# Elección discreta: Teoría, estimación y métodos numéricos

# Tarea 4: Mixed logit

El Colegio de México
Prof. Edwin Muñoz Rodríguez
Alumno: Max Brando Serna Leyva

## Índice

# 1. Instrucciones iniciales

En esta tarea implementaremos el Mixed logit en nuestra base de datos `yogurt.csv`.

Considere el siguiente modelo de utilidad aleatoria:

$$u_{jm} = \alpha_{jm} + \beta_{mp} price_{jm} + \beta_{mf} feat_{jm} + \varepsilon_{jm} \tag{1.1}$$

donde $\varepsilon_{jm} \sim Gumbel(0,1)$ son i.i.d. entre consumidores y productos. Normalice $\alpha_4 = 0$.

Asuma que los coeficientes $\alpha_{jm},\ j = 1,2,3$ así como $\beta_{mp}, \beta_{mf}$ son aleatorios, distribuidos normales con medias $\bar{\alpha}_j, \bar{\beta}_p, \bar{\beta}_f$ y matriz de varianzas y covarianzas

$$\Sigma_{5\times 5} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \sigma_2^2 & & & \\ & & \sigma_3^2 & & \\ & & & \sigma_p^2 & \\ & & & & \sigma_f^2 \end{bmatrix}$$

con todos los términos fuera de la diagonal iguales a cero. Esto es, son independientes.

1. Haga un supuesto sobre la estabilidad de las preferencias de los hogares, y asegúrese de que su modelo sea consistente con dicho supuesto. Para esto, recuerde que la variable `pan.id` es un identificador de hogar.

2. Escriba claramente el modelo que estima, la verosimilitud y la verosimilitud simulada.

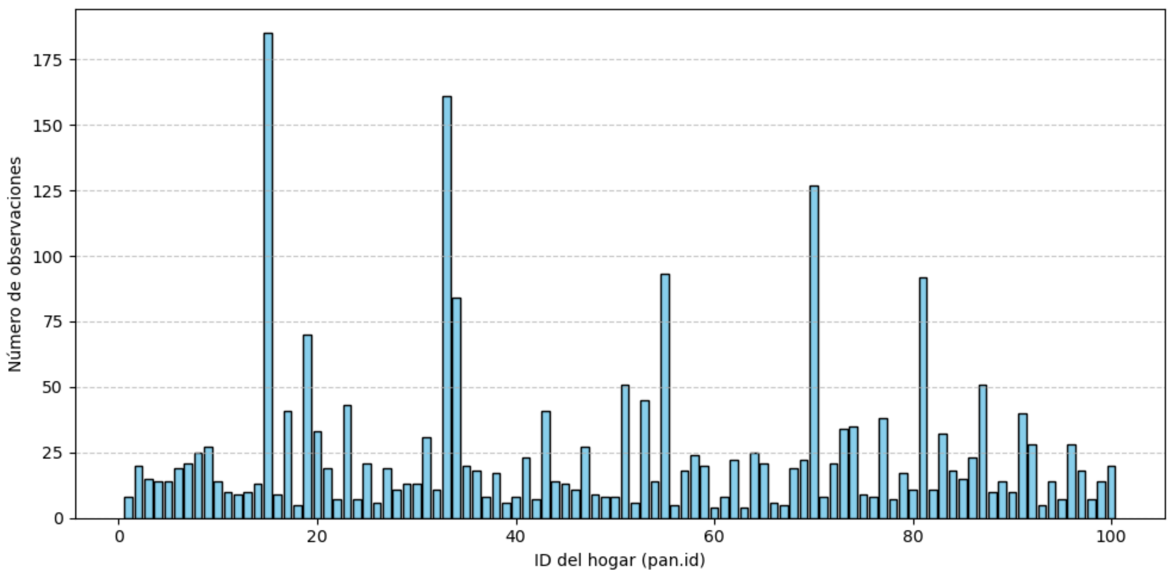
3. Para asegurarse de que $\Sigma_{5\times 5}$ es definida positiva implemente la descomposición de Cholesky.

4. Reporte las estimaciones y errores estándar para todos los parámetros con $R = 50$, usando método de montecarlo. Discuta sus resultados.

## 2. Inciso 1

Revisando la variable `pan.id` nos damos cuenta de que un mismo hogar entra a la base de datos en repetidas ocasiones, lo que significa que **tenemos más de una situación de elección para cada hogar**. La figura 1 muestra un histograma donde se observa el número de situaciones de elección para cada hogar en la muestra.

