Régimes Transitoires

I. Régime continu ou variable - Régime transitoire ou permanent

1) Régime continu ou variable

Dans un régime continu, les différentes grandeurs du circuit sont constantes au cours du temps.

À l'inverse, dans un régime variable, les différentes grandeurs du circuit peuvent varier au cours du temps.

2) Régime transitoire ou permanent

> ⚠ Warn:
> Régime transitoire ≠ Régime permanent/stationnaire

Dans un régime permanent/stationnaire, les **caractéristiques** des grandeurs sont constantes.

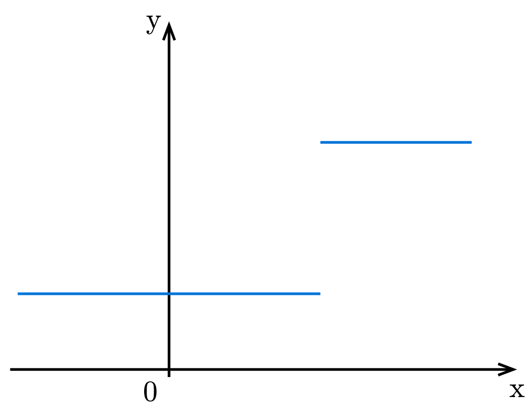
Par exemple, un signal électrique sinusoïde (ou carré, ou triangle, ou sawtooth...) dans un circuit électrique peut-être considéré comme un régime stationnaire/permanent si ses caractéristiques (amplitude, fréquence, phase) sont constantes au cours du temps.

Dans un régime transitoire, le circuit finira par « disparaître ». Quelque chose devra tendre vers 0 (Ex: un capaciteur se décharge).

3) Limitation dans ce chapitre

Dans ce chapitre, on s'intéressera aux régimes continus comme régimes stationnaires.

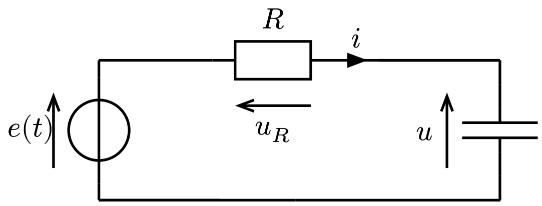
C'est à dire aux cas où un régime continu passera vers un autre régime continu, avec un échelon de tension/intensité.



II. Régime transitoire d'un circuit R,C du 1^{er} ordre - Charge et décharge d'un condensateur

1) Équation différentielle

Le circuit R,C de premier ordre correspond simplement à prendre un condensateur, une résistance et un générateur et à les mettre en série:



On a: (loi des mailles, loi des nœuds, caractéristique d'un condensateur et d'une résistance):

- Caractéristique d'une résistance:

$$u_R = Ri$$

- Caractéristique d'un condensateur:

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

- Loi des mailles:

$$e = u_R + u \Leftrightarrow e = Ri + u$$

En substituant i:

$$e = RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u$$

On obtient une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec second membre:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u = \frac{e}{RC}} \qquad \text{Eq. 1}$$

On pose un échelon de tension:

$$e(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ E \text{ pour } t > 0 \end{cases}$$

On cherche $u(t)$ pour $t > 0$.

2) Résolution

On a une équadiff du 1er ordre à coefficients constants et un 2nd membre non nul.

$$u(t) = u_H(t) + u_p(T)$$

Avec u_H la solution de l'équadiff homogène associée et u_p une solution particulière cherchée de la même forme que $e(t)$ (qui ici est constante).

