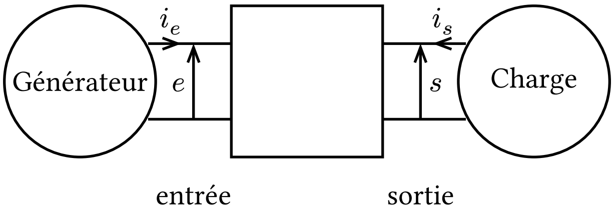
Fonction de transfert - Diagramme de Bode - Filtre du 1$^{\text{er}}$ ordre

I. Fonction de transfert - Diagramme de Bode

1) Notion de quadripole



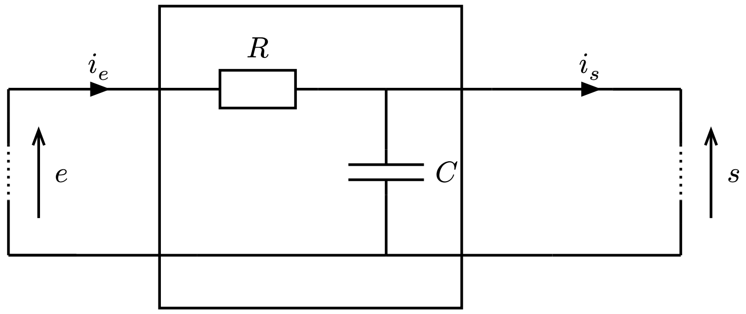
On peut définir la notion d'impédance d'entrée et d'impédance de sortie:

$$\underline{Z_e} = \frac{\underline{e}}{\underline{i_e}}$$

$$\underline{Z_s} = \frac{\underline{s}}{\underline{i_s}}$$

On va considérer qu'un quadripole se comporte comme une impédance en entrée, et une impédance en sortie.

Exemples de quadripoles:
- Le transformateur
- Un circuit R,C:



2) Fonction de transfert

Fonction de transfert: Dans un circuit en régime sinusoïdal forcé, c'est le rapport de la sortie sur l'entrée.

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

Elle est associée aux système linéaires, qui nous permettent d'appliquer le principe de superposition.

Principe de superposition: Si on a e_1 et e_2 des tensions telles que:

$$e(t) = \lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t)$$

Alors:

$$s(t) = \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t)$$

Avec $\underline{s_1}(t) = \underline{H}\underline{e_1}$ et $\underline{s_2}(t) = \underline{H}\underline{e_2}$

Système linéaire: Les valeurs s et e doivent respecter un système d'équation linéaires:

$$\sum_k a_k \frac{\mathrm{d}^k s}{\mathrm{d}t^k} + \sum_l b_l \frac{\mathrm{d}^l e}{\mathrm{d}t^l} = f(t)$$

Or, on peut traduire ces équation linéaire en notation complexe:

$$\sum_k a_k (j\omega)^k \underline{s} + \sum_l b_l (j\omega)^l \underline{e}$$

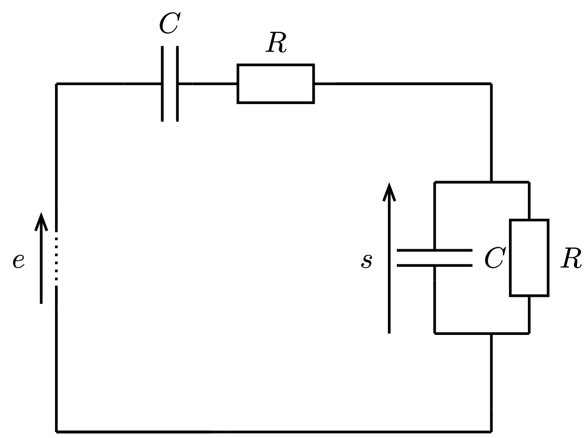
$$= \underline{s} \sum_k a_k (j\omega)^k + \underline{e} \sum_l b_l (j\omega)^l$$

D'où la fonction de transfert dans un système linéaire:

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = -\frac{\sum_l b_l (j\omega)^l}{\sum_k a_k (j\omega)^k}$$

> ⚠ Warn:
> Les carrés, les racine carrés, etc… ne s'inscrivent pas dans les systèmes linéaires!

