# Oscillateur en régime sinusoïdal forcé
# Résonance - Filtres du 2nd ordre



## I. Circuit $R, L, C$ série soumis à une excitation sinusoïdal

Dans tout ce chapitre, on s'intéressera au régime permanent de circuits du second ordre soumis à un régime sinusoïdal forcé.

On utilisera donc des impédances.

### 1) Différentes tensions et montages correspondants

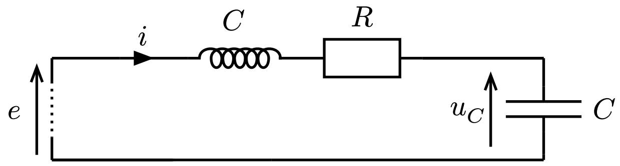



*Fig. 1. – Tension au bornes de $C$*

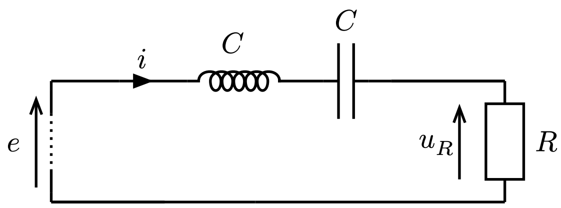



*Fig. 2. – Tension au bornes de $R$*

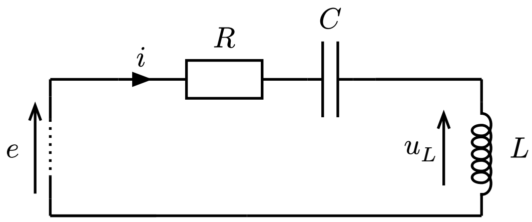



*Fig. 3. – Tension au bornes de $L$*

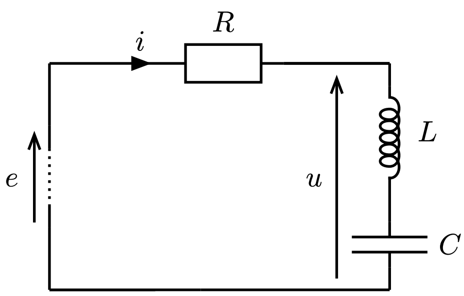



*Fig. 4. – Tension au bornes de $L, C$*

## 2) Équation différentielle

- Aux bornes de $C$ (Fig. 1):

$$\begin{aligned} e &= u_L + u_R + u_C \\ &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C \\ &= LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{e}{LC} = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{LC}}$$

- Aux bornes de $R$: (Fig. 2)

$$\begin{aligned} e &= u_L + u_C + u_R \\ &= L\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} + u_C + u_R \end{aligned}$$

On a $i = \frac{u_R}{R}$, on dérive l'équation précédente:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}^2u_R}{\mathrm{d}t^2} + \frac{u_R}{RC} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2u_R}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{CL}u_R}$$

- Aux bornes de $L$ (Fig. 3):

$$\begin{aligned} e &= u_R + u_C + u_L \\ \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}^2e}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{u_L}{LC} + \frac{\mathrm{d}^2u_L}{\mathrm{d}t^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_L = \frac{\mathrm{d}^2e}{\mathrm{d}t^2}}$$

- Aux bornes de $L, C$ (Fig. 4):

  On va supposer un régime qu'une excitation sinusoïdale est envoyée en entrée, on va utiliser les impédences pour obtenir une fonction de transfert, puis on transforme tout les $j\omega$ et les $\omega^2$ en différentiations pour obtenir l'équation différentielle, et on va dire hassul le système respecte cette équation différentielle pour toutes les entrées, donc on a trouvé l'équation différentiel du circuit.

$$\underline{e} = R\underline{i} + j\omega\underline{i} + \frac{1}{jC\omega}\underline{i}$$

$$\underline{u} = \left(jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right)\underline{i}$$

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\underline{u} = \frac{\frac{1}{LC} - \omega^2}{\frac{1}{LC} + j\frac{R}{L}\omega - \omega^2}\underline{e}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u = \frac{1}{LC}e + \frac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}t^2}$$

## 3) Régime transitoire et régime force

On trouve toujours la même équation différentielle, ce qui change c'est ce qui se passe de l'autre coté.

