

# 模糊控制导论

苏临之

[sulinzhi029@nwu.edu.cn](mailto:sulinzhi029@nwu.edu.cn)



# 模糊控制导论课程纲要

- 模糊控制基本概念
- 模糊集合及其运算
- 模糊关系的数学表示和运算
- 模糊控制逻辑基础与推理运算
- 模糊C均值聚类法
- 科技文献书写和阅读



# 模糊控制导论课程纲要

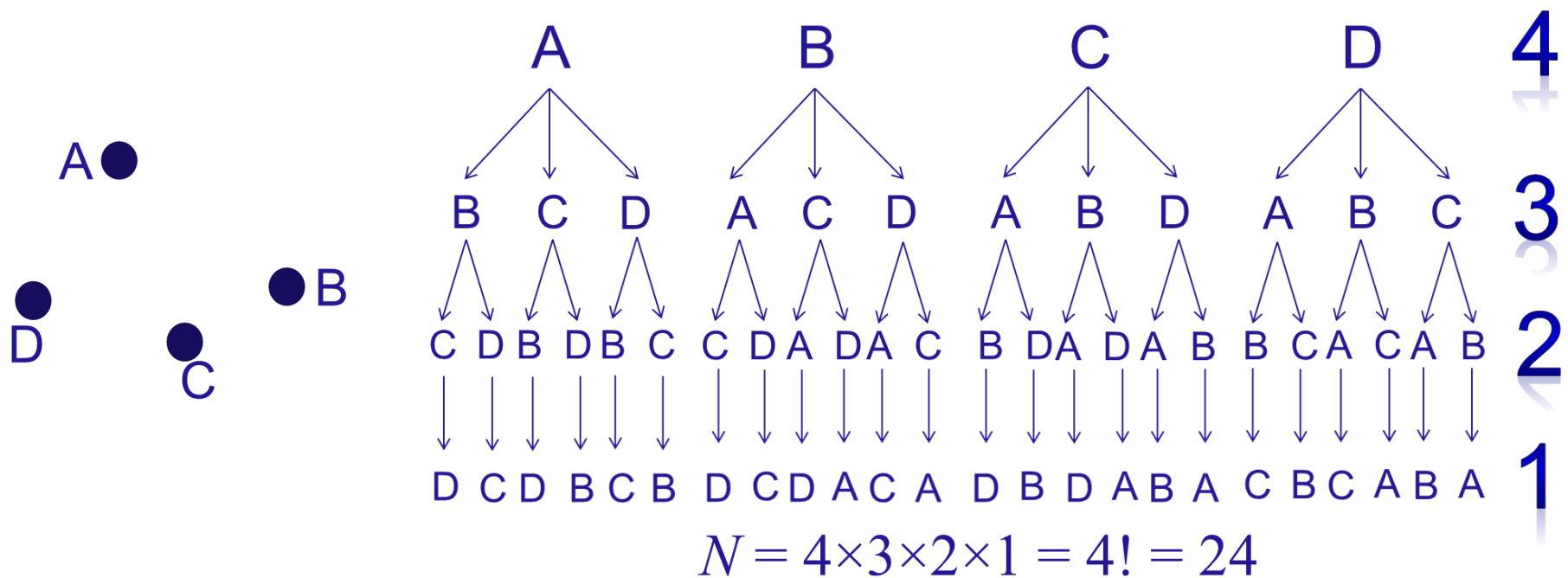
- 模糊控制基本概念
- 模糊集合及其运算
- 模糊关系的数学表示和运算
- 模糊控制逻辑基础与推理运算
- 模糊C均值聚类法
- 科技文献书写和阅读



