Lentilles sphériques minces dans l'approximation de Gauss

1) Définitions

1.1) Lentille

Une lentille est composée de deux dioptres formant un volume d'indice n placés dans un milieu d'indice n'

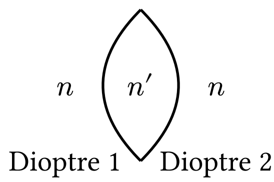


Figure 1: Une lentille d'indice n'

1.2) Lentille sphérique

Dans une lentille sphérique, les deux dioptres sont des sphères.

1.3) Lentille sphérique mince

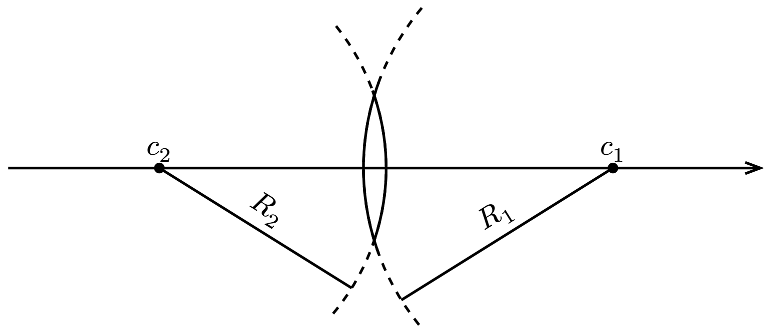


Figure 2: Lentille sphérique

On doit définir deux points, S_1 et S_2, les sommets du dioptre sphérique. L'épaisseur de la lentille S_1S_2, qu'on note habituellement e doit être faible devant R_1 et devant R_2

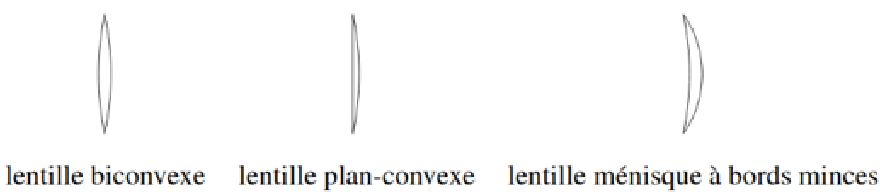
Pour des lentilles très fines, on a $e \rightsquigarrow 0$, donc $S_1 \approx S_2$.

1.4) Centre

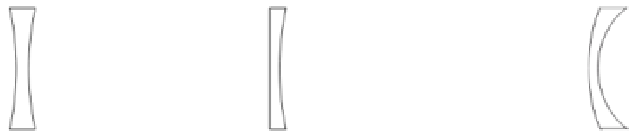
Comme $S_1 \approx S_2$, on va les considérer comme un unique point O, le centre de la lentille.

1.5) Différentes formes de lentille - Représentation

1.5.1) Lentilles sphérique à bord mince



1.5.2) Lentilles sphériques à bord épaix



lentille biconcave lentille plan-concave lentille ménisque à bords épais

1.5.3) Représentations

lentille convergente lentille divergente

2) Lentilles et conditions de Gauss

2.1) Stigmatisme des lentilles

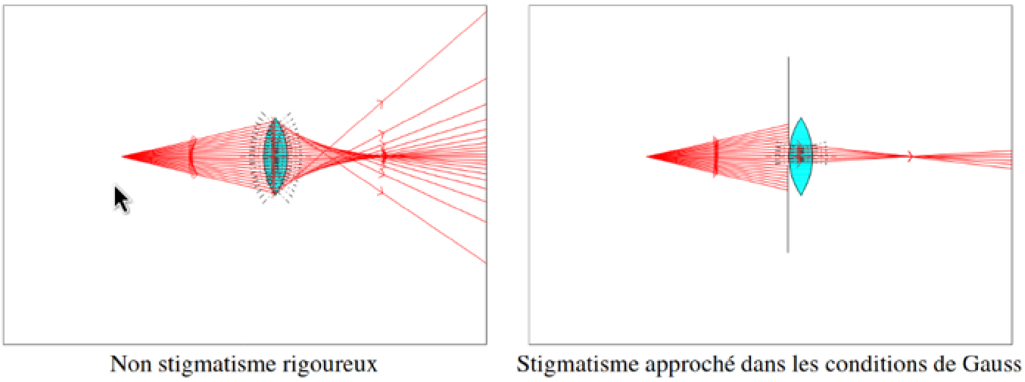


Figure 6: Absence de stigmatisme pour une lentille mince sphérique en ne limitant pas le faisceau et stigmatisme approché d'une lentille mince sphérique en limitant le faisceau aux rayons arrivant au voisinage du centre

Le caractère de stigmatique rigoureux de la lentille n'est pas vérifié.

