

# Introduction à la mécanique Systèmes de Coordonnées

1. Bref historique .....	1
2. Objet de la mécanique .....	1
3. Systèmes de coordonnées .....	1
4. Dérivée d'un vecteur unitaire tournant par rapport à son angle de rotation .....	9

## I. Bref historique

## II. Objet de la mécanique

### 1) Quelques définitions

---

- **Cinématique**: Description, analyse des mouvements, sans s'intéresser aux causes de ce mouvement.
- **Dynamique**: Étude des causes du mouvement: notion de force et d'action mécanique
  - **Statique**: Étude des équilibres en l'absence de mouvement

### 2) Cadre de la mécanique newtonienne

---

#### a) Unités

- **Mètre**: Distance parcourue par la lumière en  $\frac{1}{c}$  seconde.
- **Seconde**: Horloge atomique

#### b) Hypothèse de la mécanique newtonienne

On considère que:

- La précision de la position et de la vitesse est illimitée et absolue.
  - (Faux car principe d'incertitude quantique mais négligeable à l'échelle macroscopique)
- Le temps avance à la même vitesse partout
  - (Faux car relativité restreinte, mais négligeable à l'échelle macroscopique)
- Espace euclidien = La somme des angles d'un triangle vaut  $180^\circ$ , l'espace est plat
  - (Faux car torsion de l'espace-temps)
- Le temps et l'espace sont continus
  - (Faux car quantisation)

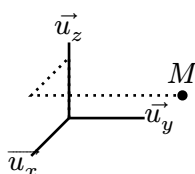
## III. Systèmes de coordonnées

Un système de coordonnées permet de se repérer dans l'espace par rapport à une origine.

### 1) Coordonnées cartésiennes

---

On pose un repère orthonormé  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$



On peut atteindre le point  $M$  avec ses coordonnées:  $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

On peut faire varier les coordonnées de  $M$  dans les trois directions élémentaires.

Déplacement élémentaire:

$$d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{u}_x + dy\overrightarrow{u}_y + dz\overrightarrow{u}_z$$

En faisant varier  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ .

On obtient un parallépipède de coté  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ . On appelle le volume de ce parallépipède le volume élémentaire:

$$d\tau = dx \, dy \, dz$$

Ce parallépipède possède 3 faces élémentaire:

- Une perpendiculaire à  $\overrightarrow{u}_x$ , de surface  $dy \, dz = dS_x$
- Une perpendiculaire à  $\overrightarrow{u}_y$ , de surface  $dx \, dz = dS_y$
- Une perpendiculaire à  $\overrightarrow{u}_z$ , de surface  $dy \, dx = dS_z$

## 2) Coordonnées cylindriques

Lorsque notre système tourne autour d'un point fixe, il sera souvent beaucoup plus simple d'utiliser directement un repère cylindrique, plutôt que des coordonnées cartésiennes.

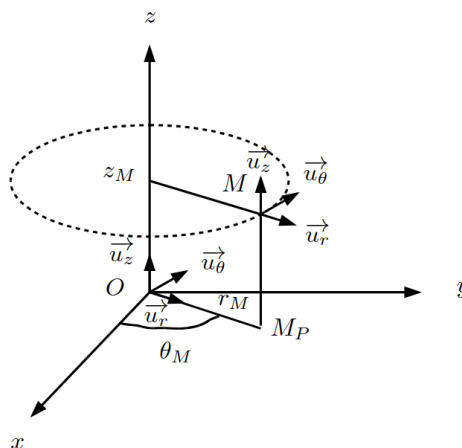
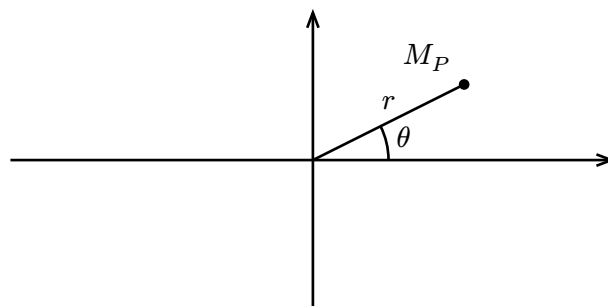


Fig. 2. – Repère cylindriques

On va regarder ce qui se passe dans le plan  $\vec{x}\vec{y}$ .

