Principes de la dynamique - Lois de Newton

I. Point matériel ou systèmes de point matériels - Définition et propritétés

1) Notion de solide

On considère qu'un solide est un objet parfaitement indéformable. C'est à dire:

$$\forall A, B \in S, AB \text{ est constante dans le temps}$$

2) Modélisation d'un solide par un point matériel

On modélise un solide (donc un ensemble de point) par un seul point dans l'espace, positionné en son centre de masse.

On néglige donc la rotation du solide sur lui même. (Approximation douteuse)

3) Notion de masse - Masse inertielle

Masse inertielle: Grandeur scalaire qui mesure la difficulté à mettre un objet en mouvement, d'unité [kg].

4) Quantité de mouvement

On associe la masse à une grandeur vectorielle, la **Quantité de mouvement**:

$$\overrightarrow{p_{/R}}(M) = m \times \overrightarrow{v_{/R}}(M)$$

5) Ensemble de points matériels

Pour passer de la mécanique d'un point à toute la mécanique d'un système, on associe à chaque point M_i sa masse m_i:

La masse totale du système est donc définit par $m_{\text{tot}} = \sum_i m_i$

On peut aussi se placer d'un point de vu continu (pour modéliser un solide par une infinité de points), avec $m_{\text{tot}} = \int_\Omega m(x) \,\mathrm{d}x$

6) Centre d'intertie ou de gravité

On appelle G le centre d'inertie.

Centre d'inertie: le barycentre de l'ensemble des points du système du système par-rapport à leur masse. (C'est la moyenne poindérée de la position des points).

$$m_{\text{tot}}\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{O\text{Tartanpion}_i}$$

D'où:

$$m_{\text{tot}}\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{G\text{Tartanpion}_i}\right) \Leftrightarrow \sum_i m_i \overrightarrow{G\text{Tartanpion}_i} = \vec{0}$$

7) Quantité de mouvement d'un système de points matériels

On a:

$$m_{\text{tot}}\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$$

On dérive:

$$m_{\text{tot}}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t} = \sum_i m_i \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_i}}{\mathrm{d}t}\right)_{/R}$$

$$m_{\text{tot}}\overrightarrow{v_{/R}}(G) = \sum_i m_i \overrightarrow{v_{/R}}(M_i)$$

$$\overrightarrow{p_{/R}}(G) = \sum_i \overrightarrow{p_{/R}}(M_i)$$

II. Première loi de Newton ou principe d'inertie - Référentiel galiléen

1) Énoncé

Θ Théorème:
Il existe des référentiels privilégiés, appellés « référentiels gallilééns », dans lesquels un point matériel isolés aura un mouvement rectiligne, uniforme.

C'est un principe d'existence: il y en aura forcément un.

Tous les référentiels ne sont pas équivalents: il y a des référentiels dîts « galiléens » et « non-galiléens ».

Pour savoir si un référentiel galiléen:
- On prend un point matériel isolé (donc aucune force ne s'applique à lui)
- On regarde son mouvement
- Si il est rectiligne et uniforme, notre référentiel est galiléen

Toutes nos propriétés seront énoncés dans des référentiels galiléens.

Il existe une infinité de référentiels galiléens. En utilisant la loi de composition des vitesses (qui est admise pour l'instant):

$$\overrightarrow{v_{/R'}(M)} = \overrightarrow{v_{/R}}(M) + \vec{v}_e(R'/R)$$

On prend un point M isolé, et le référentiel est galiléen, donc M possède un mouvement rectiligne uniforme.
Donc $\overrightarrow{v_{/R}}(M) = \text{constante}$

R' sera galilén si $\overrightarrow{v_{/R'}}(M) = \text{constante}$

Par loi de composition:

$$\vec{v_e}(R'/R) = \text{constante}$$

Donc R' est en translation rectiligne uniforme par rapport à R.

2) Recherche d'un référentiel galiléen

On serait tenté de prendre la Terre comme référentiel galilén. Non. Tout ne se passe pas bien.

On prend un objet. On le lâche d'une certaine hauteur. Il se déplace un peu vers l'est. De quelques centimètres, mais le référentiel n'est donc pas galiléen.

La Terre tourne sur elle même, donc le référentiel n'est pas galiléen. On prend donc le centre de la Terre. Mais la Terre, elle tourne autour du Soleil. Mais le Soleil, etc…

En toute rigueur, on devrait prendre le centre de l'univers comme référentiel galiléen.
Malheureusement, on ne sait pas où il est.

Selon la précision demandée, on peut considérer ces différents référentiels comme à peu près galiléens.

III. Causes ou origines des mouvements - Forces ou actions mécaniques

1) Notion de force

Force: Pertubation permettant de mettre en mouvement un système, **dans un système de points**.

