Elección Discreta
Tarea 1
Maestría en Economía, 2023-2025
El Colegio de México

Max Brando Serna Leyva

Elección Discreta

Tarea 1

Fecha de entrega: viernes 14 de febrero via Teams antes de clase (11:59 pm).

1. (*Simulando elecciones*)

   En las siguientes preguntas asuma que hay tres tipos de consumidores s_1, s_2, s_3, de cada uno 50 (o sea 150 consumidores en total), $|B| = 4$, y que se sabe $v(x_j, s_n) = 3 + 2\log(y_n - p_j)$ donde y_n es el ingreso observado del consumidor de tipo n, $y_n \in \{500, 4000, 10000\}$, y p_j el precio de la alternativa j, $p_j = 100 * j$, $j = 1, \dots, 4$. Además, asuma que la utilidad no observada es i.i.d. Gumbel

   (a) Escriba pseudo-código y código que simule cada consumidor directamente, generando una realizacion de la utilidad no observada. Esto es, la utilidad del consumidor n por consumir la alternativa j es $v_{jn} + \epsilon_{jn}$ donde ϵ_{jn} es una realizacion de la v.a. distribuida Gumbel con parámetros $\mu = 0, \beta = 1$. La alternativa elegida por el consumidor es aquella que le da mayor utilidad total (observada mas no observada).

   A esto le llamamos episodio. Simule 10000 episodios de elección, re muestreando los valores de la utilidad no observada para cada episodio. Note que en cada episodio, para cada consumidor necesita muestrear cuatro valores para la parte no observada de la utilidad. Calcule la demanda de cada alternativa en cada episodio. Grafique la distribución de la demanda de cada alternativa y encuentre su promedio y desviación estandar.

   (b) Escriba pseudo-código y código que simule las elecciones de los 150 consumidores, asumiendo ahora que cada elección es una realizacion de una variable aleatoria multinomial con las probabilidades dadas por el logit condicional (por qué es el supuesto correcto?).

   Repita esto 10000 episodios. Para cada episodio, calcule la demanda de cada alternativa. Grafique la distribución de la demanda de cada alternativa y encuentre su promedio y desviación estandar a través de todos los episodios.

   (c) Discuta las simulitudes y diferencias entre (a) y (b).

2. (*Agregación*) Suponga $s_n \in S \subset \mathbb{R}^m$, $|S| < \infty$, esto es, hay un número finito de tipos de consumidores (acorde a sus características observadas), y en la población hay un número M_n de consumidores de tipo n. Entonces el número total de consumidores es $M_1 + M_2 + \cdots + M_{|S|}$. Ademas, suponga $|B|$ es el número de alternativas (obviamente finito, exhaustivo y excluyente), y cada alternativa puede ser producida mágicamente (oferta ilimitada).

   Asuma que la probabilidad de que un consumidor con caracteristicas observadas s_n elija (consuma) la alternativa x_j cuando enfrenta el conjunto de alternativas B es $P(x_j|s_n, B) = p_{nj} > 0$ para todo n, j.

   (a) Encuentre una expresión analítica para la demanda esperada de cada alternativa.

   (b) Usando esta expresión, calcule la demanda esperada de cada alternativa en el ejercicio 2. Interprete.

3. (*Elasticidades*) Suponga que $P(x_j|s_n, A) = \frac{e^{v(x_j,s_n)}}{\sum_{k\in A} e^{v(x_k,s_n)}}$, que $x_j \in \mathbb{R}^\ell$, $s_n \in \mathbb{R}^m$, $\ell, m \in \mathbb{N}$, $v : \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$. Asuma que v es tan diferenciable como sea necesario. Note que $x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{j\ell}) = (x_{jr})_{r=1}^{\ell}$ es un el vector de caracteristicas de un producto.

3. (*Elasticidades*) Suponga que $P(x_j|s_n, A) = \frac{e^{v(x_j,s_n)}}{\sum_{k\in A} e^{v(x_k,s_n)}}$, que $x_j \in \mathbb{R}^\ell$, $s_n \in \mathbb{R}^m$, $\ell, m \in \mathbb{N}$, $v : \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$. Asuma que v es tan diferenciable como sea necesario. Note que $x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{j\ell}) = (x_{jr})_{r=1}^{\ell}$ es un el vector de caracteristicas de un producto.

