

Introduction à la mécanique Systèmes de Coordonnées

1) Bref historique	1
2) Objet de la mécanique	1
3) Systèmes de coordonnées	1
4) Dérivée d'un vecteur unitaire tournant par rapport à son angle de rotation	9

1) Bref historique

2) Objet de la mécanique

2.1) Quelques définitions

- **Cinématique**: Description, analyse des mouvements, sans s'intéresser aux causes de ce mouvement.
- **Dynamique**: Étude des causes du mouvement: notion de force et d'action mécanique
 - **Statique**: Étude des équilibres en l'absence de mouvement

2.2) Cadre de la mécanique newtonienne

2.2.1) Unités

- **Mètre**: Distance parcourue par la lumière en $\frac{1}{c}$ seconde.
- **Seconde**: Horloge atomique

2.2.2) Hypothèse de la mécanique newtonienne

On considère que:

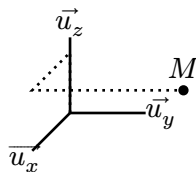
- La précision de la position et de la vitesse est illimitée et absolue.
 - (Faux car principe d'incertitude quantique mais négligeable à l'échelle macroscopique)
- Le temps avance à la même vitesse partout
 - (Faux car relativité restreinte, mais négligeable à l'échelle macroscopique)
- Espace euclidien = La somme des angles d'un triangle vaut 180° , l'espace est plat
 - (Faux car torsion de l'espace-temps)
- Le temps et l'espace sont continus
 - (Faux car quantisation)

3) Systèmes de coordonnées

Un système de coordonnées permet de se repérer dans l'espace par rapport à une origine.

3.1) Coordonnées cartésiennes

On pose un repère orthonormé $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$



On peut atteindre le point M avec ses coordonnées: $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

On peut faire varier les coordonnées de M dans les trois directions élémentaires.

Déplacement élémentaire:

$$d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{u}_x + dy\overrightarrow{u}_y + dz\overrightarrow{u}_z$$

En faisant varier dx , dy et dz .

On obtient un parallélépipède de coté dx , dy et dz . On appelle le volume de ce parallélépipède le volume élémentaire:

$$d\tau = dx \, dy \, dz$$

Ce parallélépipède possède 3 faces élémentaire:

- Une perpendiculaire à \overrightarrow{u}_x , de surface $dy \, dz = dS_x$
- Une perpendiculaire à \overrightarrow{u}_y , de surface $dx \, dz = dS_y$
- Une perpendiculaire à \overrightarrow{u}_z , de surface $dy \, dx = dS_z$

3.2) Coordonnées cylindriques

Lorsque notre système tourne autour d'un point fixe, il sera souvent beaucoup plus simple d'utiliser directement un repère cylindrique, plutôt que des coordonnées cartésiennes.

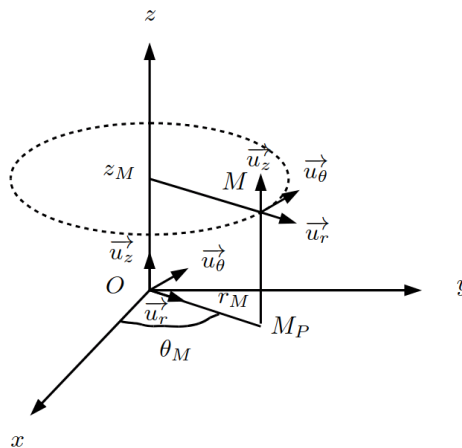
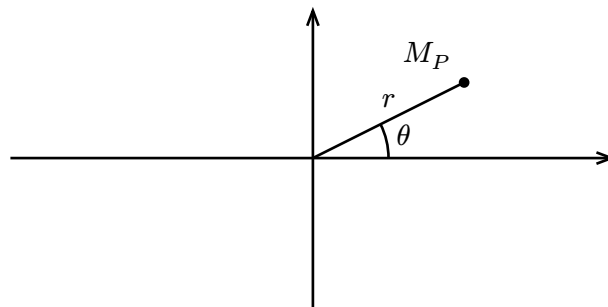


Fig. 2. – Repère cylindriques

On va regarder ce qui se passe dans le plan $\vec{x}\vec{y}$.