Action mécanique: Pertubation mettant en mouvement un solide (on se libère donc de l'approximation du point). On ne le verra qu'en s'intéressant à la rotation d'un solide autour d'un axe.

Dans un sytème de points matériels (donc dans tout les chapitres de mécanique, sauf un): on utilise des forces.
Dans un système de solides: on utilise des actions mécaniques.

On décrit une force par un vecteur:
- Une direction, un sens, une norme

> ✓ Tip:
> Parfois, il nous manquera un composant du vecteur.
> Il faudra alors tenir compte des inconnues, et faire avec, ou résoudre.

2) Les 4 interactions fondamentales

a) Interaction gravitionelle De constante fondamentale $G = 6.67 \times 10^{-11} \mathrm{N} \cdot \mathrm{kg}^{-2} \cdot \mathrm{m}^2$.

Soient deux points masses $(A_1, m_1), (A_2, m_2)$:

$$\overrightarrow{f_{2\to1}} = G\overrightarrow{A_2A_1}\frac{m_1m_2}{(A_1A_2)^3}$$

Aussi noté:

$$\overrightarrow{f_{2\to 1}} = G\hat{u}_{2\to 1}\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Avec $r = A_1 A_2$, $\hat{u} = \frac{\overrightarrow{A_2 A_1}}{\|\overrightarrow{A_2 A_1}\|}$ le vecteur normalisé de A_2 vers A_1.

b) Interaction électromagnétique

$$\vec{f} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

Cas particulier: interaction de Coulomb

Soient deux points masses (A_1, m_1), (A_2, m_2) de charge q_1 et q_2:

$$\vec{f}_{2\to 1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{(A_1 A_2)^3}\overrightarrow{A_2 A_1}$$

Très similaire à l'attraction gravitationelle, mais la force peut être répulsive si les charges sont de même signe.

ε_0 est la permissivité électrique du vide avec $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F} \cdot \mathrm{m}^{-1}$

c) Interaction forte

d) Interaction faible

3) Troisième loi de Newton : principe de l'action et de la réaction ou principe des actions réciproques

Θ Théorème:
Si un point matériel A exerce sur un point matériel B une force $\overrightarrow{f_{A\to B}}$, alors le point B exerce une force $\overrightarrow{f_{B\to A}}$ sur A telle que $\overrightarrow{f_{A\to B}} = -\overrightarrow{f_{B\to A}}$

4) Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

Θ Théorème:
La dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{f}_i$$

Si on connaît l'ensemble des actions s'appliquant à un point matériel, on peut en déduire le mouvement.

Souvent, on ne connaît pas toutes les interactions qui agissent sur un point. Avec l'information du mouvement, on peut trouver l'accélération, et de là déterminer certaines des forces qui s'appliquent au point.

5) Cas de la statique

Un point est statique si il n'y a pas de mouvement: la vitesse et l'accélération est nulle.

Vitesse nulle et

$$\sum_i \vec{f}_i = 0$$

6) Méthode de résolution en quatre étape

Un problème de mécanique se résout en quatres points:
1. Définition du système
2. Définition du référentiel
3. Bilan des forces
4. Résolution par choix d'une méthode, pour l'instant le principe fondamental de la dynamique

IV. Mouvement dans le champ de pesanteur

1) Poids

Poids: Le poids est la force appliquée par la Terre sur un objet. Il tient compte de l'attraction gravitationelle et de la rotation de la Terre (donc en général il n'est pas dirigé exactement vers le bas, on le verra en spé). On n'en tiendra pas rigueur, notre poids sera strictement vers le bas.

On pose le poids $\vec{P}$

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Avec m la masse, et $\vec{g}$ l'accélération de pesanteur orientée vers le bas.

2) Mouvement d'un point M de masse m dans le champ de pesanteur

On se limite à la pesanteur et on ne considère pas les frottements.

En suivant notre plan de route:
1. On définit le système: c'est le point M
2. On prend le référentiel terreste (qu'on suppose galiléen parce qu'on se place sur une intervalle de temps suffisement courte, on ne voit pas l'effet de la rotation terrestre)
3. On fait le bilan des forces: $\vec{F} = m\vec{g}$
4. On résout avec le principe fondamental de la dynamique:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}(M) = m\vec{g}$$

On obtient l'équation différentielle du mouvement:

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Par la suite on dinstinguera deux cas:
- La chute libre, on laisse tomber un objet avec une vitesse initiale nulle
- Le tir, on lance un objet et on voit où il tombe

3) Mouvement en chute libre

Soit un point matériel M de masse m lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h. On note Oz l'axe vertical ascendant et $\overrightarrow{g}$ l'accélération du champ de pesanteur.
1. Établir l'équation différentielle du mouvement.
2. Déterminer l'équation horaire $z(t)$.
3. En déduire la durée de chute.
4. Exprimer la vitesse du point matériel lorsqu'il arrive au sol.

