

Oscillateur en régime sinusoïdal forcé

Résonance - Filtres du 2nd ordre

1. Circuit R, L, C série soumis à une excitation sinusoïdal	1
2. Résonance en intensité - Filtre passe-bande du 2 nd ordre	4
3. Résonance avec bornes de la capacité - Filtre passe-bas du 2 nd ordre	12
4. Résonance aux bornes de l'inductance	15
5. Filtres coupe-bande ou réjecteur de fréquences	15

I. Circuit R, L, C série soumis à une excitation sinusoïdal

Dans tout ce chapitre, on s'intéressera au régime permanent de circuits du second ordre soumis à un régime sinusoïdal forcé.

On utilisera donc des impédances.

1) Différentes tensions et montages correspondants

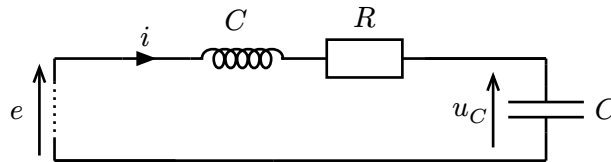


Fig. 1. – Tension aux bornes de C

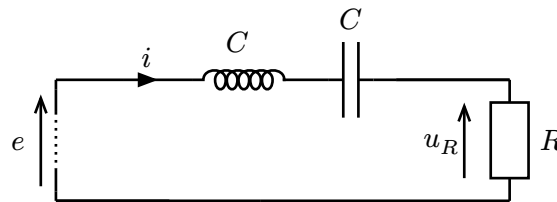


Fig. 2. – Tension aux bornes de R

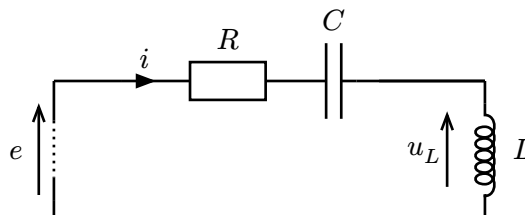


Fig. 3. – Tension aux bornes de L

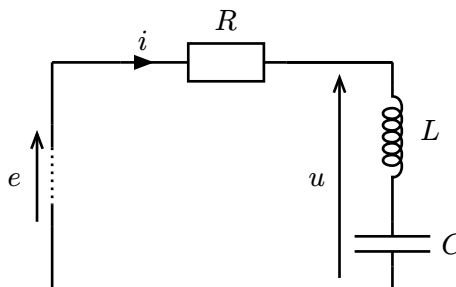


Fig. 4. – Tension aux bornes de L, C

2) Équation différentielle

- Aux bornes de C (Fig. 1):

$$\begin{aligned}e &= u_L + u_R + u_C \\&= L \frac{di}{dt} + Ri + u_C \\&= LC \frac{d^2u}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C\end{aligned}$$

$$\frac{e}{LC} = \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC}$$

- Aux bornes de R : (Fig. 2)

$$\begin{aligned}e &= u_L + u_C + u_R \\&= L \frac{dt}{dt} + u_C + u_R\end{aligned}$$

On a $i = \frac{u_R}{R}$, on dérive l'équation précédente:

$$\begin{aligned}\frac{de}{dt} &= \frac{L}{R} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du_C}{dt} + \frac{du_R}{dt} \\&= \frac{L}{R} \frac{d^2u_R}{dt^2} + \frac{u_R}{RC} + \frac{du_C}{dt}\end{aligned}$$

$$\frac{R}{L} \frac{de}{dt} = \frac{d^2u_R}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_R}{dt} + \frac{1}{CL} u_R$$

- Aux bornes de L (Fig. 3):

$$\begin{aligned}e &= u_R + u_C + u_L \\ \frac{de}{dt} &= R \frac{di}{dt} + \frac{du_C}{dt} + \frac{du_L}{dt} \\ \frac{d^2e}{dt^2} &= \frac{R}{L} \frac{du_L}{dt} + \frac{u_L}{LC} + \frac{d^2u_L}{dt^2}\end{aligned}$$

$$\frac{d^2u_L}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_L}{dt} + \frac{1}{LC} u_L = \frac{d^2e}{dt^2}$$

- Aux bornes de L, C (Fig. 4):

On va supposer un régime qu'une excitation sinusoïdale est envoyée en entrée, on va utiliser les impédances pour obtenir une fonction de transfert, puis on transforme tout les $j\omega$ et les ω^2 en différentiations pour obtenir l'équation différentielle, et on va dire hassul le système respecte cette équation différentielle pour toutes les entrées, donc on a trouvé l'équation différentiel du circuit.

