

Étude des circuits linéaires en régime continu

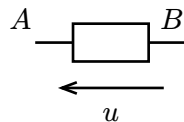
1) Influence de la résistance des appareils de mesure

Appareil de mesure: Ampèremètre, voltmètre, etc...

Ampèremètre: Mesure des intensités, en série, dans la branche où on veut mesurer des intensités

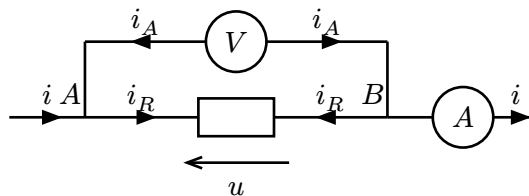
Voltmètre: Mesure des tension, en parallèle aux bornes de la portion de circuit dont on veut connaître la tension.

Exemple, on veut connaître la tension et l'intensité de ce résistor:



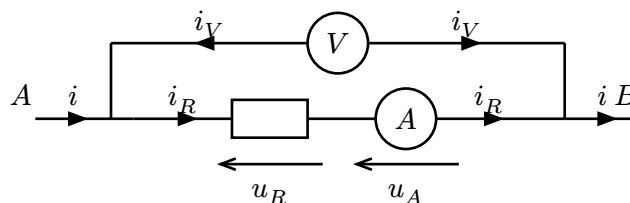
1.1) Montages en courte dérivation ou en longue dérivation

Branchement en courte dérivation:



On mesure la bonne tension, mais une partie de l'intensité va partir dans la branche du voltmètre.

Branchement en longue dérivation:



On mesure la bonne intensité, mais une partie de la tension va venir de l'ampèremètre.

1.2) Valeur de la résistance mesurée

1.2.1) Branchement en longue dérivation

$$R_{\text{mes}} = \frac{U_{\text{mes}}}{I_{\text{mes}}} = \frac{U}{I}$$

L'intensité mesurée est correcte, mais la tension mesurée ne l'est pas:

$$U = (R + R_A)I$$

D'où

$$R_{\text{mes}} = R + R_A$$

On voit que $R_{\text{mes}} \approx R$ quand $R_A \ll R$. On le préférera quand R est grand.

1.2.2) Branchement en courte dérivation

La tension mesurée est correcte, mais l'intensité ne l'est pas:

$$I = I_V + I_R = \frac{U}{R_V} + \frac{U}{R} = U \frac{R + R_V}{RR_V}$$

D'où:

$$R_{\text{mes}} = \frac{U_{\text{mes}}}{I_{\text{mes}}} = \frac{U}{I} = \frac{RR_V}{R + R_V}$$

On voit que $R_{\text{mes}} \approx R$ quand $R \ll R_V$. On le préfère quand R est petit.

1.3) Valeurs à privilégier pour les appareils

Quand on place un ampèremètre sur un circuit, il faut que la tension à ses bornes soit négligable pour ne pas perturber le circuit.

Ainsi, la résistance interne de l'ampèremètre doit être le plus faible possible. (de l'ordre de grandeur de quelques Ω).

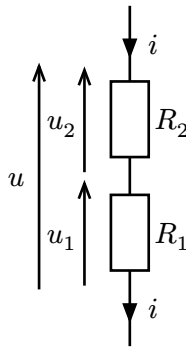
De même, pour que le voltmètre ne perturbe pas une mesure, l'intensité qui le parcourt doit être très petite, donc il doit avoir une résistance interne très grande.

Il faut connaître l'ordre de grandeur des résistances de voltmètre: quelques $M\Omega$.

Il faudra aussi faire attention à la résistance interne des générateurs ($\approx 50\Omega$) et des oscilloscopes.

2) Ponts diviseurs de tension et de courant

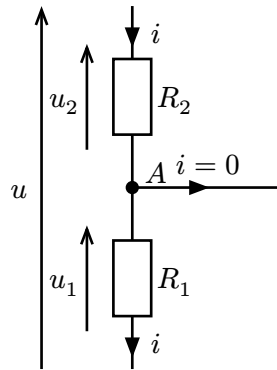
2.1) Pont diviseurs de tension



Maître Badel dit: Si on veut appliquer le pont diviseur de tension, il faut identifier le pont diviseur de tension.

On considère un pont diviseur de tension si l'intensité partant d'un nœud entre deux résistances est quasi-nulle.

On peut donc se permettre de rajouter un dipôle en parallèle de R_1 , si ce dernier possède une résistance $\gg R_1$ (comme un voltmètre).



