ii) Generar una muestra $\left\{\begin{pmatrix} U_t \\ I_t \end{pmatrix}\right\}_{t=1}^{200}$ de vectores aleatorios i.i.d., donde $U_t \sim N(0, 0.2)$, $I_t \sim UNIF(0, 1)$, tales que $cov(I_t, U_t) = 0 \; \forall t \in \{1, 2, \ldots, 200\}$

```r
set.seed(1)
n <- 200
U <- rnorm(n, 0, sd = sqrt(0.2))
I <- runif(n, 0, 1)
round(cov(I,U), 2)
```

```
## [1] 0
```

---

iii) Sean $\alpha = 1.2$ y $\beta = 0.8$. Usando las muestras obtenidas en i) generar la muestra correspondiente $\left\{\begin{pmatrix} C_t \\ Y_t \end{pmatrix}\right\}_{t=1}^{200}$

Primero notemos que como

$$
\begin{aligned}
C_t &= \alpha + \beta Y_t + U_t \\
Y_t &= C_t + I_t
\end{aligned}
$$

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
& Y_t = \alpha + \beta Y_t + U_t + I_t \\
\implies & Y_t = \frac{1}{1-\beta}(\alpha + U_t + I_t)
\end{aligned}
$$

Construyamos entonces los vectores aleatorios:

```r
alpha <- 1.2
beta <- 0.8

Y <- 1/(1-beta) * (alpha + U + I)
C <- alpha + beta*Y + U
```

---

iv) Usando los datos generados en ii) estimar por el método de momentos los parámetros $\alpha$ y $\beta$ de la ecuación

$$C_t = \alpha + \beta Y_t + U_t, \quad t = 1, 2, \ldots, 200$$

En i) calculamos los estimadores del método de momentos. Por lo tanto:

```r
(beta_MoM <- mean((I - mean(I)) * (C - mean(C))) / mean((I - mean(I)) * (Y - mean(Y))))
```

```
## [1] 0.8097732
```

```r
(alpha_MoM <- mean(C) - beta_MoM * mean(Y))
```

```
## [1] 1.131101
```

Es decir,

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{MM} \\ \hat{\beta}_{MM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1311007 \\ 0.8097732 \end{pmatrix}$$

Lo anterior coincide con los estimadores vistos en clase, puesto que, aunque se calcularon de forma matricial, los estimadores tienen la misma fórmula:

```r
Z <- matrix(c(rep(1,n), I), ncol = 2)
X <- matrix(c(rep(1,n), Y), ncol = 2)
solve(t(Z)%*%X)%*%(t(Z)%*%C)
```

```
##           [,1]
## [1,] 1.1311007
## [2,] 0.8097732
```

---

v) Dar un intervalo de confianza de $\beta$ con 90% de nivel de confianza.

Primero necesitamos un pivote para $\beta$. En clase vimos que

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{MM} \\ \hat{\beta}_{MM} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{D} N_2(0, V)$$

donde

$$V = G_0^{-1} S_0 (G_0^{-1})' \quad , \quad \hat{V}_T = \hat{G_0}^{-1} \hat{S}_0 (\hat{G_0}^{-1})'$$

y

$$\hat{G}_0 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t \\ -\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} I_t & -\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t I_t \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_0 = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_u^2 & -\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} I_t \hat{U}_t^2 \\ -\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} I_t \hat{U}_t^2 & -\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} I_t^2 \hat{U}_t^2 \end{pmatrix},$$

Haciendo $\mathrm{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n}\,\mathrm{R}\left(\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{MM} \\ \hat{\beta}_{MM} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{D} N(0, \mathrm{R}V\mathrm{R}') \\
\iff\ &\sqrt{n}\left(\mathrm{R}\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{MM} \\ \hat{\beta}_{MM} \end{pmatrix} - \mathrm{R}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{D} N(0, \mathrm{R}V\mathrm{R}') \\
\iff\ &\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_{MM} - \beta\right) \xrightarrow{D} N(0, \mathrm{R}V\mathrm{R}')
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\sqrt{n}(\mathrm{R}\hat{V}_T\mathrm{R}')^{-1/2}(\hat{\beta}_{MM} - \beta) \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

Con este pivote podemos construir el intervalo de confianza:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[q_1 < \sqrt{n}(\mathrm{R}\widehat{V}_T\mathrm{R}')^{-1/2}(\widehat{\beta}_{MM} - \beta) < q_2\right] = 0.90 \\
\iff \ &\mathbb{P}\left[q_1\sqrt{\frac{\mathrm{R}\widehat{V}_T\mathrm{R}'}{n}} < \widehat{\beta}_{MM} - \beta < q_2\sqrt{\frac{\mathrm{R}\widehat{V}_T\mathrm{R}'}{n}}\right] = 0.90 \\
\iff \ &\mathbb{P}\left[-\widehat{\beta}_{MM} + q_1\sqrt{\frac{\mathrm{R}\widehat{V}_T\mathrm{R}'}{n}} < -\beta < -\widehat{\beta}_{MM} + q_2\sqrt{\frac{\mathrm{R}\widehat{V}_T\mathrm{R}'}{n}}\right] = 0.90 \\
\iff \ &\mathbb{P}\left[\widehat{\beta}_{MM} - q_1\sqrt{\frac{\mathrm{R}\widehat{V}_T\mathrm{R}'}{n}} > \beta > \widehat{\beta}_{MM} - q_2\sqrt{\frac{\mathrm{R}\widehat{V}_T\mathrm{R}'}{n}}\right] = 0.90 \\
\iff \ &\mathbb{P}\left[\widehat{\beta}_{MM} - q_2\sqrt{\frac{\mathrm{R}\widehat{V}_T\mathrm{R}'}{n}} < \beta < \widehat{\beta}_{MM} - q_1\sqrt{\frac{\mathrm{R}\widehat{V}_T\mathrm{R}'}{n}}\right] = 0.90
\end{aligned}
$$

