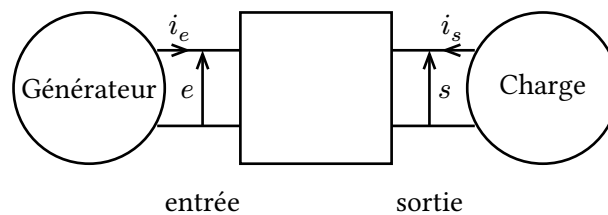


# Fonction de transfert - Diagramme de Bode - Filtre du 1<sup>er</sup> ordre

1. Fonction de transfert - Diagramme de Bode .....	1
2. Notion de filtrage .....	5
3. Filtre passif de premier ordre .....	7

## I. Fonction de transfert - Diagramme de Bode

### 1) Notion de quadripole



On peut définir la notion d'impédance d'entrée et d'impédance de sortie:

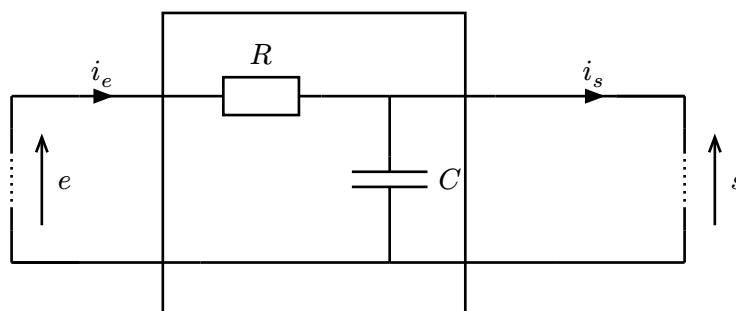
$$\underline{Z_e} = \frac{e}{i_e}$$

$$\underline{Z_s} = \frac{s}{i_s}$$

On va considérer qu'un quadripole se comporte comme une impédance en entrée, et une impédance en sortie.

Exemples de quadripoles:

- Le transformateur
- Un circuit  $R,C$ :



## 2) Fonction de transfert

**Fonction de transfert:** Dans un circuit en régime sinusoïdal forcé, c'est le rapport de la sortie sur l'entrée.

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

Elle est associée aux systèmes linéaires, qui nous permettent d'appliquer le principe de superposition.

**Principe de superposition:** Si on a  $e_1$  et  $e_2$  des tensions telles que:

$$e(t) = \lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t)$$

Alors:

$$s(t) = \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t)$$

Avec  $\underline{s}_1(t) = \underline{H} \underline{e}_1$  et  $\underline{s}_2(t) = \underline{H} \underline{e}_2$

**Système linéaire:** Les valeurs  $s$  et  $e$  doivent respecter un système d'équation linéaires:

$$\sum_k a_k \frac{d^k s}{dt^k} + \sum_l b_l \frac{d^l e}{dt^l} = f(t)$$

Or, on peut traduire ces équations linéaires en notation complexe:

$$\begin{aligned} \sum_k a_k (j\omega)^k \underline{s} + \sum_l b_l (j\omega)^l \underline{e} \\ = \underline{s} \sum_k a_k (j\omega)^k + \underline{e} \sum_l b_l (j\omega)^l \end{aligned}$$

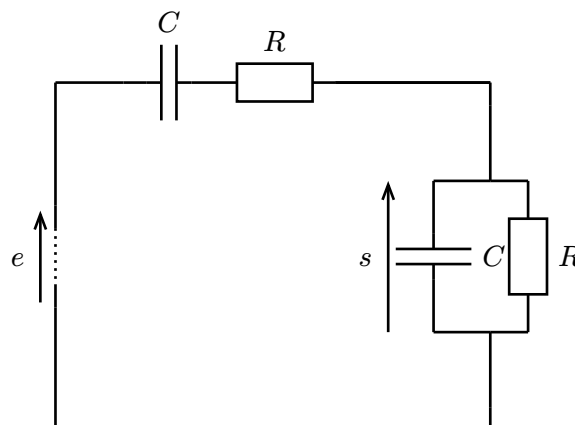
D'où la fonction de transfert dans un système linéaire:

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = - \frac{\sum_l b_l (j\omega)^l}{\sum_k a_k (j\omega)^k}$$

⚠ Warn:

Les carrés, les racines carrées, etc... ne s'inscrivent pas dans les systèmes linéaires!