On prend M_P le projeté orthogonal de M dans le plan $\vec{x}\vec{y}$



On prend la distance OM_P dans ce plan, ainsi que l'angle θ entre $\overrightarrow{OM_P}$ et le vecteur \vec{x}

Coordonnées cylindriques:

- $r \rightarrow$ La distance OM_P (qui est positive)

- $\theta \in [0; 2\pi[$
- z , la hauteur, la même que dans les coordonnées cartésiennes

Autrement dit, on utilise des coordonnées polaires pour x et y , et des coordonnées cartésiennes pour z .

3.2.1) Conversion depuis les coordonnées cartésiennes

On a:

$$r = OM_P = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } x > 0 \text{ et } y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}$$

$$z = z$$

3.2.2) Conversion vers coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

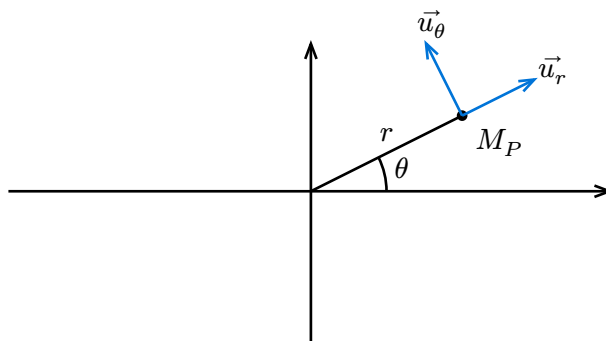
3.2.3) Base mobile

On se place dans les coordonnées polaires.

On a la base du repère polaire (\vec{u}_x, \vec{u}_y)

On va prendre la base locale du point M_P . On pose \vec{u}_r le vecteur unitaire $\widehat{OM_P}$ et \vec{u}_θ son vecteur orthogonal unitaire (afin de former une base orthonormée), qu'on prend dans le sens trigonométrique.

$$\begin{cases} u_r = \vec{x} \cos \theta + \vec{y} \sin \theta \\ u_\theta = -\vec{x} \sin \theta + \vec{y} \cos \theta \end{cases}$$



On obtient une nouvelle base de l'espace: $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

N'importe quel point/vecteur possède une représentation dans cette base et dans la base cartésienne:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z \\ &= a_r \vec{u}_r + a_\theta \vec{u}_\theta + a_z \vec{u}_z \end{aligned}$$

\mathbf{a}_r : Composante radiale

\mathbf{a}_θ : Composante orthoradiale

On peut enfin représenter \overrightarrow{OM} dans cette base:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_P} + \overrightarrow{M_P M}$$

$$\overrightarrow{OM_P} = r\vec{u}_r + 0 \times \vec{u}_\theta$$

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$$

!! Caution:

Et non pas $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + \theta\vec{u}_\theta + z\vec{u}_z$

Le θ est « caché » dans u_r , la base est mobile.

On peut passer de la base cylindrique vers la base cartésienne:

$$\{\vec{u}_x = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$$

3.2.4) Déplacement élémentaire

- Pour passer de x à $r + dr$, le point M s'est déplacé sur OM_P de dr dans le sens de u_r , d'où un déplacement de $dr\vec{u}_r$
- Pour passer de z à $z + dz$, le point M subit une translation de $dz\vec{u}_z$
- Pour passer de θ à $\theta + d\theta$, le point M_P subit une rotation d'axe (O, \vec{z}) , donc:
 - La distance parcourue vaut $r d\theta$ dans la direction \vec{u}_θ , d'où: $r d\theta\vec{u}_\theta$

On a donc:

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$$

3.2.5) Volume élémentaire

On peut encore apparenter notre déplacement à un mini parallélépipède.

