Circuit linéaire en régime sinusoïdal forcé

Table des matières

1) Caractéristique d'un signal sinusoïdal

1.1) Définition

On définit un signal sinusoïdal x par:

$$x(t) = X \sin(\omega t + \varphi) \text{ ou } x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$$

On peut très facilement passer du sinus au cosinus.

On a 3 caractéristiques du signal sinusoïdal.

1.2) Pulsation, fréquence, période

On peut qualifier la « vitesse » du signal par trois valeures:
- ω, la pulsation
- f, la fréquence
- T, la période

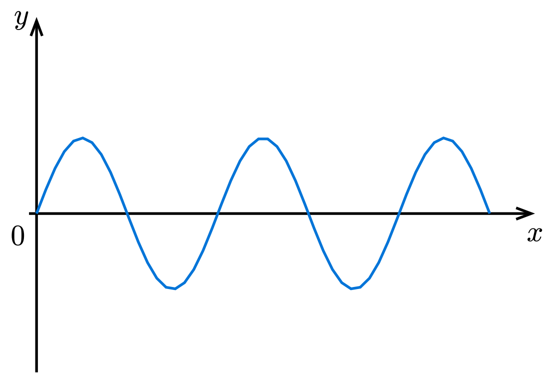
Avec:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

1.3) Mesure

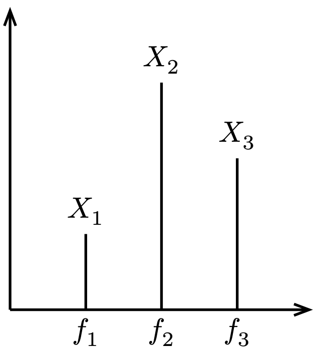
On peut mesurer la période T d'un signal en regardant un graphique:



On peut utiliser un analiseur de spectre (une transformation de Fourrier...) pour obtenir la fréquence ou les fréquences qui compose le signal:

Exemple:

$$\text{Avec } x(t) = X_1 \cos(\omega_1 t) + x_2 \cos(\omega_2 t) + X_3 \cos(\omega_3 t)$$



1.4) Amplitude - Valeur efficace

On nomme X l'amplitude de notre signal en fonction du temps:

$$x(t) = \underbrace{X}_{\text{amplitude}} \cos(\omega t + \varphi)$$

> ⚠ Warn:
> L'amplitude X n'est pas V_{cc} la valeur crête à crête donnée par l'oscilloscope

On a

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \, \mathrm{d}t$$

$$X_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) \, \mathrm{d}t}$$

Pour une sinusoïde pure:

$$\langle x \rangle = 0 \text{ et } X_{\text{eff}} = \frac{X}{\sqrt{2}}$$

1.5) Phases

Phase instantané: Position du signal à un instant donné: $\omega t + \varphi$

Phase à l'origine: Caractéristique du signal: φ

1.6) Déphasage entre deux signaux de même fréquence

Soient deux signaux:

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = X_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Condition à vérifier: $\omega_1 = \omega_2$.

Dans ce cas, on appelle déphasage des deux signaux la différence entre leurs deux phases:

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

> Φ Note:
> Cette expression est le déphasage du deuxième signal par rapport au premier. Le déphasage du premier par rapport au deuxième est opposé.

On peut trouver le déphasage entre deux signaux expérimentalement en mesurant Δt le décalage entre deux crêtes des deux signaux. On a alors:

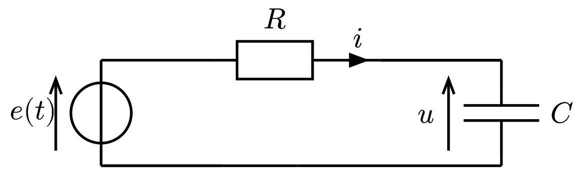
$$\varphi = \underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\omega} \Delta t$$

Attention au signe!

Le signal qui passe par son maximum en premier sera considéré comme l'origine des phases.

