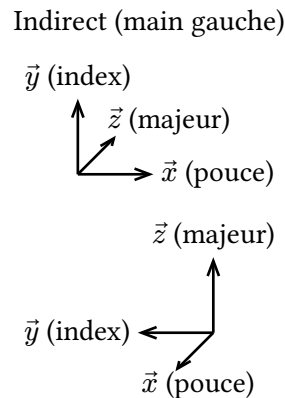
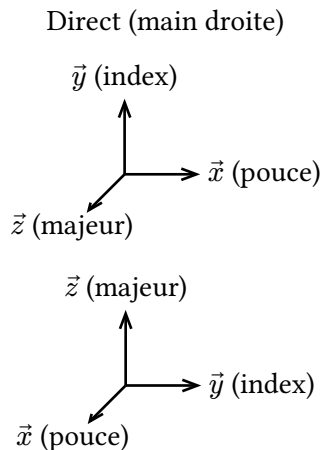


# Complément Chapitre 2 - Le produit vectoriel

|  |   |
|--|---|
| 1. Orientation de l'espace .....             | 1 |
| 2. Produit vectoriel .....                   | 1 |
| 3. Application au mouvement circulaire ..... | 2 |

## I. Orientation de l'espace

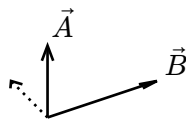
Deux bases possibles:



## II. Produit vectoriel

On définit le produit vectoriel comme l'opérateur  $\wedge$  qui à deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  associent le vecteur  $\vec{A} \wedge \vec{B}$  qui est:

1. Si  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  ne sont pas colinéaires
  - Perpendiculaire au plan formé par  $(O, \vec{A}, \vec{B})$
  - Tel que  $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \wedge \vec{B})$  forme une base directe
  - De magnitude  $\sin(\angle(\vec{A}, \vec{B})) \|\vec{A}\| \|\vec{B}\|$
2. Si  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont colinéaires:  $\vec{A} \wedge \vec{B} = 0$



Le produit vectoriel est anti-commutatif:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -(\vec{B} \wedge \vec{A})$$

Il est associatif/commutatif avec la multiplication externe (pour  $k \in \mathbb{R}$ ):

$$(k\vec{A}) \wedge \vec{B} = \vec{A} \wedge (k\vec{B}) = k(\vec{A} \wedge \vec{B})$$

Il est distributif (à gauche et à droite) par rapport à l'addition:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) + (\vec{A} \wedge \vec{C})$$

Calcul du produit vectoriel: Pour  $\vec{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{B} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ,

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$$

Moyen mémotechnique: ça ressemble à la formule du déterminant, en utilisant les composants externes:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} y & y' \\ z & z' \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} x' & x \\ z' & z \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

⚠ Warn:

Attention à la ligne du milieu

Preuve: horrible

### III. Application au mouvement circulaire

On introduit le vecteur rotation  $\vec{\omega}$ , avec  $\|\omega\|$  la vitesse angulaire  $\omega$ , et colinéaire à  $\vec{u}_z$

On peut alors exprimer la vitesse:  $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = r\omega\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = r\omega\vec{u}_\theta = \vec{v}$

#### 1) Expression de l'accélération

On dérive:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \overrightarrow{OM}) \\ &= \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{r} \wedge \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \\ &= \dot{\theta}\vec{u}_z \wedge R\vec{u}_r + \vec{r} \wedge \dot{\theta}\vec{u}_z \\ &= R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\theta}\vec{u}_z \wedge R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ &= R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{u}_r \end{aligned}$$

Dans le cas du mouvement circulaire uniforme, l'accélération est orthogonale à la vitesse:

$$\vec{a} = \vec{v} \wedge \vec{r}$$