

# Lois de Snells-Descartes, Stigmatisme et aplanétisme

1. Vocabulaire de l'Optique géométrique .....	1
2. Lois de la réflexion - Stigmatisme et aplanétisme rigoureux .....	2
3. Lois de la réfraction - Stigmatisme et Aplanétisme approchés .....	5

## I. Vocabulaire de l'Optique géométrique

### 1) Notion de poli optique

On se place dans le cadre de l'optique géométrique: pas de diffraction.

il faut donc un état de surface impeccable (le poli optique): pas d'aspérités sur les surfaces qu'on utilise.

### 2) Interfaces optiques

On va différencier des interfaces optiques:

- Dioptré: surface présentant le poli optique et séparant deux milieux d'indice différent
- Miroir: surface présentant le poli optique renvoyant les rayons d'où il viennent

On se place dans un système dioptrique si seul des dioptrés sont utilisés, et dans un système catadioptrique si seul des dioptrés et des miroirs sont utilisés.

### 3) Rayon incident, réfléchi ou réfracté

Dans le cas d'une surface quelconque, on parlera de la normale  $\vec{n}$  et on définira tous les angles à partir de cette normale.

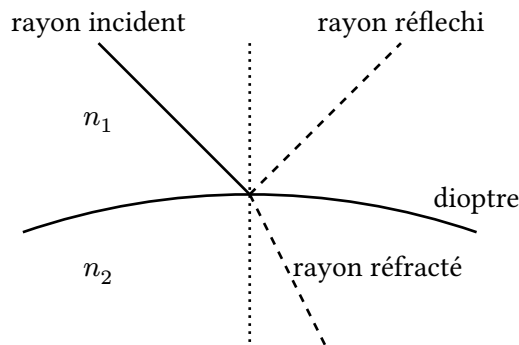


Fig. 1. – Rayon incident, réfracté, et réfléchi

### 4) Objet réel ou image virtuelle

**Objet:** point de convergence des rayons qui arrivent sur le **système**.

**Image:** point de convergence des rayons qui sortent du **système**.

**Réel:** La lumière va physiquement passer à cet endroit.

**Virtuel:** La lumière ne va passer à travers ce point (car obstacle ou trajectoire changée avant).

Les notions d'objet et d'image sont à voir du **point de vue du système optique**.

Afin d'obtenir un objet virtuel, il faut le *créer* à l'aide d'un système optique.

On peut obtenir recueillir une image réelle sur un écran, à l'inverse d'une image virtuelle. Il faut utiliser un système annexe (faire projection de l'image virtuelle) afin de récupérer l'image virtuelle.

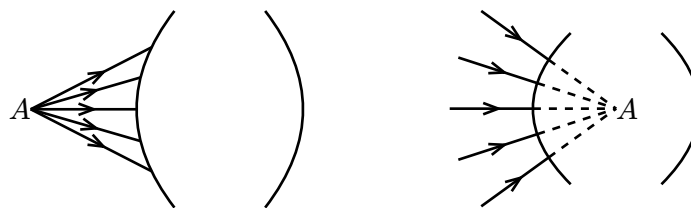


Fig. 2. - Objet réel ou virtuel

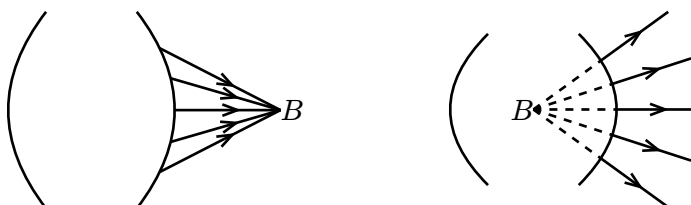


Fig. 3. - Image réelle ou virtuelle

Traits pleins: la lumière passe effectivement par ce point.

Traits pointillés: la lumière **semble** provenir de ce point.

## 5) Système centré

**Système centré:** système qui présente un axe de révolution ou un système de révolution

Dans les systèmes centrés, les rayons passant par le l'axe du système, sont symétriques.

On pourra toujours approximer les surfaces et les lentilles par des sphères.