El intervalo de confianza para $\beta$ es entonces:

$$
IC_\beta = \left(\widehat{\beta}_{MM} - q_{95\%}^{N(0,1)}\sqrt{\frac{\mathrm{R}\widehat{V}_T\mathrm{R}'}{n}}\ ,\ \widehat{\beta}_{MM} - q_{5\%}^{N(0,1)}\sqrt{\frac{\mathrm{R}\widehat{V}_T\mathrm{R}'}{n}}\right)
$$

Construyamos todo lo necesario para computar el intervalo, comenzando por $\mathrm{R}\widehat{V}_T\mathrm{R}'$

```r
Uhat <- C - alpha_MoM - beta_MoM*Y
R <- matrix(c(0,1), ncol = 2)
Ghat <- matrix(c(-1, -mean(Y),
                 -mean(I), -mean(Y*I)),
               ncol = 2,
               byrow = T)
Shat <- matrix(c(var(Uhat), -mean(I*Uhat^2),
                 -mean(I*Uhat^2), -mean(I^2 * Uhat^2)),
               ncol = 2,
               byrow = T)
Vhat <- solve(Ghat)%*%Shat%*%t(solve(Ghat))
```

Ahora tomemos los cuantiles de la normal estándar y calculemos el intervalo:

```r
significancia <- 0.1
q1 <- qnorm(significancia/2) # cuantil 5%
q2 <- qnorm(1 - significancia/2) # cuantil 95%

IC <- c(
  beta_MoM - q2 * sqrt(R%*%Vhat%*%t(R) / n),
  beta_MoM - q1 * sqrt(R%*%Vhat%*%t(R) / n)
)
IC
```

```
## [1] 0.7409439 0.8786025
```

Es decir, el intervalo de confianza de $\beta$ al 90% de confianza es:

$$
IC_\beta = \left(0.7409439\ ,\ 0.8786025\right)
$$

El cual contiene al valor verdadero de $\beta$.

---

vi) Probar la hipótesis

$$\text{H}_0 : \beta = 0.9 \quad \text{vs}$$
$$\text{H}_1 : \beta \neq 0.9$$

con nivel de significancia del 10%

El pivote usado en el inciso anterior se convierte, bajo $H_0$, en el estadístico siguiente:

$$Q = \sqrt{n}(\text{R}\hat{V}_T\text{R}')^{-1/2}(\hat{\beta}_{MM} - 0.9) \xrightarrow{D} N(0,1)$$

Alternativamente, podemos usar el estadístico de Wald:

$$W_n = n(\text{R}\hat{V}_T\text{R}')^{-1}(\hat{\beta}_{MM} - 0.9)^2 \xrightarrow{D} \chi^2_1$$

Los resultados cualitativos serían los mismos. Calculemos ambos:

```
(Q <- sqrt(n/R%*%Vhat%*%t(R))*(beta_MoM - 0.9))
```

```
##           [,1]
## [1,] -2.156201
```

```
(W_n <- n/R%*%Vhat%*%t(R)*(beta_MoM - 0.9)^2)
```

```
##          [,1]
## [1,] 4.649202
```

Los valores críticos serían

```
(q <- qnorm(significancia)) # para comparar contra Q
```

```
## [1] -1.281552
```

```
(w <- qchisq(significancia, df = 1, lower.tail = F)) # para comparar contra W_n
```

```
## [1] 2.705543
```

Es decir,

$$|Q| = 2.1562009 > 1.2815516 = |q|$$
$$W_n = 4.6492022 > 2.7055435 = w$$

Por lo que rechazamos la hipótesis nula.

---

vi) Probar la hipótesis

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}_0 : \alpha + \beta = 1.8 \quad \text{vs}\\ &\mathrm{H}_1 : \alpha + \beta \neq 1.8\end{aligned}$$

con nivel de significancia del 5%

Afortunadamente, la única diferencia con el inciso anterior es que, en este ejemplo, $\tilde{R} = (1 \quad 1)$. Por tanto, haciendo este ligero ajuste obtenemos:

```
Rtilde <- matrix(c(1,1), ncol = 2)
(Q <- sqrt(n/Rtilde%*%Vhat%*%t(Rtilde))*(beta_MoM + alpha_MoM - 1.8))
```

```
##           [,1]
## [1,] 0.3869422
```

```
(W_n <- n/Rtilde%*%Vhat%*%t(Rtilde)*(beta_MoM + alpha_MoM - 1.8)^2)
```

```
##           [,1]
## [1,] 0.1497243
```

Los valores críticos serían

```
significancia <- 0.05
(q <- qnorm(significancia)) # para comparar contra Q
```

```
## [1] -1.644854
```

```
(w <- qchisq(significancia, df = 1, lower.tail = F)) # para comparar contra W_n
```

```
## [1] 3.841459
```

En este caso, los estadísticos son menores a los valores críticos (en absoluto para el caso de Q), por lo que aceptamos la hipótesis nula. Esto se debe a la gran varianza del estimador de $\alpha$, lo que ocasiona que de hecho 1.8 esté dentro de un intervalo de confianza de $\alpha + \beta$.