Si on pose les conditions de Gauss pour la lentille (en utilisaant un diaphragme), on observe un stigmatisme approché.

2.2) Aplanétisme des lentilles

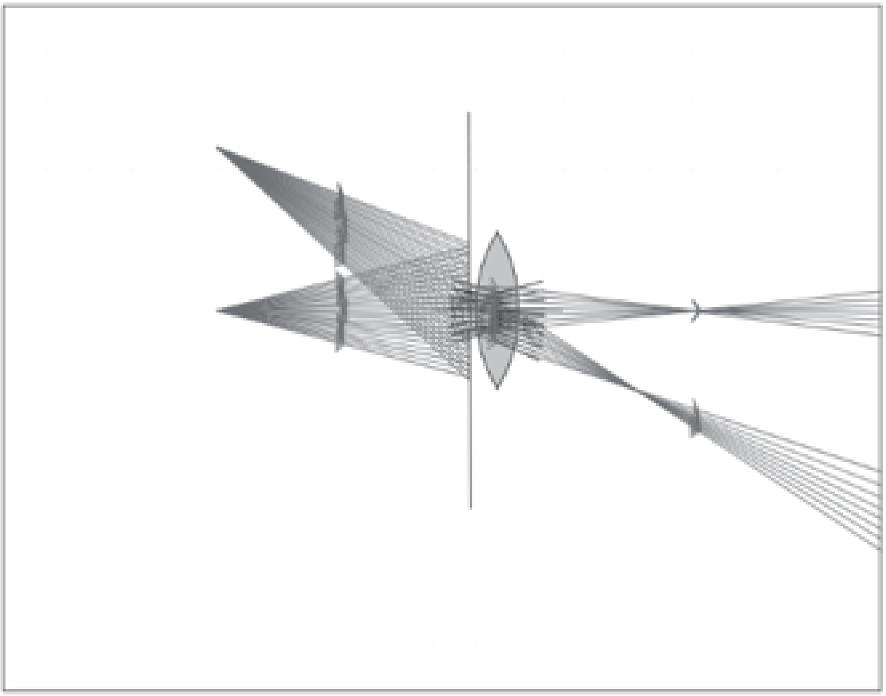


Figure 7: Absence d'aplanétisme pour une lentille mince sphérique lorsque les rayons arrivent trop inclinés sur la lentille

En déplaçant le point objet perpendiculairement, on voit que tant qu'on reste dans de conditions de Gausse (point pas trop éloigné de l'axe optique), l'aplanétisme approché est vérifié

2.3) Stigmatisme et aplanétisme des conditions de Gauss

Les conditions de Gauss assurent le stigmatisme et l'aplanétisme peut importe la lentille (tant qu'elle est centrée).

2.4) Caractère focal d'une lentille

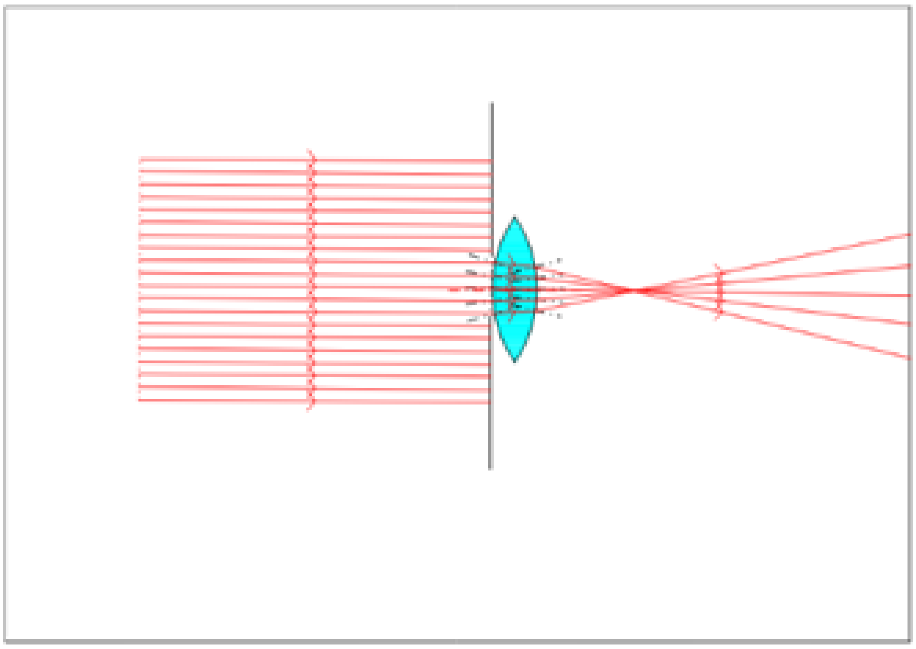


Figure 8: Caractère focal d'une lentille mince sphérique

2.5) Foyers principaux, foyers secondaires

Foyer principal: Foyer sur l'axe optique
Foyer secondaire: Autre foyer pas sur l'axe optique