On obtient un volume élémentaire:

$$d\tau = r dr d\theta dz$$

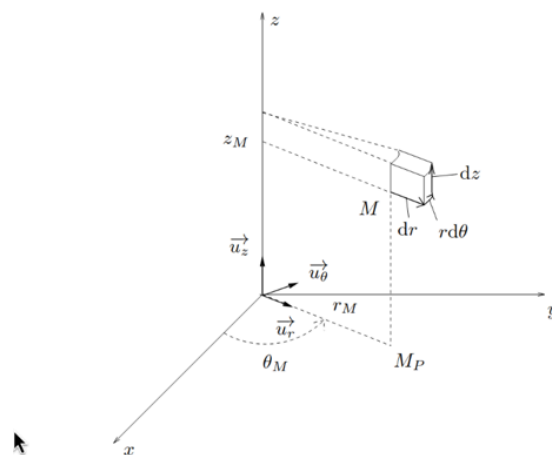


Fig. 5. – Volume élémentaire dans un repère cylindrique

On peut aussi définir des surfaces élémentaires:

- $dS_r \perp \vec{u}_r$ avec $dS_r = r \, d\theta \, dz$
- $dS_\theta \perp \vec{u}_\theta$ avec $dS_\theta = dr \, dz$
- $dS_z \perp \vec{u}_z$ avec $dS_z = r \, dr \, d\theta$

3.3) Coordonnées sphériques

Φ Note:

Convention:

- ⊙ Vecteur pointant vers nous
- ⊗ Vecteur pointant à l'opposé

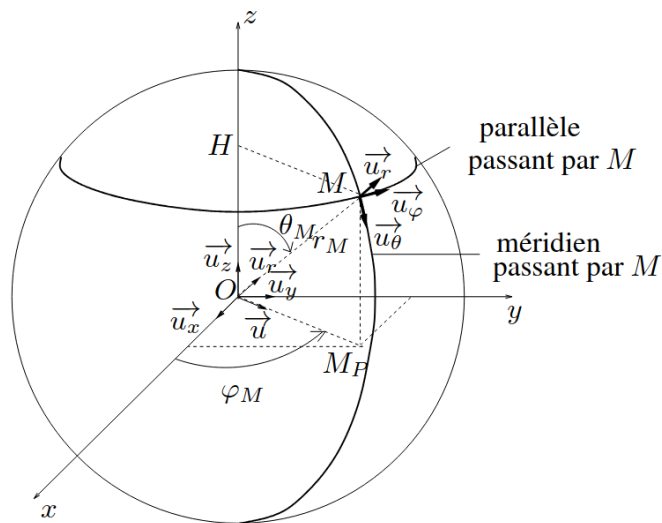


Fig. 6. – Repère sphérique

On va directement définir r comme la distance OM :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

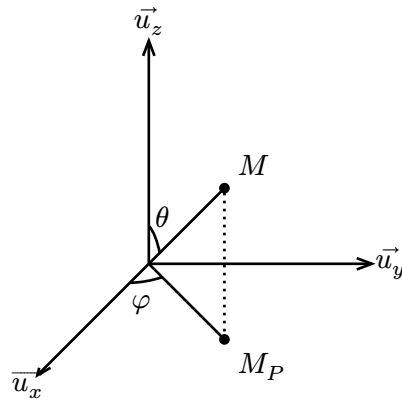
!! Caution:

L'angle θ des coordonnées sphériques n'a rien à voir avec l'angle θ des coordonnées cylindriques

On projete M sur le plan $\vec{x}\vec{y}$ pour obtenir M_P

On a:

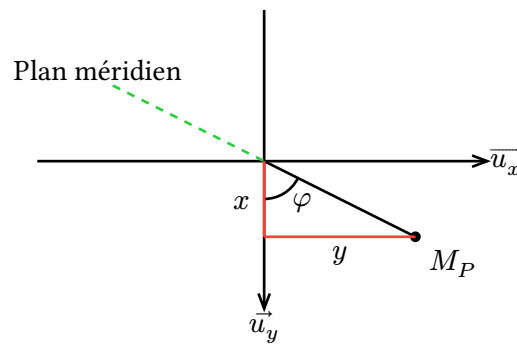
- φ l'angle entre \vec{x} et $\overrightarrow{OM_P}$, avec $\varphi \in [0; 2\pi[$
- θ l'angle entre \vec{z} et \overrightarrow{OM} , avec $\theta \in [0; \pi[$