## 3) Lien entre fonction de transfert et équation différentielle



$$\underline{s} = \underline{e} \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{jC\omega} + R = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}$$

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{\frac{R}{1+jRC\omega} + \frac{1+jRC\omega}{jC\omega}} \\ &= \frac{jRC\omega}{jRC\omega + (1 + jRC\omega)^2} \\ &= \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2} \end{aligned}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}$$

$$(1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2)\underline{s} = jRC\omega\underline{e}$$

On retrouve l'équation différentielle (on transforme les  $j\omega$  en dérivées premières,  $(j\omega)^2 = -\omega^2$  en dérivées secondes, etc...):

$$s + 3RC \frac{ds}{dt} + R^2C^2 \frac{d^2s}{dt^2} = RC \frac{de}{dt}$$

#### 4) Gain et phase de $\underline{H}$

On a donc  $\underline{H}$  notre fonction transfert.

On définit le gain  $G$  le module de la fonction de transfert, avec  $G = |\underline{H}|$ , et  $\varphi$  la phase de la fonction de transfert, avec  $\varphi = \arg(\underline{H})$

En général, on utilisera le gain en décibel:

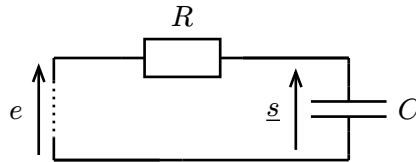
$$G_{dB} = 20 \log_{10}(G)$$

#### 5) Les deux tracés du diagramme de Bode

Le diagramme de Bode, c'est le tracé du gain en décibel, et de la phase, en fonction du  $\log_{10}(\omega) = \log_{10}(2\pi f)$

#### 6) Cas du circuit $R, C$

On a un circuit de la forme:



On a:

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_R} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R}$$

Donc:

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$G = |\underline{H}| = \frac{|\underline{s}|}{|1 + jRC\omega|}$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (RC\omega)^2}}$$

$$\begin{aligned} G_{\text{dB}} &= 20 \log_{10} G \\ &= 20 \log_{10}(1) - 20 \log_{10}(\sqrt{1 + (RC\omega)^2}) \\ &= -20 \log_{10}(\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}) \end{aligned}$$

On fait un diagramme asymptotique:

- À basses fréquences  $\Leftrightarrow \omega \rightarrow 0$ , on a

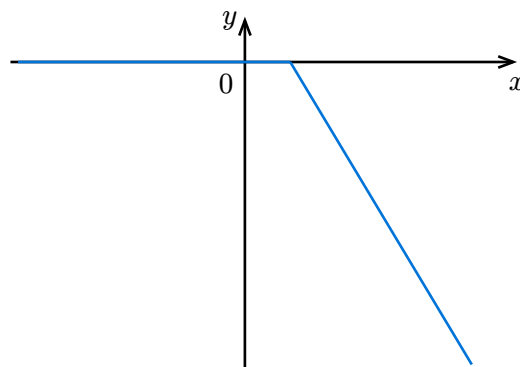
$$G_{\text{dB}} \rightarrow 0$$

- À hautes fréquences  $\Leftrightarrow \omega \rightarrow \infty$ , on a

$$G_{\text{dB}} \rightarrow -20 \log(RC\omega) = -20 \log(RC) - 20 \log(\omega)$$

On a une pente de  $-20 \text{ dB/décade}$

En traçant le diagramme de Bode correspondant:



On cherche l'intersection des asymptotes:

$$\begin{aligned}
0 &= -20 \log(RC) - 20 \log(\omega) \\
20 \log(RC) &= -20 \log(\omega) \\
20 \log\left(\frac{1}{RC}\right) &= 20 \log(\omega) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{RC} &= \omega
\end{aligned}$$

On cherche dorénavant le diagramme de bode.

