ECONOMETRIA II
TAREA 7
MAESTRIA EN ECONOMIA, 2023-2025
EL COLEGIO DE MEXICO

Profr. Eneas A. Caldiño García
Entrega: 27 de septiembre de 2024

1. $\left\{ \begin{pmatrix} X_j \\ Y_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{\infty}$ vectores aleatorios de dimensión 2 i.i.d.

$$E\left[\begin{pmatrix} X_j \\ Y_j \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}, \quad \text{var}\left[\begin{pmatrix} X_j \\ Y_j \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j, \quad \bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j$$

i) Demostrar que $\sqrt{n}\,(\bar{X}_n\bar{Y}_n - \mu_x\mu_y) \xrightarrow{D} N(0, \mu_y^2\sigma_x^2 + 2\mu_x\mu_y\sigma_{xy} + \mu_x^2\sigma_y^2)$

2. Funciones no lineales de parámetros. El Método Delta.

Usando la serie "Tje U.S. Gasoline Market, 52 Yearly Observations, 1953-2004" en la base de datos de *Econometric Analysis, 7th edition*, de W. H. Greene, en http://pages.stern.nyu.edu/wgreene/Text/econometricanalysis.htm, reproducir los resultados numéricos dados en el *Example 4.4 Nonlinear Functions of Parameters: The Delta Method*, pág. 69.

3. Estadístico de Wald para probar la hipótesis lineal $\mathbf{H}_0$: $\mathbf{b}_i = b_i^*$ en el modelo de regresión lineal estimado por MCO, con una muestra infinita, con homocedasticidad o heterocedasticidad y sin suponer ninguna distribución condicional para $\mathbf{U}$.

S1 $\left\{ \begin{pmatrix} Y_j \\ \mathbf{x}_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{\infty}$ vectores aleatorios de dimensión k i.i.d.

S2 $\mathbf{Y}^n = \mathbf{X}^n\mathbf{b} + \mathbf{U}^n$ $\quad E[\mathbf{X}^{n\prime}\mathbf{U}^n] = \mathbf{0}_{kx1}$ (i.e. $E(\mathbf{x}_j U_j) = 0 \quad j = 1,2,..,n$)

(no es necesario pedir $E[\mathbf{U}^n | \mathbf{X}^n] = \mathbf{0}_{nx1}$

S3 Prob[rango($\mathbf{X}^n_{nxk}$) = k] = 1 (no multicolinealidad perfecta)

$E(\mathbf{X}_j) = \mu_x < \infty, \quad E(\mathbf{X}_j\mathbf{X}_j') = \Delta_{xx} < \infty$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ : \\ b_k \end{pmatrix}$$

i) Bajo el supuesto adicional de homocedasticidad condicional, S4, encontrar el estadístico de Wald para probar la hipótesis $\mathbf{H}_0$: $\mathbf{b}_i = b_i^*$:

$$W_n = \frac{(\hat{\mathbf{b}}_{iMCO} - \quad)^2}{\hat{\sigma}^2_{uMCO} \; (\quad)}$$

ii) Suponiendo o sospechando la presencia de heterocedasticidad condicional (no se cumple S4) encontrar el estadístico de Wald para probar la hipótesis $\mathbf{H}_0$: $\mathbf{b}_i = b_i^*$:

$$W_n = \frac{(\hat{\mathbf{b}}_{iMCO} - \quad)^2}{\qquad}$$

4. Estadístico de Wald para probar la hipótesis lineal $\mathbf{H}_0$: $\mathbf{c}'\mathbf{b} = c_0$ en el modelo de regresión lineal estimado por MCO, con una muestra infinita, con homocedasticidad o heterocedasticidad y sin suponer ninguna distribución condicional para $\mathbf{U}$.

S1 $\left\{ \begin{pmatrix} Y_j \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{\infty}$ vectores aleatorios de dimensión k i.i.d.

S2 $\mathbf{Y}^n = \mathbf{X}^n\mathbf{b} + \mathbf{U}^n$ $\quad E[\mathbf{X}^{n\prime}\mathbf{U}^n] = \mathbf{0}_{kx1}$ (i.e. $E(\mathbf{x}_j U_j) = 0 \quad j = 1,2,..,n)$

(no es necesario pedir $E[\mathbf{U}^n|\mathbf{X}^n] = \mathbf{0}_{nx1}$

S3 $\text{Prob}[\text{rango}(\mathbf{X}^n_{nxk}) = k] = 1$ (no multicolinealidad perfecta)

$E(\mathbf{X}_j) = \mu_x < \infty, \quad E(\mathbf{X}_j\mathbf{X}_j') = \Delta_{xx} < \infty$

i) Bajo el supuesto adicional de homocedasticidad condicional, S4, encontrar el estadístico de Wald para probar la hipótesis $\mathbf{H}_0$: $\mathbf{c}'\mathbf{b} = c_0$

$$W_n = \frac{(\mathbf{c}'\hat{\mathbf{b}}_{MCO} - c_0)^2}{\hat{\sigma}^{2n}_{uMCO} \; (\qquad)}$$

ii) Suponiendo o sospechando la presencia de heterocedasticidad condicional (no se cumple S4) encontrar el estadístico de Wald para probar la hipótesis $\mathbf{H}_0$: $\mathbf{c}'\mathbf{b} = c_0$

5. S1 $\left\{ \begin{pmatrix} Y_j \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{\infty}$ vectores aleatorios de dimensión k i.i.d.

