ECONOMETRIA I

TAREA 8

MAESTRIA EN ECONOMIA, 2023-2025

EL COLEGIO DE MEXICO

Profr. Eneas A. Caldiño García

Entrega: 13 de marzo de 2024

1. $\left\{ \begin{pmatrix} Y_j \\ X_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{n}$ vectores aleatorios bidimensionales i.i.d.

Para $j = 1,2,..,n$ $\begin{pmatrix} Y_j \\ X_j \end{pmatrix}$ ~ distribución del estudiante bivariada con $v > 2$ grados de libertad.

$$\begin{pmatrix} Y_j \\ X_j \end{pmatrix} \sim St\left(\begin{pmatrix} \mu_y \\ \mu_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_x^2 \end{pmatrix}, v \right) \qquad j = 1,2,..,n$$

Se sabe que la función de regresión de Y sobre X es:

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$g(x) \equiv E[Y|_{X=x}] = \mu_y - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\mu_x + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} x$$

La función de cedasticidad es:

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$h(x) \equiv var[Y|_{X=x}] = \frac{v\left(\sigma_y^2 - \dfrac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2}\right)}{v - 1} \left[1 + \frac{1}{v\sigma_x^2} (x-\mu_x)^2 \right]$$

i) Graficar la función de regresión $g(x) \equiv E[Y|_{X=x}]$ con $\mu_x = 0$, $\mu_y = 1$, $\sigma_x^2 = 1$, $\sigma_y^2 = 1.64$, $\sigma_{xy} = -0.8$ y $v = 3$.

ii) Graficar la función de cedasticidad $h(x) \equiv var[Y|_{X=x}]$ con $\mu_x = 0$, $\sigma_x^2 = 1$, $\sigma_y^2 = 1.64$, $\sigma_{xy} = -0.8$ y $v = 3$.

iii) Generar una muestra aleatoria $\left\{\begin{pmatrix} Y_j \\ X_j \end{pmatrix}\right\}_{j=1}^{120}$ (vectores aleatorios bidimensionales i.i.d.) con distribución

$$\begin{pmatrix} Y_j \\ X_j \end{pmatrix} \sim St\left(\begin{pmatrix} \mu_y \\ \mu_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_x^2 \end{pmatrix}, v\right) \qquad j = 1,2,..,120$$

Graficar en $\mathbb{R}^2$ la muestra obtenida junto con la curva de regresión.

2. (Ω, F, P) espacio de probabilidad. $\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}:\Omega \to \mathbb{R}^2$ vector aleatorio con distribución exponencial bivariada de Gumbel:

$$f_{y,x}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f_{y,x}(y,x) = \begin{cases} [(1+\lambda x)(1+\lambda y)-\lambda]e^{-(x+y+\lambda xy)} & \text{si } (y,x)\in(0,\infty)\times(0,\infty) \\ 0 & \text{si } (y,x)\notin(0,\infty)\times(0,\infty) \end{cases}$$

donde $\lambda\in[0,1]$.

Se sabe que la *función de regresión* de Y sobre X es:

$$g:(0,\infty) \to \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1+\lambda+\lambda x}{(1+\lambda x)^2}$$

La función de cedasticidad es:

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$h(x) \equiv var[Y|_{X=x}] = \frac{(1+\lambda+\lambda x)^2 - 2\lambda^2}{(1+\lambda x)^4}$$

i) En un mismo plano graficar las funciones de regresión

$g(\ \mid \lambda):(0,\infty) \to \mathbb{R}$

correspondientes a $\lambda = 0.01$, $\lambda = 0.5$ y $\lambda = 1$.

ii) En un mismo plano graficar las funciones de cedasticidad

$h(\ \mid \lambda):(0,\infty) \to \mathbb{R}$

correspondientes a $\lambda = 0.01$, $\lambda = 0.5$ y $\lambda = 1$.

iii) Generar una muestra aleatoria $\left\{ \begin{pmatrix} Y_j \\ X_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{120}$ (vectores aleatorios bidimensionales i.i.d.) con distribución exponencial bivariada de Gumbel, con $\lambda = 0.5$

Graficar en un mismo plano la curva de regresión y la muestra obtenida.

3. Generar 30 observaciones i.i.d. $\left\{ \begin{pmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ V_i \end{pmatrix} \right\}_{i=1}^{30}$

donde $\begin{pmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ V_i \end{pmatrix} \sim N_3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.04 & -0.03 & 0 \\ -0.03 & 0.09 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & 0.01 \end{pmatrix} \right)$

Generar

$Y_i = e^{X_{i1}} - \operatorname{sen}(X_{2i}) + V_i \qquad i = 1,2,..,30.$

Para explicar la variable Y en función de las variables explicativas X_1 y X_2 se propone el "modelo":

$Y_i = 10 + \pi X_{i1} + e X_{i2} + U_i \qquad i = 1,2,..,30$

¿Se cumple este modelo? (i.e. ¿Se satisfacen las 30 ecuaciones con los datos dados?).

Se propone un segundo "modelo":

$$Y_i = 13 + 3\ X_{i1} + 2024\ X_{i2} + \varepsilon_i \qquad i = 1,2,..,30$$

(Los coeficientes vienen de que la fecha de entrega de esta tarea es 13/03/2024).

¿Se cumple este modelo? (i.e. ¿Se satisfacen las 30 ecuaciones con los datos dados?)

4. $\left\{ \begin{pmatrix} Y_j \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{n}$ vectores aleatorios de dimensión k i.i.d.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{U}$$

$$Y_j = \alpha + \beta' \mathbf{X}_j \qquad j = 1,2,..,n$$

$$Y_j = \alpha + \beta_1 X_{j1} + \beta_2 X_{j2} + .. + \beta_m X_{jm} + .. + \beta_{k-1} X_{j,k-1} + U_j \qquad j = 1,2,..,n$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ : \\ Y_n \end{pmatrix}_{n\times1} \quad ; \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ : \\ U_n \end{pmatrix}_{n\times1} \quad ; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha_{1x1} \\ \beta_{(k-1)x1} \end{pmatrix}_{kx1}$$

$$\mathbf{X}_j = \begin{pmatrix} X_{j1} \\ X_{j2} \\ : \\ X_{j,k-1} \end{pmatrix}_{(k-1)x1} \quad ; \quad \mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix}_{kx1}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{x}'_1 \\ 1 & \mathbf{x}'_2 \\ : & : \\ 1 & \mathbf{x}'_j \\ : & : \\ 1 & \mathbf{x}'_n \end{pmatrix}_{nxk} = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & .. & X_{1m} & .. & X_{1,k-1} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & .. & X_{2m} & .. & X_{2,k-1} \\ : & : & : & & : & & : \\ 1 & X_{j1} & X_{j2} & .. & X_{jm} & .. & X_{j,k-1} \\ : & : & : & & : & & : \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & .. & X_{nm} & .. & X_{n,k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \\ : \\ \mathbf{x}'_j \\ : \\ \mathbf{x}'_n \end{pmatrix}_{nxk} \qquad j = 1,2,..,n$$

i) Demostrar:

a) $\{U_j\}_{j=1}^{n}$ son v.a.s i.i.d.