Ici, les solutions de l'équadiff homogène associée sont ($U \in \mathbb{R}$):

$$u_H(t) = Ue^{\frac{-t}{RC}}$$

On cherche u_p sous la forme d'une constante:

$$u_p(t) = V$$

Donc:

$$\frac{\mathrm{d}u_p}{\mathrm{d}t} = 0$$

Donc d'apres Eq. 1:

$$0 + \frac{u_p}{RC} = \frac{E}{RC}$$

$$\boxed{u_p(t) = E}$$

D'où l'ensemble des solutions pour u:

$$\boxed{u(t) = E + Ue^{-\frac{t}{RC}}}$$

On cherche maintenant la tension initiale U, c'est à dire les conditions initiales du circuit:

$$u(0) = U_0$$

On utilise la continuité de la tension aux bornes de C. On sait que l'énergie stockée dans C est $\mathcal{E} = \frac{1}{2}Cu^2$.
Or C est une constante et l'énergie est continue, donc $u(t)$ est continue.

On va faire l'hypothèse que C est déchargé au début. On a donc: $u(0^-) = 0$.
Par continuité de u aux bornes de C, $u(0^+) = u(0^-) = 0$.
Or on a: $u(0^+) = E + U = 0$
D'où: $U = -E$

$$\boxed{u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

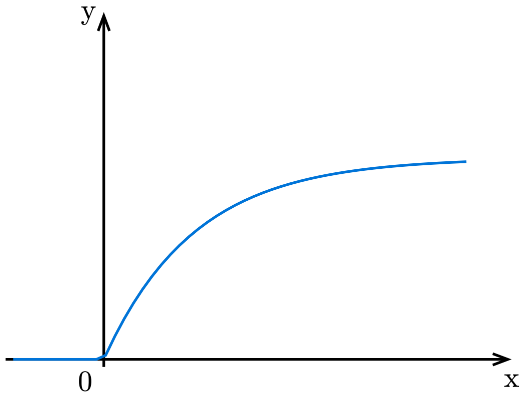
3) Interprétation de la solution

$$u(t) = u_p(t) + u_H(t)$$

Avec $u_p(t) = E$ et $u_H(t) = -Ee^{-\frac{t}{RC}}$

On voit que u_p va rester constant, ce qui traduit un régime permanent, ici continu.
On voit que u_H va tendre vers zéro, ce qui traduit un régime transitoire.

Notre signal à donc une forme:



On pourra donc considérer:
- Un régime permanent au début
- Un régime transitoire de « transition »
- Un régime permanent jusqu'en $+\infty$

Comme notre exponentielle ne touche techniquement jamais le bout de la courbe, il faut déterminer à partir de quand on considère que on est passé en régime permanent.

4) Intensité du courant

On a:

$$u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

On dérive:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= -E\left(-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\right) \\ &= \frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\end{aligned}$$

On substitut dans:

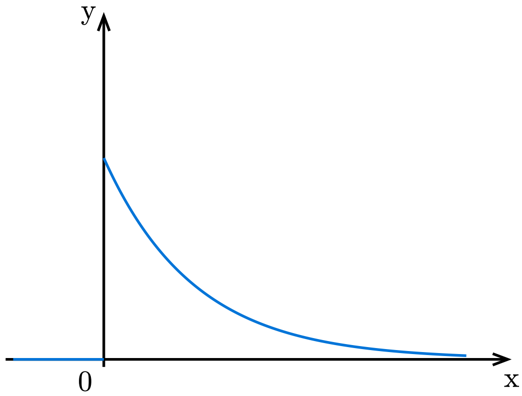
$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

D'où:

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}}$$

Remarques:
1. L'homogénéité est vérifiée
2. On sait que l'intensité est nulle jusqu'a $t = 0$ (par $i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$). On a une discontinuité en $t = 0$, l'intensité saute jusqu'a $\frac{E}{R}$, puis décroit avec une exponentielle inverse.

‼ Caution:
<u>Discontinuité de l'intensité pour C</u>



5) Cas de la décharge de C

On reprend le même circuit Fig. 2.

