ECONOMETRIA I

TAREA 15

MAESTRIA EN ECONOMIA, 2023-2025

EL COLEGIO DE MEXICO

Profr. Eneas A. Caldiño García

Entrega: 8 de mayo de 2024

1. $\left\{ \begin{pmatrix} Y_j \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{n}$ vectores aleatorios de dimensión k i.i.d.

$\text{Prob}[\text{rango}(\mathbf{X}_{n\times k}) = k] = 1$

$\mathbf{Y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{U} \quad E[\mathbf{U}|\mathbf{X}] = \mathbf{0}$

$\text{Var}(\mathbf{U}|\mathbf{X}) = \sigma_u^2 \mathbb{I}_n$ (homocedasticidad condicional)

$\mathbf{U}|_{\mathbf{X}=X} \sim \mathcal{N}_n$

Se sabe que bajo estas condiciones $Q = \dfrac{(n-k)\hat{\sigma}^2_{uMCO}}{\sigma_u^2} \sim \chi^2_{n-k}$

i) Usando Q como pivote encontrar un intervalo de confianza de σ_u^2, $(\tau_1(X_1,X_2,..,X_n),\tau_2(X_1,X_2,..,X_n))$, con nivel de confianza $100(1-\alpha)\%$.

2. i) Generar (usando algún paquete econométrico) una muestra i.i.d. $\{U_j\}_{j=1}^{40}$, $U_j \sim \mathcal{N}(0,0.04)$ y otra muestra i.i.d. $\left\{ \begin{pmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{40}$, $\begin{pmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \end{pmatrix}$ $\sim \mathcal{N}_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.01 & -0.02 \\ -0.02 & 0.09 \end{pmatrix} \right)$, $j = 1,2,..,40$

ii) Generar $\{Y_j\}_{j=1}^{40}$ donde

$Y_j \equiv \beta_0 + \beta_1 X_{1j} + \beta_2 X_{2j} + U_j \quad j = 1,2,...,40$

con $\beta_0 = 1.1$, $\beta_1 = -2.4$ y $\beta_2 = 1.4$

iii) Encontrar un intervalo de confianza de β_2 con nivel de confianza 90% (α = 0.10).

iv) Encontrar un intervalo de confianza de σ_u^2 con nivel de confianza 95%

v) Repetir 999 veces los pasos i), ii), iii) y iv) para obtener en total 1000 intervalos de confianza de β_2 y 1000 intervalos de confianza de σ_u^2. ¿Qué porcentaje de los 1000 intervalos de confianza de β_2 incluyen a 1.4? ¿Qué porcentaje de los 1000 intervalos de confianza de σ_u^2 incluyen a 0.04?

3. $\left\{ \begin{pmatrix} Y_j \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{n}$ vectores aleatorios i.i.d. de dimensión k. n > k

$\mathbf{Y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{U} \qquad E[\mathbf{U}|\mathbf{X}] = \mathbf{0}$

$\text{Prob}\,[\text{Rango}(\mathbf{X}) = k] = 1$

$\text{Var}(\mathbf{U}|\mathbf{X}) = \sigma_u^2 \mathbb{I}_n$ (homocedasticidad condicional)

$\mathbf{U}|_{\mathbf{X}=X} \sim \mathcal{N}_n$

i) $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$ vector fijo. Construir un intervalo de confianza (100(1-α)%) de $\mathbf{c}'\mathbf{b}$.

ii) Generar (usando algún paquete econométrico) una muestra i.i.d. $\{U_j\}_{j=1}^{40}$, $U_j \sim N(0,0.04)$ y otra muestra i.i.d. $\left\{ \begin{pmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{40}$, $\begin{pmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \end{pmatrix}$

$\sim N_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.01 & -0.02 \\ -0.02 & 0.09 \end{pmatrix} \right]$, j = 1,2,..,40

iii) Generar $\{Y_j\}_{j=1}^{40}$ donde

$$Y_j \equiv \beta_0 + \beta_1 X_{1j} + \beta_2 X_{2j} + U_j \qquad j = 1,2,\ldots,40$$

con $\beta_0 = 1.1$, $\beta_1 = -2.4$ y $\beta_2 = 1.4$

iv) Con los datos obtenidos en ii) y iii) encontrar un intervalo de confianza de $\beta_1 - 3\beta_2$ con nivel de confianza 99%

v) Repetir 999 veces los pasos ii), iii) y iv) para obtener en total 1000 intervalos de confianza de $\beta_1 - 3\beta_2$. ¿Qué porcentaje de los 1000 intervalos de confianza de $\beta_1 - 3\beta_2$ incluyen a 6.6 (6.6 = -2.4 - 3x1.4)?