On prend  $M_P$  le projeté orthogonal de  $M$  dans le plan  $\vec{x}\vec{y}$



On prend la distance  $OM_P$  dans ce plan, ainsi que l'angle  $\theta$  entre  $\overrightarrow{OM_P}$  et le vecteur  $\vec{x}$

Coordonnées cylindriques:

- $r \rightarrow$  La distance  $OM_P$  (qui est positive)

- $\theta \in [0; 2\pi[$
- $z$ , la hauteur, la même que dans les coordonnées cartésiennes

Autrement dit, on utilise des coordonnées polaires pour  $x$  et  $y$ , et des coordonnées cartésiennes pour  $z$ .

### a) Conversion depuis les coordonnées cartésiennes

On a:

$$r = OM_P = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x > 0 \text{ et } y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}$$

$$z = z$$

### b) Conversion vers coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

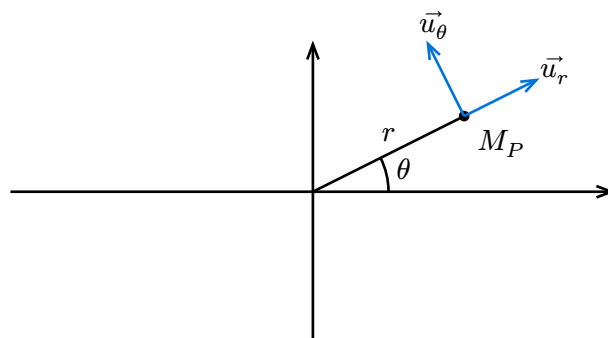
### c) Base mobile

On se place dans les coordonnées polaires.

On a la base du repère polaire  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$

On va prendre la base locale du point  $M_P$ . On pose  $\vec{u}_r$  le vecteur unitaire  $\widehat{OM_P}$  et  $\vec{u}_\theta$  son vecteur orthogonal unitaire (afin de former une base orthonormée), qu'on prendra dans le sens trigonométrique.

$$\begin{cases} u_r = \vec{x} \cos \theta + \vec{y} \sin \theta \\ u_\theta = -\vec{x} \sin \theta + \vec{y} \cos \theta \end{cases}$$



On obtient une nouvelle base de l'espace:  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

N'importe quel point/vecteur possède une représentation dans cette base et dans la base cartésienne:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z \\ &= a_r \vec{u}_r + a_\theta \vec{u}_\theta + a_z \vec{u}_z\end{aligned}$$

$a_r$ : Composante radiale

$a_\theta$ : Composante orthoradiale

On peut enfin représenter  $\overrightarrow{OM}$  dans cette base:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_P} + \overrightarrow{M_P M}$$

$$\overrightarrow{OM_P} = r \vec{u}_r + 0 \times \vec{u}_\theta$$

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$$

**!! Caution:**

Et non pas  $\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r + \theta \vec{u}_\theta + z \vec{u}_z$

Le  $\theta$  est « caché » dans  $u_r$ , la base est mobile.

On peut passer de la base cylindrique vers la base cartésienne:

$$\{\vec{u}_x = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$$

#### d) Déplacement élémentaire

- Pour passer de  $x$  à  $r + dr$ , le point  $M$  s'est déplacé sur  $OM_P$  de  $dr$  dans le sens de  $u_r$ , d'où un déplacement de  $dr \vec{u}_r$
- Pour passer de  $z$  à  $z + dz$ , le point  $M$  subit une translation de  $dz \vec{u}_z$
- Pour passer de  $\theta$  à  $\theta + d\theta$ , le point  $M_P$  subit une rotation d'axe  $(O, \vec{z})$ , donc:
  - La distance parcourue vaut  $r d\theta$  dans la direction  $\vec{u}_\theta$ , d'où:  $r d\theta \vec{u}_\theta$

On a donc:

$$d\overrightarrow{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

#### e) Volume élémentaire

On peut encore apparenter notre déplacement à un mini parallépipède.