b) $\left\{ \begin{pmatrix} U_j \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{n}$ son vectores aleatorios i.i.d.

c) $\{\mathbf{X}_j U_j\}_{j=1}^{n} = \left\{ \begin{pmatrix} X_{j1}U_j \\ X_{j2}U_j \\ : \\ X_{jm}U_j \\ : \\ X_{j,k-1}U_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{n}$ son vectores aleatorios i.i.d.

d) $\mathrm{cov}(U_j, X_{im}) = 0 \quad j = 1,2,..,n; \quad i = 1,2,..,n; \quad i \neq j, \quad m = 1,2,..,k-1$

ii) Demostrar:

$E[\mathbf{X}'\mathbf{U}] = \mathbf{0}_{kx1}$

$\Longleftrightarrow \quad E[\mathbf{x}_j U_j] = \mathbf{0}_{kx1} \quad j = 1,2,..,n$

$\Longleftrightarrow \quad E(U_j) = 0 \;\; y \;\; E(\mathbf{X}_j U_j) = \mathbf{0}_{(k-1)x1} \quad j = 1,2,..,n$

$\Longleftrightarrow \quad E(U_j) = 0 \;\; y \;\; E(X_{ji} U_j) = 0_{1x1} \quad j = 1,2,..,n; \; i = 1,2,..,k-1$

$\Longleftrightarrow \quad E(U_j) = 0 \;\; y \;\; \mathrm{cov}(\mathbf{X}_j, U_j) = \mathbf{0}_{(k-1)x1} \quad j = 1,2,..,n$

$\Longleftrightarrow \quad E(U_j) = 0 \;\; y \;\; \mathrm{cov}(X_{ji}, U_j) = 0 \quad j = 1,2,..,n; \; i = 1,2,..,k-1$

5. Estudiar las sección 2-2 Deriving the Ordinary Least Squares Estimates del capítulo 2 de Wooldridge J.M., Introductory Econometrics: A Modern Approach, 5th, 6th or 7th Edition, South-Western CENGAGE Learning.

1. $\left\{ \begin{pmatrix} Y_j \\ X_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{n}$ vectores aleatorios bidimensionales i.i.d.

Para j = 1,2,..,n $\begin{pmatrix} Y_j \\ X_j \end{pmatrix}$ ~ distribución del estudiante bivariada con $v > 2$ grados de libertad.

$$\begin{pmatrix} Y_j \\ X_j \end{pmatrix} \sim St\left(\begin{pmatrix} \mu_y \\ \mu_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_x^2 \end{pmatrix}, v \right) \qquad j = 1,2,..,n$$

Se sabe que la función de regresión de Y sobre X es:

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$g(x) \equiv E[Y|_{X=x}] = \mu_y - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\mu_x + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}x$$

La función de cedasticidad es:

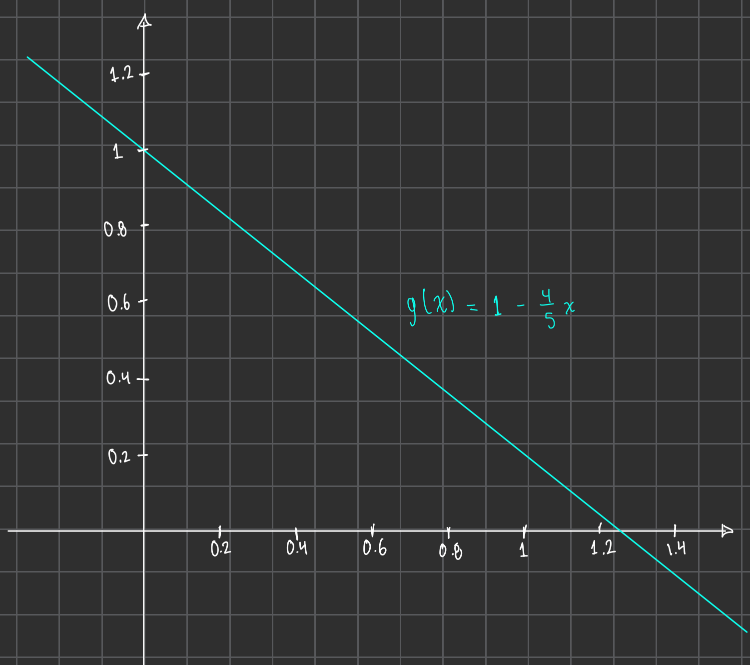
$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$h(x) \equiv var[Y|_{X=x}] = \frac{v\left(\sigma_y^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2}\right)}{v-1}\left[1 + \frac{1}{v\sigma_x^2}(x-\mu_x)^2\right]$$

i) Graficar la función de regresión $g(x) \equiv E[Y|_{X=x}]$ con $\mu_x = 0$, $\mu_y = 1$, $\sigma_x^2 = 1$, $\sigma_y^2 = 1.64$, $\sigma_{xy} = -0.8$ y $v = 3$.

$$g(x) = \mu_y - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\mu_x + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}x$$

i) $g(x) = 1 + \frac{-0.8}{1}x = 1 - \frac{4}{5}x$



ii) Graficar la función de cedasticidad $h(x) \equiv \operatorname{var}[Y|_{X=x}]$ con $\mu_x = 0$, $\sigma_x^2 = 1$, $\sigma_y^2 = 1.64$, $\sigma_{xy} = -0.8$ y $v = 3$.

$$\boxed{h(x) = \frac{v\left(\sigma_y^2 - \dfrac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2}\right)}{v-1}\left[1 + \frac{1}{v\sigma_x^2}(x-\mu_x)^2\right]}$$

ii) $$h(x) = \frac{3\left(1.64 - \dfrac{(-0.8)^2}{1}\right)}{3-1}\left[1 + \frac{1}{3(1)}(x-0)^2\right] = \frac{3(1.64 - 0.64)}{2}\left[1 + \frac{x^2}{3}\right]$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x^2$$

iii) Generar una muestra aleatoria $\left\{\begin{pmatrix} Y_j \\ X_j \end{pmatrix}\right\}_{j=1}^{120}$ (vectores aleatorios bidimensionales i.i.d.) con distribución

$$\begin{pmatrix} Y_j \\ X_j \end{pmatrix} \sim St\left(\begin{pmatrix} \mu_y \\ \mu_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_x^2 \end{pmatrix}, v\right) \qquad j = 1,2,..,120$$

Graficar en $\mathbb{R}^2$ la muestra obtenida junto con la curva de regresión.

