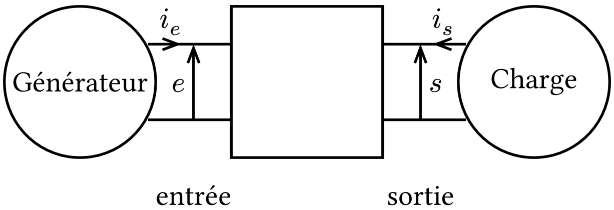
Fonction de transfert - Diagramme de Bode - Filtre du 1er ordre

Table des matières

1) Fonction de transfert - Diagramme de Bode

1.1) Notion de quadripole



On peut définir la notion d'impédance d'entrée et d'impédance de sortie:

$$\underline{Z_e} = \frac{\underline{e}}{\underline{i_e}}$$

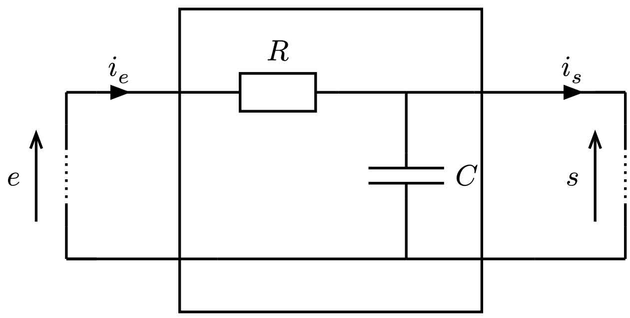
$$\underline{Z_s} = \frac{\underline{s}}{\underline{i_s}}$$

Impédance d'entrée:

Impédance de sortie:

On va considérer qu'un quadripole se comporte comme une impédance en entrée, et une impédance en sortie.

Exemples de quadripoles:
- Le transformateur
- Un circuit R,C:



R
i_e
i_s
e
C
s

1.2) Fonction de transfert

Fonction de transfert: Dans un circuit en régime sinusoïdal forcé, c'est le rapport de la sortie sur l'entrée.

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

Elle est associée aux système linéaires, qui nous permettent d'appliquer le principe de superposition.

Principe de superposition: Si on a e_1 et e_2 des tensions telles que:

$$e(t) = \lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t)$$

Alors:

$$s(t) = \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t)$$

Avec $\underline{s_1}(t) = \underline{H}\underline{e_1}$ et $\underline{s_2}(t) = \underline{H}\underline{e_2}$

Système linéaire: Les valeurs s et e doivent respecter un système d'équation linéaires:

$$\sum_k a_k \frac{\mathrm{d}^k s}{\mathrm{d}t^k} + \sum_l b_l \frac{\mathrm{d}^l e}{\mathrm{d}t^l} = f(t)$$

Or, on peut traduire ces équation linéaire en notation complexe:

$$\sum_k a_k (j\omega)^k \underline{s} + \sum_l b_l (j\omega)^l \underline{e}$$

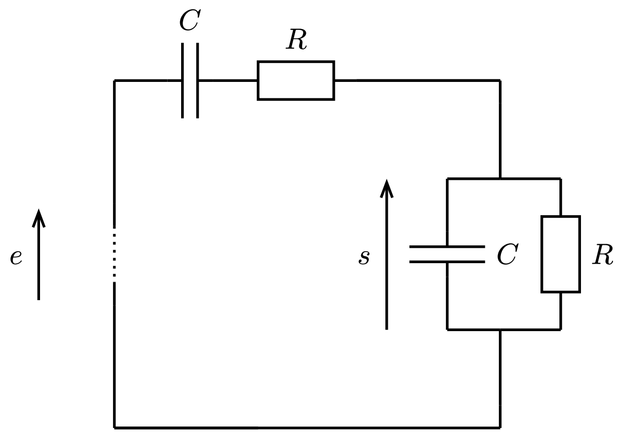
$$= \underline{s} \sum_k a_k (j\omega)^k + \underline{e} \sum_l b_l (j\omega)^l$$

D'où la fonction de transfert dans un système linéaire:

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = -\frac{\sum_l b_l (j\omega)^l}{\sum_k a_k (j\omega)^k}$$

⚠ Warn:
Les carrés, les racine carrés, etc… ne s'inscrivent pas dans les systèmes linéaires!