On a déjà établi l'équation différentielle du mouvement:

$$\vec{a} = \vec{g}$$

On se place dans les coordonées cartésiennes.

On pose notre équation horaire à partir de notre accélération:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

On intègre:

$$\begin{cases} \dot{x} = x_0 \\ \dot{y} = y_0 \\ \dot{z} = -gt + z_0 \end{cases}$$

On utilise les conditions initiales: vitesse nulle à l'origine, donc $x_0 = y_0 = z_0 = 0$
Et on intègre à nouveau:

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_1 \end{cases}$$

On utilise les conditions initiales, on suppose l'origine placé dans le même axe que M, et qu'il est placé au niveau du sol. L'objet est laché à une hauteur h, d'où:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

On arrive au sol en $z = 0$, on résout donc:

$$h - \frac{1}{2}gt_s^2 = 0 \Leftrightarrow t_s^2 = \frac{2}{g}h$$

$$\Leftrightarrow t_s = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ car t positif}$$

On a la vitesse en tout t avec l'équation horaire. On substitue t_s:

$$\dot{z} = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2hg}$$

4) Tir dans le vide

Un point matériel M est lancé depuis un point O pris comme origine du repère avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle α avec l'axe Ox horizontal. On note Oz l'axe vertical ascendant et $\overrightarrow{g}$ l'accélération du champ de pesanteur.

1. Justifier que le cas $\alpha = \frac{\pi}{2}$ peut être considéré comme une situation déjà abordé avec la chute libre étudiée précédemment.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement.
3. Déterminer les équations horaires.
4. En déduire l'équation et la nature de la trajectoire.
5. Montrer que M atteint une hauteur maximale en un point dont on précisera les coordonnées.
6. Exprimer la portée du tir à savoir l'abscisse x_P pour laquelle M retombe au sol qu'on suppose horizontal.
7. Établir que deux angles α sont possibles pour une vitesse de même module v_0 pour que M atteigne un point au sol supposé horizontal à une distance d du point de tir.

1. On peut séparer le problème en deux partie: l'ascension parfaitement verticale, le moment où la vitesse s'annulle, la chute libre.

On supposera donc $\alpha \notin \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

2. On fait la somme des forces ($\vec{a} = \vec{g}$):

3.

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

On intègre, les conditions initiales nous donnent $x_0 = \cos(\alpha)v_0$, $z_0 = \sin(\alpha)v_0$, $y_0 = 0$ car on se place dans le plan du lancé.

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos(\alpha)v_0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt + \sin(\alpha)v_0 \end{cases}$$

D'où (on place notre référentiel au point de lancé):

$$\begin{cases} x = \cos(\alpha)v_0 t \\ y = 0 \\ z = \sin(\alpha)v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

4. Pour obtenir l'équation de la trajectoire, on veut éliminer la variable t:

$$t = \frac{x}{\cos(\alpha)v_0} (\alpha \neq 0)$$

$$z = x\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{\cos(\alpha)^2 v_0^2}$$

La trajectoire est donc de forme parabolique.

5. On sait que si un extremum est atteint, alors la dérivée de z s'anulle. On cherche donc:

$$\dot{z} = 0$$

On peut soit dériver z avec les équations horaires (par-rapport à z), ou avec l'équation de trajectoire (par-rapport à x).

$$-gt + v_0 \sin(\alpha) = 0$$

$$t = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

On substitue dans les équations horaires:

$$\begin{cases} x = v_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \frac{1}{g} \\ z = \frac{\sin(\alpha)^2 v_0^2}{g} - \frac{\sin(\alpha)^2 v_0^2}{2g} = \frac{\sin(\alpha)^2 v_0^2}{2g} \end{cases}$$

$z \geq 0$, donc cet extremum est un maximum.

6. On cherche le x_P où la balle retombe au sol. On utilise l'équation de la trajectoire:

$$z = 0$$

$$-\frac{g}{2\cos(\alpha)^2 v_0^2} x_P^2 + x_P \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 0$$

$$x_P \left(-\frac{g}{2\cos(\alpha)^2 v_0^2} x_P + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \right) = 0$$

Soit $x_P = 0$ (lancement de la balle), soit:

$$x_P = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \frac{2\cos(\alpha)^2 v_0^2}{g} = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \frac{v_0^2}{g} = \sin(2\alpha) \frac{v_0^2}{g}$$

