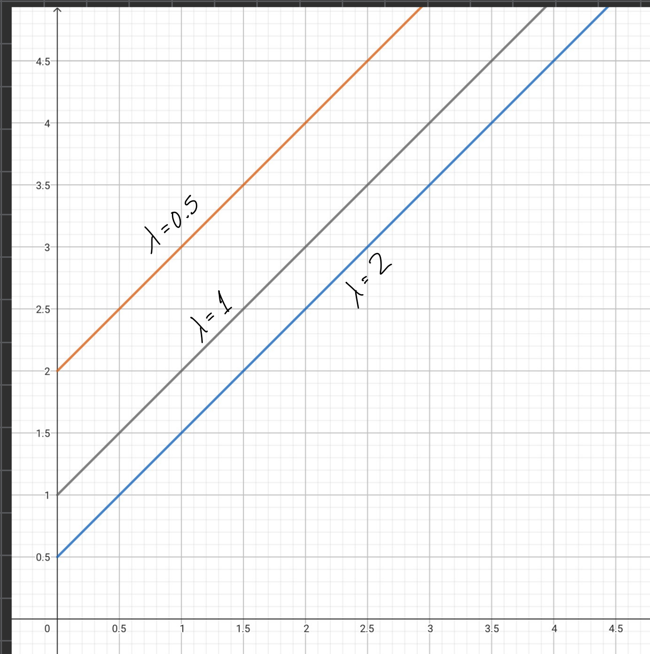
$g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{1}{\lambda} + x$$

i) En un mismo plano graficar las *funciones de regresión*

$g(\ |\lambda) : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

correspondientes a $\lambda = 0.5$, $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$.



ii) Escribir los mejores modelos para explicar Y en función de X cuando se sabe que $\lambda = 0.5$, $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$.

Mejor modelo: $Y = 1/\lambda + X + U$. Entonces:

Si $\lambda = 0.5 \Rightarrow Y = 2 + X + U$

$\lambda = 1 \Rightarrow Y = 1 + X + U$

$\lambda = 2 \Rightarrow Y = 1/2 + X + U$

2. Distribución logística univariada.

Definición: La v.a. X tiene distribución logística ($X \sim Lg(\alpha,\beta)$) si y solo si

$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \frac{\exp\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)}{1 + \exp\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)} = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta \in (0,\infty)$.

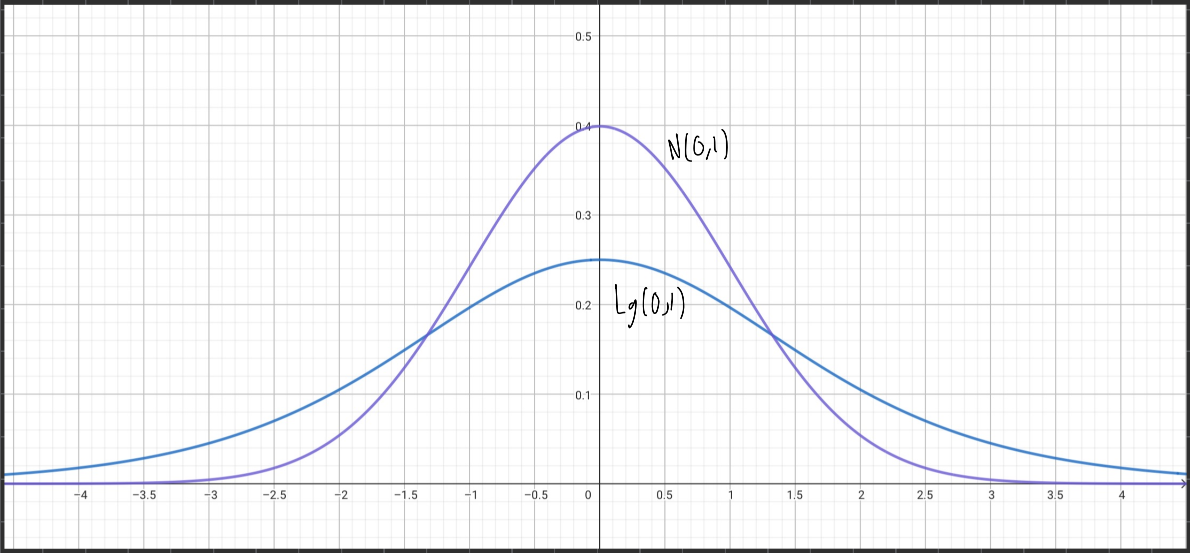
$E(X) = \alpha$, $\operatorname{var}(X) = \frac{\beta^2\pi^2}{3}$.

i) Encontrar la función de densidad $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