• • •

Usaremos la librería `mvtnorm` para generar los datos; específicamente la función `rmvt`.

```
library(mvtnorm)
n <- 120
medias <- c(1,0)
df <- 3
Sigma <- matrix(c(1.64, -0.8, -0.8, 1), ncol = 2)*((df-2)/df)
Z <- rep(medias, each = n) + rmvt(n, sigma = Sigma, df = 3)
Z <- data.frame(Z)
names(Z) <- c("Y", "X")
```

Comprobamos las medias de los datos muestreados:

```
round(colMeans(Z), 2)
```

```
##    Y    X
## 0.89 0.07
```

Y la varianza:

```
round(var(Z), 2)
```

```
##       Y     X
## Y  1.58 -0.86
## X -0.86  0.89
```

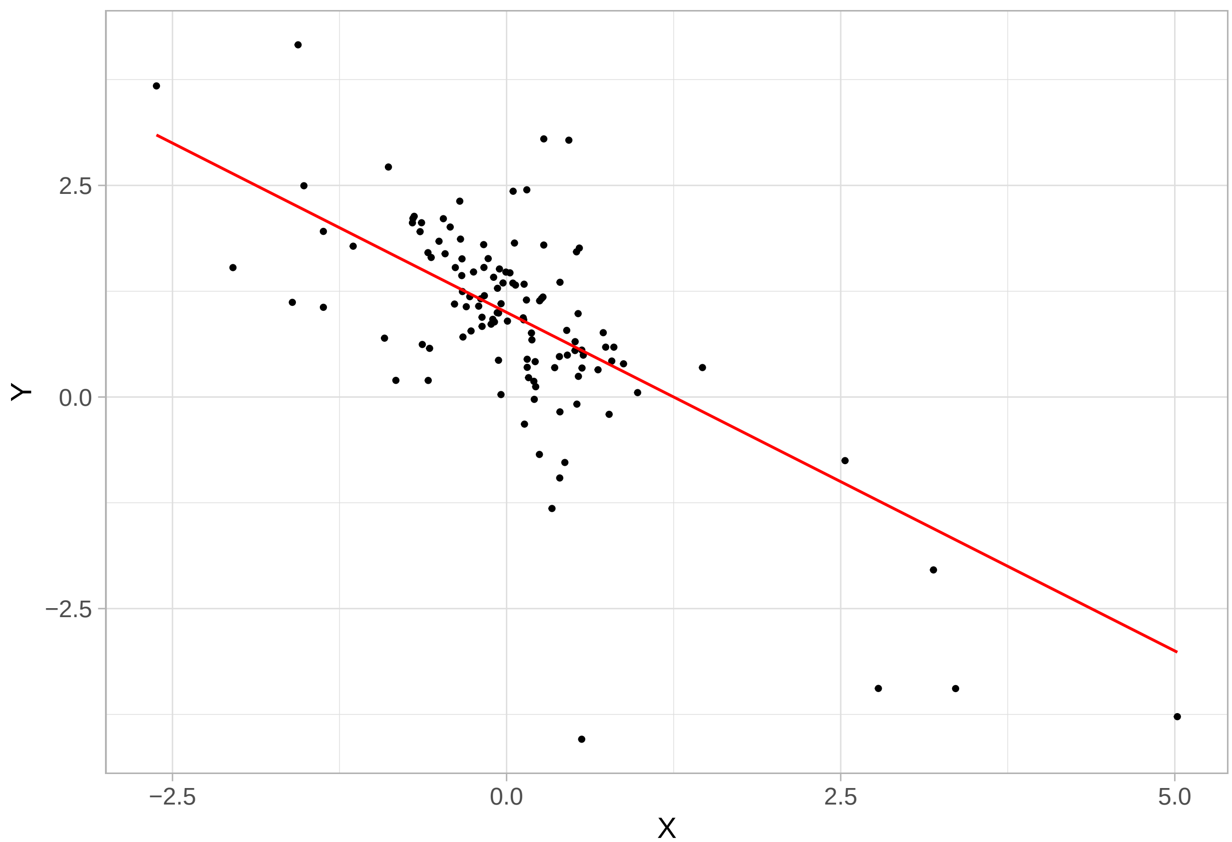
Dada la reducida muestra, los parámetros calculados pueden no ser iguales a los especificados, pero se deben asemejar, como puede verse.

La curva de regresión es: $g(X) = 1 - \frac{4}{5}X$

```
g <- 1-(4/5)*Z$X
```

Graficando los datos simulados y la curva de regresión:

```
library(ggplot2)
datos <- data.frame(Z, g)
names(datos)[3] <- c("g")
ggplot(data = datos) +
  geom_point(aes(x = X, y = Y),
             size = 0.6) +
  geom_line(aes(x = X, y = g),
            col = "red") +
  theme_light()
```


Y
X
2.5
0.0
−2.5
−2.5
0.0
2.5
5.0

2. (Ω, F, P) espacio de probabilidad. $\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ vector aleatorio con distribución exponencial bivariada de Gumbel:

$$f_{y,x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f_{y,x}(y,x) = \begin{cases} [(1+\lambda x)(1+\lambda y)-\lambda]e^{-(x+y+\lambda xy)} & \text{si } (y,x)\in(0,\infty)\times(0,\infty) \\ 0 & \text{si } (y,x)\notin(0,\infty)\times(0,\infty) \end{cases}$$

donde $\lambda\in[0,1]$.

Se sabe que la *función de regresión* de Y sobre X es:

$$g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1+\lambda+\lambda x}{(1+\lambda x)^2}$$

La función de cedasticidad es:

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$h(x) \equiv \operatorname{var}[Y|_{X=x}] = \frac{(1+\lambda+\lambda x)^2 - 2\lambda^2}{(1+\lambda x)^4}$$

i) En un mismo plano graficar las funciones de regresión

$$g(\ |\lambda) : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

correspondientes a $\lambda = 0.01$, $\lambda = 0.5$ y $\lambda = 1$.

$$f_{yx}(y,x) = \left[(1+\lambda x)(1+\lambda y)-\lambda\right] e^{-(x+y+\lambda xy)}$$

$$= \left[1+\lambda y+\lambda x+\lambda^2 xy-\lambda\right] e^{-(x+y+\lambda xy)}$$

$$f_{\lambda}(x) = \int_0^\infty \left[1+\lambda y+\lambda x+\lambda^2 xy-\lambda\right] e^{-(x+y+\lambda xy)}$$

$$= \int_0^\infty e^{-A} + \lambda y e^{-A} + \lambda x e^{-A}$$

Generemos los datos de la distribución utilizando la siguiente función, basada en la idea de que X sigue una distribución exponencial y que $Y|X$ sigue una distribución gamma. Se sigue la siguiente estrategia para muestrear[1]:

1. Muestreamos X de una distribución exponencial.
2. Muestreamos Y condicionada en X

Entonces, para el caso donde $\lambda = 0.5$

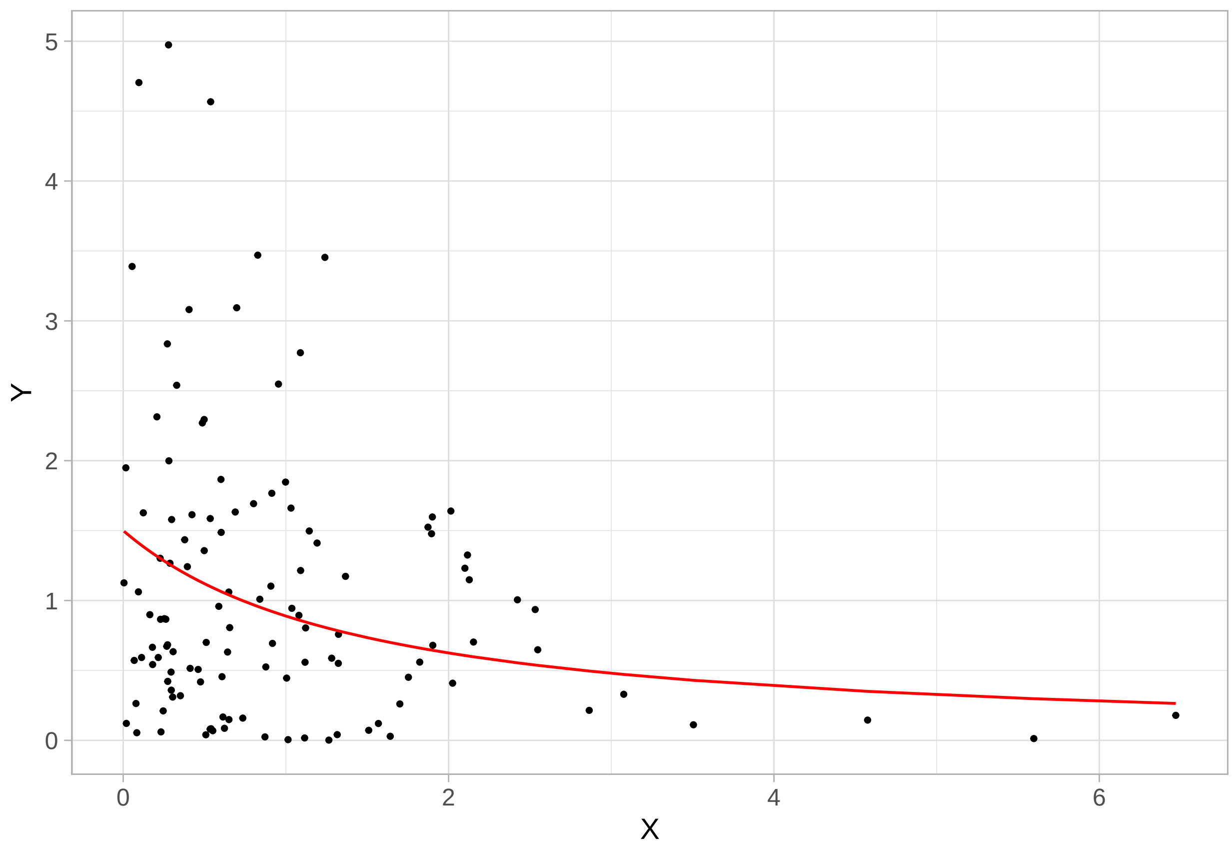
```
rGBVE <- function(n, alpha1, alpha2, lambda) {
  x1 <- rexp(n, alpha1)
  alpha12 <- alpha1*alpha2
  pprod <- alpha12*lambda
  C <- exp(alpha1*x1)
  A <- (alpha12 - pprod + pprod*alpha1*x1)/C
  B <- (pprod*alpha2 + pprod^2*x1)/C
  D <- alpha2 + pprod*x1
  wExp <- A/D
  wGamma <- B/D^2
  data.frame(x1, x2 = rgamma(n, (runif(n) > wExp/(wExp + wGamma)) + 1, D))
}

n <- 120
lmda <- 0.5
Z <- rGBVE(n = n, alpha1 = 1, alpha2 = 1, lambda = lmda)
names(Z) <- c("X", "Y")
```

La gráfica de los datos contra su regresión es:

```
g <- function(x, lambda) {
  (1+lambda+lambda*x)/(1+lambda*x)^2
}
datos <- data.frame(Z, g(Z$X, lambda = lmda))
names(datos) <- c("X", "Y", "g")
ggplot(data = datos) +
  geom_point(aes(x = X, y = Y),
             size = 0.6) +
  geom_line(aes(x = X, y = g),
            col = "red") +
  theme_light()
```

[1] Basado en https://stackoverflow.com/questions/71176416/how-to-simulate-data-from-gumbel-bivariate-exponential-distribution


5
4
3
2
1
0
Y
0
2
4
6
X

Generar 30 observaciones i.i.d. $\left\{ \begin{pmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ V_i \end{pmatrix} \right\}_{i=1}^{30}$ donde $\begin{pmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ V_i \end{pmatrix} \sim N_3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.04 & -0.03 & 0 \\ -0.03 & 0.09 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & 0.01 \end{pmatrix} \right)$

```
n <- 30
medias <- c(1,2,0)
Sigma <- matrix(c(0.04, -0.03, 0, -0.03, 0.09, 0.01, 0, 0.01, 0.01), ncol = 3)
Z <- rmvnorm(n, mean = medias, sigma = Sigma)
Z <- data.frame(Z)
names(Z) <- c("X1", "X2", "V")
```

Podemos ver que la media de los datos muestreados se asemeja a la especificada:

```
round(colMeans(Z), 2)
```

```
##   X1   X2    V
## 0.99 2.07 0.01
```

Y su matriz de varianza-covarianza:

```
round(var(Z), 3)
```

```
##        X1     X2      V
## X1  0.039 -0.032 -0.003
## X2 -0.032  0.075  0.005
## V  -0.003  0.005  0.007
```

Generar

$$Y_i = e^{X_{i1}} - sen(X_{2i}) + V_i \; i = 1, 2, \ldots, 30$$

```
Y <- exp(Z$X1) - sin(Z$X2) + Z$V
```

Para explicar la variable Y en función de las variables explicativas X_1 y X_2 se propone el "modelo":

$$Y_i = 10 + \pi X_{i1} + e X_{i2} + U_i, \text{ con } i = 1, 2, \ldots, 30$$

```
g1 <- 10 + pi*Z$X1 + exp(1)*Z$X2
U <- Y - g1
Ymodel1 <- g1+U
```

¿Se cumple este modelo? (i.e. ¿Se satisfacen las 30 ecuaciones con los datos)

La respuesta a esta pregunta es **sí**, debido a que, a pesar de que quizás no es el mejor modelo, existen $U_1, U_2, U_3, \ldots, ..., U_{30}$ tales que hacen que se cumplan las 30 ecuaciones del vector `Ymodel1`, es decir, ocurre que Y_i=`Ymodel1`_i $\forall i \in \{1, 2, \ldots, 30\}$

```r
data.frame(Y,Ymodel1,g1,U)
```

```
##            Y   Ymodel1       g1         U
## 1  1.7884208 1.7884208 18.26531 -16.47688
## 2  1.2878967 1.2878967 18.71571 -17.42781
## 3  1.5039825 1.5039825 19.04973 -17.54575
## 4  1.5469401 1.5469401 18.80553 -17.25859
## 5  1.4030178 1.4030178 19.08179 -17.67877
## 6  1.8192765 1.8192765 17.72652 -15.90724
## 7  1.9581314 1.9581314 18.23897 -16.28084
## 8  2.5842788 2.5842788 19.51555 -16.93127
## 9  2.1152657 2.1152657 19.54978 -17.43452
## 10 2.5914916 2.5914916 19.56146 -16.96996
## 11 2.1551966 2.1551966 19.59259 -17.43739
## 12 2.6205560 2.6205560 18.81469 -16.19413
## 13 2.9480458 2.9480458 19.30512 -16.35707
## 14 0.8715154 0.8715154 17.72907 -16.85756
## 15 2.0676019 2.0676019 18.92516 -16.85756
## 16 1.9940734 1.9940734 18.24967 -16.25559
## 17 1.6363613 1.6363613 18.92274 -17.28637
## 18 1.7214821 1.7214821 17.04938 -15.32790
## 19 2.0713315 2.0713315 18.87721 -16.80588
## 20 2.0202826 2.0202826 18.55541 -16.53512
## 21 2.1093777 2.1093777 19.45466 -17.34528
## 22 1.6713971 1.6713971 17.92193 -16.25053
## 23 2.0605541 2.0605541 18.96785 -16.90729
## 24 1.6809899 1.6809899 18.43920 -16.75821
## 25 2.1923240 2.1923240 18.54016 -16.34783
## 26 1.3165268 1.3165268 18.37938 -17.06285
## 27 2.0775279 2.0775279 19.31715 -17.23963
## 28 1.9234088 1.9234088 19.42126 -17.49786
## 29 1.7089578 1.7089578 18.64186 -16.93290
## 30 1.8767981 1.8767981 18.77788 -16.90108
```