$$\underline{e} = R\underline{i} + j\omega\underline{i} + \frac{1}{jC\omega}\underline{i}$$

$$\underline{u} = \left(jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) \underline{i}$$

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\underline{u} = \frac{\frac{1}{LC} - \omega^2}{\frac{1}{LC} + j\frac{R}{L}\omega - \omega^2} \underline{e}$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = \frac{1}{LC} e + \frac{d^2 e}{dt^2}$$

3) Régime transitoire et régime force

On trouve toujours la même équation différentielle, ce qui change c'est ce qui se passe de l'autre côté.

On aura juste à résoudre l'équation homogène (comme pour un régime transitoire normal), puis à ajouter une solution particulière, qui sera « simple » à trouver, car le second membre sera une sinusoïde.

4) Passage à la notation complexe

- Aux bornes de C On reprend l'équation différentielle:

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{e}{LC}$$

On la traduit en notation complexe:

$$-\omega^2 \underline{u}_C + \frac{R}{L} j\omega \underline{u}_C + \frac{1}{LC} \underline{u}_C = \frac{1}{LC} \underline{e}$$

- Aux bornes de R :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_R}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_R}{dt} + \frac{1}{CL} u_R &= \frac{R}{L} \frac{de}{dt} \\ -\omega^2 \underline{u}_R + \frac{R}{L} j\omega \underline{u}_R + \frac{1}{LC} \underline{u}_R &= \frac{R}{L} j\omega \underline{e} \end{aligned}$$

- Aux bornes de L :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_L}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_L}{dt} + \frac{1}{LC} u_L &= \frac{d^2 e}{dt^2} \\ -\omega^2 \underline{u}_L + \frac{R}{L} j\omega \underline{u}_L + \frac{1}{LC} \underline{u}_L &= -\omega^2 \underline{e} \end{aligned}$$

⇒ TODO:

Calcul immondes:

1.4 Passage à la notation complexe

- aux bornes de C : $\underline{u}_C = \frac{\underline{e}}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega} = \frac{\underline{e}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$
- aux bornes de R : $\underline{u}_R = \frac{jRC\omega\underline{e}}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega} = \frac{j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\underline{e}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$
ou $\underline{u}_R = \frac{\underline{e}}{1 + j\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{\underline{e}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$
- aux bornes de L : $\underline{u}_L = \frac{-LC\omega^2\underline{e}}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega} = \frac{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\underline{e}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$
- aux bornes de L, C : $\underline{u} = \frac{(1 - LC\omega^2)\underline{e}}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega} = \frac{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\underline{e}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsation propre et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ facteur de qualité

On se retrouve avec des fonctions qui ressemblent étrangement à des fonctions de transfert...

On regarde le comportement asymptotique des filtres:

- Aux bornes de L :

Quand $\omega \rightarrow +\infty$, $\underline{u}_R \rightarrow \underline{e}$

Quand $\omega \rightarrow 0$, $\underline{u}_R \rightarrow 0$

Le filtre semble être passe-haut

- Aux bornes de C :

Quand $\omega \rightarrow +\infty$, $\underline{u}_R \rightarrow 0$

Quand $\omega \rightarrow 0$, $\underline{u}_R \rightarrow \underline{e}$

Le filtre semble être passe-bas

- Aux bornes de R :

Quand $\omega \rightarrow +\infty$, $\underline{u}_R \rightarrow 0$

Quand $\omega \rightarrow 0$, $\underline{u}_R \rightarrow 0$

Ce filtre est potentiellement un passe bande, on potentiellement un coupe-tout. « a priori, effectivement, il y a de fortes chances que ce soit un passe-bande »

II. Résonance en intensité - Filtre passe-bande du 2nd ordre

Résonance: Passage par un **maximum** de l'**amplitude** de la fonction de transfert étudiée en fonction de la **fréquence/pulsation**.