7. On cherche α_1 et α_2 tels que:

$$x_P(\alpha_1) = x_P(\alpha_2)$$

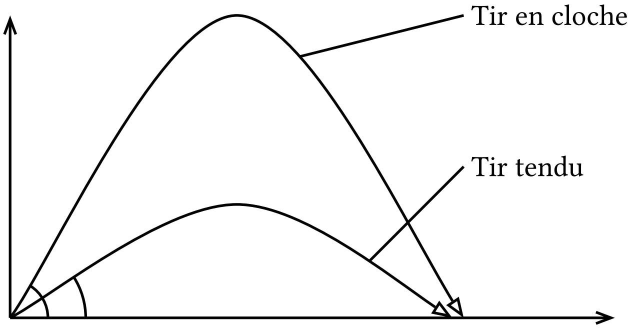
$$\sin(2\alpha_1) \frac{v_0^2}{g} = \sin(2\alpha_2) \frac{v_0^2}{g}$$

$$\sin(2\alpha_1) - \sin(2\alpha_2) = 0$$

$$\sin(\alpha_1) \cos(\alpha_1) - \sin(\alpha_2) \cos(\alpha_2) = 0$$

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$$

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2[\pi] \text{ ou } \alpha_1 \equiv -\alpha_2[\pi]$$

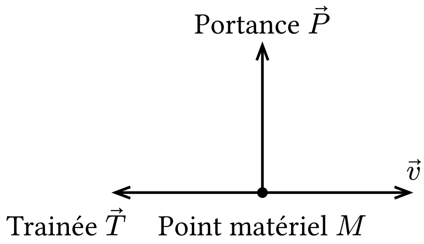


V. Influence d'un frottement fluide

1) Forces de frottement fluide

Un point dans un fluide sera affecté par ce fluide par deux force:
- La portance $\vec{P}$, la force qui permet aux avions de voler
- La trainée $\vec{T}$, la force de frottement fluide

L'effet du fluide est la somme des deux.



2) Chute avec un frottement fluide

Soit un point matériel M de masse m lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h. On suppose que M est soumis à une force de frottement de l'air proportionnelle à la vitesse avec un coefficient de frottement k. On note Oz l'axe vertical ascendant et $\overrightarrow{g}$ l'accélération du champ de pesanteur.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement.
2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.
3. Exprimer la vitesse du point matériel en fonction du temps.
4. Établir de deux manières l'existence d'une vitesse limite v_ℓ et donner son expression.

1. On définit notre système: le point M
   On fait un bilan des forces: gravitation $m\vec{g}$, et frottement fluide $-k\vec{v}$
   On établit l'équation différentielle du mouvement:
   $$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{v}\vec{v} = \vec{g}$$
2. En sah il y a pas de vitesse horizontale ou en profondeur, donc $v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$,
   mais on peut juste intégrer les vecteurs.
3. $$\vec{v}(t) = \overrightarrow{v_H}(t) + \overrightarrow{v_P}(t)$$
   Donc solution particulière de la forme:
   $$\overrightarrow{v_H} = \vec{V}e^{-\frac{k}{m}t}$$
   On peut poser $\tau = \frac{m}{k}$
   Le second membre est constant, donc on cherche $\overrightarrow{v_P}$ de la forme d'une constante. Donc:
   $$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_P}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$$
   D'où:
   $$\frac{k}{m}\overrightarrow{v_P} = \vec{g} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_P} = \frac{m}{k}\overrightarrow{v_P}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{V}e^{-\frac{t}{\tau}} + \tau\vec{g}$$

Pas de vitesse initiale, donc:

$$\vec{v}(0) = \vec{0} = \vec{V} + \tau\vec{g}$$

Donc $\vec{V} = -\tau\vec{g} = -\frac{m}{k}\vec{g}$ D'où:

$$\vec{v}(t) = \tau\vec{g}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

4. Deux manière:
   1. On a la solution, et on a que

      $$\vec{v}(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \tau\vec{g}$$

   2. Si $\vec{v}(t)$ tend vers une constante, alors $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \to 0$.

      On reporte dans l'équa-diff, et on a $\vec{v_\ell} = \tau\vec{g}$

3) Chute avec frottement proportionnel au carré de la vitesse

On reprend la situation du paragraphe précédent.
1. Comment est modifiée la vitesse limite si la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse? Donner son expression. Pour plus de simplicité, on utilisera un axe vertical Oz descendant.
2. Exprimer dans ce cas la vitesse en fonction du temps.

1. On définit notre système: le point M, dans un référentiel galiléen terrestre.

   On fait le bilan des forces:
   - Le poids $m\vec{g}$
   - Le frottement $kv\vec{v}$

   On applique le principe fondamental de la dynamique:

   $$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{g} + kv\vec{v}$$

   On projète sur l'axe $O\vec{z}$ (car les autres axes ne servent à rien):

   $$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv^2$$

   On suppose que v tend vers une vitesse limite v_ℓ, donc $\frac{\mathrm{d}v_\ell}{\mathrm{d}t} \to 0$,
   On remplace:

   $$mg - kv_\ell^2 = 0$$

   $$v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

   Mais si k n'a pas d'unité, v_ℓ n'est pas homogène à une vitesse: il faut changer l'unité de k