3) Lien entre fonction de transfert et équation différentielle



$$\underline{s} = \underline{e}\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$$

$$\underline{Z_1} = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

$$\underline{Z_2} = \frac{1}{jC\omega} + R = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}$$

$$\begin{aligned}\underline{H} &= \frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{\frac{R}{1+jRC\omega} + \frac{1+jRC\omega}{jC\omega}} \\ &= \frac{jRC\omega}{jRC\omega + (1 + jRC\omega)^2} \\ &= \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}\end{aligned}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}$$

$$(1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2)\underline{s} = jRC\omega\underline{e}$$

On retrouve l'équation différentielle (on transforme les $j\omega$ en dérivées premières, $(j\omega)^2 = -\omega^2$ en dérivées secondes, etc...):

$$\boxed{s + 3RC\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + R^2C^2\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = RC\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}}$$

4) Gain et phase de $\underline{H}$

On a donc $\underline{H}$ notre fonction transfert.
On définit le gain G le module de la fonction de transfert, avec $G = |\underline{H}|$, et φ la phase de la fonction de transfert, avec $\varphi = \arg(\underline{H})$

En général, on utilisera le gain en décibel:

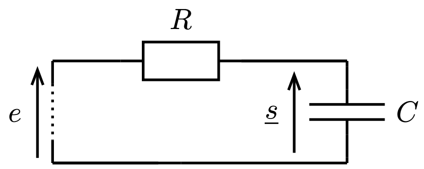
$$G_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}(G)$$

5) Les deux tracés du diagramme de Bode

Le diagramme de Bode, c'est le tracé du gain en décibel, et de la phase, en fonction du $\log_{10}(\omega) = \log_{10}(2\pi f)$

6) Cas du circuit R, C

On a un circuit de la forme:



On a:

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_R} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R}$$

Donc:

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$G = |\underline{H}| = \frac{|\underline{s}|}{|1 + jRC\omega|}$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (RC\omega)^2}}$$

$$\begin{aligned} G_{\text{dB}} &= 20 \log_{10} G \\ &= 20 \log_{10}(1) - 20 \log_{10}\left(\sqrt{1 + (RC\omega)^2}\right) \\ &= -20 \log_{10}\left(\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}\right) \end{aligned}$$

On fait un diagramme asymptotique:
- À basses fréquences $\Leftrightarrow \omega \to 0$, on a

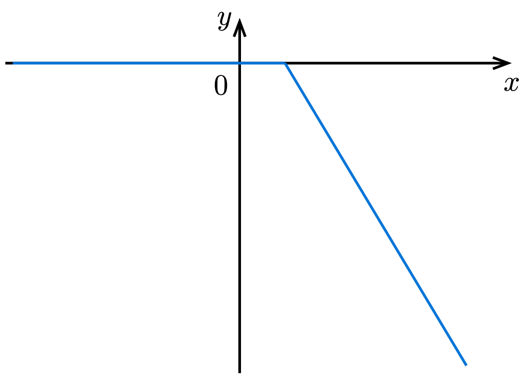
$$G_{\text{dB}} \to 0$$

- À hautes fréquences $\Leftrightarrow \omega \to \infty$, on a

$$G_{\text{dB}} \to -20 \log(RC\omega) = -20 \log(RC) - 20 \log(\omega)$$

On a une pente de $-20\ \text{dB}/\text{décade}$

En traçant le diagramme de Bode correspondant:



On cherche l'intersection des asymptotes:

$$
\begin{aligned}
0 &= -20\log(RC) - 20\log(\omega) \\
20\log(RC) &= -20\log(\omega) \\
20\log\left(\frac{1}{RC}\right) &= 20\log(\omega) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{RC} &= \omega
\end{aligned}
$$

On cherche dorénavant le diagramme de bode.