1) Étude de l'amplitude en fonction de la fréquence

Pour étudier l'intensité du circuit, on va regarder le circuit aux bornes de la résistance (Voir Fig. 2)

On pose la tension et l'intensité complexes du circuit:

$$\underline{e} = \left(jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R \right) \underline{i}$$

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

Donc l'amplitude vérifie:

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

Au dénominateur, les terme étant au carré, on a toujours:

$$R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \geq R^2$$

$$\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \geq R$$

Donc l'intensité respect toujours $I \leq \frac{E}{R}$

Pour atteindre ce maximum, il faut vérifier l'égalité:

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

$$\Leftrightarrow LC\omega^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Donc l'intensité passe par un maximum pour la pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Φ Note:

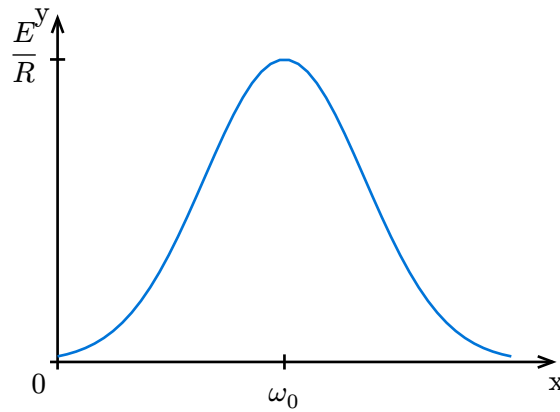
On peut aussi dériver, ou mettre au carré et dériver, mais c'est beaucoup plus lourd sur les calculs.

On analyse l'intensité asymptotiquement:

- Quand $\omega \rightarrow 0$, $I \rightarrow 0$
- Quand $\omega \rightarrow +\infty$, $I \rightarrow 0$

On passe quand même par un maximum d'amplitude $\frac{E}{R}$, le filtre est donc passe bande.

Il est de la forme:



2) Filtre passe bande du 2nd ordre

On reprend le même circuit (Fig. 2):

$$\underline{e} = \left(jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R \right) \underline{i}$$

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

On refait la même chose, différemment:

On étudie le comportement asymptotique de:

1. La bobine:

- $u_L = L \frac{di}{dt}$
- $\underline{u}_L = j\omega L \underline{i}$
- $\omega \rightarrow 0 \Leftrightarrow \underline{u}_L \rightarrow 0 \Leftrightarrow$ La bobine est un fil
- $\omega \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \underline{i} \rightarrow 0 \Leftrightarrow$ La bobine est un interrupteur ouvert

2. Le condensateur:

- $i = C \frac{du_C}{dt}$
- $\underline{i} = j\omega C \underline{u}_C$
- $\omega \rightarrow 0 \Leftrightarrow i \rightarrow 0 \Leftrightarrow$ Le condensateur est un interrupteur ouvert
- $\omega \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \underline{u}_C \rightarrow 0 \Leftrightarrow$ Le condensateur est un fil

Donc le circuit se comporte asymptotiquement comme un passe-bande (ou on passe-rien).

On étudie le gain de la fonction de transfert:

$$G = |\underline{H}| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

D'après l'étude qu'on a déjà effectué sur l'intensité, G est croissant jusqu'à ω_0 , et il est décroissant après.

Pour tracer le diagramme de Bode, on passe au gain décibel:

$$G_{dB} = 20 \log R - 20 \log \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

- Quand $\omega \rightarrow 0$,

$$R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \approx \frac{1}{C\omega}$$

Donc $G_{\text{dB}} = 20 \log R - 20 \log \frac{1}{C\omega} = 20 \log RC\omega = 20 \log \frac{\omega}{\omega_1}$ avec $\omega_1 = \frac{1}{RC}$

On observe une pente de 20 dB/décad

- Quand $\omega \rightarrow +\infty$,

$$R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \approx L\omega$$

Donc $G_{\text{dB}} = 20 \log R - 20 \log L\omega = -20 \log \frac{L\omega}{R} = -20 \log \frac{\omega}{\omega_2}$ avec $\omega_2 = \frac{R}{L}$

On observe une pente de -20 dB/décad

On cherche une valeur de référence de ω . On prend ω_0 tel que:

$$20 \log RC\omega_0 = -20 \log \frac{L\omega_0}{R}$$

$$20 \log(LC\omega_0^2) = 0$$

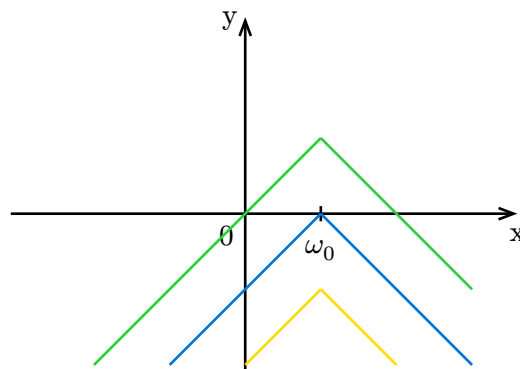
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