Figura 1: Histograma de `pan.id`




Esto plantea un problema en cuanto a la caracterización de las preferencias.

Sea $b_n = \left(\alpha_{n1},\ \alpha_{n2},\ \alpha_{n3},\ \beta_{np},\ \beta_{nf}\right)^{\top}$, con $n = 1, 2, \ldots, N$, donde $N$ es el número de hogares en la muestra. Si suponemos que en cada situación de elección, tenemos coeficientes distintos, entonces tendríamos que estimar $b_{n,t_n}$, donde $t_n$ sería un subíndice para identificar la situación de elección $t$ del individuo $n$. **Para evitar esto, haremos un supuesto sobre la estabilidad de las preferencias**, en el que para cada individuo $n$, $b_n$ es constante en toda situación de elección $t_n$; es decir, vamos a suponer que las preferencias de cada individuo son estables a lo largo de todas las situaciones de elección en que se ve envuelto.

# 3. Inciso 2

Podemos reescribir la ecuación 1.1 para obtener **un modelo de mixed logit** sin una representación de coeficientes aleatorios, sino con una de **componentes de error**.[1] Para ello, podemos descomponer el vector de coeficientes aleatorios en una suma entre su vector de medias poblacionales y un vector de componentes de error. Es decir, dado que $b_n \sim N(\bar{b}, \Sigma)$, entonces podemos decir que $b_n = \bar{b} + v_m$, $v_m \sim N(0, 1)$. Entonces:

$$\begin{aligned} u_{jm} &= \alpha_{jm} + \beta_{mp} price_{jm} + \beta_{mf} feat_{jm} + \varepsilon_{jm} \\ &= b_{jm}^{\top} z_{jm} + \varepsilon_{jm} \\ &= (\bar{b}_j + v_{jm})^{\top} z_{jm} + \varepsilon_{jm}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $\bar{b}_j = \left(\bar{\alpha}_j,\ \bar{\beta}_p,\ \bar{\beta}_f\right)^{\top}$ y $z_{jm} = \left(1,\ price_{jm},\ feat_{jm}\right)^{\top}$. De este modo, la **probabilidad de elección incondicional** es

$$\mathbb{P}_{jm} = \int \frac{e^{(\bar{b}_j + v_{jm})^{\top} z_{jm}}}{\sum\limits_{i \in B} e^{(\bar{b}_i + v_{mi})^{\top} z_{im}}} f(v_{jm}) dv_{jm}. \tag{3.2}$$

Dada una muestra aleatoria $\left\{ \left( m, s_m, j^*(m) \right) \right\}_{m=1}^{M}$, la **función de log-verosimilitud** a optimizar es

$$\text{LL}(\bar{b}, \Sigma) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{j \in B} y_{jm} \log \mathbb{P}_{jm}; \tag{3.3}$$

sin embargo, esta función de log-verosimilitud es difícil de implementar, dada la integral múltiple contenida en 3.2. Para solucionar esto, podemos condicionar esta probabilidad de elección en $v_{jm}$, con lo que 3.2 se convierte en una **probabilidad de elección condicional**

$$\mathbb{P}_{jm}^{v_{jm}} = \frac{e^{(\bar{b}_j + v_{jm})^{\top} z_{jm}}}{\sum\limits_{i \in B} e^{(\bar{b}_i + v_{mi})^{\top} z_{im}}}. \tag{3.4}$$

Además, en clase vimos que si $\left\{ v_{jm}^{r} \right\}_{r=1}^{R}$ son realizaciones del componente de error $v_{jm}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{jm} &\approx \mathbb{E}_{v_{jm}}[\mathbb{P}_{jm}^{v_{jm}}] \\ &\approx \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \mathbb{P}_{jm}^{v_{jm}^{r}} \\ &\equiv \hat{\mathbb{P}}_{jm}^{R}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

por lo que podemos reescribir la función de log-verosimilitud usando 3.5 para obtener una **función de log-verosimilitud simulada**:

$$\text{SLL}(\bar{b}, \Sigma) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{j \in B} y_{jm} \log \hat{\mathbb{P}}_{jm}^{R}. \tag{3.6}$$

En esta tarea, optimizaremos 3.6 para obtener estimados de $\bar{b}_j$ y $\Sigma$.

[1] La única razon siendo que así es como lo practicamos en clase, aunque entiendo que la estimación de un modelo en su forma de coeficientes aleatorios debería ser muy similar.

