Подгодовка к Письмаку.

Интегралы.

Основные формулы

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1, x > 0$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < |a|$
12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
13. «Высокий» логарифм: $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, |x| \neq a$
14. «Длинный» логарифм: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Интегрирование с заменой переменной.
$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$
Не забывайте заменять границы интегрирования, при замене переменной!
Интегрирование по частям.
$\int uv'dx = uv - \int vu'dx$ или $\int udv = uv - \int vdu$
Интегрирование простых дробей.

Мы легко умеем интегрировать дроби вида $\dfrac{1}{(x-a)}, \dfrac{1}{(x-a)^n}$. Немного сложнее будет если захотим взять интеграл от $\dfrac{mx+n}{x^2+bx+c}$, где $b^2 - 4c < 0$. Тут надо немного подумать и привести к виду $\dfrac{1}{(x+a)^2+b} + \dfrac{x+a}{(x+a)^2+b}$. Далее в первом вносим в дифф 1, чтобы получить $d(x+a)$, а это формула 12. Во втором вносим $x+a$ под дифф и получим $\int \dfrac{1}{t+b}dt$ - это тоже умеем.

Если у нас какая-то большая дробь, то раскладываем знаменатель на множители $(x-x_1), (x-x_2), \dots, (x-x_n)$ и $(x^2+p_1x+q_k), \dots, (x^k+p_kx+q_k)$. Далее просто приводим нашу дробь к сумме дробей $\dfrac{A_1}{x-x_1}+\dfrac{A_2}{x-x_2}+\dots+\dfrac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1}+\dots$. Это можно посчитать с помощью СЛУ(если записать СЛУ, то становится очевидно, что есть решение).

Интегрирование иррациональных функций Я этой штуки рот мылом мыл.

Интегрирование трансцендентных функций Тут не много отличий от предыдущего.

Площади плоских кривых и длин кривых Тут просто формулы которые стоит выучить, а дальше надо уметь считать интегральчики.

Полощадь фигуры под графиком - просто интеграл. (иногда называют криволинейной трапецией)

Если график задан параметрически(y(t), x(t)), а также $x'(t) \geqslant 0$, то $S = \int\limits_a^b y(t)x'(t)dt$ - это просто замена переменной!

Пусть дана функция $r(\varphi)$ - это функция в полярных координатах, тогда $S = \dfrac{1}{2}\int\limits_a^b r^2(\varphi)d\varphi$

Длина кривой. $l = \int\limits_a^b \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i'(t)dt}$.

Длина плоской кривой равна $l = \int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}dx$.

Длина плоской кривой в полярных $l = \int\limits_a^b \sqrt{r^2+r'^2}d\varphi$

Объемы и площади тел вращения.

$V = \pi\int\limits_a^b y^2(x)dx$

$V = \pi\int\limits_a^b y^2(t)x'(t)dt$ - просто замена переменной. $x' \geqslant 0$

Предыдущие две формулы легко запомнить, если думать, что твоя фукнция - это площадь круга на одном слое, и ты просто берешь интеграл и получаешь объем.

$S = 2\pi\int\limits_a^b |y(x)|\sqrt{1+y'^2(x)}dx$ - площадь фигуры вращения.

$S = 2\pi\int\limits_a^b y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$ - площадь

$S = 2\pi\int\limits_a^b r(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi$

Несобственный интеграл.

Мы требовали от интеграла огранниченость, теперь избавимся от этих ограничений. Если функция кокается, например фукнция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ не опредена в 0. Но мы хотим посчитать $\int\limits_0^1 f(x)dx$. Давайте это все определим через предел в данном случае это будет просто $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_t^1 f(x)dx$. Аналогично поступим, если хотим посчитать $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}$

Из свойств - линейность, формула замены переменной, интегрирование по частям, если функция меньше другой, то если интегралы сходятся, то интеграл меньшей функции будет меньше.

Признаки сходимости.

1. Если $0 \leqslant f \leqslant g$, если g - сходится, то f сходится, если f расходится, то и g расходится.

2. Если $0 < g$ и существует $k \neq 0$ такое, что $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k$, то интегралы сходятся и расходятся одновременно.

Критерий Коши. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;b)$, интегрируема в собственном смысле на любом отрезке $[a;\xi], \xi < b$, и неограниченна в левой окрестности точки $x = b$. Тогда для сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое число $\eta \in [a;b)$, что при любых $\eta_1, \eta_2 \in (\eta;b)$ $\left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

Обычно используется, для доказательства, что расходится.

Абсолютная сходимость. Вроде понятно что это. Если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Признак Дирихле. Интеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ сходится, если:

а) функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a;b)$;
б) функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a;b)$, причем $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$.

Признак Абеля. Интеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ сходится, если:

а) функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b)$ и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится;
б) функция $g(x)$ ограниченна, непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a;b)$.

Выделение главной части. Идея простая. Мы заменяем функцию $f(x) = g(x) + R(x)$, где $R(x)$ - сходится абсолютно, а значит $f(x)$ и $g(x)$ сходятся и расходятся одновременно, а также абсолютно сходятся и расходятся одновременно. Обычно работает как раз с границей $+\infty$(верю учебнику). Советую рассмотреть примеры в учебнике это вторая часть параграф 12.

Ряды.

Что такое ряд - понятно.

Необходимое свойство сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ - это $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Критерий Коши. $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon \quad \forall p \in N : |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$

Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами - это ограниченность частичных сумм числом.

Признак сравнения рядов с неотр членами такой же как и у интегралов(ряд меньшей последовательности меньше, а так же если существует передел отношения членов, то ряды сходятся и расходятся одновременно).

Интегральный признак. Если функция f не отрицательна и убивает, то ряд и интеграл сходятся одновременно

Признак Даламбера. Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0 (n \in \mathbb{N})$ существует такое число $0 < q < 1$, и таюой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $a_{n+1}/a_n \leqslant q$ то этот ряд сходится; если же для всех $n \geqslant n_0$ имеет место неравенство $a_{n+1}/a_n \geqslant 1$ то ряд расходится.

Признак Коши. Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geqslant 0 (n \in \mathbb{N})$ существует такое число $0 \leqslant q < 1$, и такой номер n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$ то этот ряд сходится; если же для всех $n \geqslant n_0$ имеет место неравенство $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ то ряд расходится.

Абсолютно сходящиеся ряды. Есть линейность, если переставить члены, то будет сходиться к той же сумме.