On a:

$$u = (R_1 + R_2)i$$

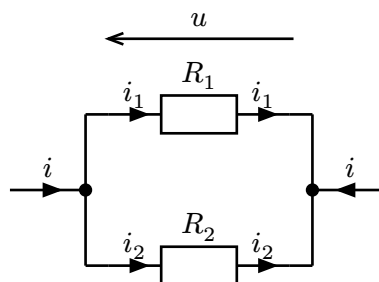
$$\Leftrightarrow i = \frac{u}{R_1 + R_2}$$

$$u_1 = R_1 i = u \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$u_2 = R_2 i = u \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

2.2) Pont diviseur de courant

On a un courant qui arrive. Si on veut le diviser, on va mettre deux résistances en parallèle:



On a:

$$u = R_1 i_1 = R_2 i_2$$

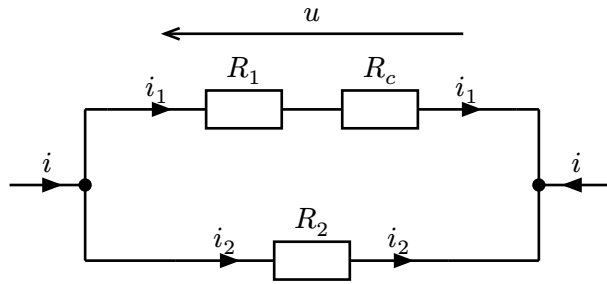
$$\Leftrightarrow i_2 = \frac{R_1}{R_2} i_1$$

$$i = i_1 + i_2 = i_1 + \frac{R_1}{R_2} i_1$$

$$= i_1 \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right)$$

$$i_1 = i \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

On peut aussi utiliser une résistance de charge:



On a:

$$u = (R_1 + R_c)i_1 = R_2 i_2$$

$$i_2 = i_1 \frac{R_1 + R_c}{R_2}$$

$$i = i_1 + i_2$$

$$= i_1 + i_1 \frac{R_1 + R_c}{R_2}$$

$$= i_1 \frac{R_1 + R_2 + R_c}{R_2}$$

$$i_1 = i \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_c}$$

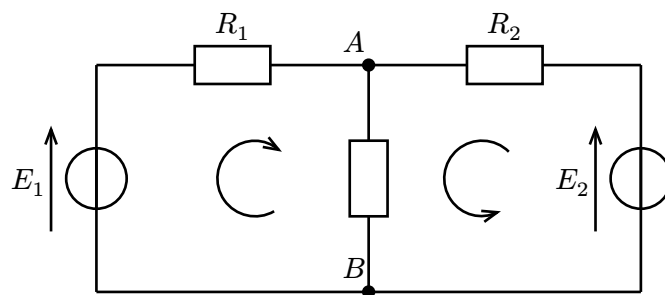
En choisissant judicieusement les valeurs de R_1 et R_2 , on peut choisir exactement quelle intensité va parcourir le dipôle de résistance R_c .

3) Exemples d'applications

On peut utiliser les ponts pour connaître la tension et l'intensité à n'importe quel point du circuit.

3.1) Lois de Kirchhoff

Exemple de circuit:



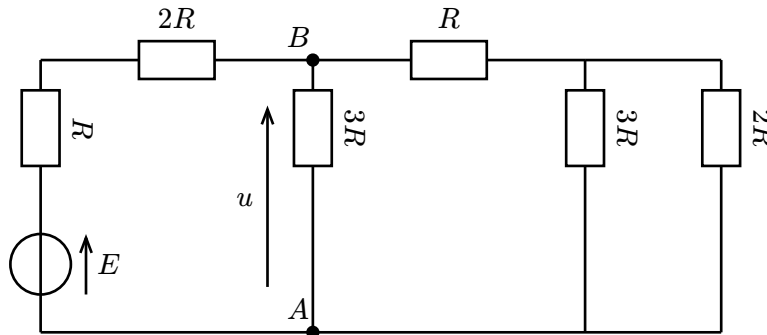
On veut retrouver les intensités i_1 , i_2 , et i_3 .

On commence par appliquer les lois des nœuds et des mailles: On a:

- Lois des nœuds: $i_1 + i_2 + i_3 = 0$
- Lois des mailles (1): $E_1 - R_1 i_1 + R_3 i_3 = 0$
- Lois des mailles (2): $E_2 - R_2 i_2 + R_3 i_3 = 0$
- Lois des mailles (3): $E_1 - R_1 i_1 + R_2 i_2 - E_2 = 0$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} i_3 = -i_1 - i_2 \\ E_1 - R_1 i_1 + R_3(-i_1 - i_2) = 0 \\ E_2 - R_2 i_2 + R_3(-i_1 - i_2) = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} i_3 = -i_1 - i_2 \\ E_1 - (R_1 + R_3)i_1 - R_3 i_2 = 0 \times R_3 \\ E_2 - R_3 i_1 - (R_2 + R_3)i_2 = 0 \times -(R_1 + R_3) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} i_3 = -i_1 - i_2 \\ R_3 E_1 - R_3^2 i_2 - (R_1 + R_3)E_2 + (R_2 + R_3)(R_1 i R_3) = 0 \\ (R_2 + R_3)E_1 - (R_2 + R_3)(R_1 + R_2)i_1 - R_3 E_2 + R_3^2 i_1 = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} i_3 = -i_1 - i_2 \\ i_2 = \frac{(R_1 + R_3)E_2 - R_3 E_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \\ i_1 = \frac{(R_2 + R_3)E_1 - R_3 E_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \end{cases} \\
& \frac{V \cdot A^{-1} \cdot V - V \cdot A^{-1} \cdot V}{V^2} \\
& \frac{V^2 \cdot A^{-1}}{V^2 \cdot A^{-2}} = A
\end{aligned}$$