4. En este ejercicio se ilustra la consecuencia de la presencia de *quasi* multicolinealidad (Una de las columnas de **X** es casi una combinación lineal de las demás) sobre los estimadores de los parámetros y sus intervalos de confianza.

i) Generar (usando algún paquete econométrico) una muestra i.i.d.

$$\left\{\begin{pmatrix} Y_i \\ X_i \end{pmatrix}\right\}_{i=1}^{100} \sim N_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.36 & 0.000002 \\ 0.000002 & 0.000001 \end{pmatrix}\right].$$

ii) $Y_i = \alpha_0 + \beta_0 X_i + U_i \qquad E[U_i | X_i] = 0, \qquad i = 1,2,..,100$

$$\mathrm{var}(U_i) = \sigma_u^2$$

Con los parámetros dados en i), encontrar los valores verdaderos α_0, β_0 y σ_u^2.

iii) En un mismo plano graficar la muestra obtenida en i) junto con la recta $y = \alpha_0 + \beta_0 x$, donde $0 \le x \le 1$. α_0 y β_0 son los valores obtenidos en ii).

iv) Con los datos obtenidos en i), calcular determinante($\mathbf{X}'\mathbf{X}$). Imprimir las matrices $\mathbf{X}_{100x2}$ y $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$. ¿Hay multicolinealidad?

v) Con los datos obtenidos en i), estimar por mínimos cuadrados ordinarios el modelo de regresión lineal:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + U_i \qquad i = 1,2,..,100$$

obteniendo así los estimados $\hat{\mathbf{b}}_{MCO} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}$ y $\hat{\sigma}^2_u$ y los estimados de las varianzas condicionales $\hat{\text{var}}(\hat{\alpha}|\mathbf{X})$, $\hat{\text{var}}(\hat{\beta}|\mathbf{X})$ y $\hat{\text{var}}(\hat{\sigma}^2_u|\mathbf{X})$.

vi) Encontrar un intervalo de confianza de α con nivel de confianza del 95%

vii) Encontrar un intervalo de confianza de β con nivel de confianza del 95%

viii) Repetir 4 veces los pasos i) y v) para obtener y comparar los estimados $\{\hat{\alpha}_i\}_{i=1}^{5}$, $\{\hat{\beta}_i\}_{i=1}^{5}$ y $\{\hat{\sigma}^2_{ui}\}_{i=1}^{5}$ entre ellos y con los valores verdaderos α_0, β_0 y σ^2_u.

5. $\left\{ \begin{pmatrix} Y_i \\ X_{1i} \\ X_{2i} \end{pmatrix} \right\}_{i=1}^{100}$ vectores aleatorios i.i.d. de dimensión 3. $\begin{pmatrix} Y_i \\ X_{1i} \\ X_{2i} \end{pmatrix} \sim N_3$.

$$Y_i = b_1 + b_2 X_{1i} + b_3 X_{2i} + U_i\,, \quad E[U_i|X_{1i}, X_{2i}] = 0 \qquad i = 1,2,..,100$$

i) Generar (usando algún paquete econométrico) una muestra i.i.d.

$$\left\{ \begin{pmatrix} Y_i \\ X_{1i} \\ X_{2i} \end{pmatrix} \right\}_{i=1}^{100} \quad \text{donde} \quad \begin{pmatrix} Y_i \\ X_{1i} \\ X_{2i} \end{pmatrix} \sim N_3\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.8 & 0.4 & -0.2 \\ 0.4 & 1.0 & -0.8 \\ -0.2 & -0.8 & 2.0 \end{pmatrix} \right].$$

ii) Probar la hipótesis

$\mathbf{H}_0$: $b_1 = 0$

contra la alternativa

$\mathbf{H}_1$: $b_1 \neq 0$

con un nivel de significancia del 1%

iii) Probar la hipótesis

H_0: $b_2 = 0.5$

contra la alternativa

H_1: $b_2 \neq 0.5$

con un nivel de significancia del 5%

iv) Probar la hipótesis

H_0: $b_3 = 1.2$

contra la alternativa

H_1: $b_3 \neq 1.2$

con un nivel de significancia del 10%

v) Probar la hipótesis

H_0: $b_1 + b_3 = 1$

contra la alternativa

H_1: $b_1 + b_3 \neq 1$

con un nivel de significancia del 10%

6. Estudiar las secciones 4.1 a 4.3 del capítulo 4 "*Multiple Regression Analysis: Inference*" de Wooldridge J. M., *Introductory Econometrics: A Modern Approach, 5th, 6th or 7th Edition*, South-Western CENGAGE Learning.