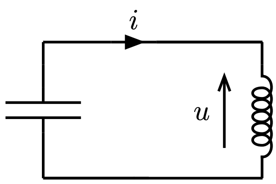
Circuit Linéaire du Second Ordre

I. Oscillations libres du circuit L, C

1) Circuit (L, C)

On utilise le circuit:



On commence avec C chargé par une tension.

C est en convention générateur, L est en convention récépteur.

On a:

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$i = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

On remplace pour obtenir une équation différentielle en une seule variable:

$$u = -LC\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t} \qquad\qquad i = -LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t}$$

On peut les écrires sous la forme:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0, \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

‼ Caution:
La forme exacte de l'équation est essentielle pour dire qu'il s'agit d'un oscillateur harmonique. Par exemple, une équation du type

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} - \omega_0^2 u = 0$$

N'est PAS un oscillateur harmonique.

2) Solution d'un oscillateur harmonique

Lorsqu'on est face à un oscillateur harmonique, on peut parachuter la forme de la solution, qui sera:

$$\begin{aligned} u(t) &= A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \\ &= U\cos(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

3) Conditions initiales

On a deux constantes à déterminer: (A, B) ou (U, φ), en utilisant les conditions initiales $u(0)$ et $u'(0)$ (solution d'un problème de Cauchy)

Pour obtenir les conditions initiales, on utilisera toujours les conditions de continuité.
Ici, comme on a deux conditions initiales à déterminer, il nous faudra deux conditions de continuité:
- La continuité de la tension aux bornes de C
- La continuité de l'intensité traversant I

4) Bilan énergétique

On repart des l'équadiffs originales:

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$i = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

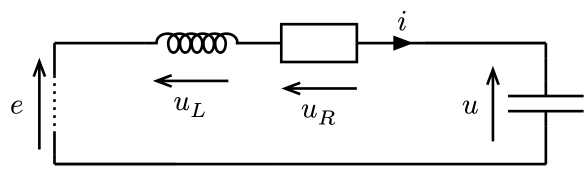
Pour obtenir une puissance, on peut soit multiplier la première par i, soit la deuxième par u:

$$\begin{aligned} u &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ ui &= Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}u &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) \\ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu^2\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2\right) &= 0 \end{aligned}$$

Donc échange d'énergie sans perte.

II. Circuit linéaires du second ordre

1) Circuit R, L, C en série



> Φ Note:
> On obtient un résultat similaire avec un circuit R, L, C en parallèle

On utilise un signal échelon:

$$e(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ E \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

On a:

$$\begin{aligned}
e &= u + u_R + u_L \\
&= u + Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\
&= u + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\
&= u + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}$$

On peut le laisser sous cette forme, ou tout diviser par LC:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u = \frac{1}{LC}e$$

On pose: $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. On obtient cette forme:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 e$$

Pour trouver Q, on identifie:

$$\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{Q\sqrt{LC}} \Leftrightarrow Q = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

2) Regime libre ou régime propre

Régime libre ou régime propre: régime se mettant en place en l'absence de source, c'est à dire quand $e = 0$, on s'intéressera donc uniquement à la description du régime transitoire.

3) Équation caractérisique - Trois types de régimes

Pour résoudre l'équadiff du second ordre qu'on obtient, on utilise l'équation caractéristique:

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

- Si $\Delta > 0$:
  On trouve deux solutions réelles à l'équation caractéristique.

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$$

$$r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$$

On a $u(t)$ de la forme $u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

> ✓ Tip:
> Le régime transitoire fini par disparaître: les exponentielles doivent tendre vers 0

$r_2 < 0$ de manière évidente. Pour r_1:

$$-\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q}\underbrace{\sqrt{1 - 4Q^2}}_{<1}$$

$\sqrt{1 - 4Q^2 < 1}$, donc $r_1 < 0$.

On appellera ce régime le régime **apériodique**.