3.2) Utilisation du pont diviseur de tension



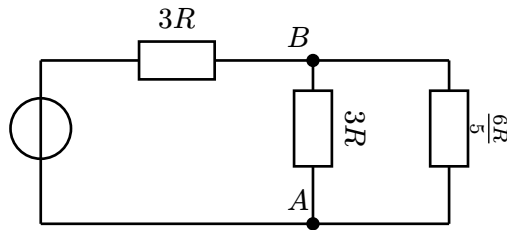
D'abord, on réduit notre circuit au maximum (résistances en série et en parallèle). On a:

1. $R_2 = R + 2R = 3R$
2. $3R \parallel 2R \Rightarrow R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{3R} + \frac{1}{2R}} = \frac{1}{\frac{5}{6R}} = \frac{6R}{5}$

On réduit les deux résistances maintenant en parallèle:

$$\begin{aligned}
R'_{eq} &= R + R_{eq} = R + \frac{6R}{5} = \frac{11}{5}R \\
R_1 &= \frac{1}{\frac{1}{3R} + \frac{1}{R'_{eq}}} = \frac{1}{\frac{1}{3R} + \frac{5}{11R}} = \frac{33R}{11 + 15} \\
&= \frac{33}{26}R
\end{aligned}$$

Une fois que notre circuit est réduit à:



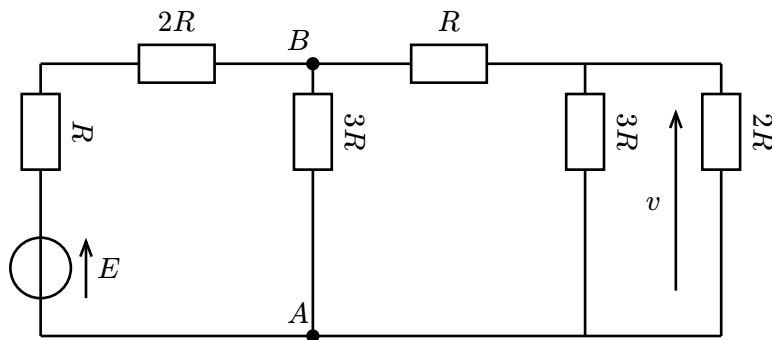
On veut connaître la tension u_1 .

On applique le pont diviseur de tension:

$$u_1 = R_1 E (R_1 + R_2) = \frac{\frac{33}{26} R}{\frac{33}{26} R + 3R} E$$

$$= \frac{3 \times 11}{3 \times 11 + 3 \times 26} E = \frac{11}{37} E$$

Mettons qu'on veuille connaître la tension v comme il suit:

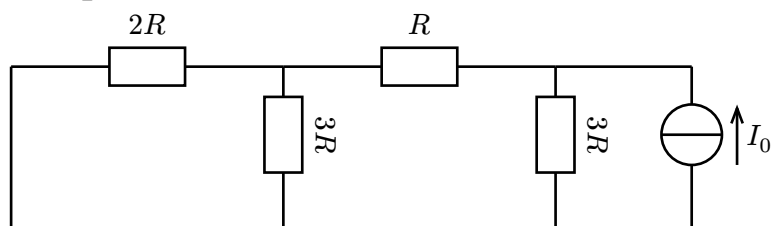


On se place sur la droite du circuit, et on utilise la tension de u_1 qu'on a déjà calculé.

On trouve:

$$v = \frac{R_{eq} u}{R + R_{eq}} = \frac{\frac{6R}{5} \frac{11E}{37}}{R + \frac{6R}{5}} = \frac{6E}{37}$$

3.3) Utilisation du pont diviseur de courant



On veut connaître le courant i_1 passant par la résistance R_2 .

On va fusionner toutes les autres résistances en une grosse résistance R_2 , et on va appliquer le pont diviseur de courant pour trouver l'intensité i_1 .