On obtient un volume élémentaire:

$$d\tau = r dr d\theta dz$$

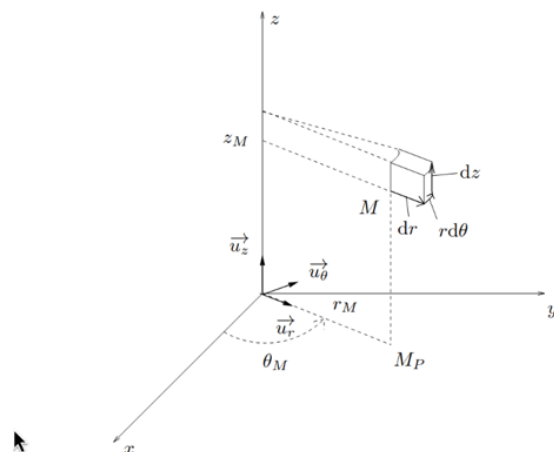


Fig. 5. – Volume élémentaire dans un repère cylindrique

On peut aussi définir des surfaces élémentaires:

- $dS_r \perp \vec{u}_r$  avec  $dS_r = r d\theta dz$
- $dS_\theta \perp \vec{u}_\theta$  avec  $dS_\theta = dr dz$
- $dS_z \perp \vec{u}_z$  avec  $dS_z = r dr d\theta$

### 3) Coordonnées sphériques

Φ Note:

Convention:

- ⊙ Vecteur pointant vers nous
- ⊗ Vecteur pointant à l'opposé

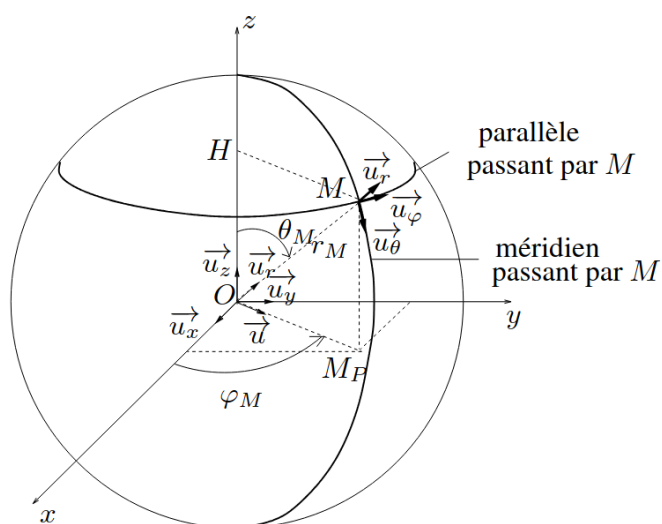


Fig. 6. – Repère sphérique

On va directement définir  $r$  comme la distance  $OM$ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

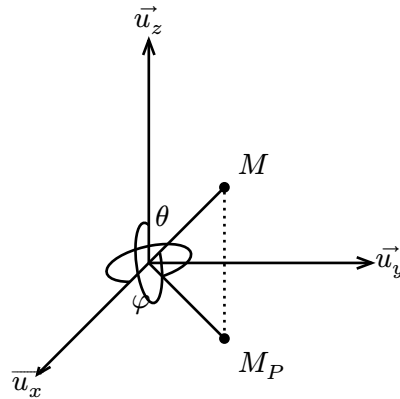
**!! Caution:**

L'angle  $\theta$  des coordonnées sphériques n'a rien à voir avec l'angle  $\theta$  des coordonnées cylindriques

On projete  $M$  sur le plan  $\vec{x}\vec{y}$  pour obtenir  $M_P$

On a:

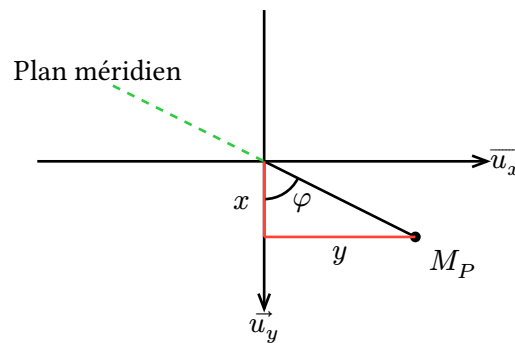
- $\varphi$  l'angle entre  $\vec{x}$  et  $\overrightarrow{OM_P}$ , avec  $\varphi \in [0; 2\pi[$
- $\theta$  l'angle entre  $\vec{z}$  et  $\overrightarrow{OM}$ , avec  $\theta \in [0; \pi[$



