ECONOMETRIA I

TAREA 17

MAESTRIA EN ECONOMIA, 2023-2025

EL COLEGIO DE MEXICO

Profr. Eneas A. Caldiño García

Entrega: 13 de mayo de 2024

1. i) Generar (usando algún paquete econométrico) una muestra $\{X_i\}_{i=1}^{260}$ de v.a.s i.i.d. (Usar cualquier distribución que se quiera).

ii) Generar una muestra $\{U_i\}_{i=1}^{260}$ de v.a.s i.i.d. donde $U_i \sim N_2(0,0.4)$, $i = 1,2,..,260$ tal que U_i y X_j son independientes $\forall$ $i \neq j$, $i,j \in \{1,2,..,260\}$.

iii) Usando los datos obtenidos en i) y ii), generar la muestra $\{Y_i\}_{i=1}^{120}$ donde

$$Y_i = 0.6 + 0.5X_i + U_i, \quad i = 1,2,..,120$$

iv) Usando los datos obtenidos en i) y ii), generar la muestra $\{Y_i\}_{i=121}^{260}$ donde

$$Y_i = 0.9 + 0.3X_i + U_i, \quad i = 121,..,260$$

Con los datos obtenidos en i), iii) y iv) $\left\{ \begin{pmatrix} Y_i \\ X_i \end{pmatrix} \right\}_{i=1}^{260}$ se considera el modelo:

$$\begin{cases} Y_i = \alpha_1 + \beta_1 X_i + U_i & E[Y_i | 1, X_i] = 0, \quad i = 1,..,120 \\ Y_i = \alpha_2 + \beta_2 X_i + V_i & E[Y_i | 1, X_i] = 0, \quad i = 121,..,260 \end{cases}$$

v) Probar la hipótesis

$$\mathbf{H}_0 : \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad \text{(i.e. no hay cambio estructural)}$$

contra la alternativa:

$$\mathbf{H}_1: \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

con nivel de significancia α = 0.05, calculando y usando los estadísticos:

a) $$\frac{(\mathbf{R}\hat{\mathbf{b}}_{MCU}-\mathbf{r})'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}(\mathbf{R}\hat{\mathbf{b}}_{MCU}-\mathbf{r})}{m\ \hat{\sigma}^2_{uMCU}} \sim F_{m,n-k}$$

donde m = número de restricciones lineales

n = tamaño de la muestra (número total de observaciones)

k = dimensión del vector $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}'$.

b) $$\frac{\hat{\mathbf{U}}'_{MCR}\hat{\mathbf{U}}_{MCR} - \hat{\mathbf{U}}'_{MCU}\hat{\mathbf{U}}_{MCU}}{m\ \frac{1}{n-k}\ \hat{\mathbf{U}}'_{MCU}\hat{\mathbf{U}}_{MCU}} \sim F_{m,n-k}$$

c) $$\frac{(\hat{\mathbf{b}}_{MCR} - \hat{\mathbf{b}}_{MCU})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\mathbf{b}}_{MCR} - \hat{\mathbf{b}}_{MCU})}{m\ \frac{1}{n-k}\ (\hat{\mathbf{U}}'_{MCU}\hat{\mathbf{U}}_{MCU})} \sim F_{m,n-k}$$

2. Ver Wooldridge, J. M., *Introductory Econometrics: A Modern Approach. 6th Edition*. South-Western. CENGAGE Learning. Ejercicio C6, pág. 238.

$$sleep = \alpha + \beta_1 totwrk + \beta_2 educ + \beta_3 age + \beta_4 age^2 + \beta_5 yngkid + u$$

i) Con un nivel de confianza del 5% probar la hipótesis de que no hay cambio estructural, i.e. para mujeres y hombres los 6 parámetros α, $\beta_1, \ldots, \beta_5$ son iguales, calculando y usando los estadísticos:

a) $$\frac{(\mathbf{R}\hat{\mathbf{b}}_{MCU}-\mathbf{r})'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}(\mathbf{R}\hat{\mathbf{b}}_{MCU}-\mathbf{r})}{m\ \hat{\sigma}^2_{uMCU}} \sim F_{m,n-k}$$

donde m = número de restricciones lineales

n = tamaño de la muestra (número total de observaciones)

$$k = \text{dimensión del vector } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}'.$$

b) $$\frac{\hat{\mathbf{U}}'_{MCR}\hat{\mathbf{U}}_{MCR} - \hat{\mathbf{U}}'_{MCU}\hat{\mathbf{U}}_{MCU}}{m \, \frac{1}{n-k} \, \hat{\mathbf{U}}'_{MCU}\hat{\mathbf{U}}_{MCU}} \sim F_{m,n-k}$$

c) $$\frac{(\hat{\mathbf{b}}_{MCR} - \hat{\mathbf{b}}_{MCU})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\mathbf{b}}_{MCR} - \hat{\mathbf{b}}_{MCU})}{m \, \frac{1}{n-k} \, (\hat{\mathbf{U}}'_{MCU}\hat{\mathbf{U}}_{MCU})} \sim F_{m,n-k}$$

