Approche énergetique

I. Travail et puissance d'une force

1) Notations

On considère un point M, dans un référentiel $\mathcal{R}$, auquel on applique une force $\vec{F}$, et qui est animé d'une vitesse $\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)$

On a un déplacement élémentaire:

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \overrightarrow{M(t)M(t+\mathrm{d}t)}$$

2) Puissance d'une force

On définit la puissance d'une force par:

$$\mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v}(M)$$

> Φ Note:
> La puissance dépend donc du référentiel

La puissance est donc un scalaire. La méthode énergétique transforme donc des relations vectorielles en relations scalaires. On perd de l'information.

- Si $\mathcal{P} > 0$, la force est dite motrice, elle travaille dans le sens de la vitesse
- Si $\mathcal{P} < 0$, la force est résistante, elle s'oppose au mouvement

3) Travail élémentaire

On sait que la puissance est une énérgie appliqué pendant un certain temps:

$$\mathcal{P} = \frac{\text{énérgie}}{\text{temps}}$$

$$\text{travail} = \text{grandeur énergétique}$$

> ⚠ Warn:
> Le travail dépend du chemin suivi.

On pose le travail élémentaire (infinitésimal):

$$\delta W = \mathcal{P}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi que le travail intégral:

$$W = \Delta t$$

On utilise pas les même variables selon les situations:

Pour une variable quelconque G:

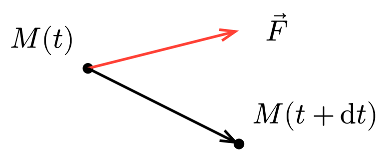
	Dépendante du chemin suivi	Indépendante du chemin suivi
Intégrale	G	ΔG
Différentielle	δG	$\mathrm{d}G$
Exemple	Travail W	E_c

On a:

$$\delta W = \vec{f} \cdot \vec{v}_{/\mathcal{R}}(M) \cdot \mathrm{d}t$$

$$\delta W = \vec{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Cela correspond au travail observé pendant un petit déplacement $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$:



4) Travail au cours d'un déplacement

Pour obtenir le travail complet, on fait la somme de ces petits travaux:

$$W_{1\to2}\left(\vec{F}\right) = \int_{\text{etat }1}^{\text{etat }2} \delta W\left(\vec{F}\right) = \int_{\text{etat }1}^{\text{etat }2} \mathcal{P}\left(\vec{F}\right) \mathrm{d}t = \int_{\text{etat }1}^{\text{etat }2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

II. Théorème de l'énergie cinétique

1) Énergie cinétique

On s'est intéressé aux grandeurs mécaniques associées aux actions mécaniques. Pour faire le lien avec les causes des mouvements, on va définir l'énergie cinétique.

$$E_{c/\mathcal{R}}(M) = \frac{1}{2} m v_{/\mathcal{R}}^2(M) = \frac{1}{2} m \vec{v}_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{v}_{/\mathcal{R}}$$

L'énergie cinétique dépend du point où on se place.
Dès lors que l'on connait la vitesse en des point M_1 et M_2, on peut calculer l'énergie cinétique en ces points.

On ne sait pas ce qu'il s'est passé entre les points M_1 et M_2.

L'énergie cinétique est donc une grandeur indépendante du chemin suivi.

On a:

$$\mathrm{d}E_c(M) = m\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)$$

$$\Delta E_c = E_c(M_2) - E_c(M_1) = \frac{1}{2} m v^2(M_2) - \frac{1}{2} m v^2(M_1)$$

> Φ Note:
> Rigueur mathématique:
> - Le d signigie différentielle totale exacte
> - Le δ signifie forme différentielle
>
> On peut passer d'une forme différentielle à la différentielle totale exacte si les fonctions dérivées respectent certaines conditions.