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(1) - \arg(1 + jRC\omega) = 0 - \Psi$$

$$\Psi = \arg(1 + jRC\omega)$$

$$\begin{cases} \tan\Psi = \frac{RC\omega}{1} \\ \cos\Psi \text{ du signe du dénominateur donc} > 0 \end{cases}$$

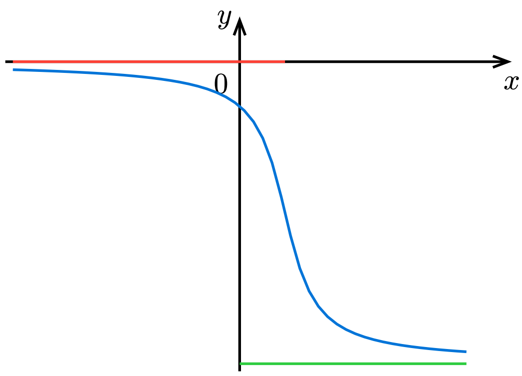
Donc

$$\Psi = \arctan(RC\omega)$$

$$\varphi = -\arctan(RC\omega)$$

- $\omega \to 0 \Rightarrow \varphi \to 0$
- $\omega \to +\infty \Rightarrow \varphi \to -\frac{\pi}{2}$

On a:



II. Notion de filtrage

1) But du filtrage

Un filtrage permet de ne sélectionner qu'une partie des fréquences d'un signal.

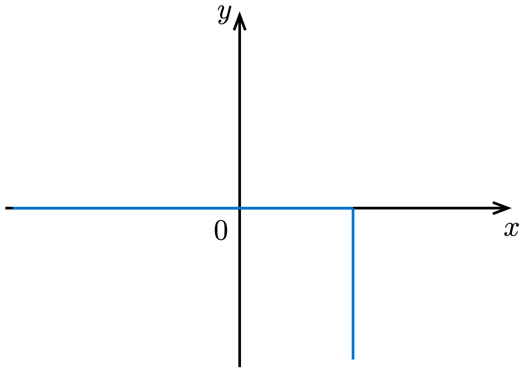
2) Bande passante

Définie à −3 dB par l'ensemble des ω tels que $G_{\text{dB}} \geq G_{\text{dB,max}} - 3$ dB ou $G(\omega) \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$

<u>**Bande passante**</u>: ensemble des fréquences à garder

3) Filtres ideal

Un filtre est dit idéal si il a un gain de 1 pour les fréquences souhaité et 0 pour les autres.



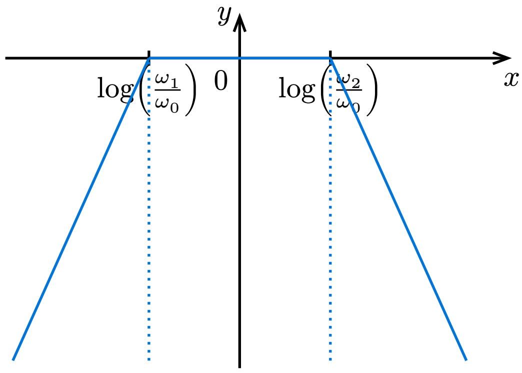
4) Différent type de filtrage

Il y a 2 types de filtrage commun:

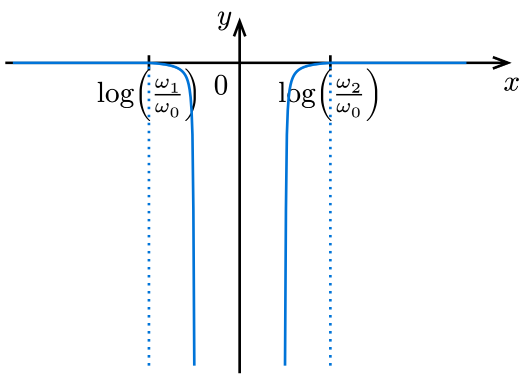
Filtre passe-bas: Laisse passer les basses fréquences
Filtre passe-haut: Laisse passer les hautes fréquences

On peut aussi trouver:

Filtre passe-bande: Ne laisse passer qu'une partie des fréquences:



Filtre coupe-bande: Laisse passer tout sauf une partie des fréquences:



On graphe les abscisses en fonction de $\log\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$ afin de centrer le filtrage ainsi que normaliser la grandeir dans le log.