3. $\left\{ \begin{pmatrix} Y_j \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{n}$ vectores aleatorios de dimensión k, i.i.d.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{U} \qquad E(\mathbf{U}) = \mathbf{0}_{nx1}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_j = \begin{pmatrix} X_{j1} \\ X_{j2} \\ \vdots \\ X_{j,k-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{X}'_1 \\ 1 & \mathbf{X}'_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{X}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1,k-1} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2,k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{n,k-1} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}$$

Demostrar que si en la ecuación

$$Y_j = \alpha + \beta_1 X_{j1} + \beta_2 X_{j2} + \ldots + \beta_i X_{ji} + \ldots + \beta_{k-1} X_{j,k-1} + U_j \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

existe al menos una variable explicativa endógena, i.e. para alguna $i \in \{1,2,\ldots,k-1\}$, $\text{cov}(X_{ji},U_j) \neq 0$, entonces

i) $E[\mathbf{X}_j \mathbf{U}_j] \neq \mathbf{0}_{(k-1)x1}$

ii) $E[\mathbf{X}'\mathbf{U}] \neq \mathbf{0}_{kx1}$

iii) $E[\mathbf{U}|\mathbf{X}] \neq \mathbf{0}_{nx1}$

4. Cálculo del sesgo de $\hat{\mathbf{b}}_{MCO}$ cuando $E[\mathbf{X}'\mathbf{U}] \neq \mathbf{0}$ (i.e. cuando hay al menos una variable endógena, $cov(X_{jm},U_j) \neq 0$, para alguna $m\in\{1,2,..,k-1\}$).

$$\left\{ \begin{pmatrix} Y_j \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix} \right\}_{j=1}^{\infty}$$ vectores aleatorios de dimensión k i.i.d.

$$\mathbf{Y}^n = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^n = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{X}_1' \\ 1 & \mathbf{X}_2' \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{X}_n' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}^n = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}$$

$\mathbf{Y}^n = \mathbf{X}^n\mathbf{b} + \mathbf{U}^n \quad E[\mathbf{x}_jU_j] \neq \mathbf{0}_{kx1}$ (i.e $E[\mathbf{X}^{n\prime}\mathbf{U}^n] \neq \mathbf{0}_{kx1}$)

$E(\mathbf{U}^n) = \mathbf{0}$

$Prob[rango(\mathbf{X}^n_{nxk}) = k] = 1$ (no multicolinealidad perfecta)

$E(\mathbf{X}_j) = \mu_x < \infty$ y $E(\mathbf{X}_j\mathbf{X}_j') = \Delta_x < \infty$

$$\hat{\mathbf{b}}^n_{MCO} = (\mathbf{X}^{n\prime}\mathbf{X}^n)^{-1}\mathbf{X}^{n\prime}\mathbf{Y} = \mathbf{b} + \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j' \right)^{-1} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{x}_jU_j$$

donde $\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{X}_j \end{pmatrix}_{kx1}$.

Demostrar:

i) $E[\hat{\mathbf{b}}^n_{MCO}|\mathbf{X}^n] = \mathbf{b} + (\mathbf{X}^{n\prime}\mathbf{X}^n)^{-1}\mathbf{X}^{n\prime}E[\mathbf{U}^n|\mathbf{X}^n]$

(i.e. $\hat{\mathbf{b}}^n_{MCO}$ es estimador condicionalmente sesgado).

ii) $E(\hat{\mathbf{b}}^n_{MCO}) = \mathbf{b} + E[(\mathbf{X}^{n\prime}\mathbf{X}^n)^{-1}\mathbf{X}^{n\prime}E[\mathbf{U}^n|\mathbf{X}^n]]$

(i.e. $\hat{\mathbf{b}}_{MCO}$ es estimador incondicionalmente sesgado).