

Principes de la dynamique - Lois de Newton

1. Point matériel ou systèmes de point matériels - Définition et propriétés	2
2. Première loi de Newton ou principe d'inertie - Référentiel galiléen	3
3. Causes ou origines des mouvements - Forces ou actions mécaniques	4
4. Mouvement dans le champ de pesanteur	6

I. Point matériel ou systèmes de point matériels - Définition et propriétés

1) Notion de solide

On considère qu'un solide est un objet parfaitement indéformable. C'est à dire:

$$\forall A, B \in S, AB \text{ est constante dans le temps}$$

2) Modélisation d'un solide par un point matériel

On modélise un solide (donc un ensemble de point) par un seul point dans l'espace, positionné en son centre de masse.

On néglige donc la rotation du solide sur lui même. (Approximation douteuse)

3) Notion de masse - Masse inertielle

Masse inertielle: Grandeur scalaire qui mesure la difficulté à mettre un objet en mouvement, d'unité [kg].

4) Quantité de mouvement

On associe la masse à une grandeur vectorielle, la **Quantité de mouvement**:

$$\vec{p}_R(M) = m \times \vec{v}_R(M)$$

5) Ensemble de points matériels

Pour passer de la mécanique d'un point à toute la mécanique d'un système, on associe à chaque point M_i sa masse m_i :

La masse totale du système est donc défini par $m_{\text{tot}} = \sum_i m_i$

On peut aussi se placer d'un point de vu continu (pour modéliser un solide par une infinité de points), avec $m_{\text{tot}} = \int_{\Omega} m(x) dx$

6) Centre d'inertie ou de gravité

On appelle G le centre d'inertie.

Centre d'inertie: le barycentre de l'ensemble des points du système du système par-rapport à leur masse. (C'est la moyenne pondérée de la position des points).

$$m_{\text{tot}} \vec{OG} = \sum_i m_i \vec{OTartanpion_i}$$

D'où:

$$m_{\text{tot}} \vec{OG} = \sum_i m_i (\vec{OG} + \vec{GTartanpion_i}) \Leftrightarrow \sum_i m_i \vec{GTartanpion_i} = \vec{0}$$

7) Quantité de mouvement d'un système de points matériels

On a:

$$m_{\text{tot}} \vec{OG} = \sum_i m_i \vec{OM_i}$$

On dérive:

$$m_{\text{tot}} \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = \sum_i m_i \left(\frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt} \right)_{/R}$$

$$m_{\text{tot}} \overrightarrow{v}_{/R}(G) = \sum_i m_i \overrightarrow{v}_{/R}(M_i)$$

$$\overrightarrow{p}_{/R}(G) = \sum_i \overrightarrow{p}_{/R}(M_i)$$

II. Première loi de Newton ou principe d'inertie - Référentiel galiléen

1) Énoncé

⊖ THÉORÈME:

Il existe des référentiels privilégiés, appelés « référentiels galiléens », dans lesquels un point matériel isolé aura un mouvement rectiligne, uniforme.

C'est un principe d'existence: il y en aura forcément un.

Tous les référentiels ne sont pas équivalents: il y a des référentiels dits « galiléens » et « non-galiléens ».

Pour savoir si un référentiel galiléen:

- On prend un point matériel isolé (donc aucune force ne s'applique à lui)
- On regarde son mouvement
- Si il est rectiligne et uniforme, notre référentiel est galiléen

Toutes nos propriétés seront énoncées dans des référentiels galiléens.

Il existe une infinité de référentiels galiléens. En utilisant la loi de composition des vitesses (qui est admise pour l'instant):

$$\overrightarrow{v}_{/R'}(M) = \overrightarrow{v}_{/R}(M) + \vec{v}_e(R'/R)$$

On prend un point M isolé, et le référentiel est galiléen, donc M possède un mouvement rectiligne uniforme.