   De là, on récupère:

   $$mg = kv_\ell^2$$

On remplace:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = k(v_\ell^2 - v^2)$$

On suppose que la vitesse limite n'est jamais atteinte (pout diviser par $v_\ell^2 - v^2$):

$$\frac{\mathrm{d}v}{v_\ell^2 - v^2} = \frac{k}{m}\,\mathrm{d}t$$

On multiplie par le signe intégral:

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{v_\ell^2 - v^2} = \int \frac{k}{m}\,\mathrm{d}t$$

Ensuite, on résout nos intégrales comme si on avait pas fait des maths de physiciens.
On fait une décomposition en élément simple:

$$\begin{aligned}\frac{1}{v_\ell^2 - v^2} &= \frac{a}{v_\ell - v} + \frac{b}{v_\ell + v} \\ &= \frac{a(v_\ell + v) + v(v_\ell - v)}{(v_\ell + v)(v_\ell - v)} \\ &= \frac{(a+b)v_\ell + (a-b)v}{(v_\ell + v)(v_\ell - v)}\end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{cases} a = b \\ (a+b)v_\ell = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2v_\ell}$$

D'où:

$$\begin{aligned}\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{v_\ell^2 - v^2} &= \frac{1}{2v_\ell}\left(\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{v_\ell + v} + \int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{v_\ell - v}\right) \\ &= \frac{1}{2v_\ell}\left([\ln(v_\ell + v)]_0^v - [\ln(v_\ell - v)]_0^v\right) \\ &= \frac{1}{2v_\ell}\left(\ln\left(\frac{v_\ell + v}{v_\ell - v}\right)\right)\end{aligned}$$

En revenant à l'égalité des intégrales, on a égalité avec:

$$\frac{k}{m}t$$

Donc (on dit hassul les bornes c'est les même):

$$\frac{v + v_\ell}{v_\ell - v} = \exp\left(2v_\ell\frac{k}{m}t\right) = A$$

$$v + v_\ell = Av_\ell - Av$$

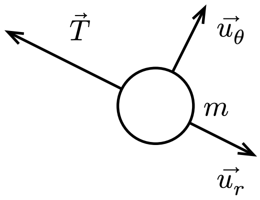
$$(A-1)v_\ell = (A+1)v$$

$$v = v_\ell\frac{A-1}{A+1}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= v_\ell \frac{\exp\left(2v_\ell \frac{k}{m}t\right) - 1}{\exp\left(2v_\ell \frac{k}{m}t\right) + 1} \\ &= v_\ell \frac{\exp\left(v_\ell \frac{k}{m}t\right) - \exp\left(-v_\ell \frac{k}{m}t\right)}{\exp\left(v_\ell \frac{k}{m}t\right) + \exp\left(-v_\ell \frac{k}{m}t\right)} \\ &= v_\ell \tanh\left(v_\ell \frac{k}{m}t\right) \end{aligned}$$

VI. Mouvement d'une masse suspendu au bout d'un fil

1) Tension d'un fil

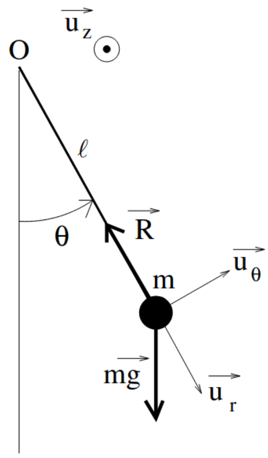


La tensionn du fil est:
- Dans la direction du fil
- Dans le sens de la masse vers le fil
- De norme inconnue

Il va donc falloir se débarasser de la norme. On va projeter dans la direction perpendiculaire au fil. On prendra donc $\vec{u_\theta}$ comme projection.

2) Oscillations d'un pendule simple

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur ℓ. On écarte M de sorte que le fil fasse un angle θ_0 avec la verticale descendante.



1. Établir l'équation différentielle du mouvement.
2. Exprimer la tension du fil.
3. En multipliant l'équation différentielle du mouvement par $\dot{\theta}$ puis en intégrant cette relation, en déduire l'expression de la tension du fil en fonction de la position du fil définie par θ (sans $\dot{\theta}$ ni $\ddot{\theta}$).
4. Montrer que pour de faibles angles, on retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique.

1.

On définit notre système: le point M, dans un référentiel galiléen terrestre.

On fait le bilan des forces:
- Le poids: $m\vec{g}$
- La tension du fil: $\vec{R}$
- Le frottement fluide de fdp: $-k\vec{v}$

On applique le principe fondamentale de la dynamique.