   (a) (Sustitución cruzada) Considere $i \neq j$, $x_i, x_j \in A$. Muestre que

   $$\frac{\partial P(x_i|s_n, A)}{\partial x_{jr}} = -\text{Prob}(x_i|s_n, A)\text{Prob}(x_j|s_n, A)\frac{\partial v(x_j, s_n)}{\partial x_{jr}}$$

   Interprete este resultado en términos económicos.

   (b) (Sustitución propia) Considere $x_i \in A$. Muestre que:

   (c) Muestre que:

   $$\sum_{i\in A} \frac{\partial P(x_i|s_n, A)}{\partial x_{jr}} = 0.$$

   Interprete este resultado en términos económicos.

4. (*IIA es MUY restrictiva*)[1] Considere el conjunto de alternativas $B = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

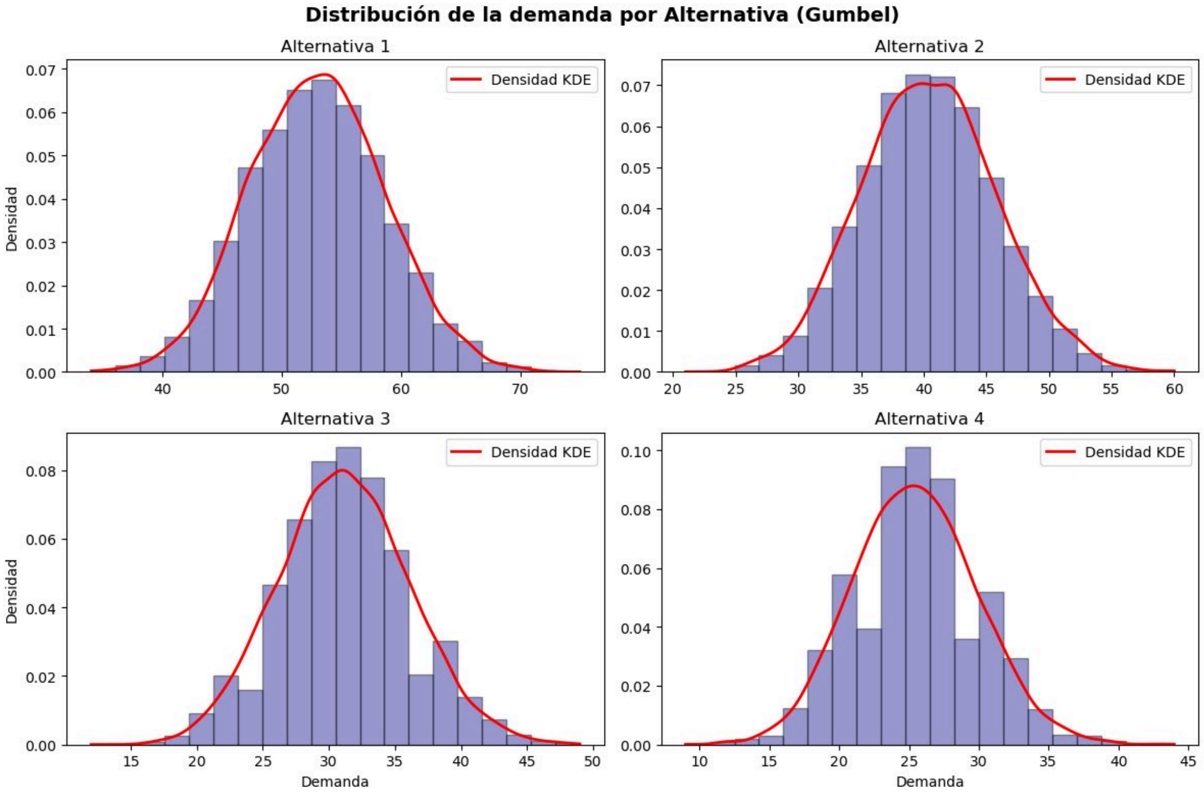
   (a) Liste los posibles conjuntos de alternativas $A \neq \emptyset$, $A \subseteq B$. Asuma exhaustividad y exclusividad en cada situacion de elección A. Cuántos parámetros libres tiene el sistema $\{\text{Prob}(\cdot|A)\}_{A\subseteq B}$?.