On tracera toujours un axe optique:

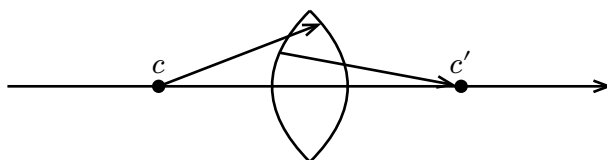


Fig. 4. - Système centré

## II. Lois de la réflexion - Stigmatisme et aplanétisme rigoureux

### 1) Lois de Snells-Descartes pour la réflexion

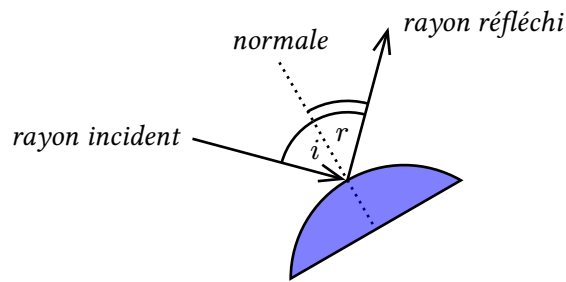
**I:** Point d'impact du rayon incident sur le miroir

**Plan d'incidence:** Le plan contenant le rayon incident contient la normale et I.

Trois lois de l'optique:

- Le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence
- Le rayon réfléchi traverse la normale (passe de la zone 1 vers la zone 2)
- L'angle de réflexion ( $r$ ) est égal à l'angle d'incidence ( $i$ ).

On utilise des angles géométriques (non-orientés).



Avec des angles orientés, on peut fusionner la 2<sup>ème</sup> et la 3<sup>ème</sup> loi.

On se place l'origine des angles à la normale, puis on pose  $r = -i$ , ce qui implique forcément que l'on traverse la normale.

## 2) Stigmatisme rigoureux

On parle d'un système **rigoureusement stigmatique** pour un couple de points  $(A, A')$  lorsque tout rayon passant par le point  $A$  et traverse le système passe par  $A'$ .

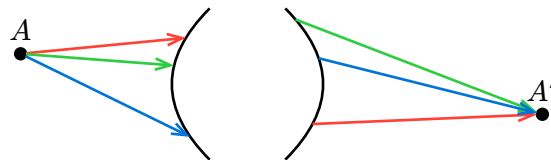


Fig. 6. – Système rigoureusement stigmatique

Conjugaison entre un point objet  $A$  et un point image  $A'$ .

NOTE:  $A$  et  $A'$  peuvent être des points virtuels (dans un miroir par exemple)

**Stigmatisme approché:** Approximation du stigmatisme rigoureux: on peut dire que telle point possède telle point image, mais de façon approchée.

## 3) Notion de foyer

On considère que les rayons parallèles proviennent d'un objet ou d'une image placé à l' $\infty$ .

**Foyer image:** point image conjugué par le point objet placé à l'infini

**Foyer objet:** point objet conjugué par le point image placé à l'infini

Lorsqu'un point objet est sur l'axe optique, son image est forcément sur l'axe optique.

## 4) Foyers secondaires - Plan focal

Lorsque des rayons arrivent inclinés par rapport à l'axe optique, le point de convergence sera dans le plan focal.

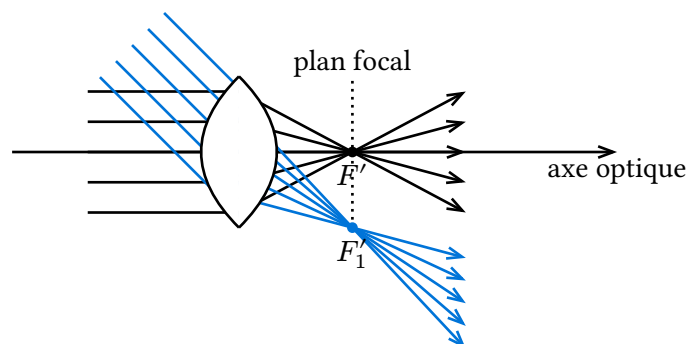


Fig. 7. – Foyer primaire et secondaire

## 5) Aplanétisme rigoureux

Rappel: stigmatisme rigoureux: correspondance entre un point objet et un point image.

On est capable de déterminer l'image d'un point par stigmatisme rigoureux. Un objet est rarement contenu en un seul point. Si je prend un objet perpendiculaire à l'axe optique, son image reste-t-elle perpendiculaire à l'axe optique?

**Aplanétisme rigoureux:** Un système est rigoureusement aplanétique si:

1. Il est rigoureusement stigmatique pour  $(A, A')$ , avec  $A$  et  $A'$  sur l'axe optique
2. Que ce système soit rigoureusement stigmatique pour  $(B, B')$  avec  $B$  et  $B'$  en dehors de l'axe optique
3. Si l'objet  $(AB) \perp$  l'axe optique alors  $(A'B')$  est  $\perp$  à l'axe optique

NOTE: On a besoin d'un seul point sur l'axe optique et d'un seul point pas sur l'axe optique (on ne parle pas de tout les points).