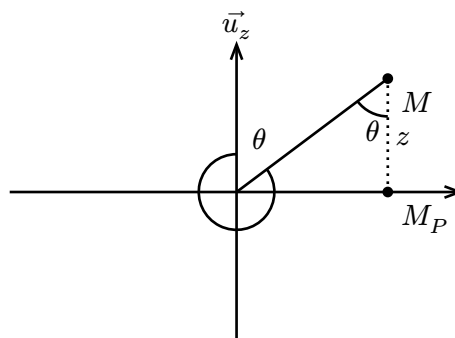
**a) Conversion en coordonnées cartésiennes**

On s'intéresse aux plans:

- $\vec{u}_x \vec{u}_y$ , le plan équatorial



- $OM_P M$ , le plan méridien



Ce qui nous donne:

- Dans le plan équatorial:

$$\cos \varphi = \frac{x}{OM_P} = \frac{x}{r \sin \theta}$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{OM_P} = \frac{y}{r \sin \theta}$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

- Dans le plan méridien:

$$\cos \theta = \frac{z}{r}$$

$$z = r \cos \theta$$

## b) Conversion vers coordonnées sphériques

On a, assez simplement:

$$r = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Pour trouver les angles, on utilise les fonctions trigonométriques réciproques:

- Pour  $\theta$ :

- Avec le cos:

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

- Avec la tan:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{OM_P}{z}$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

- Pour  $\varphi$ :

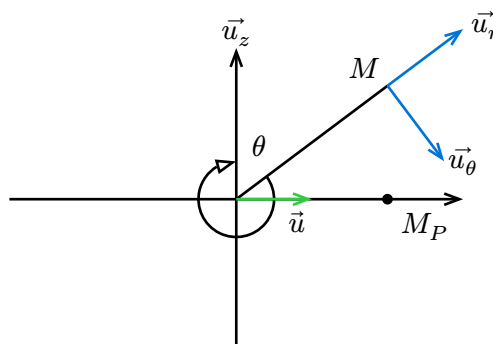
- $\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{r \sin \varphi \sin \theta}{r \cos \varphi \sin \theta} = \frac{y}{x}$

## c) Base mobile

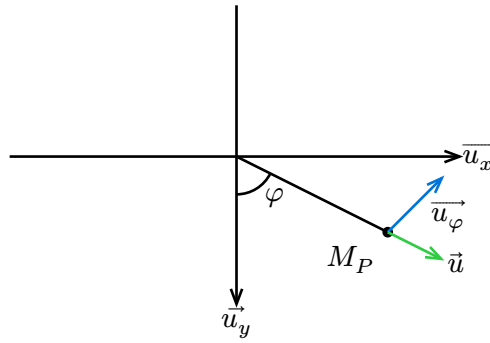
On pose la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ :

On pose aussi le vecteur « joker »  $\vec{u}$ , qui est orthogonal à  $\vec{u}_\varphi$  dans le plan équatorial, et qui simplifie le calcul des vecteurs de la base.

$\vec{u}_\theta$  va dans le même sens que  $\theta$ , et  $\vec{u}_\varphi$  va dans le même sens que  $\varphi$ .



Le vecteur orthogonal à  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  est orthogonal au plan méridien:



On a donc:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_y \\ \vec{u}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y \\ \vec{u}_r &= \cos \varphi \vec{u}_z + \sin \theta \vec{u} \\ &= \cos \varphi \vec{u}_z + \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta &= -\sin \theta \vec{u}_z + \cos \theta \vec{u} \\ &= -\sin \theta \vec{u}_z + \cos \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{u}_y\end{aligned}$$

#### d) Déplacement élémentaire

Le déplacement par rapport à  $r$  est plutôt simple:

$$r \longrightarrow r + dr \Leftrightarrow dr \vec{u}_r$$

Le déplacement par rapport à  $\theta$  se rapporte à se déplacer de  $\theta$  sur le cercle de centre  $O$  de rayon  $r$  (la coupe de la sphere par le plan méridien), d'où:

$$\theta \longrightarrow \theta + d\theta \Leftrightarrow r d\theta \vec{u}_\theta$$