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(1) - \arg(1 + jRC\omega) = 0 - \Psi$$

$$\Psi = \arg(1 + jRC\omega)$$

$$\begin{cases} \tan \Psi = \frac{RC\omega}{1} \\ \cos \Psi \text{ du signe du dénominateur donc } > 0 \end{cases}$$

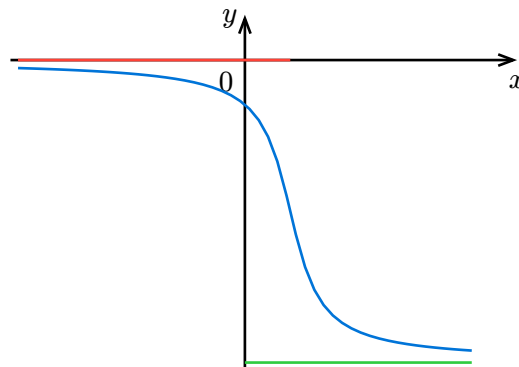
Donc

$$\Psi = \arctan(RC\omega)$$

$$\varphi = -\arctan(RC\omega)$$

- $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi \rightarrow 0$
- $\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

On a:



## II. Notion de filtrage

### 1) But du filtrage

Un filtrage permet de ne sélectionner qu'une partie des fréquences d'un signal.

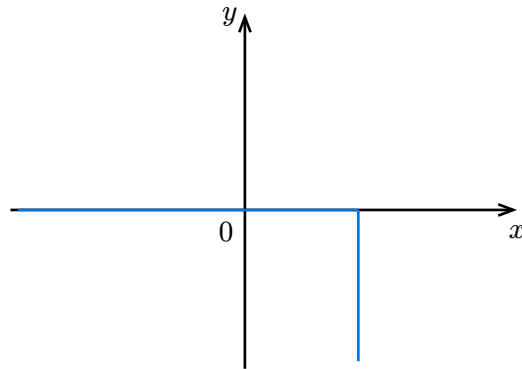
### 2) Bande passante

Définie à -3 dB par l'ensemble des  $\omega$  tels que  $G_{\text{dB}} \leq G_{\text{dB,max}}$  ou  $G(\omega) \geq \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$

**Bande passante:** ensemble des fréquences à garder

### 3) Filtres idéal

Un filtre est dit idéal si il a un gain de 1 pour les fréquences souhaité et 0 pour les autres.



### 4) Différent type de filtrage

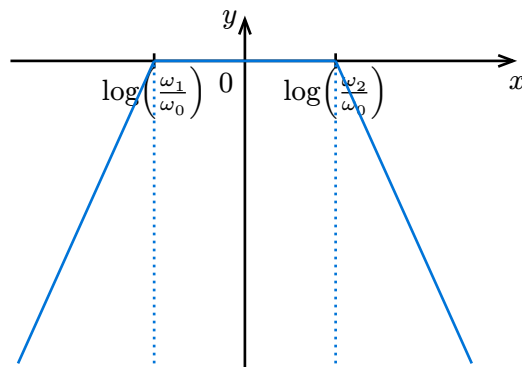
Il y a 2 types de filtrage commun:

**Filtre passe-bas:** Laisse passer les basses fréquences

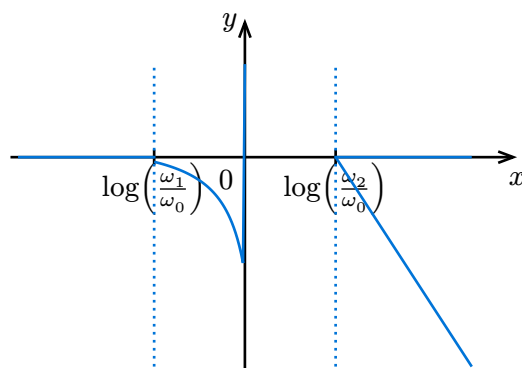
**Filtre passe-haut:** Laisse passer les hautes fréquences

On peut aussi trouver:

**Filtre passe-bande:** Ne laisse passer qu'une partie des fréquences:



**Filtre coupe-bande:** Laisse passer tout sauf une partie des fréquences:



On graphe les abscisses en fonction de  $\log(\frac{\omega_0}{\omega})$  afin de centrer le filtrage ainsi que normaliser la grandeur dans le log.