## 6) Exemple de système rigoureusement stigmatique et aplanétique: le miroir plan

L'image par une surface réfléchissante va être symétrique par rapport au plan du miroir.

Pour n'importe quel point symétriques par rapport à l'autre, le stigmatisme rigoureux est vérifié, donc (1.) et (2.) sont vérifiés.

Si deux points sont perpendiculaires par rapport à l'axe du miroir, par symétrie, leur image sera perpendiculaire donc aplanétisme rigoureux vérifié.

**Formule de conjugaison:** relation qui va lier la position de l'objet et de l'image conjuguée

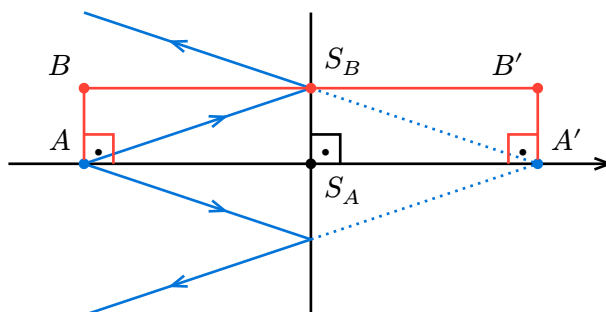


Fig. 8. – Translation d'un objet devant un miroir

La formule de conjugaison du miroir plan est:

$$\overline{SA'} = -\overline{SA}$$

Grandissement  $\gamma$ :

- $A \rightarrow A'$ ,  $AB \perp$  axe optique
- $B \rightarrow B'$ ,  $A'B' \perp$  axe optique

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 1$$

Par propriétés de translation qui conservent les distances (car toutes les transformations liées à la réflexion du miroir plan sont des translation)

Dernière question: à ton affaire à un foyer?

On amène notre objet vers l'infini, donc  $\overline{SA} \rightarrow -\infty$ , donc  $\overline{SA'} \rightarrow +\infty$ , donc pas de foyer (si il y avait un foyer,  $\overline{SA'}$  tendrait vers une constante).

## 7) Déplacement de l'image par un miroir plan

Translation:

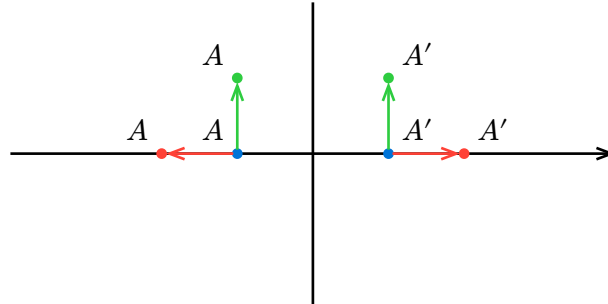


Fig. 9. – Translation devant un miroir (ii.)

Rotation:

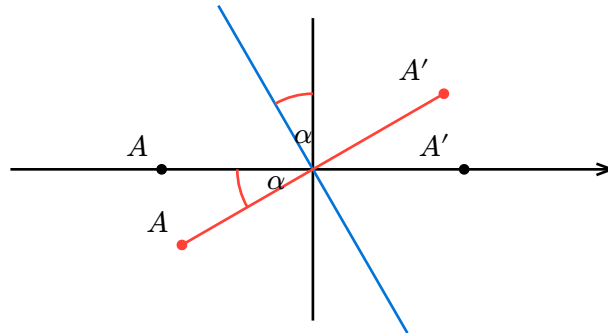


Fig. 10. – Rotation devant un miroir

Par rotation, l'image sera tournée.

## III. Lois de la réfraction - Stigmatisme et Aplanétisme approchés

### 1) Lois de Snells-Descartes de la réfraction

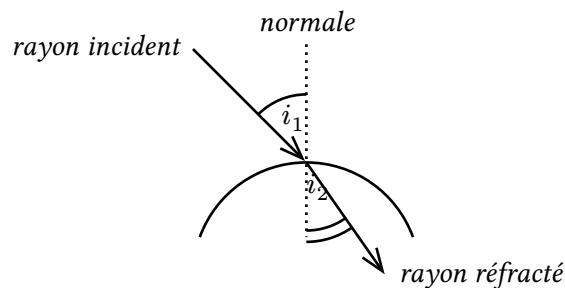


Fig. 11. – Réfraction

1. Le rayon réfracté appartient au plan d'incidence défini par la direction du rayon incident, la direction de la normale à l'interface au point d'impact du rayon incident et le point d'impact  $I$ .
2. Le rayon réfracté traverse la normale
3.  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