Voir: *Chapitre 2. 2.4) Foyers secondaires - Plan focal*

2.6) Distance focale et vergence

La distance focale est la distance algébrique du centre de la lentille (O) au foyer image.

$f' = \overline{OF'} = -\overline{OF} = \overline{FO}$

La vergence est l'inverse de la distance focale:

$$V = \frac{1}{f'}$$

> ✓ Tip:
> La vergence garde toujours le même signe que la distance focale.

2.7) Signe de la distance focale et caractère de la lentille

On aura:

- $f' > 0$ si la lentille est convergente
- $f' < 0$ si la lentille est divergente

3) Construction d'une image

3.1) Règles de construction

- Le rayon passant par le centre de la lentille est non dévié (———)
- Le rayon arrivant ∥ à l'axe optique passe par F' (———)
- Le rayon passant par F ressort ∥ à l'axe optique (———)

Ces règles de constructions ne sont valables que dans les conditions de Gauss, car "centre de la lentille" = sommet du premier dioptre + sommet du deuxième dioptre dans le cadre d'une lentille mince.

3.2) Cas d'une lentille convergente

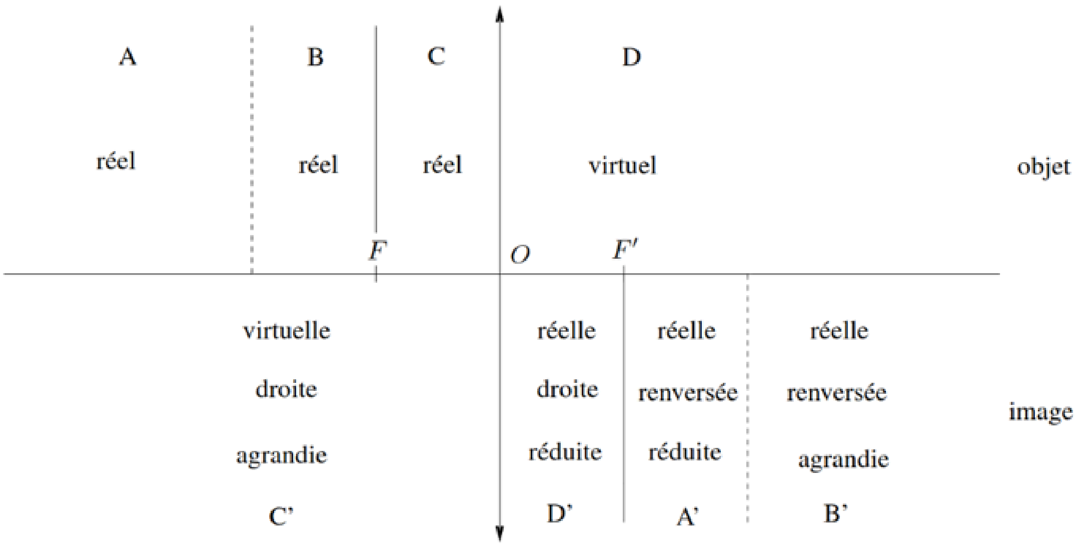
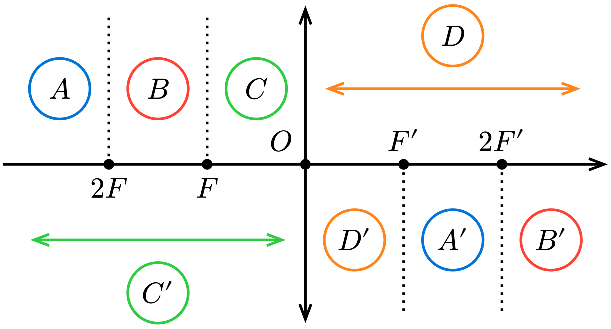
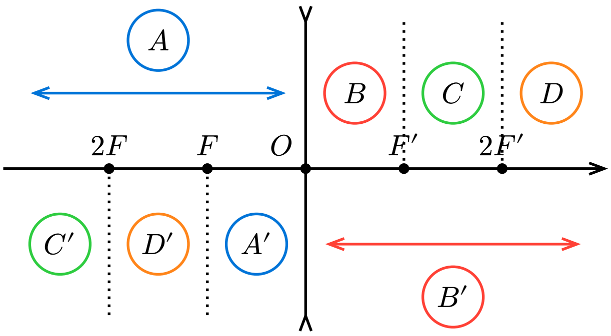


