Phénomènes d'interférences

I. Superposition de deux ondes

Dans ce chapitre, on se limitera à l'interférences à deux ondes.

1) Observation expérimentales

Les amplitudes de différentes ondes s'ajoutent en chaque point.

Les ondes restent « distinctes », il n'y a pas d'intéractions entre les ondes.

2) Phénomène d'interférence

Interférence: L'ajout des ondes en un même point.

Zone d'interférence: Zone où l'interférence entre deux ondes arrive. Dans la majorité de l'espace, l'une des deux ondes contribue 0, donc on ne voit aucune interférence.

3) Généralisation

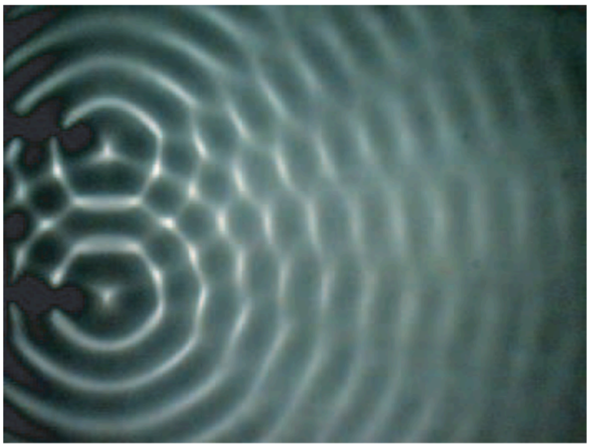


Fig. 1. – Interférences de deux ondes à la surface de l'eau

II. Somme de deux sinusoïdes de même fréquence

On sait qu'on peut toujours se ramener à une somme (possiblement infinie) d'onde harmoniques avec la transformée de Fourrier.

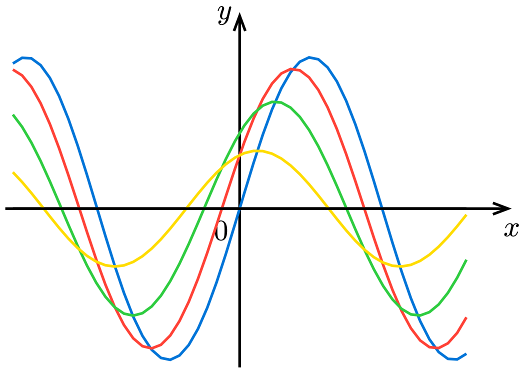
On va donc simplifier le problème et se limiter à la superposition de deux ondes sinusoïdales.

On peut alors (cf. le chapitre précedent) définir le signal par une simple fonction dépendant du temps.

1) Simulation mathématique

On pose deux sinus: $s_1(t) = S_1 \sin(2\pi f t)$ et $s_2(t) = S_2 \sin(2\pi f t + \varphi)$

Selon la valeur du déphasage φ entre les deux signaux, les interférences seront plus on moins constructives ou destructives:



2) Formule d’interférences

On a donc: $s_1(t) = S_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = S_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$

Et:

$$\begin{aligned}
s(t) &= s_1(t) + s_2(t) \\
s(t) &= S_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + S_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \\
&= S_1 \sin(\omega t)\cos(\varphi_1) + S_1 \cos(\omega t)\sin(\varphi_1) + S_2 \sin(\omega t)\cos(\varphi_2) + S_2 \cos(\omega t)\sin(\varphi_2) \\
&= (S_1 \cos(\varphi_1) + S_2 \cos(\varphi_2))\sin(\omega t) + (S_1 \sin(\varphi_1) + S_2 \sin(\varphi_2))\cos(\omega t) \\
&= A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)
\end{aligned}$$

Avec $A = S_1 \cos(\varphi_1) + S_2 \cos(\varphi_2)$ et $B = S_1 \sin(\varphi_1) + S_2 \sin(\varphi_2)$

On va transformer $s(t)$ en la forme $X \sin(\omega t + \varphi)$

$$s(t) = X \sin(\omega t + \varphi) = X \sin(\omega t)\cos(\varphi) + X \cos(\omega t)\sin(\varphi)$$