## 5) Ordre des filtres

---

**Ordre du filtre:** degré du polynome de  $\omega$  au dénominateur de la fonction de transfert (SI moment!)

### III. Filtre passif de premier ordre

#### 1) Définition

---

Les filtres passifs du premier ordre sont ceux faisant intervenir une puissance 1 de  $\omega$  au dénominateur de  $\underline{H}$ .

Cela revient à avoir une

#### 2) Filtre passe-bas

---

Le circuit  $R, C$  est un filtre passe bas.

##### a) Fonction de transfert

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Ou, sous sa forme canonique:

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

##### b) Étude du gain

##### c) Fréquence de coupure

$$G = |\underline{H}| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$G_{\text{dB}} = 20 \log |H_0| - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

On utilise la définition de la bande passante:

$$\frac{\omega}{G_{\text{dB}}(\omega)} \geq G_{\text{dB,max}} - 3 \text{ dB}$$

Ou:

$$G(\omega) \geq \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

Ici, on a:

- $G_{\text{max}} = |H_0|$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad G(\omega) &= \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \geq \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} \\
 \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 &\leq 2 \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 &\leq 1 \\
 \Leftrightarrow \omega &\leq \omega_0
 \end{aligned}$$

La bande passante de ce filtre est donc  $[0; \omega_0]$ .

Dans le cas des hautes fréquences, on a  $\omega \gg \omega_0$ . On a donc:

$$\underline{H} \approx \frac{H_0}{j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{H_0\omega_0}{j\omega} = \frac{s}{\underline{e}}$$

D'où:

$$j\omega s = H_0\omega_0 \underline{e}$$

$$\frac{ds}{dt} = H_0\omega_0 e(t)$$

$$s = \int H_0\omega_0 e(t) dt$$

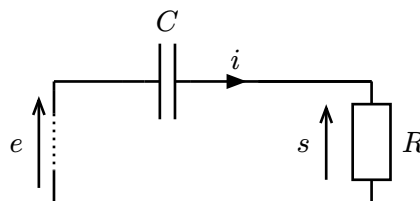
On observe donc un comportement intégrateur (à une constante multiplicatrice près) dans les hautes fréquences.

⚠ Warn:

Ce comportement n'est valide que si l'on a du  $j\omega$  au dénominateur.

### 3) Filtre passe haut

On inverse la place du condensateur et du résistor:



On applique un pont diviseur de tension:

$$\underline{s} = \underline{e} \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C}$$

D'où:

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{jR\omega C}{1 + jRC\omega}$$

On met la fonction de transfert sous forme canonique:



$$\underline{H} = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

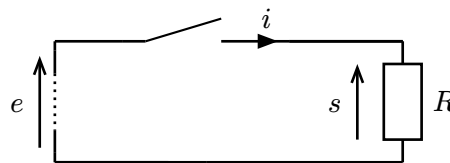
(Avec, ici,  $H_0 = 1$  et  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ )

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{H_0}{\frac{\omega_0}{j\omega} + 1} \\ &= \frac{H_0}{-j \frac{\omega}{\omega_0} + 1} \end{aligned}$$

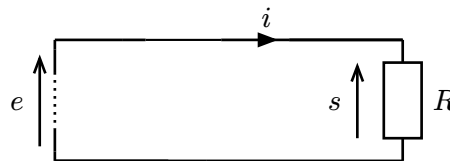
#### 4) Comportement asymptotique à haute et à basse fréquences

##### a) Basses fréquences

À basse fréquence, on apparente le condensateur à un interrupteur ouvert:



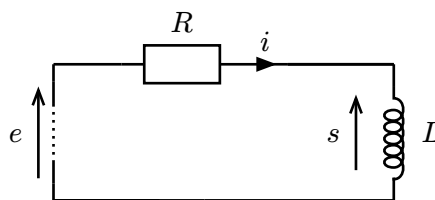
Et à haute fréquence, on apparente le condensateur à un fil:



On observe bien le comportement attendu (filtrage des basses fréquences).