   Nota: Por parámetros entiéndase probabilidades $\text{Prob}(\cdot|A)$.Un parámetro NO es libre si se puede escribir en función de otros parámetros ”primitivos”. Por ejemplo, en $p + q = 1$, $p, q \in \mathbb{R}$, solo hay un parámetro libre.

   (b) Asuma además $\{\text{Prob}(\cdot|B)\}$ satisface IIA. Cuántos parámetros libres tiene ahora el sistema $\{\text{Prob}(\cdot|A)\}_{A\subseteq B}$?

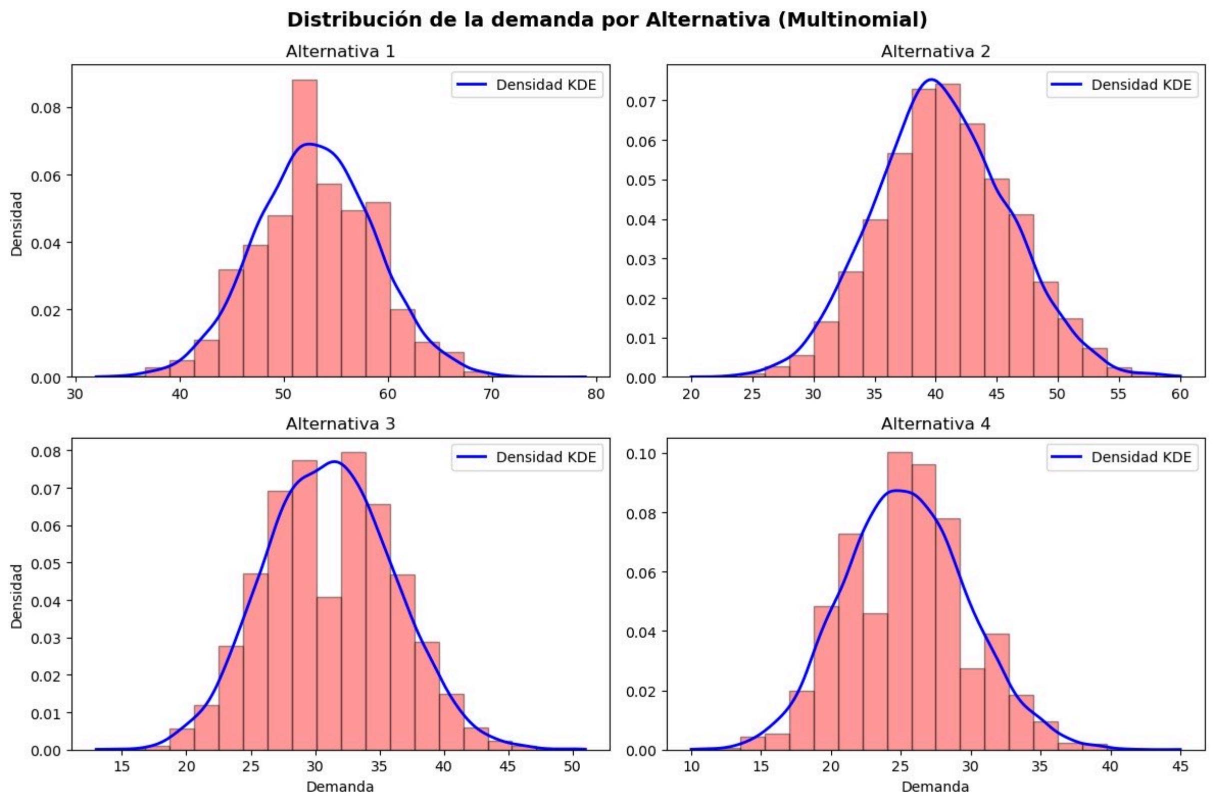
   (c) Compare sus respuestas a los incisos anteriores. En qué sentido es IIA MUY restrictiva?

[1] Basado en Dagsvik (2000).


Distribución de la demanda por Alternativa (Gumbel)
Alternativa 1
Alternativa 2
Alternativa 3
Alternativa 4
Densidad KDE
Densidad
Demanda
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
0.10
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
70

Demanda por Alternativa: Media y Desviación Estándar (Gumbel)

Alternativa	Demanda Promedio	Desviación Estándar
1	52.99	5.63
2	40.43	5.4
3	31.16	4.97
4	25.42	4.45



Distribución de la demanda por Alternativa (Multinomial)
Alternativa 1
Alternativa 2
Alternativa 3
Alternativa 4
Densidad KDE
Densidad
Demanda

Demanda por Alternativa: Media y Desviación Estándar (Multinomial)

Alternativa	Demanda Promedio	Desviación Estándar
1	53.06	5.67
2	40.45	5.44
3	31.12	4.95
4	25.37	4.44

En general, las gráficas de los histogramas de las demandas por cada alternativa son muy similares cuando comparamos las generadas con una distribución Gumbel contra las generadas con una multinomial.