5) Ordre des filtres

Ordre du filtre: degré du polynome de ω au dénominateur de la fonction de transfert

III. Filtre passif de premier ordre

1) Définition

Les filtres passifs du premier ordre sont ceux faisant intervenir un puissance 1 de ω au dénominateur de $\underline{H}$.

2) Filtre passe-bas

Le circuit R, C est un filtre passe bas.

a) Fonction de transfert

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Ou, sous sa forme canonique:

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

b) Étude du gain

Le gain G d'un filtre correspond au module de sa fonction de transfert.

$$G = |\underline{H}| = \frac{|H_0|}{\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right|} = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

En le passant au log, on obtient le gain en décibels:

$$G_{\mathrm{dB}} = 20\log G = 20\log|H_0| - 20\log\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

c) Fréquence de coupure

La bande passante est définie de deux manières:

- Pour le gain par:

$$\omega \text{ tel que } G(\omega) \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$$

- Pour le gain en décibel:

$$\omega \text{ tel que } G_{\mathrm{dB}}(\omega) \geq G_{\mathrm{dB},\max} - 3 \text{ dB}$$

Ici, on a:

- $G_{\max} = |H_0|$

- $G(\omega) = \dfrac{|H_0|}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \geq \dfrac{|H_0|}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \omega \leq \omega_0$$

La bande passante de ce filtre est donc $[0; \omega_0]$.

Dans le cas des hautes fréquences, on a $\omega \gg \omega_0$. On a donc:

$$\underline{H} \approx \frac{H_0}{j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{H_0\omega_0}{j\omega} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

D'où:

$$j\omega\underline{s} = H_0\omega_0\underline{e}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = H_0\omega_0 e(t)$$

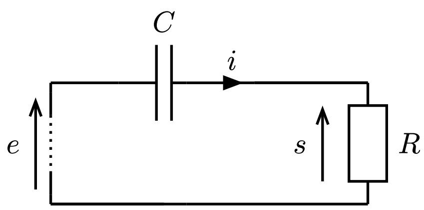
$$s = \int H_0\omega_0 e(t)\,\mathrm{d}t$$

On observe donc un comportement intégrateur (à une constant multiplicatrice près) dans les hautes fréquences.

> ⚠ Warn:
> Ce comportement n'est valide que si l'on a du $j\omega$ au dénominateur.

3) Filtre passe haut

On inverse la place du condensateur et du résistor:



On applique un pont diviseur de tension:

$$\underline{s} = \underline{e}\frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_C}}$$

D'où:

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{jR\omega C}{1 + jRC\omega}$$

On met la fonction de transfert sous forme canonique:

$$\underline{H} = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

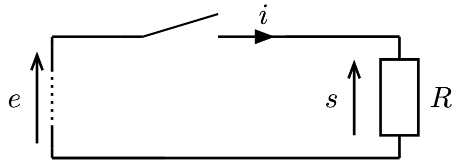
(Avec, ici, $H_0 = 1$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$)

$$\begin{aligned}\underline{H} &= \frac{H_0}{\frac{\omega_0}{j\omega} + 1} \\ &= \frac{H_0}{-j\frac{\omega}{\omega_0} + 1}\end{aligned}$$

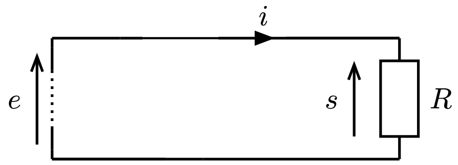
4) Comportement asymptotique à haute et à basse fréquences

a) Basses fréquences

À basse fréquence, on apparente la condensateur à un interrupteur ouvert:

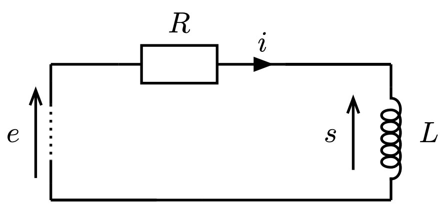


Et à haute fréquence, on apparente le condensateur à un fil:



On observe bien le comportement attendu (filtrage des basses fréquences).