En évaluant le gain en ω_0 , on trouve que:

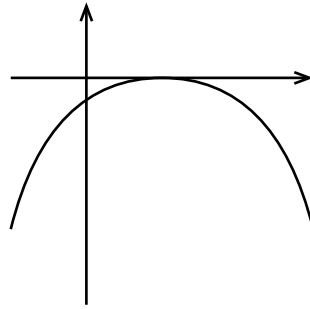
$$G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20 \log \frac{RC}{\sqrt{LC}} = 20 \log R \sqrt{\frac{C}{L}} = -20 \log \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

On retrouve l'expression du facteur de qualité Q de la forme canonique.

Donc, avec $Q > 1$ en jaune, $Q = 1$ en bleu, $Q < 1$ en vert, le tracé asymptotique du diagramme de bode ressemble à:



Le tracé réel est de la forme:



Si Q le facteur de qualité est:

- Plus petit que 1, on parle de **raisonnance floue**
- Supérieur à 1, on parle de **raisonnance aigüe**

On reprend la fonction de transfert:

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

- Quand $\omega \rightarrow 0$,

$$\underline{H} \approx \frac{H_0}{-j\frac{Q\omega_0}{\omega}} = \frac{jH_0\omega}{Q\omega_0}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

$$\underline{s} = j\omega \frac{H_0}{Q\omega_0} \underline{e}$$

On observe un comportement dérivateur

- Quand $\omega \rightarrow +\infty$,

$$\underline{H} \approx \frac{H_0\omega_0}{jQ\omega}$$

$$\underline{s} = \frac{1}{j\omega} \frac{H_0\omega_0}{Q} \underline{e}$$

On observe un comportement intégrateur

3) Phase

Jusqu'à maintenant, on a fait que étudier l'amplitude/le gain du circuit. Pour obtenir le phase, on reprend la fonction de transfert:

$$\varphi = \arg \underline{H} = \arg R - \arg \left(R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right) = \psi$$

$$\psi = \arg \left(R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right)$$

$$\begin{cases} \tan \psi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \\ \cos \psi \text{ du signe de } R \text{ donc } > 0 \end{cases}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)$$

Φ Note:

Forme canonique: on peut mettre toutes les fonctions de transfert du 1^{er} et du 2nd ordre sous la même forme:

$$\underline{H} = \frac{H_0 \left(j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} \right)}{1 + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

On peut faire l'étude de la phase et de l'amplitude avec la forme canonique, mais cela est plus laborieux qu'avec la forme précédente.

On retombe sur: $\varphi = \arg H_0 + \psi$ $\arg H_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } H_0 > 0 \\ \pi & \text{si } H_0 < 0 \end{cases}$

$$\psi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) & \text{si } \omega < \omega_0 \\ \arctan\left(\frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) & \text{si } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

Ce qui n'est pas très sexy...

On préfère donc utiliser la forme précédente pour l'étude de la phase.

On pose

$$f(\omega) = \frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}$$

$$f'(\omega) = \frac{L}{R} + \frac{1}{RC\omega^2}$$

On a $f'(\omega) > 0$, donc f est croissante, donc φ est décroissante.

Étude asymptotique:

- $\omega \rightarrow 0, \varphi = \frac{\pi}{2}$
- $\omega \rightarrow +\infty, \varphi = -\frac{\pi}{2}$
- $\varphi = 0 \Leftrightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$

Donc $\varphi = 0$ pour la fréquence de résonance. Coup de chance!

4) Bande passante à -3 dB

On reprend l'expression du gain:

$$G_{dB} = 20 \log G$$

$$G = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

On cherche ω tel que $G(\omega) \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$

Ici, $G_{\max} = 1$, donc on cherche ω tel que:

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}{R^2} \leq 2$$

$$R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \leq 2R^2$$

$$R^2 - \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \leq 0$$

$$\left(R + L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\left(R - L\omega + \frac{1}{C\omega}\right) \leq 0$$