2) Théorème de l'énergie cinétique

> Θ Théorème:
> La variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces qui s'appliquent.
>
> $$\mathrm{d}E_c = \sum_i \delta W\left(\vec{f}_i\right) \quad \text{(i)}$$
>
> $$\Delta E_c = \sum_i W\left(\vec{f}_i\right) \quad \text{(ii)}$$

Pour passer de la forme (i) à la forme (ii), on fait un calcul d'intégral.

a) Démonstration

On a, pour la forme (i):

$$\mathrm{d}E_c = m\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)$$

D'après le principe fondamental, la quantité de mouvement est égal à la somme des forces:

$$m\vec{a}_{/\mathcal{R}}(M) = \sum_i \vec{f}_i$$

D'où:

$$m\,\mathrm{d}\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M) = \left(\sum_i \vec{f}_i\right)\mathrm{d}t$$

Ainsi, on substitue $m\,\mathrm{d}\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)$:

$$\mathrm{d}E_c = \vec{v}_{/\mathcal{R}}(M) \cdot \left(\sum_i \vec{f}_i\right)\mathrm{d}t$$

On rentre le $\mathrm{d}t$ dans la vitesse:

$$\mathrm{d}E_c = \sum_i \vec{f}_i\,\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

$$\boxed{\mathrm{d}E_c = \sum_i \delta W\left(\vec{f}_i\right)}$$

3) Utilisation du théorème de l'énergie cinétique - Interêt

On fera une utilisation similaire au principe fondamental au théorème de l'énergie cinétique.

Soit:

- On connait les forces, et on trouve les variations sur l'énergie cinétique.
  Comme on travail surtout avec des systèmes à masse fixe, le théorème de l'énergie cinétique nous donne en réalité l'évolution du module de la vitesse.

> ✓ Tip:
> Si on a juste besoin de la vitesse scalaire (pour montrer qu'un mouvement est uniform ou accéléré, par exemple), ce sera beaucoup plus rapide de passer directement par le théorème de l'énergie cinétique, que d'appliquer le principe fondamental et d'obtenir les équations horaires.

Soit:

- Entre deux points, on connait la variation de l'énergie cinétique. Si on connait le travail de toutes les forces sauf une, on peut appliquer le TEC pour trouver la valeur de son travail (et non la véritable force).

> Φ Note:
> Dans un système à un degré de liberté, le théorème de l'énergie cinétique ne perd aucune information.

4) Exemples

a)

Le curling est un sport où le but consiste à placer des pierres, taillées dans le granit et polies selon des normes internationales, le plus près possible de la maison, une cible circulaire dessinée sur la glace. On s'intéresse ici au lancer d'une pierre assimilée à un point matériel M de masse $m = 20$ kg glissant suivant un axe noté Ox vers la maison modélisée par un point M_0. Initialement M est en O avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$. On note $D = OM_0 = 25$ cm. On admet l'existence d'une force de frottement constante $\overrightarrow{F} = -F_0\overrightarrow{u_x}$ avec $F_0 = 3{,}0$ N s'exerçant de la glace sur la pierre pendant la glissade jusqu'à son arrêt et l'absence de force de frottement fluide.

1. Donner les expressions et les valeurs des énergies cinétiques initiale Ec_i et finale Ec_f en admettant que le lancer est gagnant autrement dit que la pierre s'arrête à la maison.
2. Calculer le travail des forces appliquées sur la pierre pendant la glissade.
3. À l'aide du théorème de l'énergie cinétique, déterminer la valeur de la vitesse initiale pour que le lancer soit effectivement gagnant.

1.

$$E_{c_1} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$E_{c_f} = 0$$

2.

On définit notre système: le point M. On se place dans le référentiel terrestre galiléen. On fait le bilan des forces:

- Le poids $m\vec{g}$
- Réaction normale $\overrightarrow{R_N}$
- Force de frottement $-F_0\overrightarrow{u_x}$

On a que le poids est orthogonal au mouvement, et que $\overrightarrow{R_N}$ est orthogonal au mouvement

On calcul le travail:

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{F}\,\mathrm{d}\overrightarrow{OM} \\ &= -F_0\overrightarrow{u_x}\cdot \mathrm{d}x\overrightarrow{u_x}\end{aligned}$$

$$\delta W = -F_0\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}W &= -\int_0^{M_0} F_o\,\mathrm{d}x \\ &= -F_0 OM_0 \\ &= -F_0 D\end{aligned}$$

3.