Figure 9: Conjugaison des objets et des images dans ne lentille divergente



3.3) Cas d'une lentille divergente



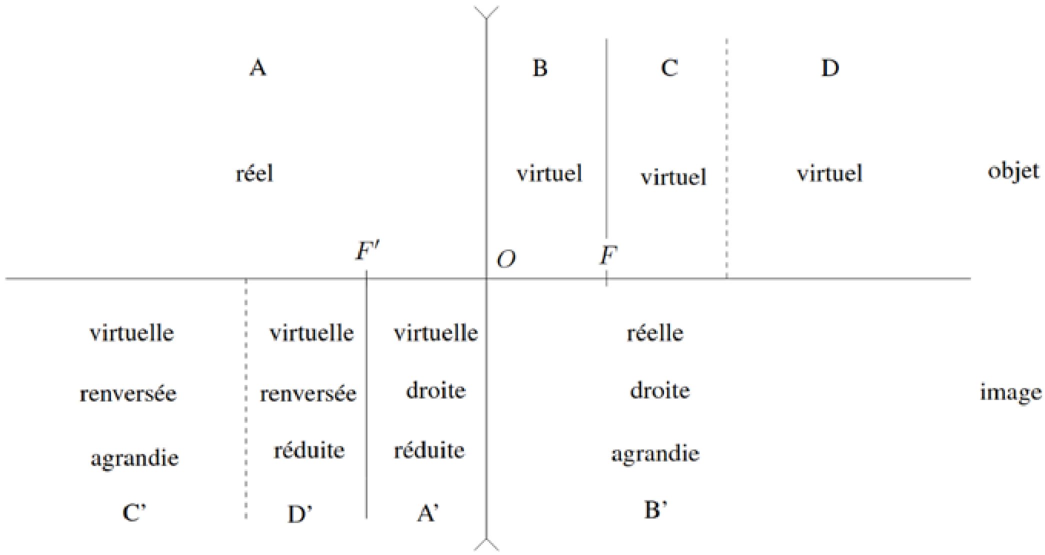


Figure 12: Conjugaison des objets et des images dans une lentille divergente

4) Relations de conjugaisons

4.1) Formule de conjugaison avec origine au centre

Les relations qu'on va écrire ne dépendent pas d'un positionnement spécifique. On peut les utiliser pour n'importe quel type de lentille et de positionnement.

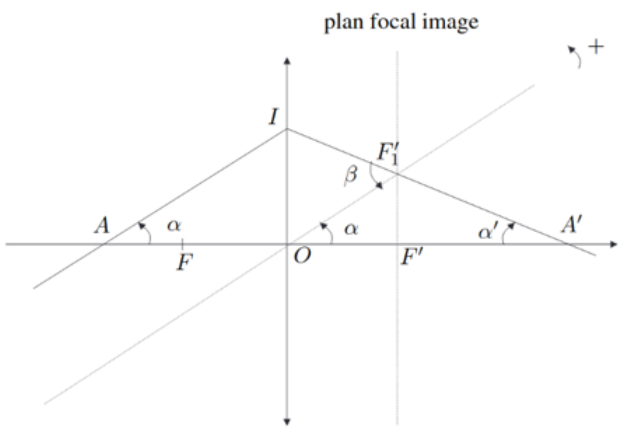


Figure 13: Relation de conjugaison par construction

Dans le triangle $OF_{1'}A'$:

$$\alpha + (\pi - \beta) + (-\alpha') = \pi$$

$$\boxed{\alpha - \alpha' = \beta}$$

On se place dans les conditions de Gauss, on peut donc travailler avec des petits angles.

$$\alpha \approx \tan \alpha$$

$$\alpha' \approx \tan \alpha'$$

On place le point K, on a:

$$\beta = \beta_1 + \beta_2$$

$$\begin{aligned}\beta_1 \approx \tan\beta_1 &= \frac{\overline{KI}}{\overline{KF_1'}} \text{ (dans le triangle } KIF_1'\text{)} \\ &= \frac{\overline{KI}}{\overline{OF'}}\end{aligned}$$

$$\beta_2 \approx \tan\beta_2 = \frac{\overline{OK}}{\overline{KF_1'}} = \frac{\overline{OK}}{\overline{OF'}}$$