On aura juste à résoudre l'équation homogène (comme pour un régime transitoire normal), puis à ajouter une solution particulière, qui sera « simple » à trouver, car le second membre sera une sinusoïde.

## 4) Passage à la notation complexe

- Aux bornes de $C$ On reprend l'équation différentielle:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{LC} = \frac{e}{LC}$$

  On la traduit en notation complexe:

$$-\omega^2\underline{u}_C + \frac{R}{L}j\omega\underline{u}_C + \frac{1}{LC}\underline{u}_C = \frac{1}{LC}\underline{e}$$

- Aux bornes de $R$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_R}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{CL}u_R = \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$$

$$-\omega^2\underline{u}_R + \frac{R}{L}j\omega\underline{u}_R + \frac{1}{LC}\underline{u}_R = \frac{R}{L}j\omega\underline{e}$$

- Aux bornes de $L$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_L = \frac{\mathrm{d}^2 e}{\mathrm{d}t^2}$$

$$-\omega^2\underline{u}_L + \frac{R}{L}j\omega\underline{u}_L + \frac{1}{LC}\underline{u}_L = -\omega^2\underline{e}$$

⋑ TODO:
Calcul immondes:

1.4 Passage à la notation complexe

- aux bornes de $C$: $\underline{u_C} = \dfrac{\underline{e}}{(1-LC\omega^2)+jRC\omega} = \dfrac{\underline{e}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$
- aux bornes de $R$: $\underline{u_R} = \dfrac{jRC\omega\underline{e}}{(1-LC\omega^2)+jRC\omega} = \dfrac{j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}\underline{e}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$

  ou $\underline{u_R} = \dfrac{\underline{e}}{1+j\dfrac{1}{R}\left(L\omega-\dfrac{1}{C\omega}\right)} = \dfrac{\underline{e}}{1+jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$
- aux bornes de $L$: $\underline{u_L} = \dfrac{-LC\omega^2\underline{e}}{(1-LC\omega^2)+jRC\omega} = \dfrac{-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\underline{e}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$
- aux bornes de $L,C$: $\underline{u} = \dfrac{(1-LC\omega^2)\,\underline{e}}{(1-LC\omega^2)+jRC\omega} = \dfrac{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\underline{e}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\dfrac{1}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$

avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsation propre et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ facteur de qualité

On se retrouve avec des fonctions qui ressemblent étrangement à des fonctions de transfert…

On regarde le comportement asymptotique des filtres:

- Aux bornes de $L$:
  Quand $\omega \to +\infty$, $\underline{u_R} \to \underline{e}$
  Quand $\omega \to 0$, $\underline{u_R} \to 0$
  Le filtre semble être passe-haut
- Aux bornes de $C$:
  Quand $\omega \to +\infty$, $\underline{u_R} \to 0$
  Quand $\omega \to 0$, $\underline{u_R} \to \underline{e}$
  Le filtre semble être passe-bas
- Aux bornes de $R$:
  Quand $\omega \to +\infty$, $\underline{u_R} \to 0$
  Quand $\omega \to 0$, $\underline{u_R} \to 0$
  Ce filtre est potentiellement un passe bande, on potentiellement un coupe-tout. « a priori, effectivement, il y a de fortes chances que ce soit un passe-bande »

# II. Résonance en intensité - Filtre passe-bande du 2nd ordre

**Résonance**: Passage par un **maximum** de l'**amplitude** de la fonction de transfert étudiée en fonction de la **fréquence/pulsation**.