Loi de Kepler: approximation pour les petits angles:

- si  $i_1$  et  $i_2$  faibles, alors  $\sin i_1 \approx i_1$  et  $\sin i_2 \approx i_2$
- donc  $n_1 i_1 \approx n_2 i_2$

NOTE: Toujours marquer les unités des angles (radians ou degrés)

## 2) Construction de Descartes

Méthode de Descartes pour dessiner un angle réfracté sans rapporteur (avec un compas):

- On trace à cercle sur  $I$  dont le rayon est proportionnel à  $n_1$
- On trace à cercle sur  $I$  avec un rayon  $R_2 = \frac{n_2}{n_1} R_1$
- On continue le rayon incident derrière le dioptre
- On pose  $K$  l'intersection de  $C_1$  et du rayon incident derrière le dioptre et  $H$  le projeté de  $K$  sur le dioptre
- On pose  $K'$  l'intersection de  $C_1$  et du rayon réfracté et  $H'$  le projeté de  $K'$  sur le dioptre
- Ainsi:

$$\sin i_1 = \frac{IH}{IK} = \frac{IH}{R_1}$$

$$\sin i_2 = \frac{IH'}{IK'} = \frac{IH'}{R_2}$$

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

$$\frac{n_1}{R_1} IH = n_2 \frac{IH'}{R_2} = n_2 I \frac{H'}{\frac{n_2}{n_1} R_1} = \frac{n_1}{R_1} IH'$$

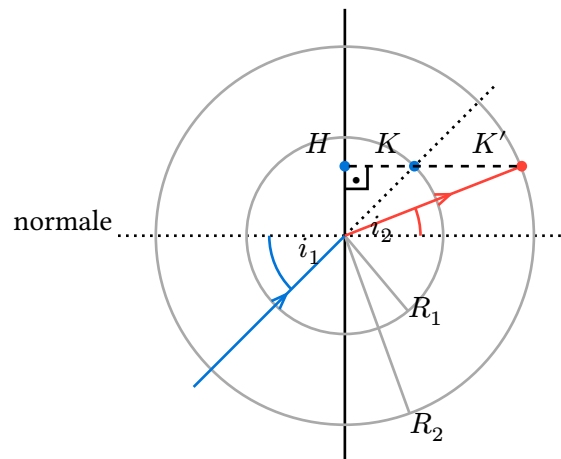


Fig. 12. – Construction géométrique du rayon réfracté

## 3) Applications directes de la réfraction: réfraction dans un milieu stratifié: Mirage

TODO Dessin de mirage

Mirage inférieur:

On voit le ciel en regardant le sol (on a l'habitude de la propagation rectiligne de la lumière)

Mirage supérieur

On voit la mer (ou ce qu'il y a sur la mer) en regardant le ciel.

## 4) Reflexion totale

On part de  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ .

À t-on un rayon réfracté ou réfléchi?

Il y a toujours un rayon incident, donc  $i_1$  existe toujours. On a un rayon réfracté si  $i_2$  existe.

$$0 \leq \sin i_2 \leq 1$$

$$0 \leq \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \leq 1$$

- Si  $\frac{n_1}{n_2} \leq 1$  (on passe d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent), on a toujours

$$0 \leq \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \leq 1$$

donc notre rayon sera toujours réfracté.

- Si  $\frac{n_1}{n_2} > 1$ , on pourra observer une réfraction si

$$\frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \leq 1$$

$$\sin i_1 \leq \frac{n_2}{n_1} \leq 1$$

On peut donc poser un angle de réfraction limite  $i_l$  tel que:

$$\sin i_l = \frac{n_2}{n_1}$$

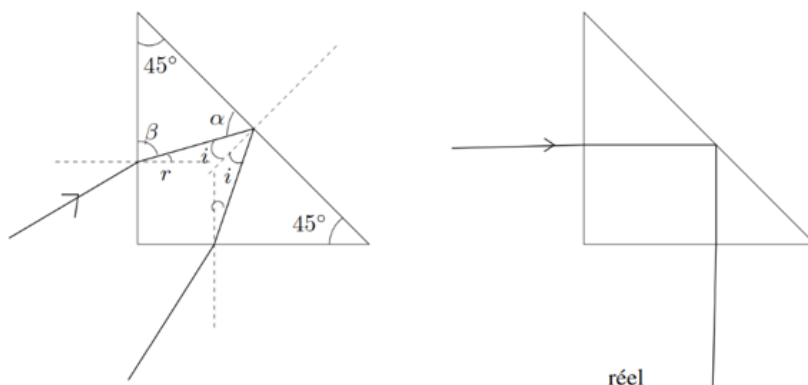
$$i_l = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

La réfraction est licite si  $\sin i_1 \leq \sin i_l \Leftrightarrow i_1 \leq i_l$  (sin croissant sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$ ). Si  $i_1$  est supérieur à l'angle de réflexion limite, on observera un phénomène de réflexion totale.