On donc:

$$\beta = \frac{\overline{KI}}{\overline{OF'}} + \frac{\overline{OK}}{\overline{OF'}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OF'}}$$

De plus:

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\overline{OI}}{\overline{AO}} \text{ (dans le triangle AOI)}$$

$$\alpha' \approx \tan\alpha' = \frac{\overline{OI}}{\overline{A'O}} \text{ (dans le triangle A'OI)}$$

On remplace dans l'équation $\alpha - \alpha' = \beta$:

$$\frac{\overline{OI}}{\overline{AO}} - \frac{\overline{OI}}{\overline{A'O}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OF'}}$$

On a donc bien:

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{f'}}$$

4.2) Formule de conjugaison avec origines aux foyers dits de Newton

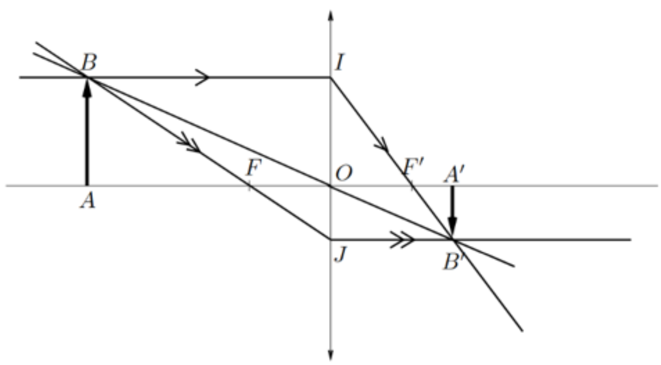


Figure 14: Formule de conjugaison de Newton

On place l'angle α. On se place dans les conditions de Gauss, donc:

$$\begin{aligned}\alpha \approx \tan\alpha &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} \text{ (dans le triangle ABF)} \\ &= \frac{\overline{OI}}{\overline{AF}} \\ &= \frac{\overline{OJ}}{\overline{OF}} \text{ (dans le triangle OJF)} \\ &= \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OF}}\end{aligned}$$

On a donc:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OF}} \Leftrightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{AF}}$$

On place l'angle β:

$$\begin{aligned}\beta \approx \tan\beta = \frac{\overline{OI}}{\overline{OF'}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{OF}} \text{ (dans le triangle OIF')} \\ = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'F'}} &= \frac{\overline{OJ}}{\overline{A'F'}} \text{ (dans le triangle F'A'B')}\end{aligned}$$

On a donc que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OF'}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'F'}} \Leftrightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'F'}}{\overline{OF'}}$$

Ce qui implique:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{OF}}{\overline{AF}} &= \frac{\overline{A'F'}}{o(OF')} \\ \Leftrightarrow \overline{OF} \cdot \overline{OF'} &= \overline{AF} \cdot \overline{A'F'} = \overline{FA} \cdot \overline{F'A'}\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = \overline{OF} \cdot \overline{OF'} = -f'^2}$$

4.3) Grandissement

Le grandissmenet γ est $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ par définition.
On a l'expression du grandissement avec origines aux foyers:

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{OF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AF'}}{\overline{OF'}}}$$

Expression avec origines aux centre:

$$\delta \approx \tan\delta$$

$$\tan\delta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AO}} \text{ (dans le triangle OAB)}$$

Et

$$\tan \delta = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'O}} \text{ (dans le triangle OA'B')}$$

On a donc:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'O}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'O}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

Donc:

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}}$$

5) Reconnaissance de la nature d'une lentille

Observation d'un objet lointain:
- Image renversée avec une lentille convergente
- Image virtuelle droite avec une lentille divergente

Observation d'un objet proche:
- Effet "loupe" avec une lentille convergente
- Image plus petite avec une lentille divergente

6) Construction d'un rayon transmis ou d'un rayon incident - Utilisation des foyers secondaires