Φ Note:

On peut remplacer le condensateur par une bobine dans l'autre circuit, ce qui nous donne le même comportement passe haut:



##### b) Fonction de transfert

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \\ &= \frac{H_0}{1 - j \frac{\omega_0}{\omega}} \end{aligned}$$

##### c) Étude du gain

$$G = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$\omega$  est croissante donc  $\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 + 1$  est décroissante.

On prend l'inverse à nouveau, donc  $G$  est croissante.

#### d) Diagramme asymptotique

- Quand  $\omega \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{\omega_0}{\omega} \rightarrow 0$ , donc  $G \rightarrow |H_0|$

$$\text{D'où: } G_{\text{dB}} = 20 \log(G) \rightarrow 20 \log|H_0|$$

On a une asymptote horizontale d'ordonnée  $20 \log|H_0|$ .

- Quand  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\frac{\omega_0}{\omega} \rightarrow +\infty$ ,  
Donc

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \approx \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} = \frac{\omega_0}{\omega}$$

On a

$$G = \frac{|H_0|}{\frac{\omega_0}{\omega}} = \omega \frac{|H_0|}{\omega_0}$$

D'où:

$$G_{\text{dB}} = 20 \log|H_0| + 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$$

On a une pente à +20 dB/decad.

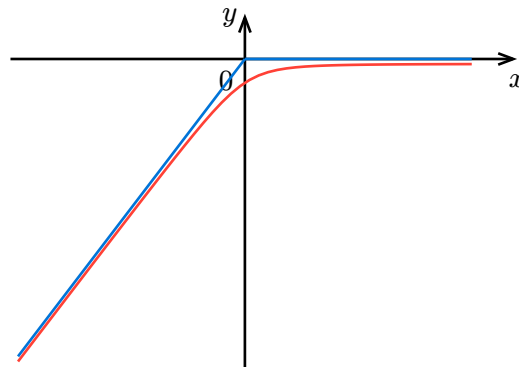
On cherche l'intersection des asymptotes:

$$20 \log|H_0| = 20 \log|H_0| + 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{\omega}{\omega_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega = \omega_0$$

On a donc:



#### e) Déphasage

$$\underline{H} = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{H_0}{1 - j \frac{\omega_0}{\omega}}$$

**i) Première méthode** On prend la première expression de  $\underline{H}$ :

On a:

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(H_0) + \arg\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

D'où:

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{si } H_0 > 0 \\ \pi & \text{si } H_0 < 0 \end{cases} + \frac{\pi}{2} - \Psi$$

Avec:

$$\tan \Psi = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{1} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$\cos \Psi$  est du signe de la partie réelle, donc  $> 0$ :

$$\Psi = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \begin{cases} 0 & \text{si } H_0 > 0 \\ \pm\pi & \text{si } H_0 < 0 \end{cases} + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) & \text{si } H_0 > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) & \text{si } H_0 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## ii) Deuxième méthode

On prend la deuxième expression de  $\underline{H}$ :

$$\varphi = \arg(H_0) - \arg\left(1 - j\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{si } H_0 > 0 \\ \pi & \text{si } H_0 < 0 \end{cases} - \Psi$$

$$\tan \Psi = -\frac{\omega_0}{\omega}$$

Avec  $\cos \Psi$  du signe de 1, donc positif, d'où:

$$\Psi = \arctan\left(-\frac{\omega_0}{\omega}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) & \text{si } H_0 > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) & \text{si } H_0 < 0 \end{cases}$$

### Φ Note:

Selon la méthode qu'on utilise, on arrive pas forcément à la même expression du déphasage. Cela dit, on doit trouver les mêmes variations et asymptotes.

## iii) Étude des variations

$\omega$  est croissant, donc  $\frac{\omega_0}{\omega}$  est décroissante.  
 $\arctan$  est croissante.