1.3) Lien entre fonction de transfert et équation différentielle



$$\underline{s} = \underline{e}\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$$

$$\underline{Z_1} = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

$$\underline{Z_2} = \frac{1}{jC\omega} + R = \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}$$

$$\begin{aligned}\underline{H} &= \frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{\frac{R}{1+jRC\omega} + \frac{1+jRC\omega}{jC\omega}} \\ &= \frac{jRC\omega}{jRC\omega + (1 + jRC\omega)^2} \\ &= \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}\end{aligned}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{jRC\omega}{1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}$$

$$(1 + 3jRC\omega - R^2C^2\omega^2)\underline{s} = jRC\omega\underline{e}$$

On retrouve l'équation différentielle (on transforme les $j\omega$ en dérivées premières, $(j\omega)^2 = -\omega^2$ en dérivées secondes, etc...):

$$\boxed{s + 3RC\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + R^2C^2\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = RC\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}}$$

1.4) Gain et phase de $\underline{H}$

On a donc $\underline{H}$ notre fonction transfert.
On définit le gain G le module de la fonction de transfert, avec $G = |\underline{H}|$, et φ la phase de la fonction de transfert, avec $\varphi = \arg(\underline{H})$

En général, on utilisera le gain en décibel:

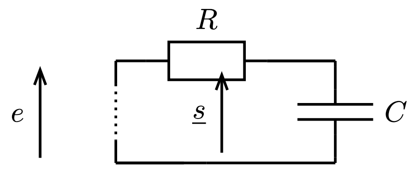
$$G_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}(G)$$

1.5) Les deux tracés du diagramme de Bode

Le diagramme de Bode, c'est le tracé du gain en décibel, et de la phase, en fonction du $\log_{10}(\omega) = \log_{10}(2\pi f)$

1.6) Cas du circuit R, C

On a un circuit de la forme:



On a:

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_R} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R}$$

Donc:

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$G = |\underline{H}| = \frac{|\underline{s}|}{|1 + jRC\omega|}$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (RC\omega)^2}}$$

$$G_{\text{dB}} = 20 \log_{10} G$$
$$= 20 \log_{10}(1) - 20 \log_{10}\left(\sqrt{1 + (RC\omega)^2}\right)$$
$$= -20 \log_{10}\left(\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}\right)$$

On fait un diagramme asymptotique:

- À basses fréquences $\Leftrightarrow \omega \to 0$, on a

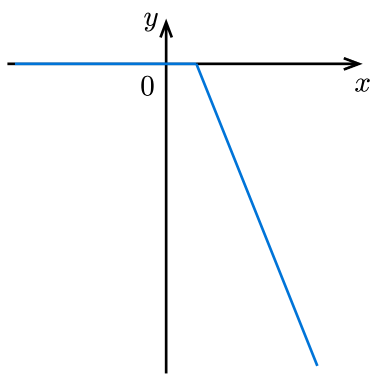
$$G_{\text{dB}} \to 0$$

- À hautes fréquences $\Leftrightarrow \omega \to \infty$, on a

$$G_{\text{dB}} \to -20 \log(RC\omega) = -20 \log(RC) - 20 \log(\omega)$$

On a une pente de $-20\ \text{dB/décade}$

En traçant le diagramme de Bode correspondant:



On cherche l'intersection des asymptotes:

$$0 = -20 \log(RC) - 20 \log(\omega)$$
$$20 \log(RC) = -20 \log(\omega)$$
$$20 \log\left(\frac{1}{RC}\right) = 20 \log(\omega)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{RC} = \omega$$

On cherche dorénavant le diagramme de bode.

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(1) - \arg(1 + jRC\omega) = 0 - \Psi$$

$$\Psi = \arg(1 + jRC\omega)$$

$$\begin{cases} \tan \Psi = \frac{RC\omega}{1} \\ \cos \Psi \text{ du signe du dénominateur donc} > 0 \end{cases}$$

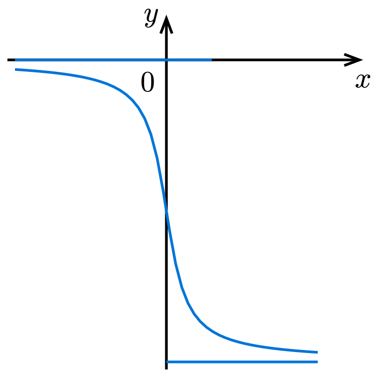
Donc

$$\Psi = \arctan(RC\omega)$$

$$\varphi = -\arctan(RC\omega)$$

- $\omega \to 0 \Rightarrow \varphi \to 0$
- $\omega \to +\infty \Rightarrow \varphi \to -\frac{\pi}{2}$

On a:



2) Notion de filtrage

2.1) But du filtrage