# 4. Inciso 3

El siguiente paso permite darle mayor estabilidad a la estimación. Nos apoyaremos del siguiente teorema:

**Teorema de la descomposición de Cholesky.** *Sea $\Sigma$ una matriz real, positiva definida, simétrica y de dimensiones $n \times n$. Existe una matriz triangular superior $\Gamma_{n\times n}$ tal que $\Sigma = \Gamma^\top \Gamma$. Además, $\Gamma$ es única.*

Sea entonces $\omega \sim N(0, \mathbf{I}_{n\times n})$. Como sabemos que $\Sigma$ es una matriz real de dimensión $n$, positiva definida y simétrica, entonces por el teorema anterior, $\exists\ \Gamma$ tal que $\Sigma = \Gamma^\top \Gamma$. Por lo tanto, podemos expresar el componente de error $v_{jm}$ como

$$v_{jm} = \Gamma^\top \omega_{jm}, \tag{4.1}$$

donde $\Gamma$ es la matriz de Cholesky asociada a $\Sigma$. Por tanto, si $\left\{\omega_{jm}^r\right\}_{r=1}^R$ son realizaciones independientes de $\omega_{jm}$, entonces usamos 4.1 para obtener

$$\hat{\mathbb{P}}_{jm}^R = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^R \frac{e^{(\bar{b}_j + \Gamma^\top \omega_{jm})^\top z_{jm}}}{\sum\limits_{i\in B} e^{(\bar{b}_i + \Gamma^\top \omega_{jm})^\top z_{im}}}. \tag{4.2}$$

## 5. Inciso 4

Nuestro problema de optimización numérica es el siguiente:

$$\max_{\bar{b},\ \Gamma} \ \mathrm{SLL}(\bar{b},\Gamma) = \sum_{m=1}^{M}\sum_{j\in B} y_{jm}\log\hat{\mathbb{P}}_{jm}^{R},$$
$$\hat{\mathbb{P}}_{jm}^{R} = \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\frac{e^{(\bar{b}_j+\Gamma^\top\omega_{jm})^\top z_{jm}}}{\sum_{i\in B} e^{(\bar{b}_i+\Gamma^\top\omega_{jm})^\top z_{im}}}.$$

Obteniendo $\hat{\Gamma}_{\mathrm{SMLE}}$ podemos construir $\hat{\Sigma}_{\mathrm{SMLE}}$ usando lo que sabemos de la sección 4.

Primero, definiremos tres vectores de condiciones iniciales. La tabla 1 muestra los valores de dichos vectores: el primero es una opción estándar; la segunda corresponde a los parámetros estimados en la tarea anterior, cuando trabajamos con Nested logit; y la tercera, los del Logit condicional.

Tabla 1: Vectores de condiciones iniciales usados en la estimación del modelo Mixed Logit

| **CI** | **1. Estándar** | **2. Nested logit** | **3. Logit condicional** |
|---|---|---|---|
| $\bar{\alpha}_1$ | -1.000 | -28.196 | -37.058 |
| $\bar{\alpha}_2$ | -1.000 | 0.387 | 0.487 |
| $\bar{\alpha}_3$ | -1.000 | 1.308 | 1.388 |
| $\bar{\alpha}_4$ | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| $\bar{\beta}_p$ | -1.000 | 0.734 | 0.644 |
| $\bar{\beta}_f$ | -1.000 | -1.930 | -3.086 |
| $\sigma_p$ | 0.100 | 0.100 | 0.100 |
| $\sigma_f$ | 0.100 | 0.100 | 0.100 |
| $\sigma_1$ | 0.100 | 0.100 | 0.100 |
| $\sigma_2$ | 0.100 | 0.100 | 0.100 |
| $\sigma_3$ | 0.100 | 0.100 | 0.100 |

Aunado a las estimaciones mediante condiciones iniciales distintas, emplearemos tres métodos de estimación: `BFGS`, `L-BFGS-B` y `Nelder-Mead`. La tabla 2 contiene los resultados, ordenados de izquierda a derecha, de menor a mayor según el valor del AIC. Es posible notar que muchos de las estimaciones son muy similares, y que el modelo ganador se repitió bastante.