Donc $\overrightarrow{v}_{/R}(M) = \text{constante}$

R' sera galiléen si $\overrightarrow{v}_{/R'}(M) = \text{constante}$

Par loi de composition:

$$\vec{v}_e(R'/R) = \text{constante}$$

Donc R' est en translation rectiligne uniforme par rapport à R .

2) Recherche d'un référentiel galiléen

On serait tenté de prendre la Terre comme référentiel galiléen. Non. Tout ne se passe pas bien.

On prend un objet. On le lâche d'une certaine hauteur. Il se déplace un peu vers l'est. De quelques centimètres, mais le référentiel n'est donc pas galiléen.

La Terre tourne sur elle même, donc le référentiel n'est pas galiléen. On prend donc le centre de la Terre. Mais la Terre, elle tourne autour du Soleil. Mais le Soleil, etc...

En toute rigueur, on devrait prendre le centre de l'univers comme référentiel galiléen. Malheureusement, on ne sait pas où il est.

Selon la précision demandée, on peut considérer ces différents référentiels comme à peu près galiléens.

III. Causes ou origines des mouvements - Forces ou actions mécaniques

1) Notion de force

Force: Perturbation permettant de mettre en mouvement un système, **dans un système de points.**

Action mécanique: Perturbation mettant en mouvement un solide (on se libère donc de l'approximation du point). On ne le verra qu'en s'intéressant à la rotation d'un solide autour d'un axe.

Dans un système de points matériels (donc dans tout les chapitres de mécanique, sauf un): on utilise des forces.

Dans un système de solides: on utilise des actions mécaniques.

On décrit une force par un vecteur:

- Une direction, un sens, une norme

✓ Tip:

Parfois, il nous manquera un composant du vecteur.

Il faudra alors tenir compte des inconnues, et faire avec, ou résoudre.

2) Les 4 interactions fondamentales

a) Interaction gravitationnelle De constante fondamentale $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2$.

Soient deux points masses $(A_1, m_1), (A_2, m_2)$:

$$\vec{f}_{2 \rightarrow 1} = G \overrightarrow{A_2 A_1} \frac{m_1 m_2}{(A_1 A_2)^3}$$

Aussi noté:

$$\vec{f}_{2 \rightarrow 1} = G \hat{u}_{2 \rightarrow 1} \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Avec $r = A_1 A_2$, $\hat{u} = \frac{\overrightarrow{A_2 A_1}}{\| \overrightarrow{A_2 A_1} \|}$ le vecteur normalisé de A_2 vers A_1 .

b) Interaction électromagnétique

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Cas particulier: interaction de Coulomb

Soient deux points masses $(A_1, m_1), (A_2, m_2)$ de charge q_1 et q_2 :

$$\vec{f}_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(A_1 A_2)^3} \overrightarrow{A_2 A_1}$$

Très similaire à l'attraction gravitationnelle, mais la force peut être répulsive si les charges sont de même signe.

ε_0 est la perméabilité électrique du vide avec $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

c) Interaction forte

d) Interaction faible

3) Troisième loi de Newton : principe de l'action et de la réaction ou principe des actions réciproques

⊖ THÉORÈME:

Si un point matériel A exerce sur un point matériel B une force $\vec{f}_{A \rightarrow B}$, alors le point B exerce une force $\vec{f}_{B \rightarrow A}$ sur A telle que $\vec{f}_{A \rightarrow B} = -\vec{f}_{B \rightarrow A}$

4) Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

⊖ THÉORÈME:

La dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{f}_i$$

Si on connaît l'ensemble des actions s'appliquant à un point matériel, on peut en déduire le mouvement.

Souvent, on ne connaît pas toutes les interactions qui agissent sur un point. Avec l'information du mouvement, on peut trouver l'accélération, et de là déterminer certaines des forces qui s'appliquent au point.

5) Cas de la statique

Un point est statique si il n'y a pas de mouvement: la vitesse et l'accélération est nulle.