Se propone un segundo modelo:

$$Y_i = 13 + 3X_{i1} + 2024X_{i2} + \epsilon_i, \text{ con } i = 1, 2, \ldots, 30$$

```r
g2 <- 13 + 3*Z$X1 + 2024*Z$X2
epsilon <- Y - g2
Ymodel2 <- g2+epsilon
```

¿Se cumple este modelo? (i.e. ¿Se satisfacen las 30 ecuaciones con los datos)

La respuesta es nuevamente **sí**, por la misma razón que el modelo anterior: existen $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{30}$ que hacen que las 30 ecuaciones se cumplan; es decir, ocurre que Y_i=`Ymodel2_i` $\forall i \in \{1, 2, \ldots, 30\}$:

```
data.frame(Y, Ymodel2, g2, epsilon)
```

```
##            Y   Ymodel2       g2   epsilon
## 1  1.7884208 1.7884208 3885.691 -3883.902
## 2  1.2878967 1.2878967 4976.302 -4975.014
## 3  1.5039825 1.5039825 5031.823 -5030.319
## 4  1.5469401 1.5469401 4591.496 -4589.949
## 5  1.4030178 1.4030178 5348.670 -5347.267
## 6  1.8192765 1.8192765 3233.600 -3231.781
## 7  1.9581314 1.9581314 3703.053 -3701.095
## 8  2.5842788 2.5842788 4341.297 -4338.713
## 9  2.1152657 2.1152657 4841.780 -4839.665
## 10 2.5914916 2.5914916 4161.874 -4159.282
## 11 2.1551966 2.1551966 4649.196 -4647.040
## 12 2.6205560 2.6205560 3624.469 -3621.848
## 13 2.9480458 2.9480458 3689.284 -3686.336
## 14 0.8715154 0.8715154 4646.504 -4645.633
## 15 2.0676019 2.0676019 4132.454 -4130.386
## 16 1.9940734 1.9940734 3720.147 -3718.153
## 17 1.6363613 1.6363613 4585.128 -4583.492
## 18 1.7214821 1.7214821 2923.309 -2921.587
## 19 2.0713315 2.0713315 4195.861 -4193.789
## 20 2.0202826 2.0202826 3788.968 -3786.947
## 21 2.1093777 2.1093777 4704.887 -4702.777
## 22 1.6713971 1.6713971 3575.022 -3573.351
## 23 2.0605541 2.0605541 4268.111 -4266.050
## 24 1.6809899 1.6809899 4177.740 -4176.059
## 25 2.1923240 2.1923240 3646.717 -3644.524
## 26 1.3165268 1.3165268 4519.882 -4518.566
## 27 2.0775279 2.0775279 4437.800 -4435.722
## 28 1.9234088 1.9234088 4558.127 -4556.204
## 29 1.7089578 1.7089578 4216.259 -4214.550
## 30 1.8767981 1.8767981 4117.488 -4115.611
```

4. $\left\{ \begin{bmatrix} Y_j \\ \mathbf{x}_j \end{bmatrix} \right\}_{j=1}^{n}$ vectores aleatorios de dimensión k i.i.d.

$\mathbf{Y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{U}$

$Y_j = \alpha + \beta' \mathbf{x}_j \qquad j = 1,2,.,n$

$Y_j = \alpha + \beta_1 X_{j1} + \beta_2 X_{j2} + .. + \beta_m X_{jm} + .. + \beta_{k-1} X_{j,k-1} + U_j \qquad j = 1,2,.,n$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ : \\ Y_n \end{bmatrix}_{n\times 1} ; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ : \\ U_n \end{bmatrix}_{n\times 1} ; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha_{1\times 1} \\ \beta_{(k-1)\times 1} \end{bmatrix}_{k\times 1}$$

$$\mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} X_{j1} \\ X_{j2} \\ : \\ X_{j,k-1} \end{bmatrix}_{(k-1)\times 1} ; \quad \mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{X}_j \end{bmatrix}_{k\times 1} \qquad \{X_j U_j\}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}_1' \\ 1 & \mathbf{x}_2' \\ : & : \\ 1 & \mathbf{x}_j' \\ : & : \\ 1 & \mathbf{x}_n' \end{bmatrix}_{n\times k} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & .. & X_{1m} & .. & X_{1,k-1} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & .. & X_{2m} & .. & X_{2,k-1} \\ : & : & : & & : & & : \\ 1 & X_{j1} & X_{j2} & .. & X_{jm} & .. & X_{j,k-1} \\ : & : & : & & : & & : \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & .. & X_{nm} & .. & X_{n,k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1' \\ \mathbf{x}_2' \\ : \\ \mathbf{x}_j' \\ : \\ \mathbf{x}_n' \end{bmatrix}_{n\times k} \qquad j = 1,2,..,n$$

i) Demostrar:

a) $\{U_j\}_{j=1}^{n}$ son v.a.s i.i.d.

Notemos que si $Y = Xb + U \Rightarrow U = Y - Xb$.

Si consideramos el elemento j-ésimo de U:

$$\Rightarrow U_j = Y_j - \alpha - \beta^T X_j = Y_j - \beta^T X_j - \alpha = \underset{1\times k}{(\overset{1\times 1}{1}, \overset{1\times(k-1)}{-\beta^T})} \underset{k\times 1}{\begin{pmatrix} Y_j \\ X_j \end{pmatrix}} - \underset{1\times 1}{\alpha}$$

$\Rightarrow U_j$ es una transformación <u>lineal</u> de $\begin{bmatrix} Y_j \\ X_j \end{bmatrix}$.

$\Rightarrow U_j$ es una transformación <u>BORELIANA</u> del vector aleatorio $\begin{bmatrix} Y_j \\ X_j \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \{U_j\}_{j=1}^{n}$ son transformaciones borelianas de los vectores aleatorios i.i.d. $\left\{ \begin{pmatrix} Y_j \\ X_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{n}$

En clase se vio que transformaciones borelianas de vec. aleatorios independientes, son independientes.

Además, como $\left\{ \begin{matrix} Y_j \\ X_j \end{matrix} \right\}_{j=1}^{n}$ son idénticamente distribuidos y la transformación boreliana es la misma $\forall j$, $\{U_j\}_{j=1}^{n}$ tmb. son idénticamente distribuidos.