Par identification:

$$\begin{cases} A = X \cos(\varphi) \\ B = X \sin(\varphi) \end{cases}$$

D’où:

$$A^2 + B^2 = X^2 \cos^2(\varphi) + X^2 \sin^2(\varphi) = X^2$$

Donc $X = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$\begin{aligned}
X^2 &= (S_1 \cos(\varphi_1) + S_2 \cos(\varphi_2))^2 + (S_1 \sin(\varphi_1) + S_2 \sin(\varphi_2))^2 \\
&= S_1^2 \cos^2(\varphi) + 2 S_1 S_2 \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + S_2^2 \cos^2(\varphi_2) \\
&+ S_1^2 \sin^2(\varphi_1) + 2 S_1 S_2 \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + S_2^2 \sin^2(\varphi_2) \\
&= S_1^2(\cos^2(\varphi_1) + \sin^2(\varphi_1)) + S_2^2(\cos^2(\varphi_2) + \sin^2(\varphi_2)) + 2 S_1 S_2(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) \\
&= S_1^2 + S_2^2 + 2 S_1 S_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2)
\end{aligned}$$

On trouve la **formule d’interférence**:

$$\boxed{X^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2 S_1 S_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad \text{Eq. 1}}$$

Démonstration alternative par les complexes et la représentation dans le plan de Fresnel.

3) Extrema d'amplitude

Le seul paramètre variable est le déphasage $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ entre les deux ondes.

$$-1 \leq (\cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \leq 1$$

$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2 \leq s(t) \leq S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2$$

$$(S_1 - S_2)^2 \leq s(t) \leq (S_1 + S_2)^2$$

Donc $X_{\max} = |S_1 + S_2| = S_1 + S_2$ et $X_{\min} = |S_1 - S_2|$

4) Cas où les signaux ont la même amplitude

Si $S = S_1 = S_2$, on a l'amplitude X:

$$X = S^2 + S^2 + 2S^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 2S^2(1 - \cos(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Et on a $X_{\max} = 2S^2$ et $X_{\min} = 0$

5) Interférences constructives ou destructives

On parle d'interférences constructives quand l'amplitude obtenue est maximale:

$$\begin{aligned} &\cos(\varphi) = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1 \\ \Leftrightarrow\ &\varphi_1 - \varphi_2 \equiv 0[2\pi] \\ \Leftrightarrow\ &\varphi_1 - \varphi_2 = m \times 2\pi, m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Pour pouvoir parler de « déphasage » avec des ondes un peu plus funky, on reformule les déphasages avec λ la longueur d'onde et d_1, d_2 le déphasage en longueur:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi d_1}{\lambda}$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi d_2}{\lambda}$$

(C'est plus facile de dire que deux vagues sont déphasées de 1 m et qu'elles sont périodiques sur 2 m, que de dire qu'elles sont dephasées de $\frac{\pi}{2}$)

On a donc:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = m2\pi \Leftrightarrow \frac{d_1 - d_2}{\lambda} = m$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'interférence entre deux ondes soit constructive est:

$$\boxed{d_1 - d_2 = m\lambda}$$

> ✓ Tip:
> Autrement dit, si deux ondes sont déphasées d'un nombre entier de longueur d'onde, elles sont en interférence constructive.

On parle d'interférences destructives si l'amplitude du signal obtenu est minimale (pour deux ondes de même fréquence et de même amplitude, on observe une annulation totale).

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$$
$$\Leftrightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = p2\pi + \pi, p \in \mathbb{Z}$$
$$\frac{d_1 - d_2}{\lambda} = p + \frac{1}{2}$$
$$\boxed{d_1 - d_2 = \lambda p + \frac{\lambda}{2}}$$

Est une condition nécéssaire est suffisante que deux ondes interfèrent de manière destructive.

III. Interférences lumineuses par le dispositif des trous d'Young

1) Dispositif des trous d'Young

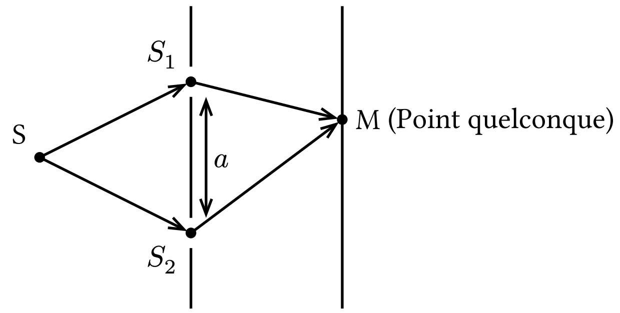


Fig. 3. – Trous d'Young

Dispositif des trous d'Young:
Deux trous sont faits à travers une lame. Une source lunimeuse ponctuelle est placée sur la médiatrice des deux trous S_1 et S_2. On observe la lumière atteignant M.

2) Notion de chemin optique

Le chemin optique est décrit par le temps mis par la lumière pour parcourir une certaine distance.