Vitesse nulle et

$$\sum_i \vec{f}_i = 0$$

6) Méthode de résolution en quatre étape

Un problème de mécanique se résout en quatres points:

1. Définition du système
2. Définition du référentiel
3. Bilan des forces
4. Résolution par choix d'une méthode, pour l'instant le principe fondamental de la dynamique

IV. Mouvement dans le champ de pesanteur

1) Poids

Poids: Le poids est la force appliquée par la Terre sur un objet. Il tient compte de l'attraction gravitationnelle et de la rotation de la Terre (donc en général il n'est pas dirigé exactement vers le bas, on le verra en spé). On n'en tiendra pas rigueur, notre poids sera strictement vers le bas.

On pose le poids \vec{P}

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Avec m la masse, et \vec{g} l'accélération de pesanteur orientée vers le bas.

2) Mouvement d'un point M de masse m dans le champ de pesanteur

On se limite à la pesanteur et on ne considère pas les frottements.

En suivant notre plan de route:

1. On définit le système: c'est le point M
2. On prend le référentiel terrestre (qu'on suppose galiléen parce qu'on se place sur une intervalle de temps suffisamment courte, on ne voit pas l'effet de la rotation terrestre)
3. On fait le bilan des forces: $\vec{F} = m\vec{g}$
4. On résout avec le principe fondamental de la dynamique:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}(M) = m\vec{g}$$

On obtient l'équation différentielle du mouvement:

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Par la suite on distinguera deux cas:

- La chute libre, on laisse tomber un objet avec une vitesse initiale nulle
- Le tir, on lance un objet et on voit où il tombe

3) Mouvement en chute libre

Soit un point matériel M de masse m lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h . On note Oz l'axe vertical ascendant et \vec{g} l'accélération du champ de pesanteur.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement.
2. Déterminer l'équation horaire $z(t)$.
3. En déduire la durée de chute.
4. Exprimer la vitesse du point matériel lorsqu'il arrive au sol.

On a déjà établi l'équation différentielle du mouvement:

$$\vec{a} = \vec{g}$$

On se place dans les coordonnées cartésiennes.

On pose notre équation horaire à partir de notre accélération:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

On intègre:

$$\begin{cases} \dot{x} = x_0 \\ \dot{y} = y_0 \\ \dot{z} = -gt + z_0 \end{cases}$$

On utilise les conditions initiales: vitesse nulle à l'origine, donc $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

Et on intègre à nouveau:

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_1 \end{cases}$$

On utilise les conditions initiales, on suppose l'origine placé dans le même axe que M , et qu'il est placé au niveau du sol. L'objet est lâché à une hauteur h , d'où:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

On arrive au sol en $z = 0$, on résout donc:

$$\begin{aligned} h - \frac{1}{2}gt_s^2 &= 0 \Leftrightarrow t_s^2 = \frac{2}{g}h \\ \Leftrightarrow t_s &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ car } t \text{ positif} \end{aligned}$$

On a la vitesse en tout t avec l'équation horaire. On substitue t_s :

$$\dot{z} = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2hg}$$

4) Tir dans le vide

Un point matériel M est lancé depuis un point O pris comme origine du repère avec une vitesse \vec{v}_0 faisant un angle α avec l'axe Ox horizontal. On note Oz l'axe vertical ascendant et \vec{g} l'accélération du champ de pesanteur.

1. Justifier que le cas $\alpha = \frac{\pi}{2}$ peut être considéré comme une situation déjà abordé avec la chute libre étudiée précédemment.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement.
3. Déterminer les équations horaires.
4. En déduire l'équation et la nature de la trajectoire.
5. Montrer que M atteint une hauteur maximale en un point dont on précisera les coordonnées.
6. Exprimer la portée du tir à savoir l'abscisse x_P pour laquelle M retombe au sol qu'on suppose horizontal.
7. Établir que deux angles α sont possibles pour une vitesse de même module v_0 pour que M atteigne un point au sol supposé horizontal à une distance d du point de tir.