Comme $\Delta > 0$, $\frac{1}{Q^2} - 4 > 0$, donc:

$$\frac{1}{Q^2} > 4 \Leftrightarrow \frac{1}{Q} > 2 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$$

Ainsi:

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

On verra ce régime avec un fort amortissement (grande résistance).

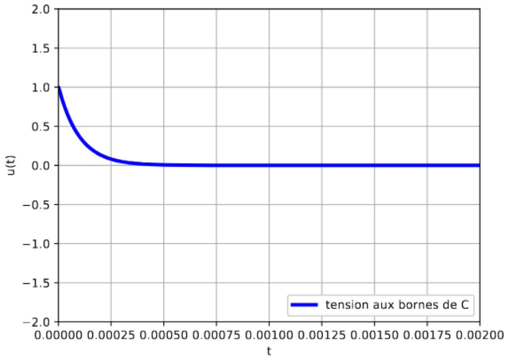


Fig. 3. – Simulation d'un régime apériodique

- Si $\Delta = 0$, $Q = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

  Cette situation sera peu commune, car l'égalite doît être rigoureuse.
  Dans ces conditions, on parlera de régime **critique**.
  C'est la limite entre les deux autres régimes.

  On a une solution réelle double:

  $$r_0 = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$$

  La solution est alors de la forme:

  $$u(t) = Ae^{r_0 t} + Bte^{r_0 t} = (A + Bt)e^{r_0 t}$$

  Le régime critique est le plus rapide dans le retour à zéro.

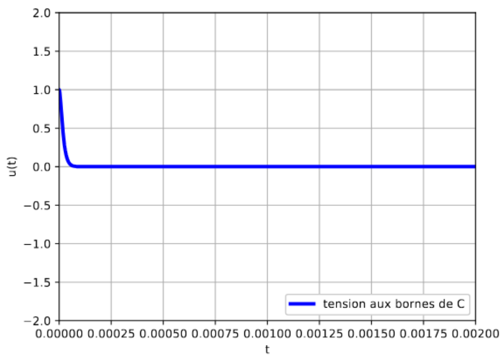


Fig. 4. – Simulation d'un régime critique

- Si $\Delta < 0$,

  $$Q > \frac{1}{2} \Leftrightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

  On a deux solutions complexes conjuguées:

  $$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\omega_0}{2}\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}}$$

$$\boxed{u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}}$$

Φ Note:
On cherche des solutions réelles. On va donc directement écrire $u(t)$ avec des cos et des sin

$$u(t) = (U_1 \cos(\omega t) + U_2 \sin(\omega t))e^{-t\frac{\omega_0}{2Q}}$$
$$\text{avec } \omega = \frac{\omega_0}{2}\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}} = \frac{\omega_0\sqrt{4Q^2 - 1}}{2Q}$$
$$\text{ou } u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)e^{-t\frac{\omega_0}{2Q}}$$

✓ Tip:
Pour la forme de la solution: la partie réelle des solutions complexes détermine l'amortissement, la partie complexe détermine la période.

On appellera ω la **pseudo-pulsation**, et ce régime **pseudo-périodique**.

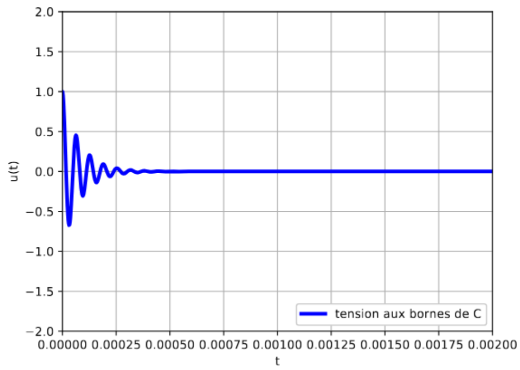


Fig. 5. – Simulation d'un régime pseudo-périodique

On peut ainsi calculer la **pseudo-période**:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi Q}{\omega_0\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

Pour qualifier la baisse d'amplitude avec le temps, on définit le décrément logarithmique:

$$\delta = \ln\left(\frac{u(t + nT)}{u(t + (n+1)T)}\right) = \frac{1}{N}\ln\left(\frac{u(t + nT)}{u(t + (n+N)t)}\right)$$

Φ Note:
On calcule la valeur d'avant sur la valeur d'après: on mesure la décroissance.