$\boxed{\therefore \{U_j\}_{j=1}^{n} \text{ son variables aleatorias independientes}}$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} U_j \\ \mathbf{x}_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{n}$ son vectores aleatorios i.i.d.

Sea $Z_j = \begin{pmatrix} U_j \\ X_j \end{pmatrix}^{K \times 1}$. Del inciso a) vimos que:

$$Z_j = \begin{pmatrix} Y_j - \beta^T X_j - \alpha \\ X_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Y_j - \beta^T X_j - \alpha \\ X_{j1} \\ X_{j2} \\ \vdots \\ X_{jK-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_j \\ X_{j1} \\ X_{j2} \\ \vdots \\ X_{jK-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta^T X_j - \alpha \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Y_j \\ X_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta^T X_j \\ 0_{K-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha \\ 0_{K-1} \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} Y_j \\ X_j \end{bmatrix}}_{K \times 1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\beta^T \\ 0_{K-1} & 0^T_{K-1} \end{bmatrix}}_{K \times K} \underbrace{\begin{bmatrix} Y_j \\ X_j \end{bmatrix}}_{K \times 1} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha \\ 0_{K-1} \end{bmatrix}}_{K \times 1}$$

$\Rightarrow \{Z_j\}_{j=1}^{n}$ son transf. borelianas de los vect. aleatorios iid $\left\{ \begin{matrix} Y_j \\ X_j \end{matrix} \right\}_{j=1}^{n}$

$\therefore \{Z_j\}_{j=1}^{n} = \left\{ \begin{matrix} U_j \\ X_j \end{matrix} \right\}_{j=1}^{n}$ son iid.

c) $\{\mathbf{X}_j U_j\}_{j=1}^n = \left\{ \begin{pmatrix} X_{j1}U_j \\ X_{j2}U_j \\ \vdots \\ X_{jm}U_j \\ \vdots \\ X_{j,k-1}U_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^n$ son vectores aleatorios i.i.d.

Notemos que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{(K-1)\times K} \underbrace{\begin{bmatrix} U_j \\ X_{j1} \\ X_{j2} \\ \vdots \\ X_{jK-1} \end{bmatrix}}_{K\times 1} = \underbrace{X_j}_{(K-1)\times 1} \quad ; \quad (1, \vec{0}_{K-1}^T) \begin{bmatrix} U_j \\ X_j \end{bmatrix} = U_j$$

$$\text{donde } \begin{bmatrix} U_j \\ X_j \end{bmatrix}, \quad \text{primera columna} = \vec{0}_{K-1}, \quad \text{resto} = I_{K-1}$$

$$\Rightarrow \underbrace{X_j U_j}_{(K-1)\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{(K-1)\times K} \underbrace{\begin{bmatrix} U_j \\ X_{j1} \\ X_{j2} \\ \vdots \\ X_{jK-1} \end{bmatrix}}_{K\times 1} \underbrace{(1, \vec{0}_{K-1}^T)}_{1\times K} \underbrace{\begin{bmatrix} U_j \\ X_j \end{bmatrix}}_{K\times 1}$$

$\Rightarrow \{X_j U_j\}_{j=1}^n$ son transf. borelianas del vector aleatorio iid $\begin{pmatrix} U_j \\ X_j \end{pmatrix}$ inciso (b

$$\boxed{\therefore \{X_j U_j\}_{j=1}^n \text{ iid}}$$

ALTERNATIVAMENTE

$$\underset{(K-1)\times 1}{X_j}\,\underset{1\times 1}{U_j} = \underset{(K-1)\times 1}{X_j}\,(\underset{1\times 1}{Y_j} - \underset{1\times(K-1)}{\beta^T}\,\underset{(K-1)\times 1}{X_j} - \underset{1\times 1}{\alpha})$$

$$= X_j Y_j - X_j \beta^T X_j - \alpha X_j$$

$$= X_j Y_j - X_j(\beta^T X_j + \alpha)$$

$$= \overbrace{\begin{bmatrix} X_{j1} \\ X_{j2} \\ \vdots \\ X_{jK-1} \end{bmatrix}}^{B} \overbrace{Y_j}^{C} + \overbrace{\begin{bmatrix} X_{j1} \\ X_{j2} \\ \vdots \\ X_{jK-1} \end{bmatrix}}^{B} \overbrace{(-\beta^T X_j - \alpha)}^{A}$$

A) $$-\beta^T X_j - \alpha = \underset{1\times K}{[0, -\beta^T]} \underset{K\times 1}{\begin{bmatrix} Y_j \\ X_j \end{bmatrix}} - \alpha$$

B) $$\underset{(K-1)\times 1}{X_j} = \underset{(K-1)\times K}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_K & \dots 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}} \underset{K\times 1}{\begin{bmatrix} Y_j \\ X_{j1} \\ X_{j2} \\ \vdots \\ X_{jK-1} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} X_{j1} \\ X_{j2} \\ \vdots \\ X_{jK-1} \end{bmatrix}$$

C) $$\underset{1\times K}{(1, 0^T_{K-1})} \underset{K\times 1}{\begin{bmatrix} Y_j \\ X_{j1} \\ X_{j2} \\ \vdots \\ X_{jK-1} \end{bmatrix}} = Y_j$$

$$= \overbrace{\underset{(K-1)\times K}{\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}_{0_{K-1}} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}}_{I_{K-1}} \end{bmatrix}} \underset{K\times 1}{\begin{bmatrix} Y_j \\ X_j \end{bmatrix}}}^{B} \overbrace{\underset{1\times K}{(1, 0^T_{K-1})} \underset{K\times 1}{\begin{bmatrix} Y_j \\ X_j \end{bmatrix}}}^{C} + \overbrace{\underset{(K-1)\times K}{\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}_{0_{K-1}} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}}_{I_{K-1}} \end{bmatrix}} \underset{K\times 1}{\begin{bmatrix} Y_j \\ X_j \end{bmatrix}}}^{B} \overbrace{\underset{1\times K}{[0, -\beta^T]} \underset{K\times 1}{\begin{bmatrix} Y_j \\ X_j \end{bmatrix}}}^{A}$$

$\Longrightarrow \{X_j U_j\}_{j=1}^{n}$ son transf. borelianas de los vect. aleatorios iid $\left\{ \begin{matrix} Y_j \\ X_j \end{matrix} \right\}_{j=1}^{n}$

$\therefore \{X_j U_j\}_{j=1}^{n}$ son iid.

d) $cov(U_j, X_{im}) = 0 \quad j = 1,2,..,n; \quad i = 1,2,..,n; \quad i \neq j, \quad m = 1,2,..,k-1$