$\varphi$  est donc **décroissante**.

#### iv) Étude asymptotique

- Si  $H_0 > 0$ :
  - Si  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\frac{\omega_0}{\omega} \rightarrow +\infty$ , donc  $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$
  - Si  $\omega \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{\omega_0}{\omega} \rightarrow 0$ , donc  $\varphi \rightarrow 0$
- Si  $H_0 < 0$ :
  - Si  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\frac{\omega_0}{\omega} \rightarrow +\infty$ , donc  $\varphi \rightarrow \frac{3\pi}{2}$
  - Si  $\omega \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{\omega_0}{\omega} \rightarrow 0$ , donc  $\varphi \rightarrow \pi$

#### f) Bande passante

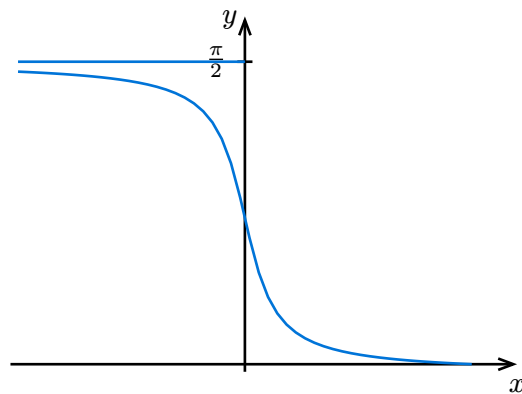
$$G_{\text{dB}} \geq G_{\text{dB,max}} - 3 \text{ dB}$$

Ou:

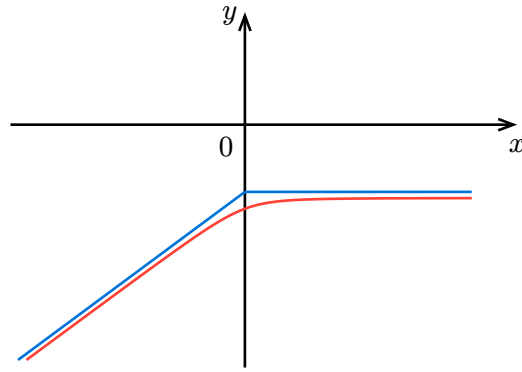
$$\begin{aligned} G(\omega) &\geq \frac{G_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} &\geq \frac{|H_0|}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 &\leq 2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \omega &\geq \omega_0 \end{aligned}$$

#### g) Diagramme de Bode

Si  $H_0 > 0$ :



Si  $|H_0| < 1$ :



### h) Comportement dérivateur

On a:

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}} = \underline{\underline{\frac{s}{e}}}$$

D'où, si  $\omega \ll \omega_0$ ,  $\frac{\omega_0}{\omega} \rightarrow +\infty$ , alors:

$$\underline{H} \approx \frac{H_0}{-j\frac{\omega_0}{\omega}} = \frac{H_0}{\frac{\omega_0}{j\omega}} = \underbrace{j\omega}_{\text{facteur de dérivation}} \frac{H_0}{\omega_0}$$

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \underline{H} \underline{e} \\ &= j\omega \underline{e} \frac{H_0}{\omega_0} = \frac{d\underline{e}}{dt} \frac{H_0}{\omega_0} \end{aligned}$$

On obtient la dérivée de l'entrée, si la condition sur la fréquence est remplie.

### 5) Quelques remarques sur les filtres du 1<sup>er</sup> ordre.

---

1. On ne peut pas obtenir de comportements de type passe-bande ou coupe-bande uniquement avec des filtres du premier ordre.
2. En regardant les asymptotes du filtre du premier ordre, on a des asymptotes diagonales à  $\pm 20$  db/decal. C'est l'écart de pente maximale atteignable avec le premier ordre. C'est aussi l'unité de « base » des filtres. Le  $n$ -ordre donnera des asymptotes de pente  $n20$  db/decal.
3. En regardant la phase, c'est la même chose, on a une variation de  $\frac{\pi}{2}$ .