⇒ TODO:

On calcule la valeur de la résistance R_2 :

1. On a l'association en série de R et de $2R$ de résistance $R_{eq} = 3R$

2. R_{eq} et $3R$ en parallèle, d'où:

$$R'_{\text{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{R_{\text{eq}}} + \frac{1}{3R}} = \frac{1}{\frac{1}{3R} + \frac{1}{3R}} = \frac{3R}{2}$$

3. R'_{eq} et R en série: $R_2 = \frac{3R}{2} + R = \frac{5}{2}R$

Il ne reste plus qu'à appliquer le pont diviseur de courant:

$$R_1 i_1 = R_2 i_2 \Leftrightarrow i_2 = \frac{R_1}{R_2} i_1$$

$$I_0 = i_1 + i_2 = i_1 + \frac{R_1}{R_2} i_1 = i_1 \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

$$i_1 = \frac{R_2 I_0}{R_1 + R_2}$$

$$i_1 = \frac{\frac{5}{2} R I_0}{3R + \frac{5}{2} R} = \frac{5}{11} I_0$$

On peut maintenant calculer l'intensité passant par la résistance du milieu:

On dit que R_2 n'est plus que les deux résistances à la fin

On applique la loi des nœuds:

$$i_2 = I_0 - i = I_0 - \frac{5}{11} I_0 = \frac{6}{11} I_0$$

On a $R_1 = 3R$, $R_2 = R + 2R = 3R$

On applique le pont diviseur de courant:

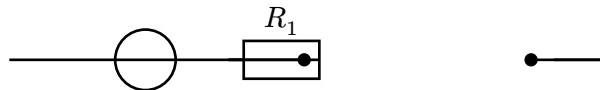
$$i' = \frac{3R \frac{6}{11} I_0}{3R + 3R} = \frac{3}{11} I_0$$

3.4) Double pont diviseur de tension

Ne pas tomber dans le "piège" des doubles ponts diviseur de tension.

⇒ TODO:

Schéma



1. On nous demande de calculer u_2 en fonction de u_1 :

On utilise un pont diviseur de tension:

$$u_2 = \frac{R_4 u_1}{R_3 + R_4}$$

2. On réduit l'association en série de R_3 et de R_4 :

$$R_{eq} = \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}$$

$$u_1 = \frac{R_{eq} E}{R_{eq} + R_1} = \frac{R_2(R_3 + R_4)E}{R_2(R_3 + R_4) + R_1(R_2 + R_3 + R_4)}$$

On substitue:

$$u_2 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} u_1$$

$$= \frac{R_2 R_4 E}{R_2(R_3 + R_4) + R_1(R_2 + R_3 + R_4)}$$

3.5) Loi des nœuds en terme de potentiel - Théorème de Millman

α Hors-programme:

[Résultat hors-programme: il faudra le démontrer à chaque utilisation]

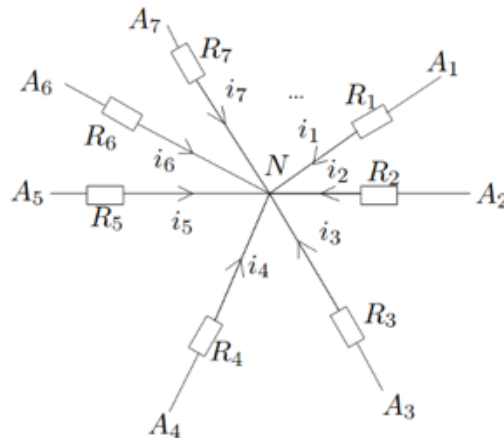


Figure 14: Millman

La loi des nœuds s'exprime en intensité, et ne devrait pas pouvoir s'exprimer en termes de tension.

Ici, on a:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + i_6 + i_7 = 0$$

Or, toutes ces intensités proviennent de résistances, d'où:

$$\frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} + \dots + \frac{u_7}{R_7} = 0$$

Qu'on peut exprimer en terme de potentiel:

$$\frac{V_{A_1} - V_N}{R_1} + \frac{V_{A_2} - V_N}{R_2} + \dots + \frac{V_{A_7} - V_N}{R_7} = 0$$

Et on sort les V_N :

$$\frac{V_{A_1}}{R_1} + \frac{V_{A_2}}{R_2} + \dots + \frac{V_{A_7}}{R_7} = V_N \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_7} \right)$$

On peut l'utiliser:

⇒ TODO:
schéma...

On exprime V_A en appliquant la relation:

$$V_A = \frac{\frac{V_C}{R_1} + \frac{V_B}{R_3} + \frac{V_D}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

On place la masse en B , donc on considère que $V_B = 0$. On a donc u_3 la tension de R_3 qui est:

$$\begin{aligned} u_3 &= V_A - V_B = V_A \\ &= \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \\ &= \frac{R_3(R_2 E_1 + R_1 E_2)}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_2 R_1} \end{aligned}$$

Donc on calcule i_3 :