Φ Note:
On peut remplacer le condensateur par une bobine dans l'autre circuit, ce qui nous donne le même comportement passe haut:



b) Fonction de transfert

$$\begin{aligned}\underline{H} &= \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \\ &= \frac{H_0}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}}\end{aligned}$$

c) Étude du gain

$$G = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

ω est croissante donc $\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 + 1$ est décroissante.

On prend l'inverse à nouveau, donc G est croissante.

d) Diagramme asymptotique

- Quand $\omega \to +\infty$, $\frac{\omega_0}{\omega} \to 0$, donc $G \to |H_0|$

  D'où: $G_{\text{dB}} = 20\log(G) \to 20\log|H_0|$

  On a une asymptote horizontale d'ordonnée $20\log|H_0|$.
- Quand $\omega \to 0$, $\frac{\omega_0}{\omega} \to +\infty$,
  Donc

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \approx \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} = \frac{\omega_0}{\omega}$$

  On a

$$G = \frac{|H_0|}{\frac{\omega_0}{\omega}} = \omega\frac{|H_0|}{\omega_0}$$

  D'où:

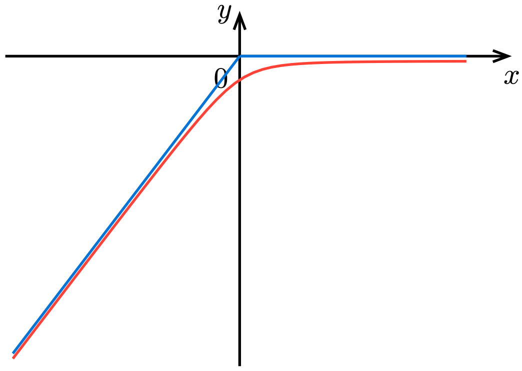
$$G_{\text{dB}} = 20\log|H_0| + 20\log\frac{\omega}{\omega_0}$$

  On a une pente à $+20$ dB/decad.

On cherche l'intersection des asymptotes:

$$20\log|H_0| = 20\log|H_0| + 20\log\frac{\omega}{\omega_0}$$
$$\Leftrightarrow \log\frac{\omega}{\omega_0} = 0$$
$$\Leftrightarrow \omega = \omega_0$$

On a donc:



e) Déphasage

$$\underline{H} = \frac{H_0 j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{H_0}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}}$$

i) Première méthode On prend la première expression de $\underline{H}$:
On a:

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(H_0) + \arg\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

D'où:

$$\varphi = \begin{cases} 0 \text{ si } H_0 > 0 \\ \pi \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} + \frac{\pi}{2} - \Psi$$

Avec:

$$\tan \Psi = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{1} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$\cos \Psi$ est du signe de la partie réelle, donc > 0:

$$\Psi = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \begin{cases} 0 \text{ si } H_0 > 0 \\ \pm\pi \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \text{ si } H_0 > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ii) Deuxième méthode

On prend la deuxième expression de $\underline{H}$:

$$\varphi = \arg(H_0) - \arg\left(1 - j\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

$$\varphi = \begin{cases} 0 \text{ si } H_0 > 0 \\ \pi \text{ si } H_0 < 0 \end{cases} - \Psi$$

$$\tan \Psi = -\frac{\omega_0}{\omega}$$

Avec $\cos \Psi$ du signe de 1, donc positif, d'où:

$$\Psi = \arctan\left(-\frac{\omega_0}{\omega}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \text{ si } H_0 > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \text{ si } H_0 < 0 \end{cases}$$

> Φ Note:
> Selon la méthode qu'on utilise, on arrive pas forcément à la même expression du déphasage. Cela dit, on doit trouver les même variations et asymptotes.

iii) Étude des variations

ω est croissant, donc $\frac{\omega_0}{\omega}$ est décroissante.
arctan est croissante.