2) Interêt de la notation complexe

2.1) Exemple du circuit RC



On fait comme avec un régime transitoire:

$$e(t) = E\cos(\omega t)$$

$$e(t) - Ri - u = 0$$

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = E\cos(\omega t)$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{RC} = \frac{E}{RC}\cos(\omega t)$$

$$u(t) = u_H(t) + u_P(t)$$

$$u(t) = Ue^{-\frac{t}{RC}} + u_P(t)$$

Pour trouver une solution particulière, on fait une variation de la constante:

$$u_P(t) = V\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{\mathrm{d}u_P(t)}{\mathrm{d}t} = -V\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

On réinjecte:

$$-RCV\omega\sin(\omega t+\varphi)+V\cos(\omega t+\varphi)=E\cos(\omega t)$$

$$-RCV\omega(\sin(\omega t)\cos(\varphi)+\cos(\omega t)\sin(\varphi))+V(\cos(\omega t)\cos(\varphi)-\sin(\omega t)\sin(\varphi))=E\cos(\omega t)$$

$$(-RCV\omega\cos(\varphi)-V\sin(\varphi))\sin(\omega t)+(V\cos(\varphi)-RCV\omega\sin(\varphi))\cos(\omega t)=E\cos(\omega t)$$

D'où:

$$\begin{cases}-RCV\omega\cos(\varphi)-\sin(\varphi)=0\\ V(\cos(\varphi)-RC\omega\sin(\varphi))=E\end{cases}$$

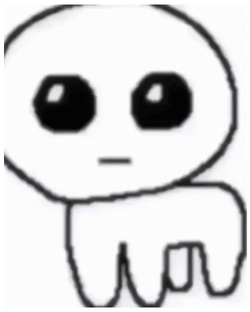
$$\begin{cases}\tan(\varphi)=-RC\omega\\ V=\frac{E}{\cos(\varphi)-RC\omega\sin(\varphi)}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}V&=\frac{E}{\cos(\varphi)+\tan(\varphi)\sin(\varphi)}\\ &=\frac{E}{\cos(\varphi)+\frac{\sin^2(\varphi)}{\cos(\varphi)}}\\ &=\frac{E\cos(\varphi)}{\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)}=E\cos(\varphi)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\cos^2(\varphi)}=\frac{\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}=\tan^2(\varphi)+1$$

$$\cos(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{R^2C^2\omega^2+1}}$$

$$\boxed{\begin{cases}V=\frac{E}{\sqrt{R^2C^2\omega^2+1}}\\ \tan(\varphi)=-RC\omega\end{cases}}$$



2.2) Notation complexe

On pose $j^2=-1$. On a:

$$x(t)=X\cos(\omega t+\varphi)=\mathrm{Re}\big(Xe^{j(\omega+\varphi)}\big)=\mathrm{Re}(\underline{x})$$

Donc:

$$\begin{aligned}\underline{x}(t) &= Xe^{j(\omega t+\varphi)} \\ &= Xe^{j\varphi}e^{j\omega t} \\ &= \underbrace{\underline{X}}_{\text{amplitude complexe}} e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{X} = Xe^{j\varphi}\end{aligned}$$

$$X = |\underline{X}| = |\underline{x}|$$

On peut donc récuperer la phase à l'origine avec l'argument complexe:

$$\varphi = \arg(\underline{X})$$

Et la phase instantanée:

$$\omega t + \varphi = \arg(\underline{x})$$

2.3) Représentation du plan complexe dite de Fresnel

On peut représenter les valeurs électriques complexes dans le plan complexe.

C'est la représentation de Fresnel.

2.4) Dérivation et intégration

On utilise les règles usuelles de dérivation et d'intégration:

$$\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\underline{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \underline{X}j\omega e^{j\omega t}$$

$$\int \underline{x}(t)\,\mathrm{d}t = \underline{X}\int e^{j\omega t}\,\mathrm{d}t = \underline{X}\left(\frac{e^{j\omega t}}{j\omega}\right) = \underline{X}\frac{e^{j\omega t}(-j\omega)}{\omega^2} = \underline{X}\frac{-je^{j\omega t}}{\omega}$$

2.5) Utilisation de la notation complexe pour l'étude du circuit R,C

> Φ Note:
> Pour $\tan(\varphi) = \frac{A}{B}$, il y a deux angles (entre $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ ou entre $]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}[$) qui résolvent cette équation.
>
> On peut étudier le signe de $\cos(\varphi)$ pour trouver lequel est le bon:
> - si $\cos(\varphi) > 0$: $\varphi = \arctan\left(\frac{A}{B}\right)$
> - si $\cos(\varphi) < 0$: $\varphi = \arctan\left(\frac{A}{B}\right) + \pi$

Plutot que faire l'horreur vu Chapitre 2.1, on résout les équations différentielles avec des complexes.