Le déplacement par rapport à  $\varphi$  se rapporte à déplacer  $M_P$  sur le cercle de centre  $O$ , et de rayon  $OM_P = r \sin \theta$  (le rayon est plus petit si on se rapproche des pôles et plus grand si on se rapproche de l'équateur), d'où:

$$\underbrace{r \sin \theta}_{\text{rayon}} \underbrace{d\varphi}_{\text{angle}}$$

Un rayon  $\times$  un angle est une distance, et elle est parcourue dans la direction de  $\vec{u}_\varphi$ :

$$\varphi \longrightarrow \varphi + d\varphi \Leftrightarrow r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

On obtient donc le déplacement élémentaire:

$$d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

$$d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Et les surfaces perpendiculaires:

- $dS_r = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$
- $dS_\theta = r \sin \theta dr d\varphi$
- $dS_\varphi = r dr d\theta$

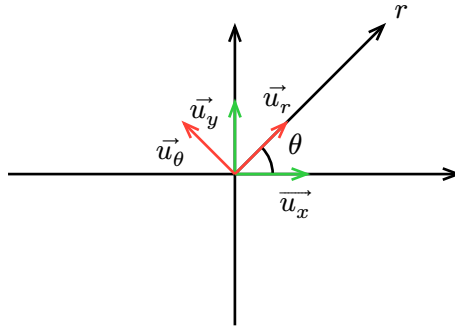


## IV. Dérivée d'un vecteur unitaire tournant par rapport à son angle de rotation

### 1) Cas des coordonnées polaires

---

On se place en coordonnées polaires:



$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y \end{cases}$$

On dérive  $\vec{u}_r$ :

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y = \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\cos \theta \vec{u}_x - \sin \theta \vec{u}_y = -\vec{u}_r$$

Dériver le vecteur unitaire polaire correspond à le faire tourner d'un angle  $\frac{\pi}{2}$

### 2) Cas général

---

On prend  $\hat{u}$  un vecteur unitaire, tournant d'un angle  $\alpha$

On cherche  $\frac{d\hat{u}}{d\alpha}$

On a  $\hat{u}$  unitaire, donc:

$$\|\hat{u}\|^2 = 1 = \hat{u} \cdot \hat{u}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\|\hat{u}\|^2}{d\alpha} &= \hat{u} \cdot \frac{d\hat{u}}{d\alpha} + \frac{d\hat{u}}{d\alpha} \cdot \hat{u} \\ &= 2\hat{u} \cdot \frac{d\hat{u}}{d\alpha} \\ &= \frac{d(1)}{d\alpha} = 0 \end{aligned}$$

Donc:

$$\hat{u} \cdot \frac{d\hat{u}}{d\alpha} = 0$$

$\hat{u}$  est un vecteur unitaire, donc ne peut pas être nul.

Donc la dérivée d'un vecteur unitaire sera forcément orthogonal à ce vecteur.

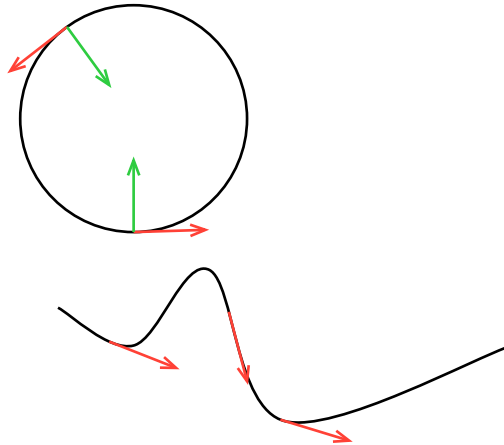
### 3) Base de Fresnel

**Base de Fresnel:** Quatrième solution pour se repérer dans l'espace, liée à la trajectoire que l'on va suivre.

On définit l'abscisse curviligne comme la distance sur la trajectoire que l'on suit.

On définit alors un vecteur unitaire  $\vec{u}_t$  qui va suivre la trajectoire, et un vecteur normal  $\vec{u}_n$  orthogonal à  $\vec{u}_t$ . Le vecteur normal devra toujours pointer vers l'intérieur de la concavité de la courbe.

Dans le cas circulaire, on a donc  $\vec{u}_t = \vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_n = -\vec{u}_r$



On a:

$$\frac{d\vec{u}_t}{ds} = \frac{\vec{u}_n}{R}$$

Avec  $R$  le rayon de courbure.