2. (*Agregación*) Suponga $s_n \in S \subset \mathbb{R}^m$, $|S| < \infty$, esto es, hay un número finito de tipos de consumidores (acorde a sus características observadas), y en la población hay un número M_n de consumidores de tipo n. Entonces el número total de consumidores es $M_1 + M_2 + \cdots + M_{|S|}$. Ademas, suponga $|B|$ es el número de alternativas (obviamente finito, exhaustivo y excluyente), y cada alternativa puede ser producida mágicamente (oferta ilimitada).

Asuma que la probabilidad de que un consumidor con caracteristicas observadas s_n elija (consuma) la alternativa x_j cuando enfrenta el conjunto de alternativas B es $P(x_j|s_n, B) = p_{nj} > 0$ para todo n, j.

(a) Encuentre una expresión analítica para la demanda esperada de cada alternativa.

(b) Usando esta expresión, calcule la demanda esperada de cada alternativa en el ejercicio 2. Interprete.

$y_{nm} = (y_{1nm}, y_{2nm}, \ldots, y_{jnm}, \ldots, y_{Bnm})$,

$y_{jnm} \in \{0, 1\}$ $\forall n \in |S|$, $\forall j \in B$ y $\forall m \in M_n$

$\boxed{(a)}$ $\mathbb{P}[x_j | s_n, B] = \mathbb{P}[y_{jnm} = 1 | s_n, B] = p_{nj}$

$\Rightarrow \mathbb{P}[y_{jnm} = 0 | s_n, B] = 1 - p_{nj}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}[y_{jnm} = k] = f_{Y_{jn}}(k) = \begin{cases} p_{nj} & \text{si } k = 1 \\ 1 - p_{nj} & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $y_{jnm} \sim \text{BERNOULLI}(p_{nj})$; es decir, la demanda individual de un consumidor del tipo n por la alternativa j, y_{jnm}, es una variable aleatoria que distribuye Bernoulli.

Si $X_i \sim BER(p)$, $\Rightarrow \sum_{i}^{n} X_i \sim BIN(n,p)$

Por tanto, la suma de las demandas de todos los consumidores del tipo n por la alternativa j, $Y_{nj} = \sum_{m \in M_n} y_{jnm}$, es una variable aleatoria que distribuye binomial:

$$y_{jnm} \sim BER(p_{nj}) \Rightarrow Y_{nj} = \sum_{m \in M_n} y_{jnm} \sim BIN(M_n, p_{nj})$$

Por tanto, la demanda esperada del tipo n por la alternativa j es:

$$E[Y_{nj}] = M_n p_{nj}$$

Entonces, la demanda esperada de la alternativa j se obtiene a través de la agregación de $E[Y_{nj}]$ entre todos los tipos, $n \in |S|$:

$$\boxed{E[Y_j] = \sum_{n \in |S|} M_n p_{nj}}$$

$\boxed{(b)}$ La demanda esperada calculada de manera analítica es extremadamente similar a las calculadas mediante simulaciones en Python. Esto seguramente se debe a que el número de "episodios" en el ejercicio 1 son muy altas, por lo que, con base en teoría asintótica, podríamos esperar que la demanda media muestral sea igual o muy similar a la teórica, como es el caso.

Demanda Teórica Esperada por Alternativa

Alternativa	Demanda Teórica Esperada
1	53.06
2	40.45
3	31.2
4	25.29

3. (*Elasticidades*) Suponga que $P(x_j|s_n, A) = \frac{e^{v(x_j,s_n)}}{\sum_{k\in A} e^{v(x_k,s_n)}}$, que $x_j \in \mathbb{R}^\ell$, $s_n \in \mathbb{R}^m$, $\ell, m \in \mathbb{N}$, $v : \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$. Asuma que v es tan diferenciable como sea necesario. Note que $x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{j\ell}) = (x_{jr})_{r=1}^{\ell}$ es un el vector de caracteristicas de un producto.