3) Lois de Kirchhoff en notation complexe

> Φ Note:
> Convention:
> - Une majuscule non-soulignée est une grandeur de régime continu
> - Une minuscule non-soulignée est une grandeur de régime sinusoïdale réelle
> - Une majuscule soulignée est une amplitude complexe
> - Une minuscule soulignée est une sinusoïdale complexe

3.1) Validité des loi du continu en sinusoïdale fixé

Les fréquences qu'on va utiliser ne sont pas problématiques, donc on se place dans l'ARQS et les lois des régimes continus sont vérifiés.

3.2) Loi des nœuds

$$\sum_k \varepsilon_k I_k = 0$$

De par l'ARQS, on peut passer à:

$$\sum_k \varepsilon_k i_k(t) = 0$$

On passe en notation complexe:

$$\sum_k \varepsilon_k I_k e^{j(\omega t + \varphi)} = 0$$

$$\sum_k \varepsilon_k \underline{i_k} = 0$$

On divise par $e^{j\omega t}$:

$$\sum_k \varepsilon_k I_k e^{j\varphi} = 0$$

$$\sum_k \varepsilon_k \underline{I_k} = 0$$

3.3) Loi des mailles

Du même tonneau:

$$\sum_k \varepsilon_k \underline{u_k}(t) = 0$$

$$\sum_k \varepsilon_k \underline{U_k} = 0$$

4) Impédance et admittance complexes

4.1) Impédance complexe

En régime continu, on a la loi d'Ohm:

$$U = RI$$

$$u(t) = Ri(t)$$

En sinusoïdal forcé, on va avoir de même:

$$\underline{U}e^{j\omega t} = \underline{Z}\underline{I}e^{j\omega t}$$

$$\Leftrightarrow \underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$$

On appelle $\underline{Z}$ l'impédance complexe, et $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ l'admittance (qui correspond à la conductance réelle $G = \frac{1}{R}$).

4.2) Notation exponentielle: impédance et déphasage

À partir du moment ou $\underline{Z}$ est un complexe, on peut l'écrire sous forme exponentielle:

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi'}$$

$$Z = |\underline{Z}|$$

On appelle Z l'impédance, et φ' le déphasage. Comme $\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$ doit rester vrai, on a $\varphi = -\varphi'$.

4.3) Partie réelle et partie imaginaire

On peut aussi écrire $\underline{Z}$ sous forme algébrique:

$$\underline{Z} = R + jX$$

La partie réelle de $\underline{Z}$, R est la résistance habituelle. La partie imaginaire X est la réactance.

4.4) Exemples d'impédance

On revisite les dipôles habituels:

- Résistance R: on a $u(t) = Ri(t)$, qu'on transforme en:

  $$\underline{u}(t) = R\underline{i}(t)$$

  $$\underline{U} = R\underline{I}$$

  Par identification, on a $\underline{Z} = R$ (donc l'impédance est réelle).

  Comme $\underline{Z} \in \mathbb{R}$, aucun déphasage n'est introduit.
- Inductance L: on a:

  $$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

  $$\underline{u}(t) = Lj\omega\underline{i}(t)$$

  D'où (on indentifie): $\underline{Z} = jL\omega = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$
  $\underline{Z}$ est un imaginaire pur (L et ω sont des réels positifs), donc l'inductance va introduire un déphasage de $\frac{\pi}{2}$.
- Capacité C: on a:

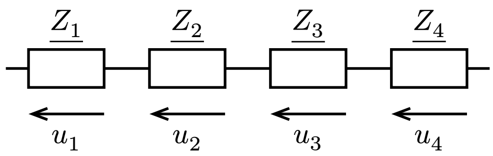
$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$\underline{i}(t) = Cj\omega\underline{u}(t)$$

$$\underline{u}(t) = \underline{i}(t)\frac{1}{Cj\omega}$$

On a donc $\underline{Z} = \frac{1}{Cj\omega} = -j\frac{1}{C\omega}$. $\underline{Z}$ est encore un imaginaire pur, mais il est négatif. Il introduit un déphasage de $-\frac{\pi}{2}$.