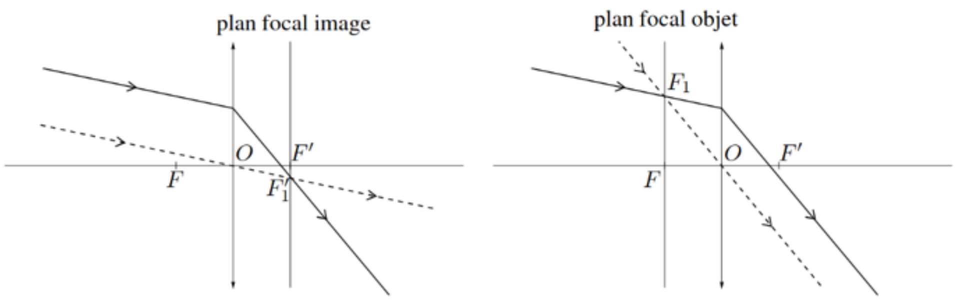


Figure 15: Obtention du rayon transmis par une lentille convergente

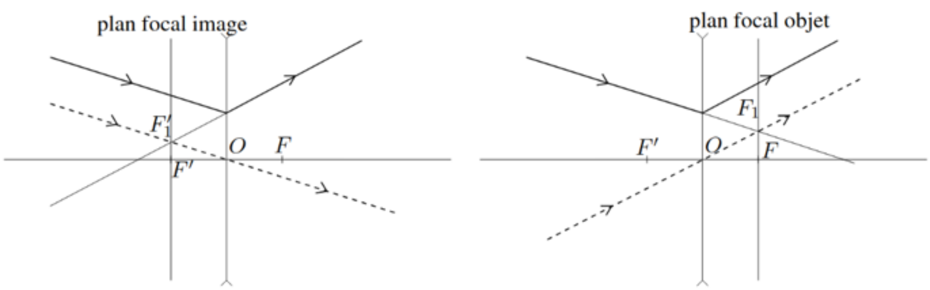


Figure 16: Obtention du rayon transmis par une lentille divergente

Pour construire un rayon transmis quelconque, on trace le rayon parallèle à celui-ci qui passe par le centre de la lentille.

Le rayon étudié passe forcément par l'intersection du rayon parallèle et du plan focal image.

On peut utiliser la même méthode avec le foyer objet. On place l'intersection du plan focal objet et du rayon incident, et on trace le rayon qui passe par cette intersection et par le centre de la lentille. Le rayon transmis est parallèle avec ce rayon.

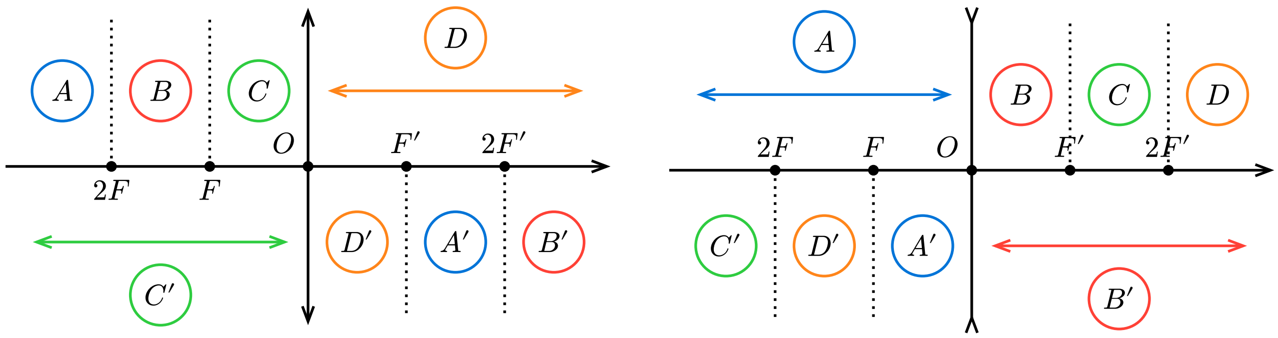
7) Projection d'une image à l'aide d'une lentille

Le problème posé est: «on a un objet, et l'objet en question, ça peut-être une observation, et vous voulez par exemple le projeter sur un écran, imaginez par exemple un petit objet et je veux vous la montrer et que tout le monde la voie»

On veut faire une projection pour récuperer une image réelle plus grande (ou plus petite) que l'objet utilisé.

On a un objet réel, on veut en faire une image réelle, avec des critères de grandissement qui peuvent changer (entre plus petit et plus grand).

7.1) Choix du type de lentille



On va utiliser une lentille convergente (seul moyen de faire réel → réel). On aura donc une image renversée.

7.2) Condition de projection d'un objet réel

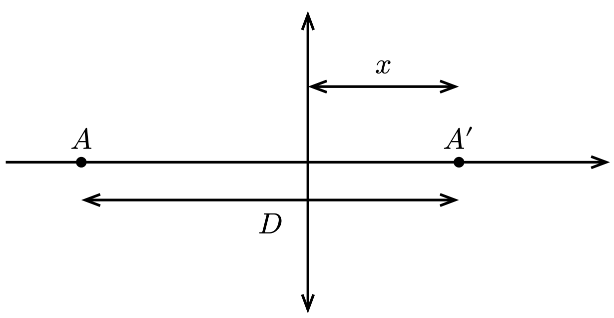
On a la relation de conjugaison:

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

On pose: $D = \overline{AA'}$ et $x = \overline{OA'}$.