En clase se vio una proposición que postula que si $\left\{ \begin{matrix} U_j \\ X_j \end{matrix} \right\}_{j=1}^{n}$ son iid :

$$\Rightarrow \forall i,j \in \{1,2,\dots,n\} \text{ con } i \neq j : \left\{ \begin{matrix} U_j \text{ y } U_i \\ U_j \text{ y } X_i \\ X_j \text{ y } U_i \\ X_j \text{ y } X_i \end{matrix} \right. \quad \underline{\text{son variables aleatorias independientes}}$$

$$\Rightarrow \forall i,j \in \{1,2,\dots,n\} \text{ con } i \neq j : \quad cov(U_j, U_i) = 0_{1\times 1} \qquad cov(X_j, X_i) = 0_{(K-1)\times(K-1)}$$

$$cov(U_j, X_i) = 0_{1\times(K-1)} \qquad cov(X_j, U_i) = 0_{(K-1)\times 1}$$

Además, si $cov(U_j, X_i) = 0 \quad \forall i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ con $i \neq j$

$$\Rightarrow 0 = cov(U_j, X_i) = cov\left(U_j, \begin{bmatrix} X_{i1} \\ X_{i2} \\ \vdots \\ X_{im} \end{bmatrix}\right) = E\left[(U_j - E(U_j)) \begin{pmatrix} X_{i1} - E(X_{i1}) \\ X_{i2} - E(X_{i2}) \\ \vdots \\ X_{im} - E(X_{im}) \end{pmatrix}^T \right] =$$

$$= E\left[\begin{pmatrix} (U_j - E(U_j))(X_{i1} - E(X_{i1})) \\ (U_j - E(U_j))(X_{i2} - E(X_{i2})) \\ \vdots \\ (U_j - E(U_j))(X_{im} - E(X_{im})) \end{pmatrix}^T \right] = \begin{bmatrix} E\left[(U_j - E(U_j))(X_{i1} - E(X_{i1}))\right] \\ E\left[(U_j - E(U_j))(X_{i2} - E(X_{i2}))\right] \\ \vdots \\ E\left[(U_j - E(U_j))(X_{im} - E(X_{im}))\right] \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} cov(U_j, X_{i1}) \\ cov(U_j, X_{i2}) \\ \vdots \\ cov(U_j, X_{im}) \end{bmatrix}^T = 0$$

$$\boxed{\therefore cov(U_j, X_{im}) = 0 \quad \forall j,i \in \{1,2,\dots,n\} \text{ con } i \neq j \text{ y } \forall m \in \{1,2,\dots,K-1\}}$$

ii) Demostrar:

$$E[\mathbf{X}'\mathbf{U}] = \mathbf{0}_{kx1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad E[\mathbf{x}_j U_j] = \mathbf{0}_{kx1} \qquad j = 1,2,..,n$$

$$\Longleftrightarrow \quad E(U_j) = 0 \quad y \quad E(\mathbf{X}_j U_j) = \mathbf{0}_{(k-1)x1} \qquad j = 1,2,..,n$$

$$\Longleftrightarrow \quad E(U_j) = 0 \quad y \quad E(X_{ji} U_j) = 0_{1x1} \qquad j = 1,2,..,n; \ i = 1,2,..,k-1$$

$$\Longleftrightarrow \quad E(U_j) = 0 \quad y \quad \mathrm{cov}(\mathbf{X}_j, U_j) = \mathbf{0}_{(k-1)x1} \qquad j = 1,2,..,n$$

$$\Longleftrightarrow \quad E(U_j) = 0 \quad y \quad \mathrm{cov}(X_{ji}, U_j) = 0 \qquad j = 1,2,..,n; \ i = 1,2,..,k-1$$

$$\boxed{E[X^T U] = 0_{k\times 1} \iff E[x_j U_j] = 0_{k\times 1}}$$

NOTEMOS QUE:

$$x_1 U_1 + x_2 U_2 + \dots + x_n U_n$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ X_1 \end{bmatrix} U_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ X_2 \end{bmatrix} U_2 + \dots + \begin{bmatrix} 1 \\ X_n \end{bmatrix} U_n$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ X_{1,1} \\ X_{1,2} \\ \vdots \\ X_{1,K-1} \end{bmatrix} U_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ X_{2,1} \\ X_{2,2} \\ \vdots \\ X_{2,K-1} \end{bmatrix} U_2 + \dots + \begin{bmatrix} 1 \\ X_{n,1} \\ X_{n,2} \\ \vdots \\ X_{n,K-1} \end{bmatrix} U_n$$

$$= \begin{bmatrix} U_1 + U_2 + \dots + U_n \\ X_{1,1} U_1 + X_{2,1} U_2 + \dots X_{n,1} U_n \\ \vdots \\ X_{1,K-1} U_1 + X_{2,K-1} U_2 + \dots X_{n,K-1} U_n \end{bmatrix}$$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$E[X^T U] = E\left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ X_1 & X_2 & \dots & X_j & \dots & X_n \end{pmatrix}}_{K\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}}_{n\times 1} \right] = E\left[\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_{11} & X_{21} & \dots & X_{n1} \\ X_{12} & X_{22} & \dots & X_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{1K-1} & X_{2K-1} & \dots & X_{nK-1} \end{pmatrix}}^{K\times n} \overbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}}^{n\times 1} \right]$$

$$= E\begin{bmatrix} U_1 + U_2 + \dots U_n \\ X_{11} U_1 + X_{21} U_2 + \dots + X_{n1} U_n \\ X_{12} U_1 + X_{22} U_2 + \dots + X_{n2} U_n \\ \vdots \\ X_{1K-1} U_1 + X_{2K-1} U_2 + \dots X_{n,K-1} U_n \end{bmatrix} = E\left[x_1 U_1 + x_2 U_2 + \dots + x_n U_n \right]$$

$$= E[x_1 U_1] + E[x_2 U_2] + \dots E[x_n U_n] = \sum_{j=1}^{n} E[x_j U_j] \overset{\text{hipótesis}}{=} 0$$

Para $\boxed{\Longrightarrow}$ se lee al revés. $\square$

* $\{x_j U_j\}_{j=1}^{n}$ son iid por ser transf. borelianas de $\{(X_j U_j)\}_{j=1}^{n}$ y de $\left\{\begin{pmatrix} U_j \\ X_j \end{pmatrix}\right\}_{j=1}^{n}$

$$\boxed{E[X^T U] = 0_{K\times 1} \iff E[U_j] = 0 \ \text{ y } \ E[X_j U_j] = 0_{(K-1)\times 1}, \quad j = 1, 2, \dots, n}$$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$E[X^T U] = E\left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ X_1 & X_2 & \dots & X_j & \dots & X_n \end{pmatrix}}_{K\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}}_{n\times 1}\right] = E\left[\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_{11} & X_{21} & \dots & X_{n1} \\ X_{12} & X_{22} & \dots & X_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{1K-1} & X_{2K-1} & \dots & X_{nK-1} \end{pmatrix}}^{K\times n} \overbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}}^{n\times 1}\right]$$

$$= E\begin{bmatrix} U_1 + U_2 + \dots U_n \\ X_{11}U_1 + X_{21}U_2 + \dots + X_{n1}U_n \\ X_{12}U_1 + X_{22}U_2 + \dots + X_{n2}U_n \\ \vdots \\ X_{1K-1}U_1 + X_{2K-1}U_2 + \dots X_{n,K-1}U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[U_1 + U_2 + \dots U_n] \\ E[X_{11}U_1 + X_{21}U_2 + \dots + X_{n1}U_n] \\ E[X_{12}U_1 + X_{22}U_2 + \dots + X_{n2}U_n] \\ \vdots \\ E[X_{1K-1}U_1 + X_{2K-1}U_2 + \dots X_{n,K-1}U_n] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} E(U_j) \\ \sum_{j=1}^{n} E(X_{j1}U_j) \\ \sum_{j=1}^{n} E[X_{j2}U_j] \\ \sum_{j=1}^{n} X_{j,K-1}U_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} E(U_j) \\ \sum_{j=1}^{n} E(X_j U_j) \end{bmatrix} \overset{\text{hipótesis}}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0_{K-1} \end{bmatrix} = 0_{K\times 1}$$