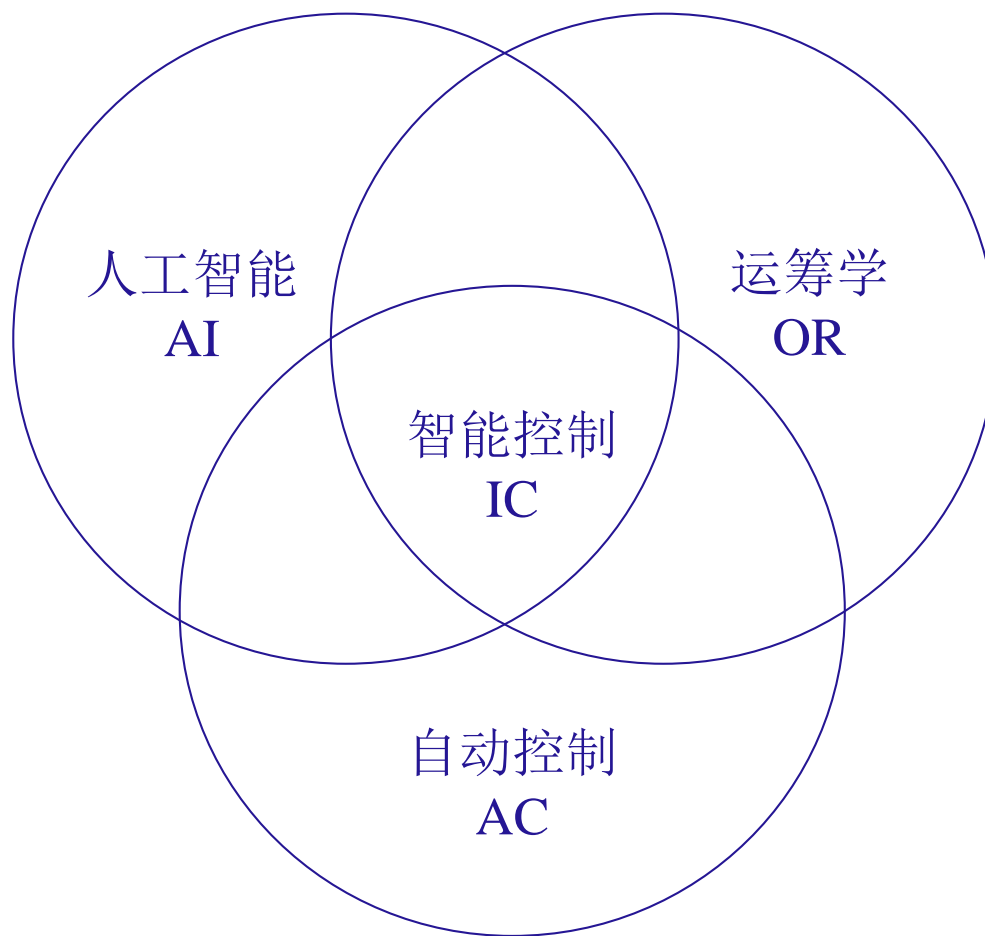
# 重要人物（他们是谁？）

- John Von Neumann
- Alan Mathison Turing
- Lotfi Aliasker Zadeh
- Ebrahim H. Mamdani
- Jan Lukasiewicz

# TSP的复杂度计算



# 智能控制三元论





# 智能控制分支

- 专家系统 (Expert System)
- 神经网络控制 (Neural Networks Control)
- 模糊控制 (Fuzzy Control)



# 模糊系统的权威期刊

- IEEE Transactions on Fuzzy Systems (TFS)
- JCR分区：SCI一区期刊

## IEEE TRANSACTIONS ON **FUZZY SYSTEMS**

A PUBLICATION OF THE IEEE COMPUTATIONAL INTELLIGENCE SOCIETY

[www.ieee-cis.org/pubs/tfs](http://www.ieee-cis.org/pubs/tfs)







