ECONOMETRIA II
TAREA 8
MAESTRIA EN ECONOMIA, 2023-2025
EL COLEGIO DE MEXICO

Profr. Eneas A. Caldiño García
Entrega: 4 de octubre de 2024

1. Intervalos de confianza de $c'\theta$.

$\{\hat{\theta}_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de estimadores de $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ tal que $\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta) \overset{D}{\to} N_k(\mathbf{0}, \mathbf{V})$ donde $\mathbf{V}$ es matriz kxk positiva definida. $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$ vector no estocástico. $\{\hat{\mathbf{V}}_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de estimadores de $\mathbf{V}$ y $\text{plim } \hat{\mathbf{V}}_n = \mathbf{V}$.

A partir del pivote (con $\mathbf{R} = \mathbf{c}'$)

v) $\sqrt{n}\,[\mathbf{R}(\hat{\theta}_n - \theta)]'(\mathbf{R}\hat{\mathbf{V}}_n\mathbf{R}')^{-1}\sqrt{n}\,\mathbf{R}(\hat{\theta}_n - \theta)] \overset{D}{\to} \chi^2_q$

obtener un intervalo de confianza de $c'\theta$ a partir de $\alpha \in (0,1)$ y $q>0$ tal que

$$\Pr[\sqrt{n}\,[\mathbf{c}'(\hat{\theta}_n - \theta)]'(\mathbf{c}'\hat{\mathbf{V}}_n\mathbf{c})^{-1}\sqrt{n}\,\mathbf{c}'(\hat{\theta}_n - \theta)] < q] = 1-\alpha$$

2. $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ v.a.s. i.i.d. $X_i \sim \exp(\lambda)$

$$f_{X_i} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

$\lambda > 0$. $E(X_i) = 1/\lambda$, $\text{var}(X_i) = 1/\lambda^2$

i) Encontrar la distribución asintótica de $\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/\lambda)$

ii) Proponer un intervalo con nivel de confianza del 5% para $1/\lambda$.

iii) Proponer un intervalo con nivel de confianza del 5% para λ.

iv) Encontrar la distribución asintótica de $\sqrt{n}(1/\bar{X}_n - \lambda)$

v) Proponer un intervalo con nivel de confianza del 5% para λ.

vi) Proponer un intervalo con nivel de confianza del 5% para $1/\lambda$.

vii) Encontrar la distribución asintótica de $\sqrt{n}(\ln(\bar{X}_n)-\ln(1/\lambda))$

viii) Proponer un intervalo con nivel de confianza del 5% para $\ln(1/\lambda)$.

ix) Proponer un intervalo con nivel de confianza del 5% para $1/\lambda$.

x) Proponer un intervalo con nivel de confianza del 5% para λ.

3. $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ v.a.s. i.i.d. X_i tiene distribución geométrica con parámetro p.

$$f_{x_i}(x) = \begin{cases} p(1-p)^x & \text{si } x\in\{0,1,2,..\} \\ 0 & \text{si } x\notin\{0,1,2,..\} \end{cases}$$

$0 < p < 1$. $E(X_i) = \dfrac{1-p}{p}$, $\text{var}(X_i) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

i) Encontrar la distribución asintótica de $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \dfrac{1-p}{p})$

ii) Proponer un intervalo con nivel de confianza del 1% para $(1-p)/p$.

iii) Proponer un intervalo con nivel de confianza del 1% para p.

iv) $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{1}{1+x}$$

Encontrar la distribución asintótica de $\sqrt{n}\left[g(\bar{X}_n) - g(\dfrac{1-p}{p}) \right]$.

v) Proponer un intervalo con nivel de confianza del 1% para p

vi) Proponer un intervalo con nivel de confianza del 1% para $(1-p)/p$

4. Homocedasticidad condicional.

$$\left\{ \begin{pmatrix} Y_j \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{\infty} \quad \text{vectores aleatorios de dimensión k i.i.d.}$$

$\mathbf{Y}^n = \mathbf{X}^n\mathbf{b} + \mathbf{U}^n \qquad E[\mathbf{X}^{n\prime}\mathbf{U}^n] = \mathbf{0}_{kx1}$ (i.e. $E(\mathbf{x}_j U_j) = 0 \quad j = 1,2,..,n$)

$\text{Prob}[\text{rango}(\mathbf{X}^n_{nxk}) = k] = 1$ (no multicolinealidad)

$E(\mathbf{X}_j) = \mu_x < \infty, \quad E(\mathbf{X}_j\mathbf{X}_j') = \Delta_{xx} < \infty$

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ X_{j1} \\ X_{j2} \\ \vdots \\ X_{j,k-1} \end{pmatrix}.$$

i) Demostrar que si $E(U_j^2|\mathbf{x}_j) = \sigma_u^2 \quad j = 1,2,..$ (hay homocedasticidad condicional fuerte) entonces $\text{cov}(U_j^2,\psi(\mathbf{X}_j)) = 0 \ \forall \ \psi:\mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}$ función boreliana.