## 1) Étude de l'amplitude en fonction de la fréquence

Pour étudier l'intensité du circuit, on va regarder le circuit aux bornes de la résistance (Voir Fig. 2)

On pose la tension et l'intensité complexes du circuit:

$$\underline{e} = \left(jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R\right)\underline{i}$$

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

Donc l'amplitude vérifie:

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

Au dénominateur, les terme étant au carré, on a toujours:

$$R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \geq R^2$$

$$\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \geq R$$

Donc l'intensité respect toujours $I \leq \frac{E}{R}$

Pour atteindre ce maximum, il faut vérifier l'égalité:

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$
$$\Leftrightarrow LC\omega^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

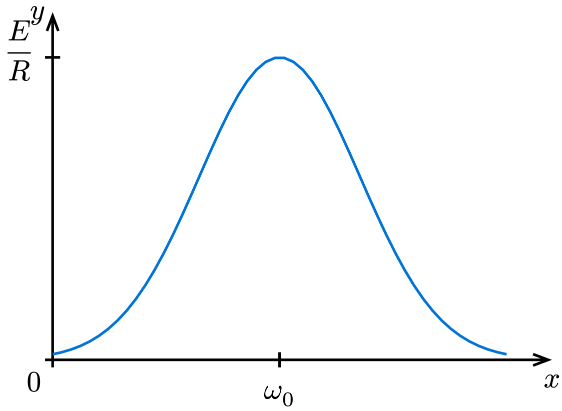
Donc l'intensité passe par un maximum pour la pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

> $\Phi$ Note:
> On peut aussi dériver, ou mettre au carré et dériver, mais c'est beaucoup plus lourd sur les calculs.

On analyse l'intensité asymptotiquement:
- Quand $\omega \to 0$, $I \to 0$
- Quand $\omega \to +\infty$, $I \to 0$

On passe qund même par un maximum d'amplitude $\frac{E}{R}$, le filtre est donc passe bande.

Il est de la forme:




## 2) Filtre passe bande du 2nd ordre

On reprend le même circuit (Fig. 2):

$$\underline{e} = \left(jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R\right)\underline{i}$$

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

On refait la même chose, différement:

On étudie le comportement asymptotique de:

1. La bobine:
   - $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
   - $\underline{u_L} = j\omega L\underline{i}$
   - $\omega \to 0 \Leftrightarrow \underline{u_L} \to 0 \Leftrightarrow$ La bobine est un fil
   - $\omega \to +\infty \Leftrightarrow \underline{i} \to 0 \Leftrightarrow$ La bobine est un interrupteur ouvert
2. Le condensateur:
   - $i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$
   - $\underline{i} = j\omega C\underline{u_C}$
   - $\omega \to 0 \Leftrightarrow i \to 0 \Leftrightarrow$ Le condensateur est un interrupteur ouvert
   - $\omega \to +\infty \Leftrightarrow \underline{u_C} \to 0 \Leftrightarrow$ Le condensateur des un fil

Donc le circuit se comporte asympotiquement comme un passe-bande (ou on passe-rien).

On étudie le gain de la fonction de transfert:

$$G = |\underline{H}| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

D'après l'étude qu'on a déjà effectué sur l'intensité, $G$ est croissant jusqu'a $\omega_0$, et il est decroissant après.

Pour tracer le diagramme de Bode, on passe au gain décibel:

$$G_{\mathrm{dB}} = 20\log R - 20\log\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

- Quand $\omega \to 0$,

$$R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \approx \frac{1}{C\omega}$$

Donc $G_{\text{dB}} = 20 \log R - 20 \log \frac{1}{C\omega} = 20 \log RC\omega = 20 \log \frac{\omega}{\omega_1}$ avec $\omega_1 = \frac{1}{RC}$

On observe une pente de 20 dB/décal

- Quand $\omega \to +\infty$,

$$R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \approx L\omega$$

Donc $G_{\text{dB}} = 20 \log R - 20 \log L\omega = -20 \log \frac{L\omega}{R} = -20 \log \frac{\omega}{\omega_2}$ avec $\omega_2 = \frac{R}{L}$

