ECONOMETRIA I
TAREA 9
MAESTRIA EN ECONOMIA, 2023-2025
EL COLEGIO DE MEXICO

Profr. Eneas A. Caldiño García
Entrega: 20 de marzo de 2024

1. Se quiere explicar la variable aleatoria Y en función de las variables explicativas X_1, X_2 y X_3.

Se tienen las siguientes observaciones:

$$\left\{ \begin{pmatrix} Y_i \\ X_{i1} \\ X_{i2} \\ X_{i3} \end{pmatrix} \right\}_{i=1}^{10} = \left\{ \begin{pmatrix} 0.2 \\ 2.4 \\ -1.61 \\ 5.7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.0 \\ 3.2 \\ -3.04 \\ 6.4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.8 \\ -3.71 \\ 7.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.3 \\ 1.2 \\ 1.64 \\ 4.0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0.6 \\ 4.2 \\ 2.6 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 2.1 \\ -2.2 \\ 0.28 \\ 5.4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.8 \\ -1.4 \\ 1.06 \\ 4.8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.6 \\ 0.8 \\ 2.10 \\ 3.8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.2 \\ 1.0 \\ 1.36 \\ 4.2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.6 \\ -1.8 \\ -1.2 \\ 6.2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{X}_i \equiv \begin{pmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ X_{i3} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ X_{i1} \\ X_{i2} \\ X_{i3} \end{pmatrix} \qquad i = 1,2,..,10$$

$$\mathbf{X} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{X}'_1 \\ 1 & \mathbf{X}'_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{X}'_{10} \end{pmatrix}_{10\times4} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_{10} \end{pmatrix}_{10\times4}$$

i) Calcular det($\mathbf{X}'\mathbf{X}$)

ii) ¿Son las 4 columnas de $\mathbf{X}$ vectores linealmente independientes? En caso afirmativo encontrar cuál(es) columna(s) es(son) una combinación lineal de otras.

iii) ¿Existe $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$?

iv) Tomar cualesquiera cinco *renglones* de la matriz **X**. ¿Son linealmente independientes? ¿Por qué?

2. Comprobar que si **A** y **D** son matrices simétricas tales que las inversas que aparecen en la expresión dada existen, entonces

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' & \mathbf{D} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{F}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}' & -\mathbf{F}\mathbf{E}^{-1} \\ -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}' & \mathbf{E}^{-1} \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{E} \equiv \mathbf{D} - \mathbf{B}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ y $\mathbf{F} \equiv \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{F}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}' & -\mathbf{F}\mathbf{E}^{-1} \\ -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}' & \mathbf{E}^{-1} \end{pmatrix} = \,..\, = \mathbb{I}$$

3. Valor verdadero de **b**.

$$\left\{ \begin{pmatrix} Y_j \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{n} \quad \text{vectores aleatorios i.i.d.}$$

La distribución conjunta del vector aleatorio $\begin{pmatrix} Y_j \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix}$ es tal que satisface:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{U} \qquad E[\mathbf{U}|\mathbf{X}] = \mathbf{0}$$

$$\text{Prob}[\text{rango}(\mathbf{X}_{nxk}) = k] = 1$$

i) Demostrar (en un renglón) que

$$E[\mathbf{U}|\mathbf{X}] = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; E[\mathbf{X}'\mathbf{U}] = \mathbf{0}$$

ii) En clase se demostró que partiendo de $E[\mathbf{U}|\mathbf{X}] = \mathbf{0}$ se tiene que

$$\mathbf{b} = (E[\mathbf{X}'\mathbf{X}])^{-1}E[\mathbf{X}'\mathbf{Y}].$$

Esta vez, partiendo de $E[\mathbf{X}'\mathbf{U}] = \mathbf{0}_{kx1}$, demostrar que $\mathbf{b} = (E[\mathbf{X}'\mathbf{X}])^{-1}E[\mathbf{X}'\mathbf{Y}]$.