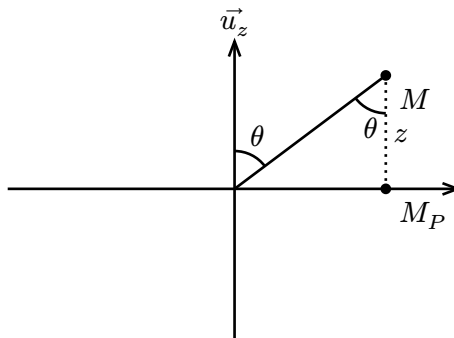
3.3.1) Conversion en coordonnées cartésiennes

On s'intéresse aux plans:

- $\vec{u}_x \vec{u}_y$, le plan équatorial



- $OM_P M$, le plan méridien



Ce qui nous donne:

- Dans le plan équatorial:

$$\cos \varphi = \frac{x}{OM_P} = \frac{x}{r \sin \theta}$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{OM_P} = \frac{y}{r \sin \theta}$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$

- Dans le plan méridien:

$$\cos \theta = \frac{z}{r}$$

$$z = r \cos \theta$$

3.3.2) Conversion vers coordonnées sphériques

On a, assez simplement:

$$r = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Pour trouver les angles, on utilise les fonctions trigonométriques réciproques:

- Pour θ :
 - Avec le cos:

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

- Avec la tan:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{OM_P}{z}$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

- Pour φ :

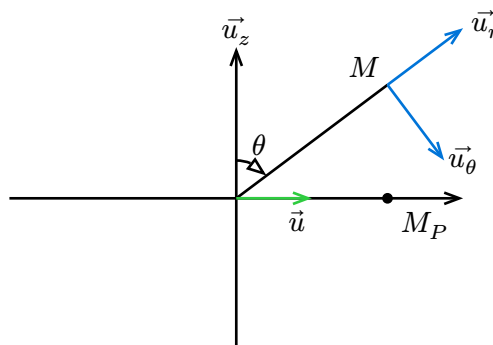
$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{r \sin \varphi \sin \theta}{r \cos \varphi \sin \theta} = \frac{y}{x}$$

3.3.3) Base mobile

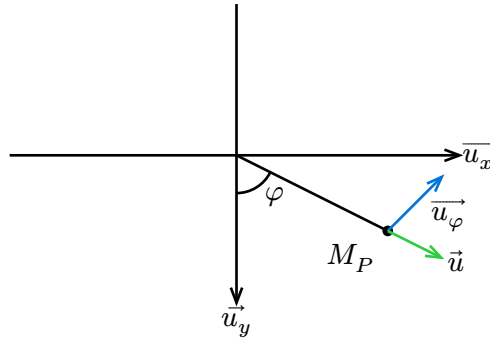
On pose la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$:

On pose aussi le vecteur « joker » \vec{u} , qui est orthogonal à \vec{u}_φ dans le plan équatorial, et qui simplifie le calcul des vecteurs de la base.

\vec{u}_θ va dans le même sens que θ , et \vec{u}_φ va dans le même sens que φ .



Le vecteur orthogonal à \vec{u}_r et \vec{u}_θ est orthogonal au plan méridien:



On a donc:

$$\vec{u} = \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_r &= \cos \varphi \vec{u}_z + \sin \theta \vec{u} \\ &= \cos \varphi \vec{u}_z + \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{u}_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_\theta &= -\sin \theta \vec{u}_z + \cos \theta \vec{u} \\ &= -\sin \theta \vec{u}_z + \cos \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{u}_y \end{aligned}$$

3.3.4) Déplacement élémentaire

Le déplacement par rapport à r est plutôt simple:

$$r \longrightarrow r + dr \Leftrightarrow dr \vec{u}_r$$

Le déplacement par rapport à θ se rapporte à se déplacer de θ sur le cercle de centre O de rayon r (la coupe de la sphere par le plan méridien), d'où:

$$\theta \longrightarrow \theta + d\theta \Leftrightarrow r d\theta \vec{u}_\theta$$