On observe une pente de $-20$ dB/décal

On cherche une valeur de référence de $\omega$. On prend $\omega_0$ tel que:

$$20 \log RC\omega_0 = -20 \log \frac{L\omega_0}{R}$$

$$20 \log(LC\omega_0^2) = 0$$

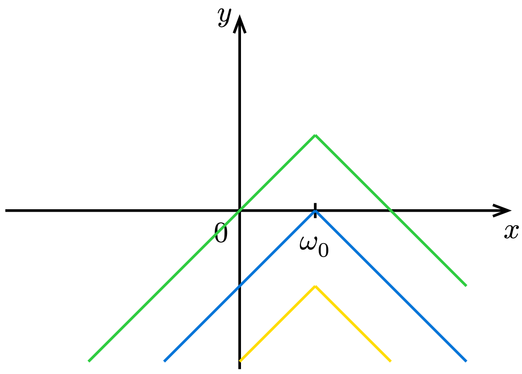
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

En évaluant le gain en $\omega_0$, on trouve que:

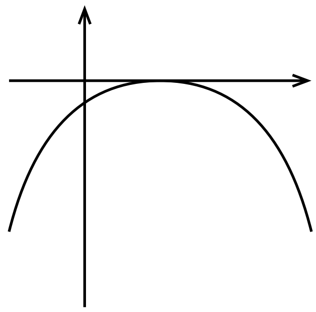
$$G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20 \log \frac{RC}{\sqrt{LC}} = 20 \log R\sqrt{\frac{C}{L}} = -20 \log \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

On retrouve l'expression du facteur de qualité $Q$ de la forme canonique.

Donc, avec $Q > 1$ en jaune, $Q = 1$ en bleu, $Q < 1$ en vert, le tracé asymptotique du diagramme de bode ressemble à:




Le tracé réel est de la forme:



Si $Q$ le facteur de qualité est:
- Plus petit que 1, on parle de **raisonnance floue**
- Supérieur à 1, on parle de **raisonnance aigüe**

On reprend la fonction de transfert:

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

- Quand $\omega \to 0$,

$$\underline{H} \approx \frac{H_0}{-j\frac{Q\omega_0}{\omega}} = \frac{jH_0\omega}{Q\omega_0}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

$$\underline{s} = j\omega\frac{H_0}{Q\omega_0}\underline{e}$$

  On observe un comportement dérivateur
- Quand $\omega \to +\infty$,

$$\underline{H} \approx \frac{H_0\omega_0}{jQ\omega}$$

$$\underline{s} = \frac{1}{j\omega}\frac{H_0\omega_0}{Q}\underline{e}$$

  On observe un comportement intégrateur

## 3) Phase

Jusqu'a maintenant, on a fait que étudier l'amplitude/le gain du circuit. Pour obtenir le phase, on reprend la fonction de transfert:

$$\varphi = \arg \underline{H} = \arg R - \arg\left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right) = \psi$$

$$\psi = \arg\left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right)$$

$$\begin{cases} \tan\psi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \\ \cos\psi \text{ du signe de R donc} > 0 \end{cases}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)$$

Φ Note:
**Forme canonique**: on peut mettre toute les fonctions de transfert du 1er et du 2nd ordre sous la même forme:

$$\underline{H} = \frac{H_0\left(j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 = j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

On peut faire l'étude de la phase et de l'amplitude avec la forme canonique, mais cela est plus laborieux qu'avec la forme précendente.
On retombe sur: $\varphi = \arg H_0 + \psi \arg H_0 = \begin{cases} 0 \text{ si } H_0 > 0 \\ \pi \text{ si } H_0 < 0 \end{cases}$

$$\psi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) & \text{si } \omega < \omega_0 \\ \arctan\left(\frac{\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) & \text{si } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

Ce qui n'est pas très sexy...

On préfère donc utiliser la forme précédente pour l'étude de la phase.

On pose

$$f(\omega) = \frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}$$

$$f'(\omega) = \frac{L}{R} + \frac{1}{RC\omega^2}$$

On a $f'(\omega) > 0$, donc $f$ est croissante, donc $\varphi$ est décroissante.

Étude asymptotique:
- $\omega \to 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$
- $\omega \to +\infty$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$
- $\varphi = 0 \Leftrightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Leftrightarrow \omega = \omega_0$

Donc $\varphi = 0$ pour la fréquence de résonance. Coup de chance!

## 4) Bande passante à $-3$ dB