On applique le théorème de l'énergie cinétique:

$$\Delta EC = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Delta EC = W(m\vec{g}) + W\left(\overrightarrow{R_N}\right) + W\left(\vec{F}\right)$$

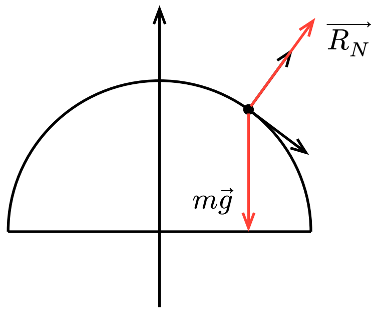
$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -F_0 D$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2F_0 D}{m}} \approx 0.27\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

b)

Après l'avoir construit, un esquimau s'installe au sommet de son igloo qu'on modélisera par une demi-sphère de rayon a. Un rafale de vent le déstabilise : il se met à glisser du sommet à partir d'une vitesse initiale nulle.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement à partir du principe fondamental de la dynamique puis à l'aide d'un raisonnement énergétique.
2. Déterminer l'expression de la réaction de l'igloo.
3. Montrer que l'esquimau décolle de son igloo pour un angle dont on précisera l'expression et la valeur.



On définit notre système, le point matériel M. On se place dans le référentiel terrestre galiléen. On fait un bilan des forces:

- Le poids $m\vec{g}$
- On se place sur de la glace, on considère que les frottements sont nuls. Donc on considère une réaction normale $\overrightarrow{R_N}$

On établit l'équation différentielle du mouvement:

1. Première méthode, par principe fondamental:
   - $$m\vec{a} = m\vec{g} + \overrightarrow{R_N}$$
   - On va projeter.
   - On peut soit projeter dans les coordonées polaires,
     soit projeter sur les axes $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$
   - Projeter sur les coordonées polaires permet de dégager $\overrightarrow{R_N}$, dont on ne connait pas la norme.
     - On projette sur $\overrightarrow{u_\theta}$:

   $$\vec{a} = \overrightarrow{u_r}\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) + \overrightarrow{u_\theta}\left(2\dot{r}\dot{\theta} + \ddot{\theta}r\right)$$

   Ici, r est constant, donc $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$, donc:

   $$\vec{a} = -\overrightarrow{u_r}r\dot{\theta}^2 + \overrightarrow{u_\theta}\ddot{\theta}r$$

   $$mr\ddot{\theta} = 0 + mg\sin\theta$$

   $$\boxed{\ddot{\theta} - \frac{g}{r}\sin\theta = 0}$$

2. Deuxième méthode, on passe par l'énergie. Le passage par l'énergie est pertinent: il n'y a qu'un seul paramètre de position, θ, et l'inconnue $\overrightarrow{R_N}$ ne travaille pas.

   On applique le théorème de l'énergie cinétique:

   $$\mathrm{d}E_c = \sum_i \delta W\left(\vec{f}_i\right)$$

   On intègre:

   $$\Delta E_c = \sum_i W\left(\vec{f}_I\right)$$

   De plus, $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ On se place en coordonées polaires: $r = a$, r est constant donc $\dot{r} = 0$ D'où:

   $$\vec{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

   $$E_c = \frac{1}{2}m\left(a\dot{\theta}\right)^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2$$

$\overrightarrow{R_N} \perp$ au déplacement, donc:

$$\delta W\left(\overrightarrow{R_N}\right) = 0 = W\left(\overrightarrow{R_N}\right)$$

$$\delta W(m\vec{g}) = m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

$$\begin{aligned}\delta W(m\vec{g}) &= mga\,\mathrm{d}\theta \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= mga \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Ainsi:

$$m\vec{g} = -mg\cos\theta\vec{u_r} + mg\sin\theta\vec{u_\theta}$$

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \underbrace{\mathrm{d}a\vec{u_r}}_{=0} + a\,\mathrm{d}\theta\vec{u_\theta}$$

$$m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = mga\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} m a^2 2\ddot{\theta} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_c &= m a^2 \ddot{\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= mga\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$a\ddot{\theta} = g\sin\theta$$

D'où:

$$\boxed{\ddot{\theta} - \frac{g}{a}\sin\theta = 0}$$

On peut alternativement passer par la forme intégrale:

$$\begin{aligned}E_c(t) - E_c(0) &= W(m\vec{g} + W\left(\overrightarrow{R_N}\right) \\ &= \int_0^t mga\sin\theta \underbrace{\dot{\theta}}_{\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\theta(0)}^{\theta(t)=\theta} mga\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= mga[-\cos\theta]_0^\theta \\ &= -mga\cos\theta + mga \\ &= mga(1-\cos\theta)\end{aligned}$$

