

# Cinématique

## Table des matières

1) Description cinématique .....	1
2) Expression de la vitesse et de l'accélération .....	2
3) Exemples de mouvements .....	4
4) Caractère relatif du mouvement - Changement de référentiel .....	6

## 1) Description cinématique

### 1.1) Référentiel et temps absolu

---

**Référentiel:** Un repère pour se repérer dans l'espace, et une horloge pour mesurer le temps.

△ **Warn:**

La base peut-être variable. Ce qui compte, c'est l'observateur.  
Par exemple, la Terre, ou un vélo.

### 1.2) Position, équations horaires, trajectoires

---

**Position:** Le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  d'un point. On peut bien sûr l'écrire dans n'importe quelle base:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= x(t)\overrightarrow{u_x} + y(t)\overrightarrow{u_y} + z(t)\overrightarrow{u_z} \\ &= r(t)\overrightarrow{u_r} + \theta(t)\overrightarrow{u_\theta} + z(t)\overrightarrow{u_z} \\ &= r(t)\overrightarrow{u_r} + \theta(r)\overrightarrow{u_\theta} + \varphi(t)\overrightarrow{u_\varphi}\end{aligned}$$

**Équations horaires:** Système d'équations décrivant l'évolution de la vitesse par rapport au temps:

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \text{ en cartésien, } \begin{cases} r(t) \\ \theta(t) \\ z(t) \end{cases} \text{ en cylindrique, } \begin{cases} r(t) \\ \theta(t) \\ \varphi(t) \end{cases} \text{ en sphérique}$$

**Équations de trajectoire:** Système d'équations indépendantes du temps décrivant la trajectoire d'un point.

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= 0 \text{ en cartésien} \\ g(r, \theta, z) &= 0 \text{ en cylindrique} \\ h(r, \theta, \varphi) &= 0 \text{ en sphérique}\end{aligned}$$

On cherchera en général à obtenir les équations de trajectoire avec les équations horaires.

### 1.3) Vitesse

---

**Vitesse:** Le vecteur vitesse  $\overrightarrow{v}_R(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$  (avec  $R$  le référentiel)

## 1.4) Accélération

---

**Accélération:** Le vecteur accélération  $\overrightarrow{a_{/R}}(M) = \frac{d\overrightarrow{v_{/R}}(M)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$

## 2) Expression de la vitesse et de l'accélération

### 2.1) Coordonnées cartésiennes

---

On a:

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\overrightarrow{u_x} + y(t)\overrightarrow{u_y} + z(t)\overrightarrow{u_z}$$

Pour récupérer les coordonnées de la dérivée, on peut dériver les coordonnées du vecteur position individuellement (car les coordonnées de la base ne dépendent pas du temps)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_{/R}}(M) &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \\ &= \frac{dx}{dt}\overrightarrow{u_x} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{u_y} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z} \\ &= \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}\end{aligned}$$

On remarque que  $d\overrightarrow{OM}$  est le déplacement élémentaire. La vitesse est un déplacement élémentaire effectué pendant un intervalle de temps infinitésimal.

De même:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_{/R}}(M) &= \frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{u_x} + \frac{d^2y}{dt^2}\overrightarrow{u_y} + \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{u_z} \\ &= \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}\end{aligned}$$

### 2.2) Coordonnées cylindriques

---

On utilise le déplacement élémentaire:

$$d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{u_r} + r d\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z}$$

⚠ Warn:

Si on utilise cette méthode de démonstration pour la dérivée de la vitesse, il faut redémontrer le déplacement élémentaire (voir Chapitre 1)

Pour obtenir la vitesse, on divise par  $dt$ :

$$\overrightarrow{v_{/R}}(M) = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$$

Sinon, on peut partir directement du vecteur position, et on le dérive:

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}$$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z} \text{ (on ne met pas de } \frac{d\overrightarrow{u_z}}{dt} \text{ car le vecteur } z \text{ ne change pas)}$$

On a:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}_r}{dt} &= \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \\ &= \vec{u}_\theta \frac{d\theta}{dt} = \vec{u}_\theta \dot{\theta}\end{aligned}$$

⚠ Warn:

Démonstration à faire sur copie, on l'a déjà faite au Chapitre 1

D'où:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

Pour l'accélération, on dérive à nouveau:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z) \\ &= \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\vec{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{u}}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z \\ &= \vec{u}_r(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + \vec{u}_\theta(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) + \ddot{z}\vec{u}_z\end{aligned}$$

## 2.3) Coordonnées sphériques

On va récupérer la vitesse avec le déplacement élémentaire (et on va pas tout dériver parce que 🧠)

On a:

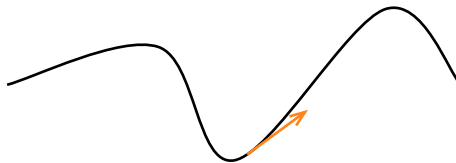
$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$$

## 2.4) Coordonnées intrinsèques = Base de Fresnel

La vitesse est sur le vecteur tangent (car la vitesse est tangente à la trajectoire):

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{u}_t$$

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{u}_t + \dot{s}\dot{\vec{u}}_t$$



On a:

$$\frac{d\vec{u}_t}{dr} = \vec{u}_n$$

Avec  $dr$  l'angle sur le cercle approximant la trajectoire localement (courbure)

$$\kappa = \frac{\det(\vec{v}, \vec{a})}{\|\vec{a}\|^3}$$

$$\frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{d\vec{u}_t}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \vec{u}_r \frac{1}{R} \frac{ds}{dt}$$

Avec  $d\alpha = \frac{ds}{R}$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d^2s}{dt^2} \vec{u}_t + \frac{ds}{dt} \vec{u}_r \frac{ds}{dt} \frac{1}{R} \\ &= \ddot{s} \vec{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{R} \vec{u}_r\end{aligned}$$

Dans une trajectoire circulaire:

$$\vec{u}_t = \vec{u}_\theta$$

$$\vec{u}_r = -\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}$$

$$\dot{s} = v$$

$$\ddot{s} = \frac{dv}{dt}$$

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt} \vec{u}_\theta}_2 - \underbrace{\frac{v^2}{R} \vec{u}_r}_1$$

On dit aussi les coordonnées de Fresnel en fait c'est des coordonnées polaires:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$$

Si on est sur une trajectoire circulaire:

$$r = R$$

$$\vec{a} = \underbrace{-R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r}_1 + \underbrace{R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta}_2$$

On identifie entre 1 et 2

### 3) Exemples de mouvements

#### 3.1) Mouvement rectiligne

---

Mouvement le long d'une droite.

$$\overrightarrow{OM} = x(t) \vec{u}_x$$

Attention au piège «Mouvement rectiligne sinusoïdale»:

C'est que

$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x} \vec{u}_x$$

$$\dot{x} = -\omega X \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 X \cos(\omega t + \varphi)$$

### 3.2) Mouvement à accélération constante

---

On a  $\vec{a}$  un vecteur constant qu'on note  $\vec{a}_0$ .

On a donc:

$$\vec{v} = \int \vec{a} = \vec{a}_0 t + \vec{v}_0$$

Si  $\vec{v}_0$  et  $\vec{a}_0$  sont colinéaires, on aura une trajectoire rectiligne (dans l'axe de  $\vec{a}_0$  et  $\vec{v}_0$ ).

Sinon, on se déplacera dans le plan défini par ces deux vecteurs.

### 3.3) Mouvements uniforme, accéléré, décéléré

---

Un mouvement est dit:

- **Uniforme**: si le module de la vitesse reste constant
- **Accéléré**: si le module de la vitesse est croissant
- **Décéléré**: si le module de la vitesse est décroissant

Dans le cas rectiligne:

- Si le mouvement est uniforme,  $\vec{v}$  aura une direction et une magnitude constante, donc l'accélération sera nulle
- Si le mouvement est accéléré, l'accélération est dans le même sens que le vecteur vitesse ( $\vec{a} \cdot \vec{v} = \|\vec{a}\|\|\vec{v}\| > 0$ )
- Si le mouvement est décéléré, l'accélération est opposé au vecteur vitesse ( $\vec{a} \cdot \vec{v} = \|\vec{a}\|\|\vec{v}\| < 0$ )

### 3.4) Mouvement circulaire

---

Avec une trajectoire circulaire, on est dans un plan. On utilise les coordonnées polaires.

En prenant le centre du cercle comme centre de la trajectoire, on a l'équation de trajectoire:

$$r = R$$

On connaît les expressions de  $\vec{v}$  et  $\vec{a}$ :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

Or:

$$r = R \Rightarrow \dot{r} = 0 \text{ et } \ddot{r} = 0$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Mouvement circulaire uniforme: On a  $\|\vec{v}\| = c$  avec  $c$  une constante, donc:

$$R|\dot{\theta}| = c$$

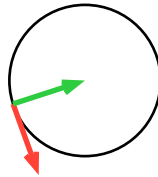
$$|\dot{\theta}| = \frac{c}{R}$$

$$\dot{\theta} = \frac{c}{R} \text{ par continuité}$$

Donc  $\ddot{\theta} = 0$ , donc:

$$\vec{a} = \underbrace{-R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r}_{\text{constant}}$$

On aura une accélération « centripète » constante:



#### 4) Caractère relatif du mouvement - Changement de référentiel