En $t = 0$, C est chargé sous une tension E. Donc:

$$e(t) = \begin{cases} E \text{ pour } t < 0 \\ 0 \text{ pour } t > 0 \end{cases}$$

En $t < 0$, $u(t) = E$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$Ri = 0 \Rightarrow e(t) = u(t)$$

Pour $t > 0$:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u = \frac{e(t)}{RC} = 0$$

Ici, on a pas de 2nd membre. On a donc:

$$u(t) = u_H(t) = Ue^{-\frac{t}{RC}}$$

On doit déterminer la valeur de U, la constante d'intégration.
De même, on utilise la continuite de u aux bornes de C:

$$u(0^+) = u(0^-) = E$$

par l'expression de la solution:

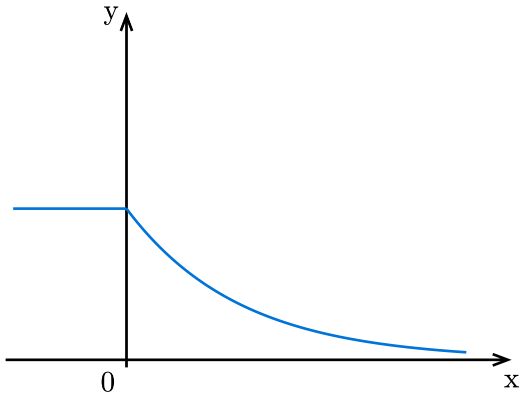
$$u(0^+) = U$$

Donc $U = E$

On a donc:

$$u(t) = Ee^{-\frac{t}{RC}}$$

On peut tracer u:



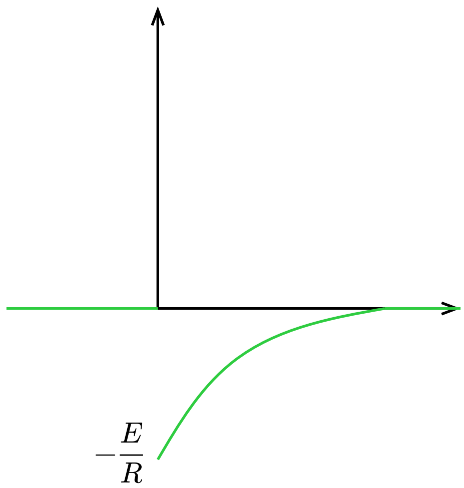
Et pour l'intensité:

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = CE\left(-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

D'où:

$$i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

(On a la même chose, mais avec un signe moins devant)



On a toujours discontinuité de i.

6) Temps caractéristique τ

Par homogénéité, l'exposant d'une exponentielle est toujours sans dimension. Ainsi, dans $e^{-\frac{t}{RC}}$, $-\frac{t}{RC}$ est une grandeure sans dimension. Donc $[RC] = [T]$.

On nomme donc τ le temps caractéristique, défini par:

$$\boxed{\tau = RC}$$

En reprenant l'équadiff:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u = \frac{e(t)}{RC}$$

On a:

$$\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{[U]}{[T]}$$

$$\left[\frac{u}{RC}\right] = \frac{[U]}{[T]}$$

Donc $[RC] = [T]$, donc:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{e(t)}{\tau}$$

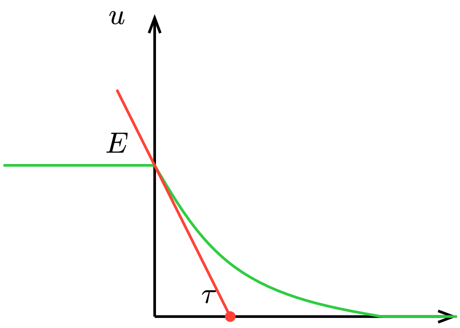
Pour résumer:

- Charge d'un condensateur:
  - $u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$
  - $i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$
- Décharge d'un condensateur:
  - $u(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$
  - $i(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

Obtention de la valeur de τ expérimentalement:

On peut faire le même raisonnement pour chaque formule, mais on utilisera la décharge d'un condensateur.

