

Подготовка к Письмаку.

Интегралы.

Основные формулы

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1, x > 0$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < |a|$
12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
13. «Высокий» логарифм: $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, |x| \neq a$
14. «Длинный» логарифм: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

Интегрирование с заменой переменной.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$$

Не забывайте заменять границы интегрирования, при замене переменной!

Интегрирование по частям.

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx \text{ или } \int u dv = uv - \int v du$$

Интегрирование простых дробей.

Мы легко умеем интегрировать дроби вида $\frac{1}{(x-a)}, \frac{1}{(x-a)^n}$. Немного сложнее будет если захотим взять интеграл от $\frac{mx+n}{x^2+bx+c}$, где $b^2-4c < 0$. Тут надо немного подумать и привести к виду $\frac{1}{(x+a)^2+b} + \frac{x+a}{(x+a)^2+b}$. Далее в первом вносим в дифф 1, чтобы получить $d(x+a)$, а это формула 12. Во втором вносим $x+a$ под дифф и получим $\int \frac{1}{t+b} dt$ - это тоже умеем.

Если у нас какая-то большая дробь, то раскладываем знаменатель на множители $(x - x_1), (x - x_2), \dots, (x - x_n)$ и $(x^2 + p_1x + q_1), \dots, (x^k + p_kx + q_k)$. Далее просто приводим нашу дробь к сумме дробей $\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots$. Это можно посчитать с помощью СЛУ (если записать СЛУ, то становится очевидно, что есть решение).

Интегрирование иррациональных функций Я этой штуки рот мылом мыл.

Интегрирование трансцендентных функций Тут не много отличий от предыдущего.

Площади плоских кривых и длин кривых Тут просто формулы которые стоит выучить, а дальше надо уметь считать интегральчики.

Площадь фигуры под графиком - просто интеграл. (иногда называют криволинейной трапецией)

Если график задан параметрически $(y(t), x(t))$, а также $x'(t) \geq 0$, то $S = \int_a^b y(t)x'(t)dt$ - это просто замена переменной!

Пусть дана функция $r(\varphi)$ - это функция в полярных координатах, тогда $S = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\varphi)d\varphi$

Длина кривой. $l = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i'(t)^2} dt$.

Длина плоской кривой равна $l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$.

Длина плоской кривой в полярных $l = \int_a^b \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi$

Объемы и площади тел вращения.

$$V = \pi \int_a^b y^2(x) dx$$

$$V = \pi \int_a^b y^2(t)x'(t)dt \text{ - просто замена переменной. } x' \geq 0$$

Предыдущие две формулы легко запомнить, если думать, что твоя функция - это площадь круга на одном слое, и ты просто берешь интеграл и получаешь объем.

$$S = 2\pi \int_a^b |y(x)| \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \text{ - площадь фигуры вращения.}$$

$$S = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \text{ - площадь}$$

$$S = 2\pi \int_a^b r(\varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi$$