On a aussi:

$$E_c(t) - E_c(0) = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m a^2 \underbrace{\dot{\theta}^2(0)}_{=0}$$

Donc:

$$\frac{1}{2}a^2\dot{\theta}^2 = mga(1 - \cos\theta)$$

On dérive:

$$\frac{1}{2}ma^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = mga\sin\theta\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta}\left(a\ddot{\theta} - g\sin\theta\right) = 0$$

Pour avoir un mouvement, il faut que $\dot{\theta} \neq 0$, donc:

$$\boxed{a\ddot{\theta} - g\sin\theta = 0}$$

Question 2: On sait que la réaction est dans l'axe $\vec{u_r}$, mais on ne connait pas sa norme. Une méthode énergétique est proscrite, cette force ne travaillant pas.

On projette le principe fondamental sur $\vec{u_r}$:

$$m\left(\underbrace{\ddot{a}}_{=0} - a\dot{\theta}^2\right) = R_N - mg\cos\theta$$

$$-ma\dot{\theta}^2 = R_N - mg\cos\theta$$

$$R_N = mg\cos\theta - ma\dot{\theta}^2$$

Lorsqu'on a traduit le théorème de l'énergie cinétique de manière intégrale, on récupère:

$$ma\dot{\theta}^2 = 2mg(1 - \cos\theta)$$

On le réinjecte:

$$\begin{aligned} R_N &= mg\cos\theta + (-2mg + 2mg\cos\theta) \\ &= 3mg\cos\theta - 2mg \\ &= mg(3\cos\theta - 2) \end{aligned}$$

Question 3: On a décollage lorsqu'il n'y a plus de réaction du support:

$$R_N = 0$$

On a $mg \neq 0$, donc on veut:

$$3\cos\theta - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48°$$

Après décollage, il y a un mouvement de chute libre uniforme.

III. Energie potentielle et forces conservatives

1) Définition

Une force $\vec{f}$ est conservative (ou dérive d'un potententiel) si le travail effectué par $\vec{f}$ est indépendant du chemin suivi.

C'est à dire que:

$$\delta W\left(\vec{f}\right) = -\,\mathrm{d}E_p$$

2) Interprétation physique

On suppose que $\vec{f}$ est conservative. On applique le théorème de l'énergie cinétique:

$$\mathrm{d}E_c = \delta W\left(\vec{f}\right) = -\,\mathrm{d}E_p$$

$$\mathrm{d}E_c = -\,\mathrm{d}E_p \Leftrightarrow \mathrm{d}\left(E_c + E_p\right) = 0$$

Donc:

$$E_c + E_p = \text{constante}$$

L'énergie totale d'un système est conservée.

On appelle énergie mécanique la somme des énergies cinétiques et de potentiel.

$$E_m = E_c + E_p$$

Dans le cas général, il y aura des forces non conservatives. On pourra utiliser l'énergie potentielle avec les forces conservatives, mais pour les forces non conservatives, on sera constraint d'utiliser $W\left(\vec{f}\right)$ et $\delta W\left(\vec{f}\right)$

On a:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_c &= \sum_i \delta W\left(\vec{f}_i\right) \\ &= \sum_{i,c} \delta W\left(\vec{f}_{i,c}\right) + \sum_{i,\mathrm{nc}} \delta W\left(\vec{f}_{i,\mathrm{nc}}\right) \\ &= -\,\mathrm{d}E_p + \sum_{i,\mathrm{nc}} \delta W\left(\vec{f}_{i,\mathrm{nc}}\right)\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{d}E_m \neq 0$ dans la majorité des cas.

3) Notion de gradient

Un gradient est une fonction scalaire f de l'espace. Par exemple:

$$f(x,y,z) = \ldots, f(r,\theta,z) = \ldots, f(r,\theta,\varphi) = \ldots$$

On définit $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ par:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}f$$

On va se placer dans différents systèmes coordonées:

a) Cartésiens

Avec $f(x,y,z)$:

$$\partial f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} &= \begin{pmatrix} \overrightarrow{\mathrm{grad}}_x f(M) \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}_y f(M) \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}_z f(M) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}_x f \cdot \mathrm{d}x + \overrightarrow{\mathrm{grad}}_y f \cdot \mathrm{d}y + \overrightarrow{\mathrm{grad}}_z f \cdot \mathrm{d}z\end{aligned}$$

Donc:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(M) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$