I.

1)

a)

Proposition:

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fraction admettant α comme pole simple, alors le coefficient du pôle est $\dfrac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$

Preuve:

La théorie nous donne que:

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{A}{X-\alpha} + \tilde{F} \qquad (*)$$

On a donc que:

$$\frac{P(X-\alpha)}{Q} =$$

Par formule de Taylor, on sait que:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{k=0}^{+\infty} Q^{(k)}(\alpha)\frac{(X-\alpha)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} Q^{(k)}(\alpha)(X-\alpha)^k \text{ avec } Q^{(k)}(\alpha) \neq 0 \text{ car pôle smple} \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q}(X-\alpha) &= \frac{P(X-\alpha)}{\sum_{k=0}^{+\infty} Q^{(k)} \frac{(X-\alpha)^k}{k!}} \\ &= \frac{P}{\sum_{k=0}^{+\infty} Q^{(k)} \frac{(X-\alpha)^{k-1}}{k!}} \end{aligned}$$

D'où:

$$\left(\frac{P}{Q}(X-\alpha)\right)(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$$

Et en évaluant en $(*)$

Remarque:

Dans $\mathbb{R}$,

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = \frac{A}{t-\alpha} + \tilde{R}(t)$$

$$P(T)\frac{t-\alpha}{Q(t)-Q(\alpha)} = A + (t-\alpha)\tilde{R}(t)$$