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} - k\vec{v}$$

On passe par la vitesse:

$$v = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \underbrace{\dot{z}\vec{u_r}}_{=0}$$

$$r = l \Rightarrow \dot{r} = 0$$

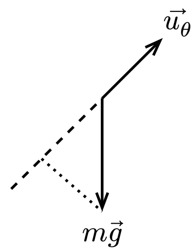
Donc:

$$\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = l\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - l\dot{\theta}^2\vec{u_r}$$

$\vec{R}$ est inconnu, on doit le faire disparaître, on va le projeter $\vec{a}$ sur $\vec{u_\theta}$.

Le terme multiplié par $\vec{u_r}$ va disparaître. Pour les autres:



$$\begin{cases} m\vec{g}/\vec{u_\theta} = -mg\sin\theta \\ \vec{R}/\vec{u_\theta} = 0 \\ k\vec{v}/\vec{u_\theta} = kl\dot{\theta} \end{cases}$$

Donc:

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - kl\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

2. On projette ensuite sur $\vec{u_r}$:

$$-ml\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - R + 0$$

$$R = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2$$

3.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

On multiplie par $\dot{\theta}$

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta\dot{\theta} = 0$$

On intègre:

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{l}\cos\theta = \text{constante}$$

On a les conditions initiales: en $t = 0$, $\theta = \theta_0$, donc $\dot{\theta} = 0$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{l}\cos\theta = 0 - \frac{g}{l}\cos\theta_0$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$R = mg\cos\theta + 2mg(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$R = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$$

4.

En supposant θ un angle faible, on peut faire l'approximation $\sin\theta \approx \theta$

On a donc notre équation différentielle:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique:
On a la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

En rajoutant les frottements fluides:

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\dot{\theta} + \theta = 0$$

On sait aussi résoudre ce genre d'équation.

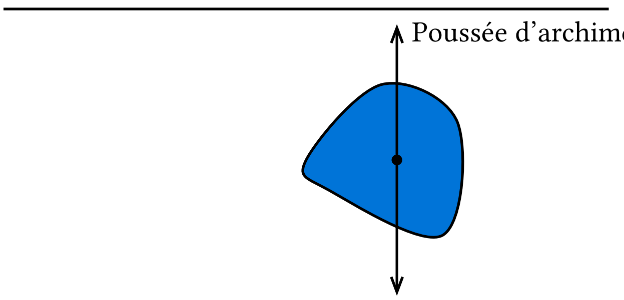
VII. Poussée d'archimède

1) Poussée d'archimède

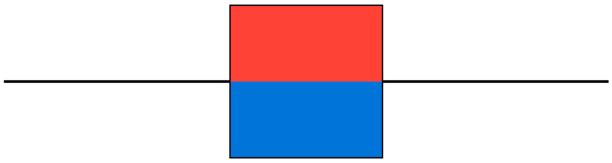
La poussée d'archimède est une force égale à l'opposé du poids du fluide déplacé.

Seulement, les points sont infinitésimaux, ils n'ont donc pas de volume. Pour parler de poussée d'archimède, on est obligé de considérer le volume déplacé.

On se situe un peu entre la mécanique des points et la mécanique des solides.



Problème: un solide peut-être à la fois dans l'eau et dans l'air:



On a donc à la fois une poussée d'archimède de l'eau, de l'air, et une répartition du volume qui change entre les deux.

2) Exemple du glaçon

Soit un glaçon de masse m qu'on place dans un verre. On remplit ensuite le verre avec de l'eau à ras bords.

1. Déterminer le volume immergé V_{im} du glaçon.
2. En déduire que le verre ne déborde pas lors de la fonte du glaçon.

On note ρ_ℓ la masse volumique de l'eau et ρ_g celle de la glace ainsi que $\overrightarrow{g}$ l'accélération du champ de pesanteur. On négligera la poussée d'Archimède de l'air.

1.

On suppose la poussée d'archimède de l'air négligeable.

Si on ne fait rien, le glaçon finira à l'équilibre. Donc le poids du glaçon sera égal à la poussée d'archimède:

$$m\vec{g} + \vec{\pi} = 0$$

$$m\vec{g} - \rho_{\text{eau}} V_{\text{im}} \vec{g} = 0$$

D'où:

$$V_{\text{im}} = \frac{m}{\rho_{\text{eau}}}$$

2.