Para $\boxed{\Rightarrow}$ se lee al revés. ■

$$\boxed{E[X^T U] = 0_{K\times1} \iff E[U_j]=0 \;\; y \;\; E(X_{ji}U_j)=0_{1\times1} \;;\;\; j=1,2,\dots,n \;;\; i=1,2,\dots,K-1}$$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$E[X^T U] = E\left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ X_1 & X_2 & \dots & X_j & \dots & X_n \end{pmatrix}}_{K\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}}_{n\times1}\right] = E\left[\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_{11} & X_{21} & \dots & X_{n1} \\ X_{12} & X_{22} & \dots & X_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{1K-1} & X_{2K-1} & \dots & X_{nK-1} \end{pmatrix}}^{K\times n} \overbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}}^{n\times1}\right]$$

$$= E\overbrace{\begin{bmatrix} U_1+U_2+\dots U_n \\ X_{11}U_1+X_{21}U_2+\dots+X_{n1}U_n \\ X_{12}U_1+X_{22}U_2+\dots+X_{n2}U_n \\ \vdots \\ X_{1K-1}U_1+X_{2K-1}U_2+\dots X_{n,K-1}U_n \end{bmatrix}}^{K\times1} = \overbrace{\begin{bmatrix} E[U_1+U_2+\dots U_n] \\ E[X_{11}U_1+X_{21}U_2+\dots+X_{n1}U_n] \\ E[X_{12}U_1+X_{22}U_2+\dots+X_{n2}U_n] \\ \vdots \\ E[X_{1K-1}U_1+X_{2K-1}U_2+\dots X_{n,K-1}U_n] \end{bmatrix}}^{K\times1}$$

$$= \overbrace{\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} E(U_j) \\ \sum_{j=1}^{n} E(X_{j1}U_j) \\ \sum_{j=1}^{n} E[X_{j2}U_j] \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} X_{j,K-1}U_j \end{bmatrix}}^{K\times1} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}^{K\times1} = 0_{K\times1}$$

hipótesis

Para $\boxed{\Rightarrow}$ se lee al revés $\blacksquare$

$$\boxed{E[X^T U] = 0_{K\times 1} \iff E(U_j) = 0 \ \text{ y } \ \operatorname{cov}(X_j, U_j) = 0_{(K-1)\times 1} \quad j = 1, 2, \dots, n}$$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$E[X^T U] = E\left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ X_1 & X_2 & \dots & X_j & \dots & X_n \end{pmatrix}}_{K\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}}_{n\times 1} \right] = E\left[\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_{11} & X_{21} & \dots & X_{n1} \\ X_{12} & X_{22} & \dots & X_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{1K-1} & X_{2K-1} & \dots & X_{nK-1} \end{pmatrix}}^{K\times n} \overbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}}^{n\times 1} \right]$$

$$= E\begin{bmatrix} U_1 + U_2 + \dots U_n \\ X_{11}U_1 + X_{21}U_2 + \dots + X_{n1}U_n \\ X_{12}U_1 + X_{22}U_2 + \dots + X_{n2}U_n \\ \vdots \\ X_{1K-1}U_1 + X_{2K-1}U_2 + \dots X_{n,K-1}U_n \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} (U_j) \\ \sum_{j=1}^{n} X_{j1}U_j \\ \sum_{j=1}^{n} X_{j2}U_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} X_{j,K-1}U_j \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} (U_j) \\ \sum_{j=1}^{n} \mathbf{X}_j U_j \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} E(U_j) \\ \sum_{j=1}^{n} E[\mathbf{X}_j U_j] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} \cancel{E(U_j)} \\ \sum_{j=1}^{n} \cancel{\operatorname{cov}(\mathbf{X}_j, U_j)} + E[X_j]\cancel{E[U_j]} \end{bmatrix} \overset{\text{hipótesis}}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0_{(K-1)\times 1} \end{bmatrix}$$

$$= 0_{K\times 1}$$

Para $\boxed{\Rightarrow}$ se lee al revés ∎

$$\boxed{E[X^T U] = 0_{K\times 1} \iff E(U_j) = 0 \ \text{ y } \ cov(X_{ji}, U_j) = 0 \qquad j = 1,2,\dots,n \ ; \ i = 1,2,\dots,K-1}$$

$\boxed{\Leftarrow}$

$$E[X^T U] = E\left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ X_1 & X_2 & \dots & X_j & \dots & X_n \end{pmatrix}}_{K\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}}_{n\times 1}\right] = E\left[\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_{11} & X_{21} & \dots & X_{n1} \\ X_{12} & X_{22} & \dots & X_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{1K-1} & X_{2K-1} & \dots & X_{nK-1} \end{pmatrix}}^{K\times n} \overbrace{\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}}^{n\times 1}\right]$$

$$= E\begin{bmatrix} U_1 + U_2 + \dots U_n \\ X_{11}U_1 + X_{21}U_2 + \dots + X_{n1}U_n \\ X_{12}U_1 + X_{22}U_2 + \dots + X_{n2}U_n \\ \vdots \\ X_{1K-1}U_1 + X_{2K-1}U_2 + \dots X_{n,K-1}U_n \end{bmatrix} = E\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} (U_j) \\ \sum_{j=1}^{n} X_{j1}U_j \\ \sum_{j=1}^{n} X_{j2}U_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} X_{j,K-1}U_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\left[\sum_{j=1}^{n} (U_j)\right] \\ E\left[\sum_{j=1}^{n} X_{j1}U_j\right] \\ E\left[\sum_{j=1}^{n} X_{j2}U_j\right] \\ \vdots \\ E\left[\sum_{j=1}^{n} X_{j,K-1}U_j\right] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} E[U_j] \\ \sum_{j=1}^{n} E[X_{j1}U_j] \\ \sum_{j=1}^{n} E[X_{j2}U_j] \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} E[X_{j,K-1}U_j] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} \cancel{E(U_j)} \\ \sum_{j=1}^{n} \cancel{cov(X_{j1}, U_j)} + E(X_{j1})\cancel{E(U_j)} \\ \sum_{j=1}^{n} \cancel{cov(X_{j2}, U_j)} + E(X_{j,2})\cancel{E(U_j)} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \cancel{cov(X_{j,K-1}, U_j)} + E(X_{j,K-1})\cancel{E(U_j)} \end{bmatrix} \overset{\text{hipótesis}}{=} 0_{K\times 1}$$

Para $\boxed{\Rightarrow}$ se lee al revés ■

5. Estudiar las sección 2-2 Deriving the Ordinary Least Squares Estimates del capítulo 2 de Wooldridge J.M., Introductory Econometrics: A Modern Approach, 5th, 6th or 7th Edition, South-Western CENGAGE Learning.