(a) (Sustitución cruzada) Considere $i \neq j$, $x_i, x_j \in A$. Muestre que

$$\frac{\partial P(x_i|s_n, A)}{\partial x_{jr}} = -\text{Prob}(x_i|s_n, A)\text{Prob}(x_j|s_n, A)\frac{\partial v(x_j, s_n)}{\partial x_{jr}}$$

Interprete este resultado en términos económicos.

(b) (Sustitución propia) Considere $x_i \in A$. Muestre que:

$$\sum_{i\in A} \frac{\partial P(x_i|s_n, A)}{\partial x_{jr}} = 0.$$

Interprete este resultado en términos económicos.

$\boxed{(a)}$

$$\frac{\partial \mathbb{P}[x_i|s_n, A]}{\partial x_{jr}} = \frac{\left(\sum_{k\in A} e^{v(x_k,s_n)}\right) e^{v(x_i,s_n)} \cancel{\frac{\partial v(x_i,s_n)}{\partial x_{jr}}} - e^{v(x_i,s_n)} e^{v(x_j,s_n)} \frac{\partial v(x_j,s_n)}{\partial x_{jr}}}{\left(\sum_{k\in A} e^{v(x_k,s_n)}\right)^2}$$

$$\frac{\partial v(x_i,s_n)}{\partial x_{jr}} = 0 \qquad = -\frac{e^{v(x_i,s_n)} e^{v(x_j,s_n)} \frac{\partial v(x_j,s_n)}{\partial x_{jr}}}{\left(\sum_{k\in A} e^{v(x_k,s_n)}\right)^2}$$

$$= -\frac{e^{v(x_i,s_n)}}{\sum_{k\in A} e^{v(x_k,s_n)}} \frac{e^{v(x_j,s_n)}}{\sum_{k\in A} e^{v(x_k,s_n)}} \frac{\partial v(x_j,s_n)}{\partial x_{jr}}$$

$$= -\mathbb{P}[x_i, s_n|A]\, \mathbb{P}[x_j, s_n|A] \frac{\partial v(x_j,s_n)}{\partial x_{jr}} \qquad \blacksquare$$

Interpretación:

Dependiendo del signo de $\frac{\partial v(x_j,s_n)}{\partial x_{jr}}$, la probabilidad de elegir la alternativa $i \neq j$ responderá de manera ponderada por las probabilidades de elegir i y de elegir j.

Supongamos que $\Delta x_{jr} > 0$:

- Si $\frac{\partial v(x_j,s_n)}{\partial x_{jr}} > 0$, la prob. de elegir i disminuye, pues el aumento del atributo r de la alternativa j, lo cual es atractivo para el consumidor, le lleva a consumir menos de i y más de j.
- Si " " < 0, la prob. de i aumenta, pues el incremento de r en j no es atractivo.

$\boxed{\text{(b)}}$ (Hard way) Notemos que:

$$\sum_{i\in A}\frac{\partial \mathbb{P}[x_i|s_n,A]}{\partial x_{jr}} = \frac{\partial \mathbb{P}[x_j|s_n,A]}{\partial x_{jr}} + \sum_{i\neq j\in A}\frac{\partial \mathbb{P}[x_i|s_n,A]}{\partial x_{jr}}$$

En el inciso anterior calculamos el iésimo miembro del segundo elemento del RHS de la igualdad. Nos falta calcular el primer elemento:

$$\frac{\partial \mathbb{P}[x_j|s_n,A]}{\partial x_{jr}} = \frac{\left(\sum_{k\in A} e^{v(x_k,s_n)}\right) e^{v(x_j,s_n)}\frac{\partial v(x_j,s_n)}{\partial x_{jr}} - e^{v(x_j,s_n)}\, e^{v(x_j,s_n)}\frac{\partial v(x_j,s_n)}{\partial x_{jr}}}{\left(\sum_{k\in A} e^{v(x_k,s_n)}\right)^2}$$

$$= \frac{\cancel{\left(\sum_{k\in A} e^{v(x_k,s_n)}\right)} e^{v(x_j,s_n)}\frac{\partial v(x_j,s_n)}{\partial x_{jr}}}{\left(\sum_{k\in A} e^{v(x_k,s_n)}\right)^{\cancel{2}}} - \frac{\left(e^{v(x_j,s_n)}\right)^2 \partial v(x_j,s_n)}{\left(\sum_{k\in A} e^{v(x_k,s_n)}\right)^2}$$