Dm. $\text{cov}(U_j^2,\psi(\mathbf{X}_j)) = E(U_j^2\psi(\mathbf{X}_j)) - E(U_j^2)E(\psi(\mathbf{X}_j))$

$= .. = 0$

ii) Demostar que $E(U_j^2|\mathbf{x}_j) = \sigma_u^2 \Rightarrow E[U_j^2\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j'] = \sigma_u^2 E[\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j'] \quad j = 1,2,..$

iii) Demostrar que si $E[U_j^2\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j'] = \sigma_u^2 E[\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j']$ (i.e. hay homocedasticidad condicional débil), entonces

$\text{cov}(U_j^2,X_{ji}) = 0 \quad i = 1,2,.., k-1; \quad j = 1,2,..$

$\text{cov}(U_j^2,X_{ji}^2) = 0 \quad i = 1,2,.., k-1; \quad j = 1,2,..$

$\text{cov}(U_j^2,X_{ji}X_{jm}) = 0 \quad i,m = 1,2,.., k-1; \quad i\neq m; \quad j = 1,2,..$

Sugerencia: Partir de

$$\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j' = \begin{pmatrix} 1 & X_{j1} & X_{j2} & .. & X_{j,k-1} \\ X_{j1} & X_{j1}^2 & X_{j1}X_{j2} & .. & X_{j1}X_{j,k-1} \\ X_{j2} & X_{j1}X_{j2} & X_{j2}^2 & .. & X_{j2}X_{j,k-1} \\ : & : & : & & : \\ X_{jk-1} & X_{j1}X_{j,k-1} & X_{j2}X_{j,k-1} & .. & X_{j,k-1}^2 \end{pmatrix}.$$

5. i) Generar (usando algún paquete econométrico) una muestra

$$\left\{ \begin{pmatrix} X_{1i} \\ X_{2i} \\ X_{3i} \end{pmatrix} \right\}_{i=1}^{500} \quad \text{donde} \quad \begin{pmatrix} X_{1i} \\ X_{2i} \\ X_{3i} \end{pmatrix} \sim N_3\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 & -0.2 \\ 0.4 & 1.0 & -0.8 \\ -0.2 & -0.8 & 2.0 \end{pmatrix} \right]$$

de vectores aleatorios i.i.d.

ii) Generar una muestra $\{U_i\}_{i=1}^{500}$ de v.a.s i.i.d. con $E(U_i) = 0$, tal que U_i y el vector aleatorio $\begin{pmatrix} X_{1j} & X_{2j} & X_{3j} \end{pmatrix}$ sean independientes $\forall$ $i \neq j$, $i,j \in \{1,2,..,500\}$. Usar cualquier distribución para U_i que se quiera siempre y cuando no sea Normal.

iii) Usando los datos obtenidos en i) y ii), generar la muestra $\{Y_i\}_{i=1}^{500}$ donde

$$Y_i = -1 + 2.5X_{1i} - 2X_{2i} + 3X_{3i} + U_i, \quad i = 1,2,..,500$$

iv) Con los datos obtenidos en i) y iii), estimar por mínimos cuadrados ordinarios el modelo de regresión lineal:

$$Y_i = b_1 + b_2X_{1i} + b_3X_{2i} + b_4X_{3i} + U_i \quad i = 1,2,..,500$$

v) Encontrar un intervalo de confianza de b_2 con nivel de confianza 90% (aproximadamente).

a) Sin suponer homecedasticidad.

b) Suponiendo homocedasticidad.

vi) Encontrar un intervalo de confianza de $b_1 - 3b_2$ con nivel de confianza 95% (aproximadamente).

a) Sin suponer homecedasticidad.

b) Suponiendo homocedasticidad.

vii) Encontrar un intervalo de confianza de $\exp(-b_2-2b_3+3b_4)$ con nivel de confianza 95% (aproximadamente).

a) Sin suponer homecedasticidad.

b) Suponiendo homocedasticidad.

viii) Probar la hipótesis

$$\mathbf{H}_0: b_1 = 0$$

contra la alternativa

$$\mathbf{H}_1: b_1 \neq 0$$

con un nivel de significancia del 1%

a) Sin suponer homecedasticidad.

b) Suponiendo homocedasticidad.

ix) Probar la hipótesis

$$\mathbf{H}_0: b_1 + b_3 = -2$$

contra la alternativa

$$\mathbf{H}_1: b_1 + b_3 \neq -2$$

con un nivel de significancia del 10%

a) Sin suponer homecedasticidad.

b) Suponiendo homocedasticidad.

x) Probar la hipótesis:

$$\mathbf{H}_0: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2.5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

contra la alternativa

$$\mathbf{H}_1: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 \\ 2.5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

con un nivel de significancia del 5%

a) Sin suponer homecedasticidad.

b) Suponiendo homocedasticidad.

xi) Probar la hipótesis conjunta:

$$\mathbf{H}_0: b_1 + b_3 = -3.4 \quad \text{y} \quad b_1 - b_2 + b_3 = -5$$

contra la alternativa

$$\mathbf{H}_1: b_1 + b_3 \neq -3.4 \quad \text{o} \quad b_1 - b_2 + b_3 \neq -5$$

con un nivel de significancia del 10%

a) Sin suponer homecedasticidad.

b) Suponiendo homocedasticidad.

xii) Probar la hipótesis

$$\mathbf{H}_0: e^{b_1} + \ln(b_2) - b_4 = -1.75$$

contra la alternativa

$$\mathbf{H}_1: e^{b_1} + \ln(b_2) - b_4 \neq -1.75$$

con un nivel de significancia del 10%

a) Sin suponer homecedasticidad.

b) Suponiendo homocedasticidad.

xiii) Probar la hipótesis:

$$\mathbf{H}_0: \begin{pmatrix} b_1 b_2 \\ 4b_3 + b_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.8 \\ 1.1 \end{pmatrix}$$

contra la alternativa

$$\mathbf{H}_1: \begin{pmatrix} b_1 b_2 \\ 4b_3 + b_4^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -2.8 \\ 1.1 \end{pmatrix}$$

con un nivel de significancia del 5%

a) Sin suponer homecedasticidad.

b) Suponiendo homocedasticidad.