Tabla 2: Comparación de modelos Mixed Logit: parámetros estimados

| **Método** | BFGS | BFGS | BFGS | L-BFGS-B | L-BFGS-B | L-BFGS-B | Nelder-Mead | Nelder-Mead | Nelder-Mead |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cond. inic.** | CI 3 | CI 2 | CI 1 | CI 2 | CI 3 | CI 1 | CI 3 | CI 2 | CI 1 |
| $\bar{\alpha}_1$ | 1.48 | 1.48 | 1.48 | 1.48 | 1.48 | 1.48 | 1.48 | 1.48 | 16.37 |
| $\bar{\alpha}_2$ | 0.67 | 0.67 | 0.67 | 0.67 | 0.67 | 0.67 | 0.67 | 0.66 | 22.60 |
| $\bar{\alpha}_3$ | -3.45 | -3.45 | -3.45 | -3.45 | -3.46 | -3.45 | -3.45 | -3.54 | -66.96 |
| $\bar{\alpha}_4$ | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| $\bar{\beta}_p$ | -40.47 | -40.47 | -40.47 | -40.47 | -40.49 | -40.49 | -40.46 | -40.29 | -617.21 |
| $\bar{\beta}_f$ | -0.04 | -0.04 | -0.04 | -0.04 | -0.05 | -0.04 | -0.04 | -0.06 | 25.59 |
| $\sigma_p$ | -2.39 | -2.39 | -2.39 | -2.38 | -2.39 | -2.40 | -2.33 | -0.49 | -8.65 |
| $\sigma_f$ | 2.41 | 2.41 | 2.41 | 2.41 | 2.42 | 2.42 | 2.41 | 2.42 | -73.48 |
| $\sigma_1$ | -0.07 | -0.07 | -0.07 | -0.06 | -0.07 | -0.07 | -0.07 | 0.25 | -81.58 |
| $\sigma_2$ | 0.18 | 0.18 | 0.18 | 0.18 | 0.19 | 0.19 | 0.18 | -0.15 | 62.34 |
| $\sigma_3$ | 0.41 | 0.41 | 0.41 | 0.41 | 0.41 | 0.41 | 0.41 | 0.56 | -42.23 |
| **LL** | -2647.49 | -2647.49 | -2647.49 | -2647.49 | -2647.49 | -2647.49 | -2647.49 | -2648.00 | -2703.46 |
| **AIC** | 5314.98 | 5314.98 | 5314.98 | 5314.98 | 5314.98 | 5314.98 | 5314.98 | 5315.99 | 5426.93 |

Finalmente, la tabla 3 muestra los resultados finales junto con los errores estándar de los parámetros calculados asintóticamente. Además, se presenta una comparación con los modelos de Nested logit y Logit condicional. Es posible notar que el modelo de Mixed logit obtenido arroja un AIC menor, lo que sugiere que es superior al resto.

Tabla 3: Comparación de modelos Logit Condicional, Nested Logit y Mixed Logit

| **Parámetro** | **Mixed logit** | **EE** | **Nested logit** | **EE** | **Logit condicional** | **EE** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta_p$ | -40.472 | 3.878 | -28.196 | 3.780 | -37.058 | 2.399 |
| $\beta_f$ | -0.045 | 0.256 | 0.387 | 0.102 | 0.487 | 0.120 |
| $\alpha_1$ | 1.483 | 0.106 | 1.308 | 0.079 | 1.388 | 0.088 |
| $\alpha_2$ | 0.666 | 0.058 | 0.734 | 0.070 | 0.644 | 0.054 |
| $\alpha_3$ | -3.454 | 0.435 | -1.930 | 0.316 | -3.086 | 0.145 |
| $\alpha_4$ | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| $\lambda_1$ | – | – | 0.702 | 0.106 | – | – |
| $\lambda_2$ | – | – | 0.525 | 0.120 | – | – |
| $\sigma_p$ | -2.387 | 8.633 | – | – | – | – |
| $\sigma_f$ | 2.414 | 0.489 | – | – | – | – |
| $\sigma_1$ | -0.065 | 0.359 | – | – | – | – |
| $\sigma_2$ | 0.184 | 0.702 | – | – | – | – |
| $\sigma_3$ | 0.411 | 0.871 | – | – | – | – |
| **AIC** | 5314.98 | | 5322.20 | | 5327.11 | |

*Nota:* Los errores estándar (EE) fueron calculados mediante la teoría asintótica utilizando el hessiano numérico aproximado con `numdifftools`. En el caso del modelo Nested Logit, los parámetros $\lambda_r$ fueron transformados usando el método delta.