On peut mesurer l'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses directement:



On a l'asymptote pour $t \to +\infty$:

$$u = 0$$

La tangente à l'origine est:

$$y = u'(0)t + u(0)$$

$$u'(t) = -\frac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Donc:

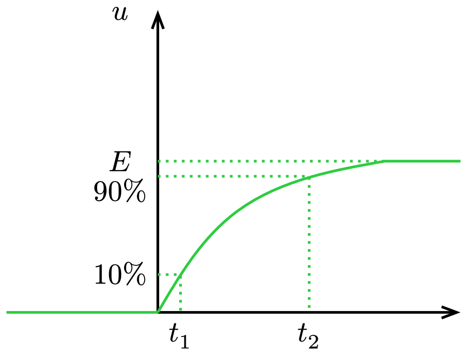
$$y = -\frac{E}{\tau}t + E$$

D'où:

$$
\begin{aligned}
& y(t) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{E}{\tau}t + E = 0 \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{E}{\tau}t = -E \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\tau}t = 1 \\
\Leftrightarrow\ & t = \tau
\end{aligned}
$$

Donc l'intersection de la tangente à l'origine avec l'axe des abscisses est une bonne estimation expérimentale de τ.

Autre methode: temps de montée/descente.



On pose: $\Delta T = t_2 - t_1$

> Φ Note:
> En décharge, on partira de 90% et on ira à 10%

> Φ Note:
> Dans une situation où on part d'une tension arbitraire E_1 vers une autre tension E_2, on devra partire d'une interpolation linéaire (10% et 90%) des deux.

On a:

$$u(t_1) = \frac{E}{10} = E\left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}}\right)$$

D'où:

$$
\begin{aligned}
e^{-\frac{t_1}{\tau}} &= \frac{9}{10} \\
t_1 &= -\tau \ln\left(\frac{9}{10}\right)
\end{aligned}
$$

Et:

$$u(t_2) = \frac{9}{10}E = E\left(1 - e^{-\frac{t_2}{\tau}}\right)$$

$$e^{-\frac{t_2}{\tau}} = \frac{1}{10}$$

$$t_2 = -\tau \ln \frac{1}{10}$$

On a donc:

$$\Delta T = t_2 - t_1 = \tau \ln 10 + \tau \ln \frac{9}{10}$$

$$\Delta T = 2\tau \ln 3 \approx 2.2\tau \approx 2\tau$$

7) Aspects énergétique

On a:

$$e(t) = u + Ri = u + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$ei = ui + Ri^2$$

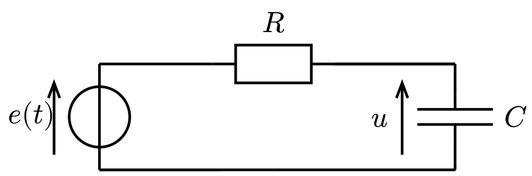
On substitue le i:

$$ei = Cu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Ri^2$$

$$ei = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{Cu^2}{2} + Ri^2$$

On va interpréter ei comme la puissance fournie par le générateur (notre source idéale de tension est en convention générateur).
La résistance est en convention récepteur, donc Ri^2 est la puissance dissipée par effet joule.

8) Réponse à un signal carré



Lorsque le temps caractéristique τ du système résistance-condensateur commence à approcher le temps caractéristique du circuit ($\frac{1}{f}$), on ne peut plus se placer dans l'ARQS: on observe la charge et la décharge du condensateur sur notre signal.