Le déplacement par rapport à φ se rapporte à déplacer M_P sur le cercle de centre O , et de rayon $OM_P = r \sin \theta$ (le rayon est plus petit si on se rapproche des pôles et plus grand si on se rapproche de l'équateur), d'où:

$$\underbrace{r \sin \theta}_{\text{rayon}} \underbrace{d\varphi}_{\text{angle}}$$

Un rayon \times un angle est une distance, et elle est parcourue dans la direction de \vec{u}_φ :

$$\varphi \longrightarrow \varphi + d\varphi \Leftrightarrow r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

On obtient donc le déplacement élémentaire:

$$d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

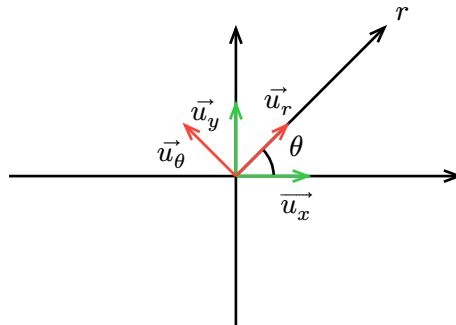
Et les surfaces perpendiculaires:

- $dS_r = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$
- $dS_\theta = r \sin \theta dr d\varphi$
- $dS_\varphi = r dr d\theta$

4) Dérivée d'un vecteur unitaire tournant par rapport à son angle de rotation

4.1) Cas des coordonnées polaires

On se place en coordonnées polaires:



$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y \end{cases}$$

On dérive \vec{u}_r :

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y = \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\cos \theta \vec{u}_x - \sin \theta \vec{u}_y = -\vec{u}_r$$

Dériver le vecteur unitaire polaire correspond à le faire tourner d'un angle $\frac{\pi}{2}$

4.2) Cas général

On prend \hat{u} un vecteur unitaire, tournant d'un angle α

On cherche $\frac{d\hat{u}}{d\alpha}$

On a \hat{u} unitaire, donc:

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\|^2 &= 1 = \hat{u} \cdot \hat{u} \\ \frac{d\|\hat{u}\|^2}{d\alpha} &= \hat{u} \cdot \frac{d\hat{u}}{d\alpha} + \frac{d\hat{u}}{d\alpha} \cdot \hat{u} \\ &= 2\hat{u} \cdot \frac{d\hat{u}}{d\alpha} \\ &= \frac{d(1)}{d\alpha} = 0 \end{aligned}$$

Donc:

$$\hat{u} \cdot \frac{d\hat{u}}{d\alpha} = 0$$

\hat{u} est un vecteur unitaire, donc ne peut pas être nul.

Donc la dérivée d'un vecteur unitaire sera forcément orthogonal à ce vecteur.

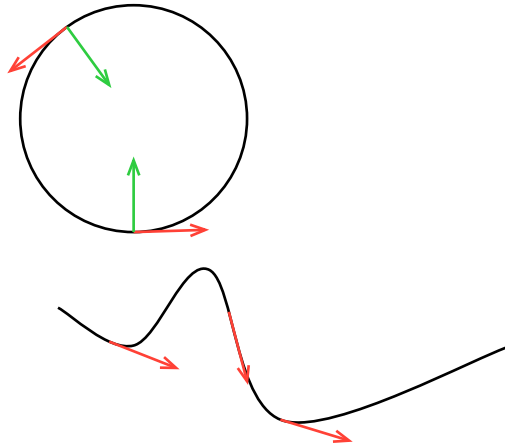
4.3) Base de Fresnel

Base de Fresnel: Quatrième solution pour se repérer dans l'espace, liée à la trajectoire que l'on va suivre.

On définit l'abscisse curviligne comme la distance sur la trajectoire que l'on suit.

On définit alors un vecteur unitaire \vec{u}_t qui va suivre la trajectoire, et un vecteur normal \vec{u}_n orthogonal à \vec{u}_t . Le vecteur normal devra toujours pointer vers l'intérieur de la concavité de la courbe.

Dans le cas circulaire, on a donc $\vec{u}_t = \vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_n = -\vec{u}_r$



On a:

$$\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \frac{\vec{u}_n}{R}$$

Avec R le rayon de courbure.