On a une image réelle si et seulement si $x > 0$.

Où faut-il mettre la lentille entre les deux pour pouvoir conjuguer l'objet A avec son image A'



On a $\overline{OA} = \overline{OA'} + \overline{A'A} = x - D$

On veut déterminer la position de la lentille, donc on veut déterminer les

On a donc:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x - D} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{(x - D) - x}{x(x - D)} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{x(x - D)}{(x - D) - x} = f'$$

$$x(x - D) = f'((x - D) - x)$$

$$x(x - D) = f'(x - D) - f'x$$

D'où:

$$f'(x - D) - xf' = x(x - D)$$

$$f'x - f'D - xf' = x^2 - Dx$$

$$-f'D = x^2 - Dx$$

$$\boxed{x^2 - Dx + f'D = 0}$$

En résolvant l'équation pour x:

$$\Delta = D^2 - 4f'D$$

On aura des solutions réelles que si $\Delta \geq 0$. Interprétation physique: x est une distance, donc $x \in \mathbb{R}^+$.

$$D(D - 4f') \geq 0$$

On veut A objet réel et A' image réelle, donc $\overline{AA'} > 0$, donc $D > 0$. Pour que l'équation ait une solution réelle, il faut que $D \geq 4f'$.

7.3) Condition sur le grandissement

On suppose que la condition précédente est vérifiée ($D \geq 4f'$), et que par conséquent x est positif.

On a:

$$x_1 = \frac{D + \sqrt{D(D - 4f')}}{2} \qquad x_2 = \frac{D - \sqrt{D(D - 4f')}}{2}$$

On a $D \geq 0$, donc $\sqrt{D(D - 4f')} \geq 0$, donc $x_1 > x_2$.
x_1 est trivialement positif.
$\sqrt{D(D - 4f')} = \sqrt{D^2 - 4Df'} < \sqrt{D^2}$, donc x_2 est positif.

On a donc deux positions valides.

On définit le grandissement:

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

On connait déjà $\overline{OA'}$ (c'est x), mais il faut encore définir $\overline{OA}$:

$$\overline{OA} = \overline{OA'} + \overline{A'A} = x - D$$

On pose:

$$y_1 = \overline{OA} = x_1 - D = \frac{-D + \sqrt{D(D - 4f')}}{2}$$

$$y_2 = \overline{OA} = x_2 - D = \frac{-D - \sqrt{D(D - 4f')}}{2}$$

On a y_2 trivialement négatif, et par la même méthode qu'avant, y_1 est négatif aussi.

On a donc:

$$\gamma = \frac{x}{y}$$

Soit:

$$\gamma_1 = \frac{x_1}{y_1} = \frac{D + \sqrt{D(D - 4f')}}{-D + \sqrt{D(D - 4f')}}$$

$$\gamma_2 = \frac{x_2}{y_2} = \frac{D - \sqrt{D(D - 4f')}}{-D - \sqrt{D(D - 4f')}}$$

Dans les deux cas, on a un numérateur positif et un dénominateur négatif, donc on a toujours un grandissement négatif (image renversée).

On prend la valeur absolue (on prend l'opposé pour avoir une fraction positive):

$$|\gamma_1| = \frac{D + \sqrt{D(D - 4f')}}{D - \sqrt{D(D - 4f')}}$$

$$|\gamma_2| = \frac{D - \sqrt{D(D - 4f')}}{D + \sqrt{D(D - 4f')}}$$

On a donc: $|\gamma_1| > 1$ et $|\gamma_2| < 1$. Quand on a besoin d'aggrandir un objet, on utilisera donc la solution x_1, et quand on a besoin de réduire (téléscope), on utilisera x_2.

7.4) Choix de la lentille

On a besoin de $D \geq 4f'$, donc ne pas choisir une lentille avec une distance focale trop grande (sinon, le système optique ne rentrera pas sur le rail)

7.5) Problème de luminosité

Dû aux conditions de Gauss (et donc à la faible surface et taille de lentille utilisables), on risque de perdre beaucoup de lumière.

On utilisera éventuellement un condenseur.

8) Focométrie des lentilles

<u>Focométrie</u>: Détermination de la distance focale d'une lentille

Toutes les méthodes que l'on va énoncer ne fonctionnent que pour les lentilles convergentes.

