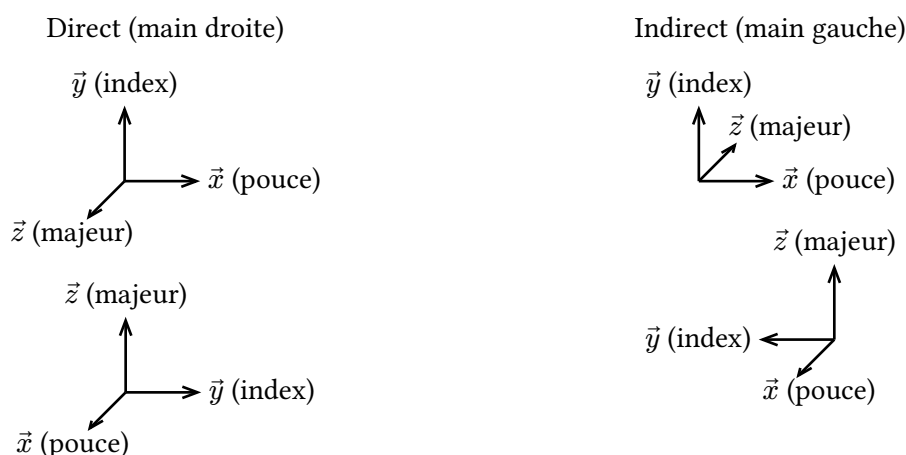


Complément Chapitre 2 - Le produit vectoriel

1. Orientation de l'espace	1
2. Produit vectoriel	1
3. Application au mouvement circulaire	2

I. Orientation de l'espace

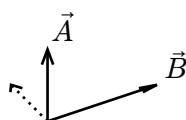
Deux bases possibles:



II. Produit vectoriel

On définit le produit vectoriel comme l'opérateur \wedge qui à deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} associent le vecteur $\vec{A} \wedge \vec{B}$ qui est:

- Si \vec{A} et \vec{B} ne sont pas colinéaires
 - Perpendiculaire au plan formé par (O, \vec{A}, \vec{B})
 - Tel que $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \wedge \vec{B})$ forme une base directe
 - De magnitude $\sin(\angle(\vec{A}, \vec{B})) \|\vec{A}\| \|\vec{B}\|$
- Si \vec{A} et \vec{B} sont colinéaires: $\vec{A} \wedge \vec{B} = 0$



Le produit vectoriel est anti-commutatif:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -(\vec{B} \wedge \vec{A})$$

Il est associatif/commutatif avec la multiplication externe (pour $k \in \mathbb{R}$):

$$(k\vec{A}) \wedge \vec{B} = \vec{A} \wedge (k\vec{B}) = k(\vec{A} \wedge \vec{B})$$

Il est distributif (à gauche et à droite) par rapport à l'addition:

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) + (\vec{A} \wedge \vec{C})$$

Calcul du produit vectoriel: Pour $\vec{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{B} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$,

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$$

Moyen mémotechnique: ça ressemble à la formule du déterminant, en utilisant les composants externes:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} y & y' \\ z & z' \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} x' & x \\ z' & z \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

⚠ Warn:

Attention à la ligne du milieu

Preuve: horrible

III. Application au mouvement circulaire

On introduit le vecteur rotation $\vec{\omega}$, avec $\|\omega\|$ la vitesse angulaire ω , et colinéaire à \vec{u}_z

On peut alors exprimer la vitesse: $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = r\omega\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = r\omega\vec{u}_\theta = \vec{v}$

1) Expression de l'accélération

On dérive:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge \overrightarrow{OM}) \\ &= \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{r} \wedge \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \\ &= \dot{\theta}\vec{u}_z \wedge R\vec{u}_r + \vec{r} \wedge \dot{\theta}\vec{u}_z \\ &= R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\theta}\vec{u}_z \wedge R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ &= R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{u}_r \end{aligned}$$

Dans le cas du mouvement circulaire uniforme, l'accélération est orthogonale à la vitesse:

$$\vec{a} = \vec{v} \wedge \vec{r}$$