Par conservation de la masse:

$$\rho_{\text{eau}} V_{\text{eau}} = m$$

Le volume d'eau obtenu est donc:

$$V_{\text{eau}} = \frac{m}{\rho_{\text{eau}}} = V_{\text{im}}$$

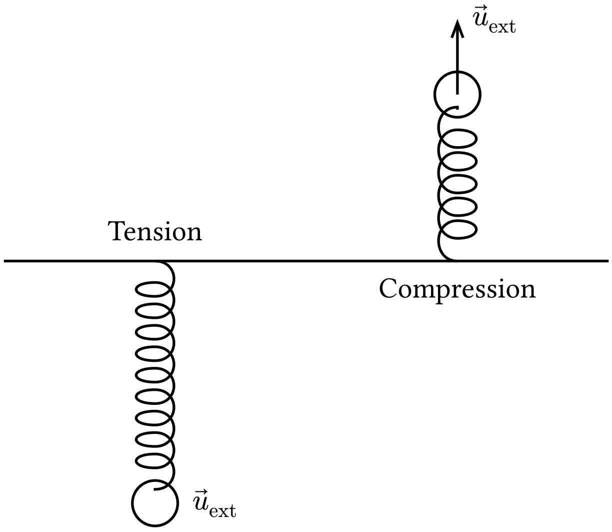
Donc le verre ne déborde pas :)

VIII. Action d'un ressort

1) Tension d'un ressort

Un ressort est définit par:
- Une longueur au repos, l_a
- Un coefficient de raideur, k

Deux situations pinrcipales d'un ressort:

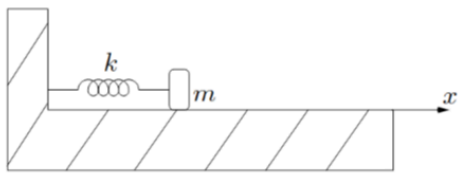


On décrit le ressort par une force de rappel appliqué à la masse attachée au bout:

$$\vec{F} = -k(l - l_a)\overrightarrow{u_{\text{ext}}}$$

2) Mouvement horizontal d'une masse attachée à un ressort

Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement le long d'un axe Ox horizontal. Il est attaché à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. On choisit la position de M à l'équilibre comme origine du repère. À $t = 0$, le point M est lâché sans vitesse initiale après avoir été écarté d'une distance x_0 par rapport à sa position d'équilibre.



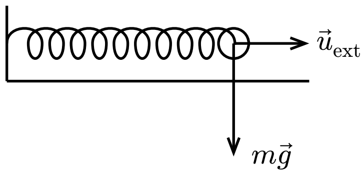
1. Exprimer la réaction du support.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement.
3. Déterminer l'équation horaire $x(t)$.

On définit le système: le point M attaché au bout du ressort.

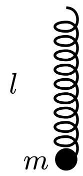
On se place dans le référentiel terrestre galiléen.

On fait le bilan des forces:
- Poids $m\vec{g}$

- Réaction du ressort $\overrightarrow{R_N}$, normale au mouvement dû à l'absence de frottements.



3) Mouvement vertical d'une masse attachée à un ressort



> Un point matériel M de masse m est suspendu à un ressort vertical de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. On choisit la position de M à l'équilibre comme origine du repère. À $t = 0$, le point M est lâché sans vitesse initiale après avoir été écarté d'une hauteur z_0 par rapport à sa position d'équilibre.
>
> 1. Déterminer la longueur ℓ_e du ressort à l'équilibre.
> 2. Établir l'équation différentielle du mouvement.
> 3. En déduire que l'équation horaire $z(t)$ est identique à celle obtenue dans le cas d'un mouvement horizontal.

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On fait un bilan des forces:
- Le poids $m\vec{g}$
- La réaction du ressort $\vec{F}$

On applique le principe fondamental de la dynamique:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k(l - l_a)\vec{u}_{\text{ext}}$$

1.

À l'équilibre, on a:

$$\begin{cases} \vec{a} = 0 \\ \vec{v} = 0 \end{cases}$$

Donc $m\vec{g} - k(l - l_a)\vec{u}_{\text{ext}} = 0 \Leftrightarrow m\vec{g} = k(l - l_a)\vec{u}_{\text{ext}}$

On projette sur l'axe de $\vec{u}_{\text{ext}}$:
$k(l - l_a) = mg \Leftrightarrow l_a = l - \frac{mg}{k}$

2.

Si on est pas à l'équilibre, on a $\vec{a} \neq 0$, donc:
- $m\ddot{x} = mg - k(l - l_a)$
-

On résout l'équa diff

4)

5) Analogie avec les oscillations électriques

	Mécanique	Electronique
Équation différentielle	$m\ddot{x} + kx = 0$ $m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0$	$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0$ $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$
Variables	• Élongation x • Vitesse $\dot{x}$ • Masse m • Coefficient de frottement λ • Ressort de raideur k	• Charge q • Intensité $i = \dot{q}$ • Inductance L • Résistance R • Capacité C
Pulsation	$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\sqrt{\frac{1}{LC}}$

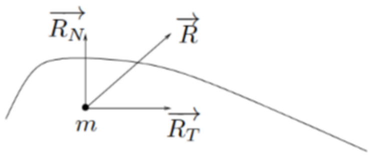
IX. Réaction d'un support solide

1) Lois de Coulomb-Amontons du frottement solide

Les lois d'Amontons et de Coulomb s'appliquent plus à des systèmes solides (et non des systèmes points), car c'est tout une surface qui va frotter, donc c'est délicat de ramener tout cela à un seul point.