## 5) Applications de la réflexion totale

### a) Surfaces réfléchissantes

Pour obtenir une surface réfléchissante, un miroir est la première option, mais ces derniers sont compliqués à produire et à polir. On peut obtenir une surface réfléchissante simplement à l'aide d'un dioptre (sur lequel il sera plus simple d'obtenir un poli optique satisfaisant)



On ressortira du prisme si l'angle  $i$  à l'intérieur du prisme est inférieur à l'angle limite. (donc premier schéma faux: pas de réflexion interne, on observe une réfraction). Par contre, dans le deuxième schéma, l'angle vaut 45 degrés, donc réflexion totale. Utilisation réelle de ce prisme:

## b) Fibre optique

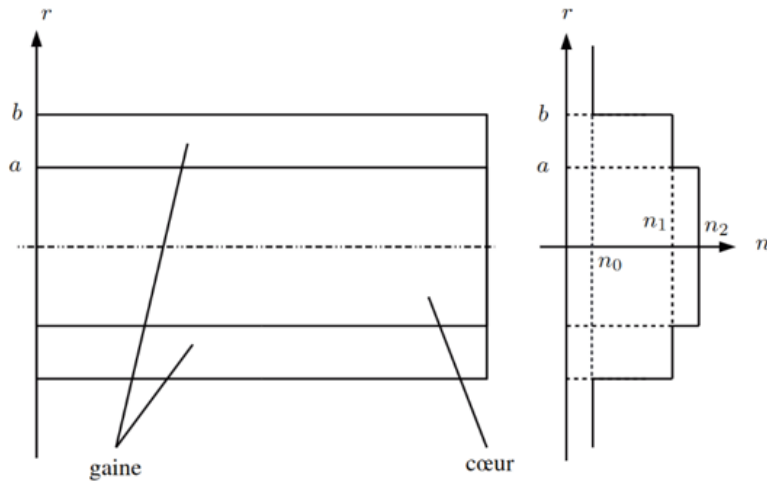


Fig. 14. – Constitution d'un cable de fibre optique

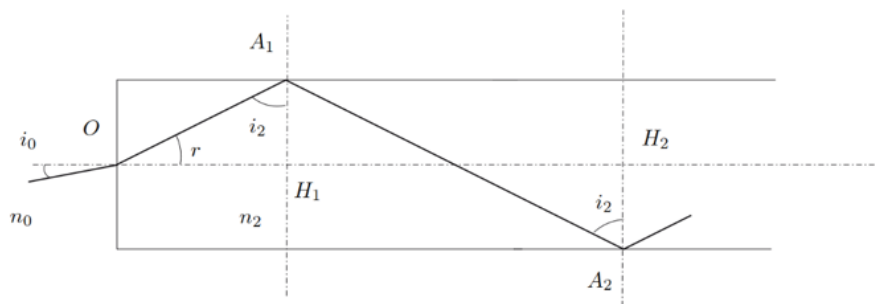


Fig. 15. – Réflexion totale dans un cable de fibre optique

On note  $i_1$  l'angle de réfraction après  $i_2$ . On a:

$$n_0 \sin i_0 = n_2 \sin r$$

$$n_2 \sin i_2 = n_1 \sin i_1$$

Réflexion totale si  $\sin i_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin i_2 > 1$

Relation des angles internes du triangle  $OH_1A_1$ :

$$r + i_2 + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$r = \frac{\pi}{2} - i_2$$

On remplace:

$$n_0 \sin i_0 = n_2 \sin \left( \frac{\pi}{2} - i_2 \right)$$



$$\begin{aligned} n_0 \sin i_0 &= n_2 \cos i_2 \\ &= n_2 \sqrt{1 - \sin^2 i_2} \end{aligned}$$

On souhaite que:

$$\sqrt{1 - \sin^2 i_2} < \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}}$$

Or on a:

$$\begin{aligned} \sin i_0 &= \frac{n_2}{n_0} \sqrt{1 - \sin^2 i_2} \\ &< \frac{n_2}{n_0} \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}} \end{aligned}$$