S2 $\mathbf{Y}^n = \mathbf{X}^n\mathbf{b} + \mathbf{U}^n$ $\quad E[\mathbf{X}^{n\prime}\mathbf{U}^n] = \mathbf{0}_{kx1}$ (i.e. $E(\mathbf{x}_j U_j) = 0 \quad j = 1,2,..,n)$

(no es necesario pedir $E[\mathbf{U}^n|\mathbf{X}^n] = \mathbf{0}_{nx1}$

S3 $\text{Prob}[\text{rango}(\mathbf{X}^n_{nxk}) = k] = 1$ (no multicolinealidad perfecta)

$E(\mathbf{X}_j) = \mu_x < \infty, \quad E(\mathbf{X}_j\mathbf{X}_j') = \Delta_{xx} < \infty$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_0: \beta_0^2 + \beta_1^2 + .. + \beta_{k-1}^2 = 1$$

$$\beta_0 + \beta_1 + .. + \beta_{k-1} = 0$$

i) Obtener el estadístico de Wald para probar $\mathbf{H}_0$ cuando se sabe o se sospecha la presencia de heterocedasticidad.

6. $\left\{ \begin{pmatrix} \hat{\theta}_{1n} \\ \hat{\theta}_{2n} \\ \hat{\theta}_{3n} \end{pmatrix} \right\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de estimadores de $\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \in \Theta \subset \mathbb{R}^3$

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\theta}_{1n} - \theta_1 \\ \hat{\theta}_{2n} - \theta_2 \\ \hat{\theta}_{3n} - \theta_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{D} N_3(\mathbf{0}, \mathbf{V})$$ donde $\mathbf{V}$ es matriz 3x3 positiva semidefinida.

$\hat{\mathbf{V}}_n = \begin{pmatrix} \hat{v}_{11n} & \hat{v}_{12n} & \hat{v}_{13n} \\ \hat{v}_{12n} & \hat{v}_{22n} & \hat{v}_{23n} \\ \hat{v}_{13n} & \hat{v}_{23n} & \hat{v}_{33n} \end{pmatrix}$ estimador consistente de $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{12} & v_{22} & v_{23} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} \end{pmatrix}$.

i) Demostrar que el estadístico de Wald

$$W_n \equiv \left(g(\hat{\theta}_n) \right)' \left[\frac{\partial g(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta} \frac{1}{n} \hat{\mathbf{V}}_n \left(\frac{\partial g(\hat{\theta}_n)}{\partial \theta} \right)' \right]^{-1} g(\hat{\theta}_n)$$

para probar la hipótesis no lineal

$$\mathbf{H}_0: \frac{\theta_1}{\theta_2} - 1 = 0$$

$$\text{vs} \quad \mathbf{H}_1: \frac{\theta_1}{\theta_2} - 1 \neq 0$$

$$\text{es } W_n = \frac{n\hat{\theta}_2^2(\hat{\theta}_1^2 - \hat{\theta}_2^2)^2}{\hat{v}_{11n}\hat{\theta}_2^2 - 2\hat{v}_{12n}\hat{\theta}_1\hat{\theta}_2 + \hat{v}_{22n}\hat{\theta}_1^2}$$

ii) Encontrar la forma que toma el estadístico de Wald

$$W_n \equiv (\mathbf{R}\hat{\theta}_n - \mathbf{r})' \left(\mathbf{R} \frac{1}{n} \hat{\mathbf{V}}_n \mathbf{R}' \right)^{-1} (\mathbf{R}\hat{\theta}_n - \mathbf{r})$$

para probar la hipótesis lineal

$$\mathbf{H}_0: \theta_1 = \theta_2$$

$$\text{vs} \quad \mathbf{H}_1: \theta_1 \neq \theta_2$$

iii) Las hipótesis $\mathbf{H}_0$ en i) y ii) son la misma. ¿Son iguales los estadísticos de Wald obtenidos en i) y ii)? Este resultado muestra el problema de la falta de invarianza de la prueba de Wald: No es invariante a parametrizaciones algebraicamente equivalentes de la hipótesis nula.