# 模糊控制导论课程纲要

- 模糊控制基本概念
- 模糊集合及其运算
- 模糊关系的数学表示和运算
- 模糊控制逻辑基础与推理运算
- 模糊C均值聚类法
- 科技文献书写和阅读



# 模糊集合表示方法

序对法:  $A = \{(1,0), (2,0.2), (3,0.8), (4,1), (5,0.8), (6,0.2)\}$

向量法:  $A = (0, 0.2, 0.8, 1, 0.8, 0.2)$

Zadeh法: 
$$A = \frac{0}{1} + \frac{0.2}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.8}{5} + \frac{0.2}{6}$$
$$= \frac{0.2}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.8}{5} + \frac{0.2}{6}$$

函数法:  $A(x)$



# 支集、核和正规模糊集

$$\text{Supp } A = \{x \mid x \in U, A(x) > 0\}$$

$$\text{Ker } A = \{x \mid x \in U, A(x) = 1\}$$



# 集合的数积

$$\begin{aligned}\lambda A(x) &= \begin{cases} A(x) & \text{if } \lambda \geq A(x) \\ \lambda & \text{if } \lambda < A(x) \end{cases} \\ &= \min\{A(x), \lambda\} = \lambda \wedge A(x)\end{aligned}$$



# 模糊凸集和模糊数

- $A \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$ ,  $\forall x_1 > x_2 > x_3 \in \mathbf{R}$ , 均有下式成立, 则称 $A$ 是凸模糊集, 否则称 $A$ 是非凸模糊集。

$$A(x_2) \geq \min\{A(x_1), A(x_3)\} = A(x_1) \wedge A(x_3)$$

- 当模糊集合 $A$ 同时满足正规和凸集两个条件时, 则称 $A$ 是一个模糊数。



# 模糊集合的补集、交集和并集

• 设 $A, B, C \in \mathcal{F}(U)$ ， $\forall x \in U$ 。

- 1、若有 $B(x) = 1 - A(x)$ ，则称 $B$ 是 $A$ 的补集，记为 $B = A^c$ ；
- 2、若有 $C(x) = \min\{A(x), B(x)\} = A(x) \wedge B(x)$ ，则称为 $C$ 是 $A$ 和 $B$ 的交集，记为 $C = A \cap B$ ；
- 3、若有 $C(x) = \max\{A(x), B(x)\} = A(x) \vee B(x)$ ，则称为 $C$ 是 $A$ 和 $B$ 的并集，记为 $C = A \cup B$ 。

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$A \cap A^c \neq \emptyset$$

$$A \cup A^c \neq U$$



# 常用隶属度函数

- 三角形:  $A=\text{trimf}(x,[a,b,c]);$
- 钟形:  $A=\text{gbellmf}(x,[a,b,c]);$
- 高斯型:  $A=\text{gaussmf}(x,[\text{sigma},c]);$
- 梯形:  $A=\text{tramf}(x,[a,b,c,d]);$
- Sigmoid型:  $A=\text{sigmf}(x,[a,c]);$



# 模糊控制导论课程纲要

- 模糊控制基本概念
- 模糊集合及其运算
- 模糊关系的数学表示和运算
- 模糊控制逻辑基础与推理运算
- 模糊C均值聚类法
- 科技文献书写和阅读





# 经典集合的直积

- 对于经典集合 $A$ 和 $B$ ，定义两者的Descartes直积 $A \times B$ 是二维空间（平面）上面的如下点集。

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$



# 二元模糊关系的定义

- 设 $A$ 和 $B$ 是两个非空有限经典集合， $R$ 是 $A \times B$ 上的模糊子集。若 $R(x,y) \in [0,1]$ 表示了来自 $A$ 的 $x$ 跟来自 $B$ 的 $y$ 之间的某种相关程度，则称 $R(x,y)$ 是 $A$ 到 $B$ 上的二元模糊关系。

$$R(x, y): A \times B \rightarrow [0,1]$$

- 二元模糊关系的三大基本要素：元素对，隶属度，方向性。



# 模糊矩阵基本运算

$$\mathbf{R} = \{r_{ij}\}_{m \times n} \quad \mathbf{S} = \{s_{ij}\}_{m \times n}$$

$$\mathbf{R}^c = \{1 - r_{ij}\}_{m \times n} \quad \mathbf{S}^c = \{1 - s_{ij}\}_{m \times n}$$

$$\mathbf{R} \cap \mathbf{S} = \{r_{ij} \wedge s_{ij}\}_{m \times n} \quad \mathbf{R} \cup \mathbf{S} = \{r_{ij} \vee s_{ij}\}_{m \times n}$$