On considère la normale à la surface au point M, et le plan tangentiel à la surface au point.

On décompose la force de friction en une force normale, et une force tangente (dans le plan tangentiel):

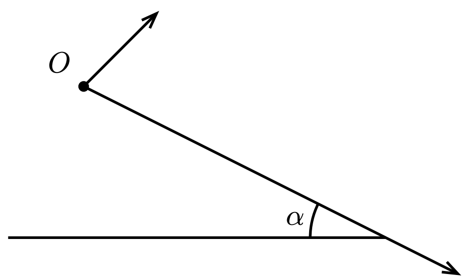


$$\vec{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$$

- En l'asbence de frottements solides, on a juste $\overrightarrow{R_T} = 0$
- Si on a des frottements, si la vitesse de glissement $\vec{v_g}$ (qui dans le cas d'un système point sera juste la vitesse du point, mais différent dans un solide) est non nulle, le frottement tangent $\overrightarrow{R_T}$ sera opposé (en terme de direction, PAS en terme de norme) à $\vec{v_g}$, et on aura $\overrightarrow{R_T} = f\overrightarrow{R_N}$, avec f le coefficient de frottement.

2) Exemple du skieur

Un objet de masse m est posé immobile sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.
On note f_0 le coefficient de frottement statique.
Déterminer l'angle α à partir duquel l'objet commence à glisser.



On définit notre système: M. On se place dans le référentiel terrestre galiléen. On fait un bilan des forces:

- Le poids $m\vec{g}$
- La réaction
  - On peut négliger les frottements $\vec{R} = \overrightarrow{R_N}$
  - Ou ne pas les négliger $\vec{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$

On applique le principe fondamental de la dynamique:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$$

1. On se place dans la situation sans frottement:

$$\vec{R} = \overrightarrow{R_N}$$

On projette sur l'axe qui fait disparaître $\overrightarrow{R_N}$, donc sur $\overrightarrow{O_x}$.

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha$$

> Φ Note:
> On sait qu'il n'y a pas de mouvement sur l'axe $\overrightarrow{O_y}$, donc:
>
> $$0 = -mg\cos\alpha + R_N$$
>
> D'où
>
> $$R_N = mg\cos\alpha$$

On a donc:

$$\ddot{x} = g\sin\alpha$$

On intègre:

$$\dot{x} = tg\sin\alpha$$

$$x = \frac{1}{2}t^2 g\sin\alpha$$

2. On ne néglige pas les frottements, donc:

$$\vec{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$$

$\overrightarrow{R_T}$ est de même directement que l'axe $\overrightarrow{O_x}$, de sens opposé à $\vec{v}$, et de norme

$$R_T = fR_N$$

On doit projeter sur les deux axes:

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - R_T$$

$$0 = -mg\cos\alpha + R_N$$

Donc:

$$R_N = mg\cos\alpha$$

$$R_T = fR_N = fmg\cos\alpha$$

D'où:

$$\ddot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

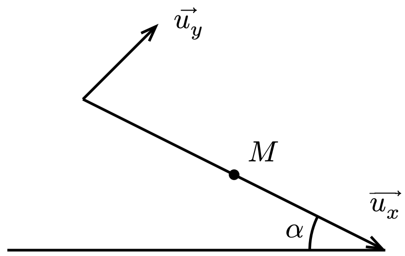
On intègre:

$$\dot{x} = tg(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

$$x = \frac{1}{2}t^2 g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

3) Glissement d'un solide

Un objet de masse m est posé immobile sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.
On note f_0 le coefficient de frottement statique.
Déterminer l'angle α à partir duquel l'objet commence à glisser.



Le système étudié est le point M. On se place dans le référentiel terrestre galiléen. On fait le bilan des forces:

- Le poids $m\vec{g}$
- La réaction $\vec{R} = \overrightarrow{R_T} + \overrightarrow{R_N}$

On suppose qu'on est à l'équilibre:

$$\vec{0} = m\vec{g} + \overrightarrow{R_T} + \overrightarrow{R_N}$$

On projette:

- Sur $\overrightarrow{u_x}$: $0 = mg\sin\alpha - R_T + 0$
- Sur $\vec{u_y}$: $0 = -mg\cos\alpha + 0 + R_N$

D'où:

$$\begin{cases} R_N = mg\cos\alpha \\ R_T = mg\sin\alpha \end{cases}$$

À l'équilibre, quand $\vec{v} = \vec{0}$:

$$R_T < f_0 R_N$$

On reste à l'équilibre tant que

$$R_T < f_0 R_N$$

$$mg \sin\alpha < f_0 mg \cos\alpha$$

$$\tan\alpha < f_0$$