On reprend la forme $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)e^{-t\frac{\omega_0}{2Q}}$:

$$\begin{aligned}\delta &= \ln\left(\frac{u(t+nT)}{u(t+(n+1)T)}\right)\\ &= \ln\left(\frac{U\cos(\omega(t+nT)+\varphi)e^{-(t+nT)\frac{\omega_0}{2Q}}}{U\cos(\omega(t+(n+1)T))e^{-(t+(n+1)T)\frac{\omega_0}{2Q}}}\right)\end{aligned}$$

Les cosinus sont pris à une période d'écart, et sont donc égaux:

$$\begin{aligned}\delta &= \ln\left(\frac{\exp\left(-(t+nT)\frac{\omega_0}{2Q}\right)}{\exp\left(-(t+(n+1)T)\frac{\omega_0}{2Q}\right)}\right)\\ &= \ln\left(\exp\left(-(t+nT)\frac{\omega_0}{2Q}+(t+(n+1)T)\frac{\omega_0}{2Q}\right)\right)\\ &= \frac{\omega_0}{2Q}(-t-nT+t+nT+T)\\ &= \frac{\omega_0}{2Q}T = \frac{\omega_0}{2Q}\frac{4\pi Q}{\omega_0\sqrt{4Q^2-1}}\\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}\end{aligned}$$

Le régime pseudo-périodique est obtenu dans le cas d'un faible amortissement,
soit quand $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.
Si $R \ll 2\sqrt{\frac{L}{C}} \Leftrightarrow Q \gg \frac{1}{2}$
Quand $Q \to \infty$, $\delta \to 0$ et $T \approx T_0$. Plus l'amortissement est petit,
plus on s'approche d'un vrai régime périodique.

4) Réponse à un échelon de tension

On a pour l'instant résolu l'équadiff dans le régime libre.

Si on applique un échelon de tension, on tend juste vers un régime permanent de tension différente.

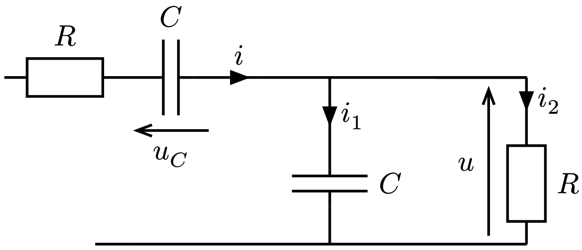
5) Aspects énergétiques

On repart de l'équation différentielle:

$$\begin{aligned}e &= u + u_R + u_L\\ ei &= ui + Rii + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}i\\ ei &= uC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Ri^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)\\ ei &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + Ri^2\end{aligned}$$

Une partie est stockée dans la capacité, une partie est stockée dans la bobine, et une partie part en effet Joule dans la résistance.

6) Un exemple: le pont de Wien



a) Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u

$$i = i_1 + i_2$$

$$i_1 = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$i_2 = \frac{u}{R}$$

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{c}$$

$$e = u + Ri + u_C$$

On dérive:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} \\
&= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_1 + i_2) + \frac{i_1 + i_2}{C} \\
&= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R}\right) + \frac{1}{C}\left(C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + RC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{RC}
\end{aligned}$$

Donc:

$$RC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{RC} = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$$

b) L'écrire sous forme canonique. Donner les expressions de ω_0 et Q en fonction de R, C

On met sous forme canonique:

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{RC}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R^2C^2}u = \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{R^2C^2} \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{3}{RC} \Leftrightarrow Q = \frac{1}{3}$$

Le circuit sera toujours apériodique car $Q < \frac{1}{2}$, on a donc un fort amortissement (logique car dans un RLC série, $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$).