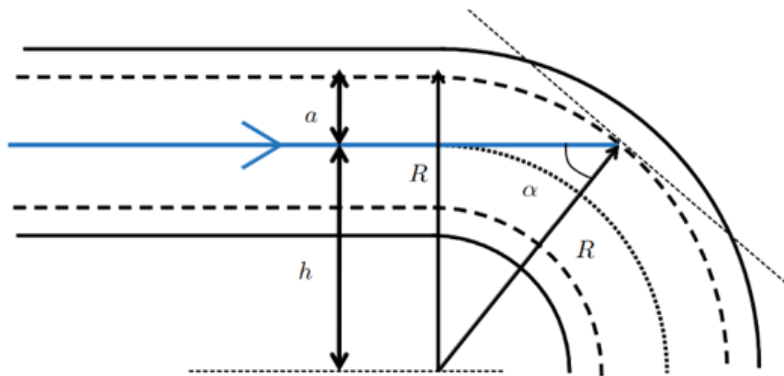
Il faut que:

$$\sin i_0 < \frac{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}}{n_0}$$

$$i_0 < \arcsin\left(\frac{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}}{n_0}\right)$$

Tout rayon de lumière entrant dans la fibre optique avec un angle respectant cette inégalité restera donc dans la fibre optique. On appelle la valeur limite **l'angle d'acceptance**.

Fibre optique avec courbure:



On souhaite que la condition de réflexion totale reste vérifiée, même si on tord la fibre. On souhaite donc que  $\alpha$  (angle d'incidence sur la gaine) reste supérieur à l'angle de réfraction limite.

On utilise le triangle rectangle de hauteur  $h$ , d'hypoténus  $R$  et d'angle  $\alpha$ , on a donc:

$$\sin \alpha = \frac{h}{R}$$

$$R = h + a \Leftrightarrow h = R - a$$

Donc:

$$\sin \alpha = \frac{R - a}{R}$$

Pour garder la condition de réflexion totale, on veut que:

$$\frac{n_2}{n_1} \sin \alpha > 1$$

Il nous faut donc que

$$\frac{n_2}{n_1} \frac{R - a}{R} > 1$$

$$n_2 R - n_2 a > n_1 R$$

$$(n_2 - n_1) R > n_2 a$$

$$R > \frac{n_2 a}{n_2 - n_1}$$

Application numérique: si on prend des nombres de  $n_1 = 1.5$ ,  $n_2 = 1.6$  et  $a = 25$  micromètre, on a un rayon minimum (?) de:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1.6 \times 25}{1.6 - 1.5} \\ &= \frac{40}{0.1} \\ &= 400 \text{ micromètre} \end{aligned}$$

(Pour un rayon arrivant parfaitement droit)

Calcul du temps de voyage:

On note  $L$  la longueur du câble de fibre.

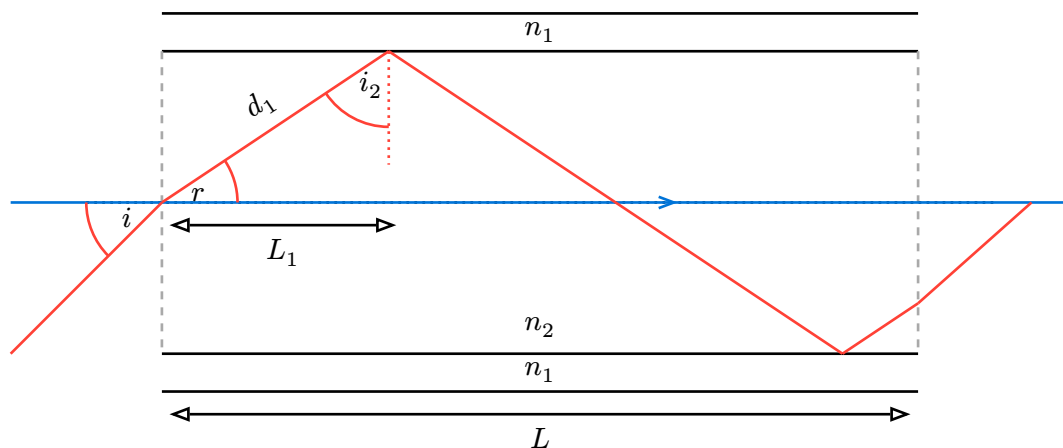


Fig. 17. – Parcours minimal et maximal de la fibre optique

Pour un rayon arrivant parfaitement droit (temps minimal), on a:

$$\tau_{\min} = \frac{L}{v} = \frac{n_2 L}{c}$$

Avec  $v$ : la vitesse dans le cœur de la fibre, donc  $v = \frac{c}{n_2}$

Pour un rayon rebondissant, on a:

$$\sin i_2 = \frac{L_1}{d_1} \Leftrightarrow d_1 = \frac{L_1}{\sin i_2}$$

Dans le cas limite (angle d'acceptance), on a  $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2}$ , soit:

$$d_1 = \frac{n_2 L_1}{n_1}$$

On souhaite trouver la distance totale  $d$  avec

$$d = d_1 + d_2 + \dots$$

On retrouve toujours la même relation de distance (voir figure), on a donc:

$$d_i = \frac{n_2}{n_1} L_i$$

$$d = \frac{n_2}{n_1} \underbrace{L_1 + L_2 + \dots}_L$$

$$d = \frac{n_2}{n_1} L$$

On a donc:

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{d}{v} = \frac{n_2 d}{c} \\ &= \frac{n_2^2 L}{n_1 c} \end{aligned}$$

On peut donc calculer la différence entre l'arrivée la plus rapide et la plus lente:

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \tau_{\max} - \tau_{\min} \\ &= \frac{n_2 L}{c} \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \\ &= \frac{n_2 (n_2 - n_1) L}{n_1 c} \end{aligned}$$

Ainsi, l'écart temporel entre deux informations  $T$  doit être supérieur à  $\Delta\tau$ . Autrement dit, la (cadence) maximale  $Q = \frac{1}{T}$  de notre câble doit vérifier:

$$Q < \frac{1}{\Delta\tau}$$

Application numérique:  $n_1 = 1.5$ ,  $n_2 = 1.6$ ,  $L = 10$  m

$$\begin{aligned} \Delta\tau &= \frac{1.6(1.6 - 1.5) \times 10}{1.5 \times c} \\ &= \frac{1.6}{1.5 \times c} \end{aligned}$$

$$Q_{\max} = \frac{1.5 \times c}{1.6} = 281055510.9375 \text{ Hz}$$

## 6) Stigmatisme et aplanétisme approché

Dans le cas du miroir plan, le stigmatisme et l'aplanétisme est vérifié pour n'importe quel point symétrique par rapport à l'axe du miroir.

Malheureusement, pour la majorité des autres systèmes optiques, le stigmatisme/aplanétisme rigoureux n'est pas vérifié.

Dans le cas de la rétine / d'un appareil photo, le senseur (cône / grain de pellicule / capteur lumineux) n'est pas un point mathématique (comme dans le cas du stigmatisme approché): il possède une surface.

Si tout les rayons passant par un point ne convergent pas vers un seul point mathématique, mais vers un voisinage de ce point, le résultat qu'on **observera** sera le même.

On parlera dans ce cas de stigmatisme et d'aplanétisme **approché**.

On va accepter de contraindre l'ensemble de rayons considérés par le système afin de vérifier les conditions de stigmatisme approché. Ce sont les conditions de Gauss:

1. Les rayons doivent avoir un faible angle  $\alpha$  par rapport à l'axe optique
2. Le point d'intersection doit être à une faible distance de l'axe optique
3. L'angle d'incidence  $\beta$  sur l'axe optique doit être faible

Les notions de « faible » ici dépendant de la taille des cellules du détecteur.