8.1) Méthode des points conjugués

On prend un objet, on forme son image, on détermine donc $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$, et on utilise la relation de conjugaison pour récuperer la valeure de f'. On a:

$$f' = \frac{\overline{OA} \times \overline{OA'}}{\overline{OA} - \overline{OA'}}$$

8.2) Méthode de Silbermann

La méthode de Silbermann a pour but de former une image de même taille que l'objet. On pose un objet et une lentille sur notre axe optique, ainsi qu'un écran qu'on va bouger jusqu'a trouver une image de la même taille que l'objet.

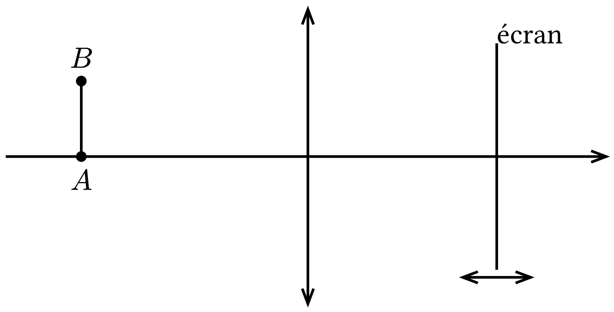


Figure 20: Méthode de Silbermann

On aura donc:

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -1$$

$$\Leftrightarrow \overline{OA'} = \overline{-OA}$$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

$$\Leftrightarrow f' = -\frac{\overline{OA}}{2} = \frac{\overline{OA'}}{2}$$

$$\boxed{f' = \frac{\overline{AA'}}{4}}$$

8.3) Méthode de Bessel

On utilise les formules de projection d'un objet réel vers une image réelle qu'on a démontré en Section 7.3.

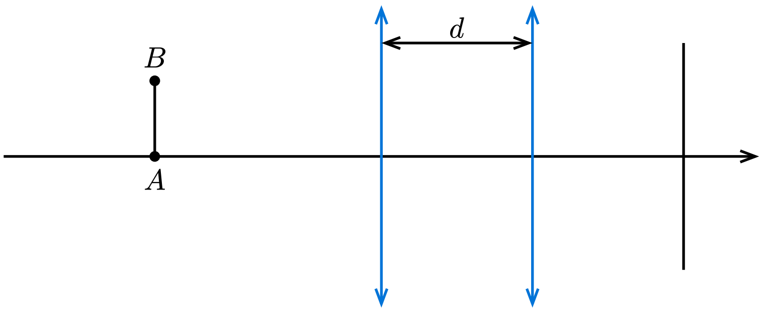


Figure 21: Méthode de Bessel

On place la lentille dans une des deux positions valides. On utilise la distance entre l'objet et son image pour calculer la distance focale.

On a donc:

$$x_1 = \frac{D + \sqrt{D(D - 4f')}}{2}$$

$$x_2 = \frac{D - \sqrt{D(D - 4f')}}{2}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} d &= x_1 - x_2 \\ &= \sqrt{D(D - 4f')} \end{aligned}$$

$$d^2 = D^2 - 4Df'$$

$$4Df' = D^2 - d^2$$

$$\boxed{f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}}$$

8.4) Méthode d'autocollimation

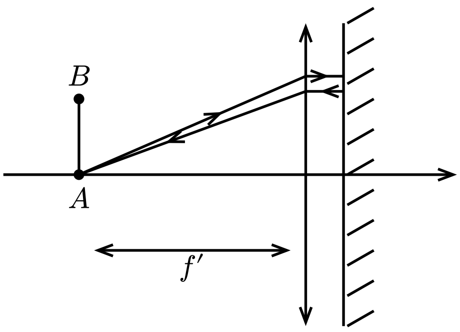


Figure 22: Méthode de Bessel

Méthode très pratique qui ne nécessite pas de faire des calculs numériques poussés. Elle présente aussi l'avantage d'être pratique en terme de réalisation. Elle nécéssite cependant un miroir plan.

On place un miroir plan derrière la lentille, et on va décaler les deux simultanéments. On va essayer d'obtenir la distance focale comme la distance entre l'objet et la lentille.

On a:

$$A \to \mathcal{L} \to A_1 \to m \to A_1' \to \mathcal{L}(\text{dans le sens inverse}) \to A'$$

On veut que A soit posé au foyer objet de la lentille, ce qui nous donnera donc:

$$F \to \mathcal{L} \to \infty \to m \to \infty \to \mathcal{L}(\text{dans le sens inverse}) \to F'_{\text{retour}}$$

On regarde sur le plan de l'objet si l'image s'est bien formée "à l'identique". Il suffit de mesurer la distance entre l'objet et la lentille pour obtenir la distance focale.