On note (SM) le chemin optique pour aller du point S à M.

$$(SM) = c\tau$$

Avec τ le temps mis pour aller de S à M dans le vide.

Si on se déplace dans un milieu d'indice n, on a:

$$n = \frac{c}{v} \Rightarrow v = cn$$

$$(SM) = nv\tau = \int_{s(0)}^{s(\tau)} n \, \mathrm{d}s$$

3) Lien entre déphasage et différence de chemin optique

On pose φ le déphasage entre les deux signaux $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

$$
\begin{aligned}
\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 &= \frac{2\pi}{\lambda} d_1 - \frac{2\pi}{\lambda} d_2 \\
&= k d_1 - k d_2 \text{ avec } k = \frac{2\pi}{\lambda} \\
&= \frac{\omega}{c} d_1 - \omega_c d_2 \text{ avec } \omega = kc \text{ le vecteur d'onde} \\
&= \frac{\omega}{c} (d_1 - d_2)
\end{aligned}
$$

On peut ensuite déterminer la distance avec le chemin optique: $d_1 = (SS_1M)$ et $d_2 = (SS_2M)$

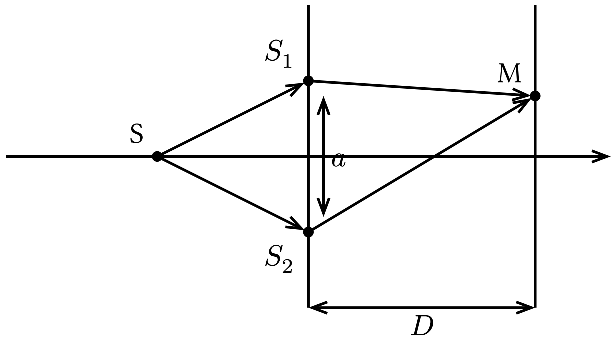
Ce qui nous permet d'obtenir le déphasage entre les deux signaux:

$$\varphi = \frac{\omega}{c}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$$

On appelle δ la différence de marche:

$$\delta = (SS_1M) - (SS_2M)$$

4) Calcul de la différence de marche pour le dispositif des trous d'Young à l'infini



Il faut que les trous soient très proches par rapport à la distance totale à parcourir.

On considère x la hauteur de point M sur l'écran.

a) Par le calcul

Pour obtenir le déphasage entre les deux signaux, on cherche à calculer δ, la différence de marche, avec:

$$
\begin{aligned}
\delta &= (SS_1M) - (SS_2M) \\
&+ (SS_1) + (S_1M) - (SS_2) - (S_2M)
\end{aligned}
$$

On est dans un milieu homogène et isotrope, et le point S est sur la médiatrice des points S_1 et S_2, donc $(SS_1) = (SS_2)$, donc:

$$
\begin{aligned}
\delta &= (S_1M) - (S_2M) \\
&= n_{\text{air}} S_1M - n_{\text{air}} S_2M
\end{aligned}
$$

(On pourra en général omettre l'indice de l'air car ≈ 1)

$$S_1M^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2$$

$$S_2M^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + D^2$$

On fera l'hypothèse que l'écran où on observe les interférences est à l'infini, donc que $D \gg a$ et $D \gg x$ (ce qui nous permettra de développer le terme en $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$ qui nous embête bien)

> Φ Note:
> En pratique, on placera une lentille après le dispositif pour observer les interférences à l'infini.

$$\begin{aligned} S_1M &= \left(\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + D^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + D^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= D\left(1 + \underbrace{\frac{x^2}{D^2} - \frac{ax}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2}}_{\to 0}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On fait un DL d'ordre 1 de la racine et on bazarde le petit o:

$$S_1M \approx D\left(1 + \frac{x^2}{2D^2} + \frac{a^2}{8D^2} - \frac{ax}{2D^2}\right)$$

De même:

$$S_2M \approx D\left(1 + \frac{x^2}{2D^2} + \frac{a^2}{8D^2} + \frac{ax}{2D^2}\right)$$

On a donc:

$$\delta = D\left(-\frac{ax}{2D^2} - \frac{ax}{2D^2}\right) = -\frac{ax}{D}$$

De là, on calcule le déphasage:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$$

Par la formule d'interférence (Eq. 1):

$$I = I_0(1 + \cos\varphi)$$

$$\begin{aligned} I &= I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)\right) \\ &= I_0\left(1 + \cos\left(-2\pi\frac{ax}{\lambda D}\right)\right) \\ &= I_0\left(1 + \cos\left(2\pi\frac{ax}{\lambda D}\right)\right) \end{aligned}$$