On met tout au même dénominateur et on divise par $C\omega$:

$$(RC\omega + LC\omega^2 - 1)(RC\omega - LC\omega^2 + 1) \leq 0$$

$$\underbrace{(-LC\omega^2 - RC\omega + 1)}_A \underbrace{(LC\omega^2 - RC\omega - 1)}_B \geq 0$$

$$\Delta = (RC)^2 + 4LC > 0$$

$$\omega_1 = \frac{RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} > 0$$

$$\omega_2 = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} > 0$$

$$\omega_{1'} = \frac{RC - \sqrt{\Delta}}{2LC} < 0$$

$$\omega_{2'} = \frac{-RC - \sqrt{\Delta}}{2LC} < 0$$

D'où:

$$(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_{1'})(\omega - \omega_2)(\omega - \omega_{2'}) \leq 0$$

On fait un tableau de signe, on trouve que la bande passante, est les $\omega \in [\omega_2; \omega_1]$

5) Déphasage et bande passante

On reprend le même circuit, avec les expressions connues de la fonction de transfert:

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right)$$

Le gain maximum G_{\max} est 1. On sait que ω_1 et ω_2 sont les limites de la bande passantes, donc

$$G(\omega_1) = G(\omega_2) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On a donc, pour $\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R^2} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} \left(L\omega_1 - \frac{1}{C\omega_1} \right) = 1 \qquad \Rightarrow \frac{1}{R} \left(L\omega_2 - \frac{1}{C\omega_2} \right) = -1$$

En reprenant l'expression de la phase, on trouve ainsi la phase à la limite de la bande passante:

$$\varphi(\omega_1) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\varphi(\omega_2) = -\arctan(-1) = \frac{\pi}{4}$$

⇒ TODO:

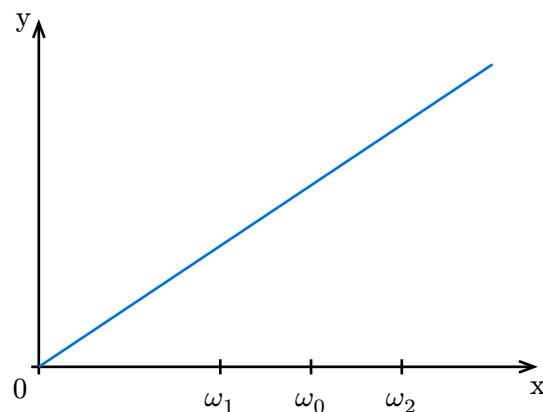
Graphique de la phase

6) Facteur de qualité et bande passante

On pose $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ la largeur de la bande passante. En reprenant les expressions de ω_1 et de ω_2 , on trouve $\Delta\omega = \frac{R}{L}$ dans ce circuit.

En général, on a $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$. On aura une résonance floue si $\Delta\omega$ est grand, et une résonance aigue si $\Delta\omega$ est petit.

⇒ TODO:



III. Résonance avec bornes de la capacité - Filtre passe-bas du 2nd ordre

1) Étude de l'amplitude

On prend le circuit aux bornes de la capacité (Fig. 1).

On reprend le facteur de qualité et l'expression de l'impédance:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{\sqrt{LC}}{RC} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

$$\begin{aligned}\underline{u}_C &= \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} e \\ &= \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} e\end{aligned}$$

Avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{RC}}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$, on a:

$$\underline{u}_C = \frac{e}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Pour alléger la notation, on pose $f(\omega) = \frac{1}{G^2}$:

$$f(\omega) = \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

$$\begin{aligned}f'(\omega) &= 2\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)\left(-2\frac{\omega}{\omega_0^2}\right) + \frac{1}{Q^2}\left(2\frac{\omega}{\omega_0^2}\right) \\ &= \frac{2\omega}{\omega_0}\left(\frac{1}{Q^2} - 2 + 2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)\end{aligned}$$

On a $\frac{\omega}{\omega_0} > 0$, donc si $\frac{1}{Q^2} - 2$ est positif, on somme des valeurs strictement positives, et on se retrouvera avec une variation croissante.

- 1^{er} cas, si $\frac{1}{Q^2} - 2 \geq 0$, alors

$$\frac{1}{Q^2} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{Q} \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow R \geq \sqrt{\frac{2L}{C}}$$

On aura alors nécessairement $f'(\omega) > 0$, donc f croissante, donc \underline{u}_C décroissante.

La tension ne passe pas par un maximum: on n'observe pas de résonance.

- 2^{ème} cas, $\frac{1}{Q^2} - 2 < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

On cherche des solutions pour $f' = 0$, donc pour:

$$2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 2 - \frac{1}{Q^2}$$

$$\Leftrightarrow \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

On a:

- $\omega > \omega_r \Leftrightarrow f'(\omega) > 0$
- $\omega < \omega_r \Leftrightarrow f'(\omega) < 0$

Donc f admet un minimum en ω_r , et comme on passe à l'inverse, G admet un maximum en ω_r .