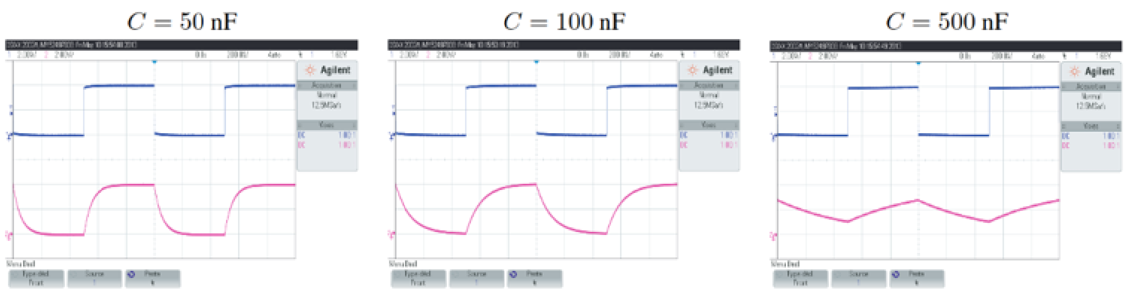


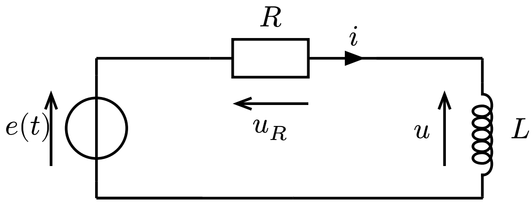
Fig. 10. – Charge et décharge d'un condensateur avec un signal crénau

9) Mesure de l'intensité

On peut se place aux bornes de la résistance et mesurer la tension pour obtenir l'intensité ($\times$ une constante).

Problème de manipulation: la masse de l'oscilloscope nous fait ignorer le condensateur si on mesure la résistance. Il faut intervertir les bornes du GBF.

III. Régime transitoire d'un circuit R, L du premier ordre - Établissement et rupture du courant dans une bobine



On a:

$$\begin{aligned} e(t) &= u + u_R \\ &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_R \\ &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri \\ \Leftrightarrow \frac{e(t)}{L} &= \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\tau}\left(\frac{e(t)}{R}\right) &= \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} \end{aligned}$$

D'où:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Établissement:

$$e(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ E \text{ (constante) si } t > 0 \end{cases}$$

On pose:

$$i(t) = i_H(t) + i_e(t)$$

Avec:

$$i_H(t) = Ie^{-\frac{1}{\tau}}$$

Et:

$$i_P(t) = \frac{E}{R}$$

Donc

$$i(t) = Ie^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$$

Comme l'énergie est une quantité continue, et que

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$$

Avec L une constante, alors i est une quantite continue. On a:

$$i(0^+) = i(0^-)$$

On a i en 0^- qui est avant le basculement de e de 0 à E, donc on peut se placer dans un régime permanent avec i une constante. On a:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^-) = 0$$

$$\frac{i(0^-)}{\tau} = \frac{0}{R\tau} \Rightarrow i(0^-) = 0$$

Et par continuité de i:

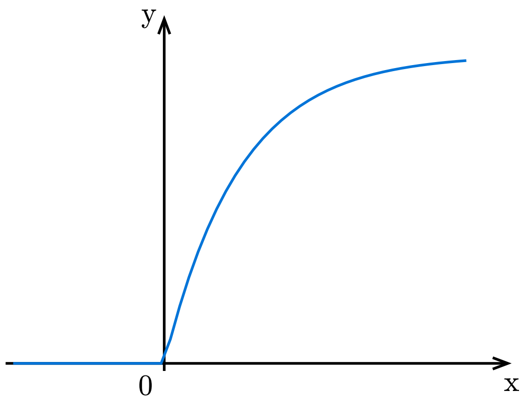
$$i(0^+) = 0$$

On a donc:

$$i(0^+) = 0 = I + \frac{E}{R}$$

$$\Leftrightarrow I = -\frac{E}{R}$$

$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



On pose l'équation de la bobine:

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

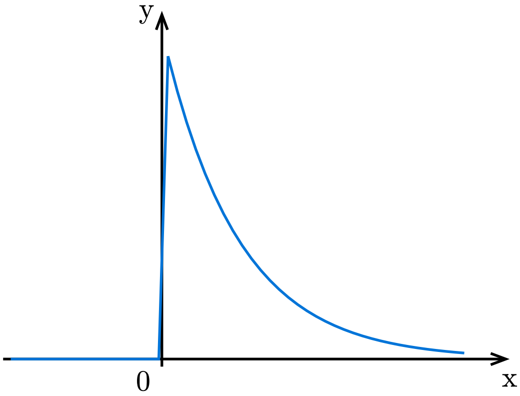
$$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{R}\left(\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{E}{R\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{R}E\frac{R}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

D'où:

$$\boxed{u = Ee^{-\frac{t}{\tau}}}$$

On a donc une discontinuité de u en 0.