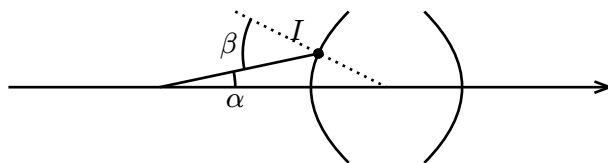


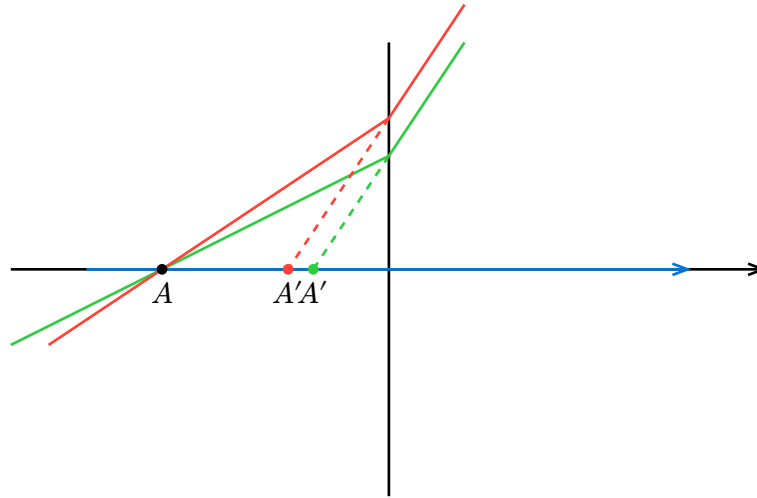
Fig. 18. – Conditions de Gauss

### Φ Note:

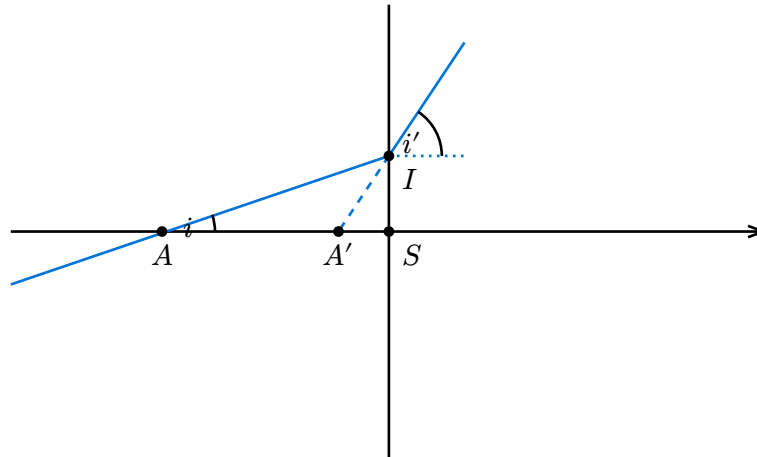
Si deux des trois conditions sont vérifiées, la troisième est automatiquement vérifiée.

De plus, si les conditions de Gauss sont vérifiées, stigmatisme et aplanétisme approché sont automatiquement vérifiés.

## 7) Exemple de système réalisant le stigmatisme et l'aplanétisme approché: le dioptre plan



On voit que le  $A'$  du premier rayon n'est pas le même que le  $A'$  du deuxième rayon.



On essaye de définir l'angle  $i$  par rapport à  $i'$  et  $SI$ . On a:

$$\tan i = \frac{\overline{SI}}{\overline{AS}} = \frac{\sin i}{\cos i} = \frac{\sin i}{\sqrt{1 - \sin^2 i}}$$

$$\tan i' = \frac{\overline{SI}}{\overline{A'S}} = \frac{\sin i'}{\cos i'} = \frac{\sin i'}{\sqrt{1 - \sin^2 i'}}$$

Or, on a que

$$n' \sin i' = n \sin i \Leftrightarrow \sin i' = \frac{n}{n'} \sin i$$

Et:

$$\tan i' = \frac{\overline{SI}}{\overline{AS}} = \frac{n \sin i}{n' \sqrt{1 - \frac{n^2}{n'^2} \sin^2 i}}$$

$$\sin i = \frac{\overline{SI}}{\overline{AS}} \sqrt{1 - \sin^2 i}$$

$$\frac{\overline{SI}}{\overline{AS}} = \frac{n}{n'} \frac{\overline{SI}}{\overline{AS}} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 i}}{1 - \frac{n^2}{n'^2} i'}$$

On cherche à obtenir une relation indépendante de l'angle d'incidence, car si notre relation est indépendante, elle marche pour tout angle d'incidence donc stigmatisme.

$$\overline{A'S} = \frac{n'}{n} \overline{AS} \sqrt{\frac{1 - \frac{n^2}{n'^2} \sin^2 i}{1 - \sin^2 i}}$$

Relations indépendante de  $i$  donc indépendante du rayon si:  $\sin^2 i \rightarrow 0$

On l'observe dans le cas des conditions de Gauss (petits angles). On a donc:

$$\overline{A'S} = \frac{n'}{n} \overline{AS} \sqrt{\frac{1}{1}}$$

$$\boxed{\frac{\overline{A'S}}{n'} = \frac{\overline{SA}}{n}}$$

Fig. 21. – Relation de conjugaison du dioptré plan

Pour « tout » rayon qui vérifie les conditions de Gauss, le stigmatisme approché.

On pose  $B$  au dessus de  $A$  tel que  $AB$  perpendiculaire à l'axe optique. Dans le cas de nos conditions de Gauss,  $A'B'$  est perpendiculaire à l'axe optique donc aplanétisme approché.