4.5) Association de dipoles



$$\begin{aligned}\underline{u} &= \underline{u_1} + \ldots + \underline{u_4} \\ &= \underline{Z_1}\underline{i} + \ldots + \underline{Z_4}\underline{i} \\ &= \underline{i}\left(\underline{Z_1} + \ldots \underline{Z_4}\right) \\ &= \underline{Z_{\mathrm{eq}}}\underline{i}\end{aligned}$$

Comme avec des résistances normales:

Les impédances s'ajoutent en série.

$$\underline{Z_{\mathrm{eq}}} = \sum_k \underline{Z_k}$$

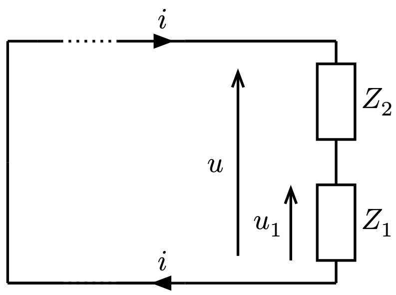
L'inverse des impédances s'ajoute en dérivation:

$$\frac{1}{\underline{Z_{\mathrm{eq}}}} = \sum_k \frac{1}{\underline{Z_k}}$$

⚠ Warn:
One does not simply ajouter des nombres complexes.
Faire attention aux calculs de con.
Surtout quand il faut trouver des modules et des arguments.

5) Ponts diviseurs

5.1) Pont diviseurs de tensions



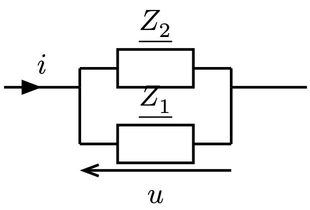
$$\underline{u} = \left(\underline{Z_1} + \underline{Z_2}\right)\underline{i} \Leftrightarrow \underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$$

$$\underline{u_1} = \underline{Z_1}\underline{i}$$

D'où:

$$\underline{u_1} = \underline{u}\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$$

5.2) Pont diviseur de courant



$$\underline{Z_1}\underline{i_1} = \underline{Z_2}\underline{i_2} \Leftrightarrow \underline{i_2} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_2}}\underline{i_1}$$

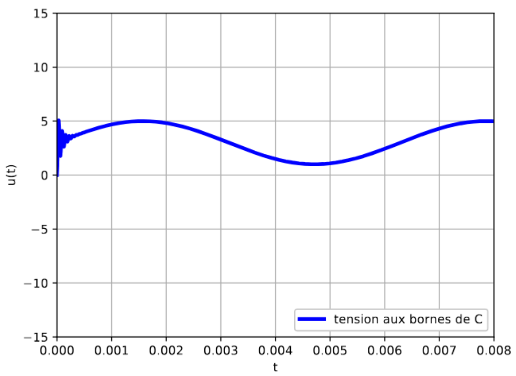
$$\underline{i} = \underline{i_1} + \underline{i_2} = \underline{i_1}\left(1 + \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_2}}\right)$$

D'où:

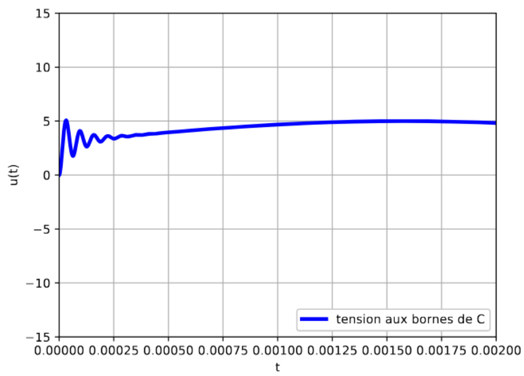
$$\underline{i_1} = \underline{i}\frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$$

6) Régime sinusïdal forcé et régime transitoire

On peut observer le délai entre le régime transitoire et le régime permanent.



$\omega = 1{,}0.10^3$ rad.s^{-1}



$\omega = 1{,}0.10^3$ rad.s^{-1} avec abscisses zoomées

7) Application: Analyse d'un chronogramme