Le plus dur sera de déterminer les conditions initiales.

On va faire l'inverse: on va faire basculer e de E vers 0:

$$e(t) = \begin{cases} E \text{ si } t < 0 \\ 0 \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

Par loi des mailles:

$$E = u_R + u_L = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

On fait l'hypothèse que le régime permanent a été atteint et que ce régime permanent est un régime continu.

Cela implique que $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$

On a donc:

- Pour $t < 0$, $E = Ri(t) \Leftrightarrow i(t) = \frac{E}{R}$
- $i(0^-) = \frac{E}{R}$

Par continuité de i dans L:

- $\underbrace{i(0^+) = i(0^-) = \frac{E}{R}}_{\text{condition initiale}}$

On obtient donc l'équa-diff:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = \frac{e(t \text{ (avec } t > 0))}{R\tau} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = 0$$

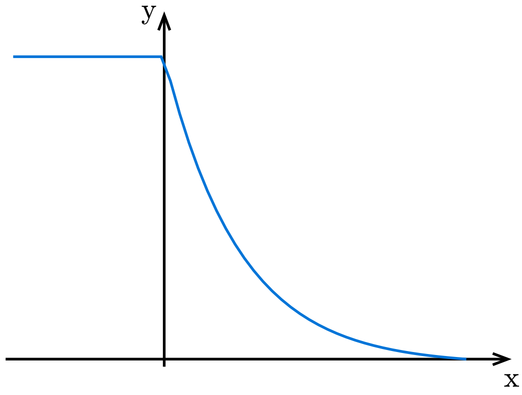
On résout l'équation homogène:

$$i(t) = i_H(t) = Ie^{-\frac{t}{\tau}}$$

On a $i(0) = I = \frac{E}{R}$, donc

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

D'où:

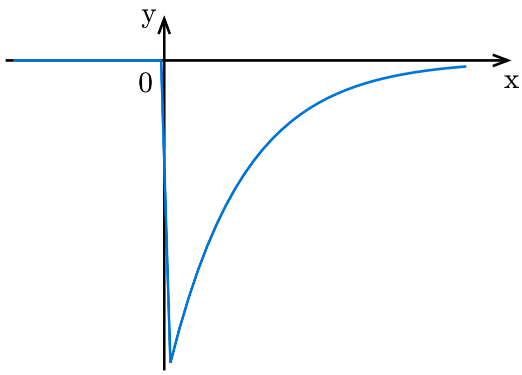


Pour la tension:

$$\begin{aligned} u &= L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ &= L \frac{E}{R} \left(-\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \end{aligned}$$

D'où:

$$u = -E e^{-\frac{t}{\tau}}$$



On peut poser le temps caractéristique $\tau = \frac{L}{R}$

1) Aspect énergétique

On a

$$e = Ri + L(\mathrm{d}i)(\mathrm{d}t)$$

$$ei = Ri^2 + Li \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$ei = Ri^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\left(\frac{1}{2} L i^2 \right)}_{\text{énergie stockée}}$$

On a:

- ei la puissance fournie par le générateur
- Ri^2 la puissance reçue par R et dissipée par effet Joule
- $\frac{1}{2}Li^2$ la puissance « stockée » dans L
  - Si $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t\left(\frac{1}{2}Li^2\right)} < 0$, alors L est génératrice (la bobine se « décharge »)
  - Si $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t\left(\frac{1}{2}Li^2\right)} > 0$, alors L est réceptrice (la bobine se « charge »)