$$= \mathbb{P}[x_j,s_n|A]\frac{\partial v(x_j,s_n)}{\partial x_{jr}} - \mathbb{P}[x_j,s_n|A]^2\frac{\partial v(x_j,s_n)}{\partial x_{jr}}$$

$$= \mathbb{P}[x_j,s_n|A]\frac{\partial v(x_j,s_n)}{\partial x_{jr}}\left(1 - \mathbb{P}[x_j,s_n|A)\right.$$

$$= \Omega \quad (i)$$

Usando lo que calculamos en (a), obtengamos el segundo elemento

$$\sum_{i\neq j\in A}\frac{\partial \mathbb{P}[x_i|s_n,A]}{\partial x_{jr}} = -\sum_{i\neq j\in A}\mathbb{P}[x_i,s_n|A]\,\mathbb{P}[x_j,s_n|A]\frac{\partial v(x_j,s_n)}{\partial x_{jr}}$$

$$= -\mathbb{P}[x_j,s_n|A]\frac{\partial v(x_j,s_n)}{\partial x_{jr}}\sum_{i\neq j\in A}\mathbb{P}[x_i,s_n|A]$$

$$= -\mathbb{P}[x_j,s_n|A]\frac{\partial v(x_j,s_n)}{\partial x_{jr}}\left(1 - \mathbb{P}[x_j,s_n|A)\right.$$

$$= -\Omega \quad (ii)$$

$$\sum_{i\in A} \mathbb{P}[x_i, s_n | A] = \sum_{i\in A} \frac{e^{V(x_i,s_n)}}{\sum_{k\in A} e^{V(x_k,s_n)}} = \frac{\sum_{i\in A} e^{V(x_i,s_n)}}{\sum_{k\in A} e^{V(x_k,s_n)}} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i\neq j\in A} \mathbb{P}[x_i,s_n|A] = \left(\sum_{i\in A}\mathbb{P}[x_i,s_n|A]\right) - \mathbb{P}[x_j,s_n|A]$$

$$= \underline{1 - \mathbb{P}[x_j,s_n|A]} \;//$$

Por tanto, usando (i) y (ii):

$$\sum_{i\in A}\frac{\partial \mathbb{P}[x_i|s_n,A]}{\partial x_{jr}} = \frac{\partial \mathbb{P}[x_j|s_n,A]}{\partial x_{jr}} + \sum_{i\neq j\in A} \frac{\partial\mathbb{P}[x_i|s_n,A]}{\partial x_{jr}}$$

$$= \Omega + (-\Omega) = 0 \;\blacksquare$$

(Easy way) Otra forma:

$$\sum_{i\in A} \mathbb{P}[x_i, s_n | A] = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i\in A}\frac{\partial \mathbb{P}[x_i,s_n|A]}{\partial x_{jr}} \overset{\text{linealidad de } \partial/\partial\cdot}{=} \frac{\partial}{\partial x_{jr}} \sum_{i\in A}\mathbb{P}[x_i,s_n|A] = \frac{\partial}{\partial x_{jr}}(1)$$

$$= 0 \;\blacksquare$$

Interpretación:

Los cambios en las probabilidades de elegir entre las distintas alternativas podrían ser positivos para algunas y negativos para otras, lo que lleva a que en el agregado, se cancelen entre ellos mismos.

Es decir, como asumimos que A es exhaustivo (solo puedes elegir 1 cosa), para ser más (menos) propenso a elegir una alternativa, tienes que ser igualmente menos (más) propenso a elegir de entre el resto de alternativas.

4. (*IIA es MUY restrictiva*)[1] Considere el conjunto de alternativas $B = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

(a) Liste los posibles conjuntos de alternativas $A \neq \emptyset$, $A \subseteq B$. Asuma exhaustividad y exclusividad en cada situacion de elección A. Cuántos parámetros libres tiene el sistema $\{\text{Prob}(\cdot|A)\}_{A\subseteq B}$?.

Nota: Por parámetros entiéndase probabilidades $\text{Prob}(\cdot|A)$.Un parámetro NO es libre si se puede escribir en función de otros parámetros "primitivos". Por ejemplo, en $p+q=1, p,q \in \mathbb{R}$, solo hay un parámetro libre.