Sugerencia:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{U}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{X}'\mathbf{Y} = \mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{b} + ?$$

$$\Rightarrow \quad \ldots$$

4. $\left\{ \begin{pmatrix} Y_j \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{n}$ vectores aleatorios i.i.d. de dimensión 3.

$$E\left[\begin{pmatrix} Y_j \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{var}\left[\begin{pmatrix} Y_j \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 & -0.2 \\ 0.4 & 1.0 & -0.8 \\ -0.2 & -0.8 & 2.0 \end{pmatrix}, \quad j = 1,2,..,n$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{b} + \mathbf{U} \qquad E[\mathbf{U}|\mathbf{X}] = \mathbf{0}_{nx1}$$

(i.e. $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + U_i \qquad E[U_i|X_{i1},X_{i2}] = 0 \qquad i = 1,2,..,n$

$\mathrm{Prob}[\mathrm{rango}(\mathbf{X}_{nx3}) = 3] = 1$)

i) Encontrar el vector $\mathbf{b}$ usando las fórmulas:

a) $\mathbf{b} = (E(\mathbf{X}'\mathbf{X}))^{-1}E(\mathbf{X}'\mathbf{Y})$

b) $\mathbf{b} = (E(\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j'))^{-1}E(\mathbf{x}_jY_j)$, donde $\mathbf{x}_j \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix}$, $j = 1,2,..,n$

c) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mu_Y - \Sigma_{YX}\Sigma_X^{-1}\mu_X \\ \Sigma_X^{-1}\Sigma_{YX}' \end{pmatrix}$, $j = 1,2,..,n$

donde $\mu_Y = E(Y_j)$, $\mu_X = E(\mathbf{X}_j)$, $\Sigma_X = \mathrm{var}(\mathbf{X}_j)$, $\Sigma_{YX} = \mathrm{cov}(Y_j,\mathbf{X}_j)$ $j = 1,2,..,n$

ii) Calcular $\sigma_u^2 \equiv \mathrm{var}(U_j) = E(U_j^2)$ usando la fórmula $\sigma_u^2 = \sigma_Y^2 - \Sigma_{YX}\Sigma_X^{-1}\Sigma_{YX}'$, donde $\sigma_y^2 = \mathrm{var}(Y_j) \quad j = 1,2,..,n$

iii) Generar (usando algún paquete econométrico) una muestra i.i.d.

$$\left\{\begin{pmatrix} Y_i \\ X_{1i} \\ X_{2i} \end{pmatrix}\right\}_{i=1}^{400} \quad \text{donde} \quad \begin{pmatrix} Y_i \\ X_{1i} \\ X_{2i} \end{pmatrix} \sim N_3\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 & -0.2 \\ 0.4 & 1.0 & -0.8 \\ -0.2 & -0.8 & 2.0 \end{pmatrix}\right].$$

iv) Con los datos obtenidos en iii) estimar el vector **b** usando los siguientes estimadores obtenidos por el principio de analogía:

a) $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$

b) $\hat{\mathbf{b}} = \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j'\right]^{-1}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{x}_j Y_j$, donde $\mathbf{x}_j \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix}$, $j = 1,2,..,n$

c) $\hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_y - \hat{\Sigma}_{yx}\hat{\Sigma}_x^{-1}\hat{\Sigma}_x \\ \hat{\Sigma}_x^{-1}\hat{\Sigma}_{yx}' \end{bmatrix}$, $j = 1,2,..,n$

donde $\hat{\mu}_y = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j$, $\hat{\mu}_x = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j$, $\hat{\Sigma}_x = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{X}_j - \hat{\mu}_x)((\mathbf{X}_j - \hat{\mu}_x)'$

$\hat{\Sigma}_{yx} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \hat{\mu}_y)((\mathbf{X}_j - \hat{\mu}_x)'$

v) Con los datos obtenidos en iii) estimar $\hat{\sigma}_u^2$ usando los siguientes estimadores obtenidos por el principio de analogía:

a) $\hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{U}_j^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \hat{\mathbf{b}}'\mathbf{x}_j)^2$

b) $\hat{\sigma}_u^2 = \hat{\sigma}_y^2 - \hat{\Sigma}_{yx}\hat{\Sigma}_x^{-1}\hat{\Sigma}_{yx}'$

donde $\hat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \hat{\mu}_y)^2$