1. On peut séparer le problème en deux parties: l'ascension parfaitement verticale, le moment où la vitesse s'annule, la chute libre.

On supposera donc $\alpha \notin \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

2. On fait la somme des forces ($\vec{a} = \vec{g}$):

3.

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

On intègre, les conditions initiales nous donnent $x_0 = \cos(\alpha)v_0$, $z_0 = \sin(\alpha)v_0$, $y_0 = 0$ car on se place dans le plan du lancé.

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos(\alpha)v_0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt + \sin(\alpha)v_0 \end{cases}$$

D'où (on place notre référentiel au point de lancé):

$$\begin{cases} x = \cos(\alpha)v_0 t \\ y = 0 \\ z = \sin(\alpha)v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

4. Pour obtenir l'équation de la trajectoire, on veut éliminer la variable t :

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{\cos(\alpha)v_0} (\alpha \neq 0) \\ z &= \sin(\alpha) \frac{x}{\cos(\alpha)} - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{\cos(\alpha)^2 v_0^2} \\ &= x \tan(\alpha) - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{\cos(\alpha)^2 v_0^2} \end{aligned}$$

On a $\frac{1}{\cos(\alpha)^2} = 1 + \tan(\alpha)^2$

D'où:

$$\begin{aligned} z &= x \tan(\alpha) - \frac{1}{2}gx^2(1 + \tan(\alpha)^2) \\ &= -\frac{g(1 + \tan^2 \alpha)}{2v_0^2}x^2 + x \tan(\alpha) \end{aligned}$$

La trajectoire est donc de forme parabolique.

5. On sait que si un extremum est atteint, alors la dérivée de z s'anule. On cherche donc:

$$\dot{z} = 0$$

On peut soit dériver z avec les équations horaires (par-rapport à z), ou avec l'équation de trajectoire (par-rapport à x).

$$-gt + v_0 \sin(\alpha) = 0$$

$$t = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

On substitue dans les équations horaires:

$$\begin{cases} x = v_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \frac{1}{g} \\ z = \frac{\sin(\alpha)^2 v_0^2}{g} - \frac{\sin(\alpha)^2 v_0^2}{2g} = \frac{\sin(\alpha)^2 v_0^2}{2g} \end{cases}$$

$z \geq 0$, donc cet extremum est un maximum.

6. On cherche le x_P où la balle retombe au sol. On utilise l'équation de la trajectoire:

$$z = 0$$

$$-\frac{g(1 + \tan^2 \alpha)}{2v_0^2} x_P^2 + x_P \tan(\alpha) = 0$$

$$x_P \left(-\frac{g(1 + \tan^2 \alpha)}{2v_0^2} x_P + \tan(\alpha) \right) = 0$$

Soit $x_P = 0$ (lancement de la balle), soit:

$$x_P = \tan(\alpha) \frac{2v_0^2}{g(1 + \tan^2 \alpha)}$$

7. On cherche α_1 et α_2 tels que:

$$x_P(\alpha_1) = x_P(\alpha_2)$$

$$\tan(\alpha_1) \frac{2v_0^2}{g(1 + \tan^2 \alpha_1)} = \tan(\alpha_2) \frac{2v_0^2}{g(1 + \tan^2 \alpha_2)}$$

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{(1 + \tan^2 \alpha_1)} = \frac{\tan(\alpha_2)}{(1 + \tan^2 \alpha_2)}$$

$$\tan(\alpha_1) \cos(\alpha_1)^2 = \tan(\alpha_2) \cos(\alpha_2)^2$$

$$\sin(\alpha_1) \cos(\alpha_1) = \sin(\alpha_2) \cos(\alpha_2)$$

$$\sin(\alpha_1) \cos(\alpha_1) - \sin(\alpha_2) \cos(\alpha_2) = 0$$

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$$

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2[\pi] \text{ ou } \alpha_1 \equiv -\alpha_2[\pi]$$