On cherche le gain de la résonance (le gain maximum du filtre):

$$G(\omega_r) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)}}$$







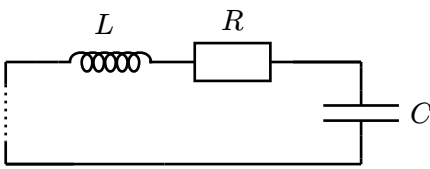
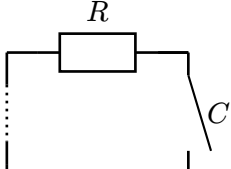
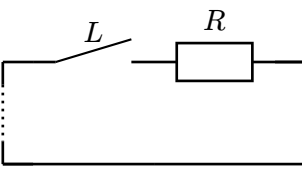
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)}}$$

$$= \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

2) Filtre passe-bas du 2nd ordre

On reprend le circuit (Fig. 1). On fait une étude asymptotique rapide:

Circuit	Haute fréquence	Basse fréquence
		
		
		
	$\underline{s} = \underline{e}$	$\underline{s} = 0$

Donc le filtre à l'air d'être passe bas.

On a:

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$G_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

- Quand $\omega \rightarrow 0$, $G_{\text{dB}} \approx -20 \log 1 = 0$, donc on observe une asymptote horizontale en basse fréquences.
- Quand $\omega \rightarrow +\infty$, $G_{\text{dB}} \approx -20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_0}$ donc on observe une asymptote diagonale en -40 dB/décad en $+\infty$.

On analyse la phase

$$\varphi = \arg \underline{H} = \arg H_0 - \arg \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$= \arg H_0 - \psi$$

$$\arg H_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } H_0 \geq 0 \\ \pi & \text{si } H_0 < 0 \end{cases}$$

$$\tan \psi = \frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\cos \psi \text{ est du signe de } 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{si } H_0 \geq 0 \\ \pi & \text{si } H_0 < 0 \end{cases} - \begin{cases} \arctan \left(\frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right) & \text{si } \omega \leq \omega_0 \\ \pi + \arctan \left(\frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \right) & \text{si } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

La phase sera la même qu'il y ai résonnance ou non.

En visualisant sur un oscilloscope en mode XY la sortie du filtre par-rapport à son l'entrée, on observera une ellipse (dû à la différence de phase entre les sinus de même fréquence) dont les caractéristiques dépendront de la fréquence d'entrée, du facteur de qualité et du type de résonance du filtre.

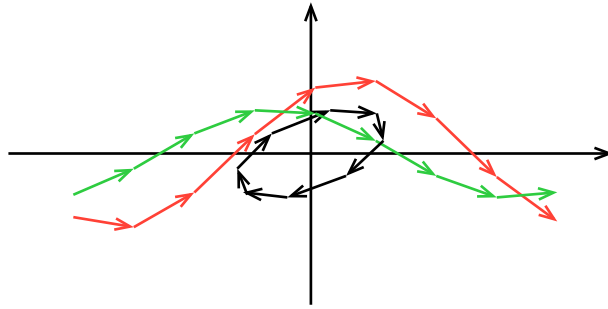


Fig. 18. – Visualisation de l'entrée d'un filtre (en rouge), de sa sortie (en vert) et de l'ellipse formée en prenant comme coordonnées X l'entrée et en Y sa sortie (voir version interactive)

IV. Résonance aux bornes de l'inductance

On prend la tension aux bornes de l'inductance (Fig. 3)

$$\begin{aligned}
 \underline{H} &= \frac{jL\omega}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} \\
 &= \frac{-LC\omega^2}{jRC\omega + (1 - LC\omega^2)} \\
 &= \frac{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}} \\
 &= \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega_0}{\omega}} \quad (\text{on ne veut pas de } \omega \text{ au numérateur})
 \end{aligned}$$

V. Filtres coupe-bande ou réjecteur de fréquences

On regarde la tension aux bornes de L et C (Fig. 4)

1) Comportements asymptotiques

Circuit	Haute fréquence	Basse fréquence
	$\underline{s} = \underline{e}$	$\underline{s} = \underline{e}$

2) Étude du gain

$$\begin{aligned}\underline{H} &= R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \\ &= \frac{(R + jL\omega)(jC\omega)}{jC\omega} \\ &= (-LC\omega)\end{aligned}$$