(b) Asuma además $\{\text{Prob}(\cdot|B)\}$ satisface IIA. Cuántos parámetros libres tiene ahora el sistema $\{\text{Prob}(\cdot|A)\}_{A\subseteq B}$?

(c) Compare sus respuestas a los incisos anteriores. En qué sentido es IIA MUY restrictiva?

$\boxed{(a)}$ $B = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Entonces:

De tamaño 1:

$B = A^{(4)} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 3 , $|A^{(4)}| - 1 = 3$

De tamaño 3:

$A_1^{(3)} = \{x_1, x_2, x_3\}$,   2
$A_2^{(3)} = \{x_1, x_2, x_4\}$,   2
$A_3^{(3)} = \{x_1, x_3, x_4\}$,   2
$A_4^{(3)} = \{x_2, x_3, x_4\}$ 2

$\Big\}$ 8 , $\sum_{i=1}^{4} (|A_i^{(4)}| - 1) = 8$

De tamaño 2:

$A_1^{(2)} = \{x_1, x_2\}$, $A_4^{(2)} = \{x_2, x_3\}$, $A_6^{(2)} = \{x_3, x_4\}$
$A_2^{(2)} = \{x_1, x_3\}$, $A_5^{(2)} = \{x_2, x_4\}$, $\dots = 6$
$A_3^{(2)} = \{x_1, x_4\}$,

De tamaño 1:

$A_1^{(1)} = \{x_1\}$, $A_2^{(1)} = \{x_2\}$,
$A_3^{(1)} = \{x_3\}$, $A_4^{(1)} = \{x_4\}$ 0 libres (exhaustividad)

Si $|A| = 4$, entonces, como $\sum_{j\in|A|} \mathbb{P}[x_j|A] = 1$, tenemos que:

$$\mathbb{P}(x_1|A^{(1)}) = 1 - \mathbb{P}(x_2|A^{(4)}) - \mathbb{P}(x_3|A^{(4)}) - \mathbb{P}(x_4|A^{(4)})$$
$$= 1 - P_1^{(4)} - P_2^{(4)} - P_3^{(4)}$$

$\Rightarrow$ Hay $|A| - 1$ parámetros libres.

Si $|A|=3$, habrá $|A|-1=2$ parámetros libres. Lo mismo para cuando $|A|=2$. Si $|A|=1$, como asumimos exhaustividad, la alternativa se elige con probabilidad completa, por lo que no hay parámetros libres.

∴ Hay 17 parámetros libres en el sistema $\{P[\cdot|A]\}_{A\subseteq B}$

(b) IIA nos dice que, dado un conjunto B de alternativas tal que $A' \subseteq A \subseteq B$, $\mathbb{P}[\cdot|A'] > 0$, $\mathbb{P}[\cdot|B] > 0$:

El sistema $\{P(\cdot|B)\}$ satisface IIA

$$\iff$$

$$\mathbb{P}[x_j|B] = P[x_j|A] \sum_{z\in A} \mathbb{P}[z|B] \quad \forall x_j \in A' \text{ y } \forall A \subseteq B$$

Es decir, IIA implica que:

$$\mathbb{P}[x_j|B] = P[x_j|A] \sum_{z\in A} \mathbb{P}[z|B]$$

$$\iff \mathbb{P}[x_j|A] = \frac{\mathbb{P}[x_j|B]}{\sum_{z\in A} \mathbb{P}[z|B]} \quad \forall x_j \in A' \text{ y } \forall A \subseteq B$$

Por lo tanto, en nuestro ejemplo, es posible expresar la probabilidad de elegir la alternativa j dado cualquier subconjunto $A \subseteq B$ en términos del vector:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}[x_1|B] \\ \mathbb{P}[x_2|B] \\ \mathbb{P}[x_3|B] \\ \mathbb{P}[x_4|B] \end{pmatrix}$$

Y como $\mathbb{B}$ es exhaustivo:

$$1 = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}[x_i | \mathbb{B}]$$

3 variables

$$\iff \mathbb{P}[x_4 | \mathbb{B}] = 1 - \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}[x_i | \mathbb{B}]$$

Es decir, IIA reduce el número de parámetros a 3.

(c) IIA es restrictiva en el sentido de que reduce el número de parámetros libres de 17 a 3.