φ est donc **décroissante**.

iv) Étude asymptotique

- Si $H_0 > 0$:
  - Si $\omega \to 0$, $\frac{\omega_0}{\omega} \to +\infty$, donc $\varphi \to \frac{\pi}{2}$
  - Si $\omega \to +\infty$, $\frac{\omega_0}{\omega} \to 0$, donc $\varphi \to 0$

- Si $H_0 < 0$:
  - Si $\omega \to 0$, $\frac{\omega_0}{\omega} \to +\infty$, donc $\varphi \to \frac{3\pi}{2}$
  - Si $\omega \to +\infty$, $\frac{\omega_0}{\omega} \to 0$, donc $\varphi \to \pi$

f) Bande passante

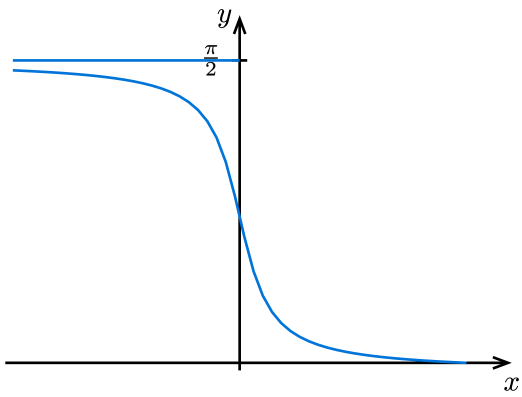
$$G_{\text{dB}} \geq G_{\text{dB,max}} - 3 \text{ dB}$$

Ou:

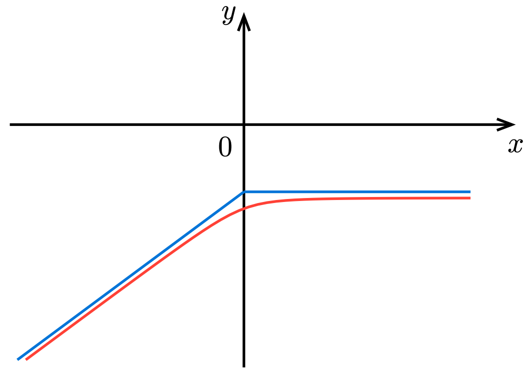
$$\begin{aligned} G(\omega) &\geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} &\geq \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 &\leq 2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \omega &\geq \omega_0 \end{aligned}$$

g) Diagramme de Bode

Si $H_0 > 0$:



Si $|H_0| < 1$:



h) Comportement dérivateur

On a:

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

D'où, si $\omega \ll \omega_0$, $\frac{\omega_0}{\omega} \to +\infty$, alors:

$$\underline{H} \approx \frac{H_0}{-j\frac{\omega_0}{\omega}} = \frac{H_0}{\frac{\omega_0}{j\omega}} = \underbrace{j\omega}_{\text{facteur de dérivation}} \frac{H_0}{\omega_0}$$

$$\underline{s} = \underline{H}\underline{e}$$

$$= j\omega\underline{e}\frac{H_0}{\omega_0} = \frac{\mathrm{d}\underline{e}}{\mathrm{d}t}\frac{H_0}{\omega_0}$$

On obtient la dérivée de l'entrée, **si la condition sur la fréquence est remplie.**

5) Quelques remarques sur les filtres du $\mathbb{1}^{\text{er}}$ ordre.

1. On ne peut pas obtenir de comportements de type passe-bande ou coupe-bande uniquement avec des filtres du premier ordre.
2. En regardant les asymptotes du filtre du premier ordre, on a des asymptotes diagonales à $\pm 20\ \mathrm{dB}/\mathrm{decal}$. C'est l'écart de pente maximale atteignable avec le premier ordre. C'est aussi l'unité de « base » des filtres. Un filtre d'ordre n donnera des asymptotes de pente $20n\ \mathrm{dB}/\mathrm{decal}$.
3. En regardant la phase, c'est la même chose, on a une variation de $\frac{\pi}{2}$.