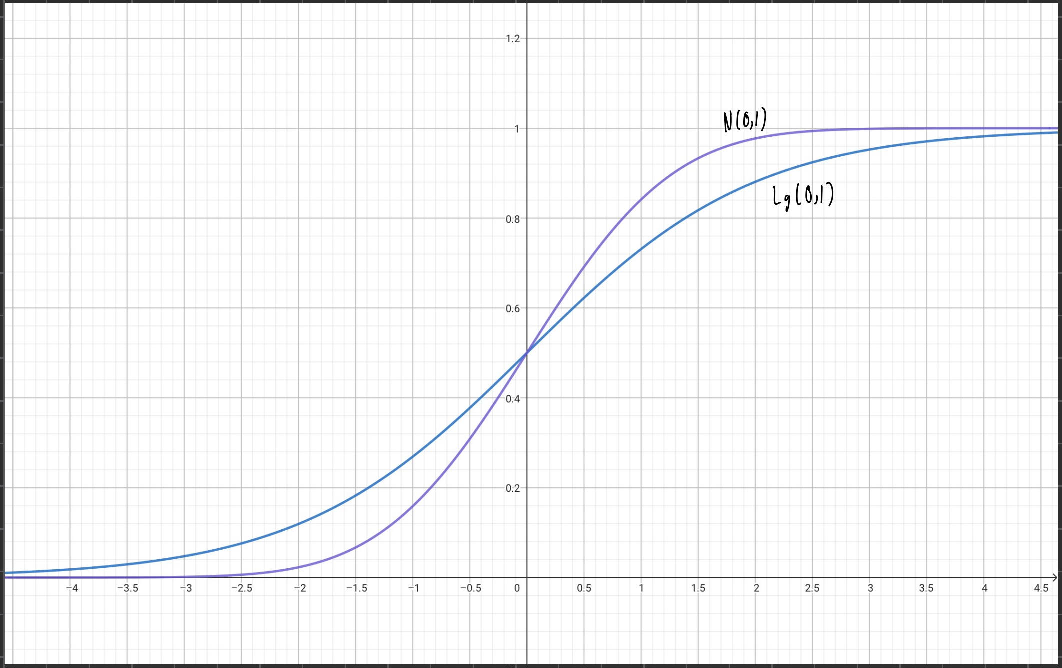
$$f_x(x) = \frac{\partial F_x(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)} = (\cancel{-}1)\left(1 + \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right)^{-2} \left(\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\left(\cancel{-}\frac{1}{\beta}\right)\right)$$

$$\therefore \; f_X(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)}{\beta\left(1+\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right)^2}$$

ii) En un mismo plano graficar la función de densidad f_X con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ y la función de densidad ϕ de la Normal univariada estándar, $N(0,1)$.



iii) En un mismo plano graficar la función de distribución acumulativa F_X con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ y la función de distribución acumulativa Φ de la $N(0,1)$.



5. $\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$ vector aleatorio bidimensional.

$f_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

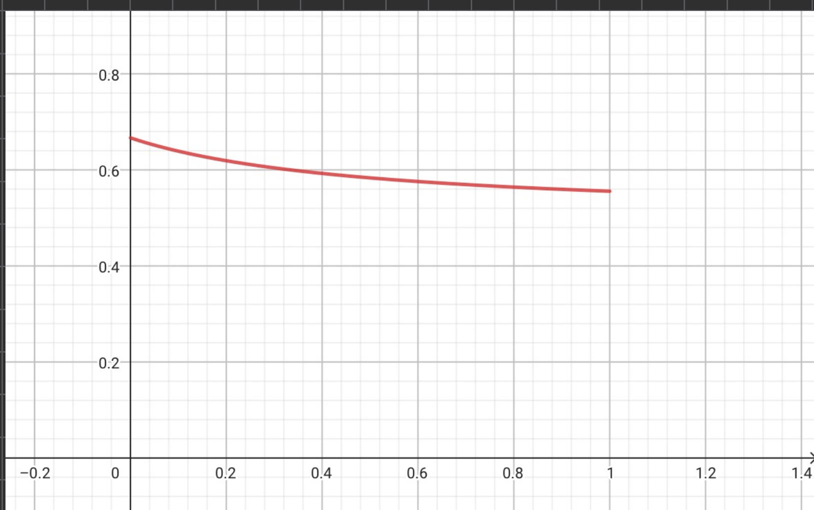
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } x\in(0,1) \text{ e } y\in(0,1) \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Sabemos que la función de regresión es:

$g: (0,1) \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{x + 2/3}{2x + 1}$$

i) Graficar la función de regresión $g: (0,1) \to \mathbb{R}$



ii) Verificar que la función de cedasticidad es:

$h: (0,1) \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \frac{2x^2 + 2x + 1/3}{6(2x+1)^2}$$

1) Calculamos $f_X(x)$:

$$\boxed{f_X(x)} = \int_0^1 (x+y)\,dy = \int_0^1 x\,dy + \int_0^1 y\,dy = xy\Big|_0^1 + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \boxed{x + \frac{1}{2}}$$

2) Calculamos la f. de cedasticidad ($h(x)$):

$$\boxed{h(x)} = var(Y|X) = E(Y^2|X) - E^2(Y|X) = \int_0^1 y^2 \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}\,dy - \frac{(x+2/3)^2}{(2x+1)^2} = \frac{1}{x+1/2}\int_0^1 (y^2 x + y^3)\,dy - \frac{x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x+1/2}\left[\int_0^1 y^2 x\,dy + \int_0^1 y^3\,dy\right] - \frac{x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}}{(2x+1)^2} = \frac{1}{x+1/2}\left(x\,\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{y^4}{4}\Big|_0^1\right) - \frac{x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x+1/2}\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{4}\right) - \frac{x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}}{(2x+1)^2} = \frac{\frac{x}{3}+\frac{1}{4}}{x+1/2} - \frac{x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}}{(2x+1)^2} = \frac{\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}}{2x+1} - \frac{x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{(2x+1)\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\right) - x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{9}}{(2x+1)^2} = \frac{\frac{4}{3}x^2 + x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} - x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{9}}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{18}}{(2x+1)^2}\,\frac{6}{6} = \frac{\frac{6}{3}x^2+\frac{6}{3}x+\frac{6}{18}}{6(2x+1)^2} = \boxed{\frac{2x^2+2x+1/3}{6(2x+1)^2}}$$

iii) Graficar la función de cedasticidad $h:(0,1) \to \mathbb{R}$