# 模糊关系的合成

- 设 $P$ 和 $Q$ 分别是定义在 $X \times Y$ 和 $Y \times Z$ 上的两个模糊关系矩阵，那么由 $P$ 和 $Q$ 合成的 $R$ 就是定义在 $X \times Z$ 上的模糊关系，记作：

$$R = P \circ Q$$

- 左取行右取列，对应取小再取大，左行右列定位置
- 模糊矩阵合成有什么运算技巧？



# 模糊控制导论课程纲要

- 模糊控制基本概念
- 模糊集合及其运算
- 模糊关系的数学表示和运算
- 模糊控制逻辑基础与推理运算
- 模糊C均值聚类法
- 科技文献书写和阅读

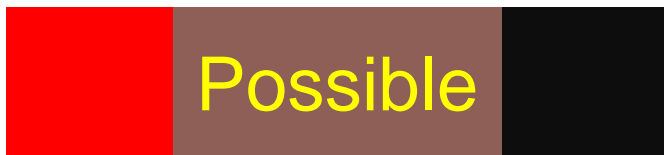
# 模糊逻辑发展历史

TRUE



FALSE

TRUE



FALSE

TRUE



FALSE



# 条件命题

$T(P)$	$T(Q)$	$T(P \rightarrow Q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1



# 条件命题的两种基本形式

- 条件命题的两种基本形式是：① 若 $A$ 则 $B$ ；② 若 $A$ 且 $B$ 则 $C$ 。两者真值公式如下：

$$T(A \rightarrow B) = T(\overline{A}) \vee T(B)$$

$$T((A \wedge B) \rightarrow C) = T(\overline{A}) \vee T(\overline{B}) \vee T(C)$$





# 模糊命题和Mamdani算法

- 如果一个命题中的真值取值范围是 $[0,1]$ ，那么它是一个模糊命题，用 $A(a)$ 表示。
- 设有两个模糊命题 $A(a)$ 和 $B(b)$ ，则两者的条件命题可以写作“若 $a$ 是 $A$ ，则 $b$ 是 $B$ ”，表示为 $A \rightarrow B$ 。其真值 $R(a, b) = A(a) \rightarrow B(b)$ 使用Mamdani算法计算。

$$\mathbf{R} = \vec{\mathbf{A}} \circ \mathbf{B}$$


# 语气算子

- 当 $\lambda > 1$ 时，使得原词义集中化；当 $\lambda < 1$ 时，使得原词义散漫化。 $A$ 是原集合， $B$ 是带语气词后的集合。

$$B(x) = A^\lambda(x) = [A(x)]^\lambda$$

$$A(x) = [B(x)]^{\frac{1}{\lambda}}$$

语气词	极	很	相当	较	略	稍微
$\lambda$	4	2	1.25	0.75	0.5	0.25



# 推理的“三段论”

已知西红柿变红就熟了

如果西红柿有点红

那么西红柿有点熟



# 基本MZ模糊推理

- 已知若 $A$ 则 $B$ ；现有 $A^*$ ，求 $B^*$ ：
- 步骤：

$$\mathbf{F} = \min(\mathbf{A}, \mathbf{A}^*) \quad \lambda = (\mathbf{F})_{\max}$$

$$\mathbf{B}^* = \lambda \wedge \mathbf{B}$$



# 第I类复合MZ模糊推理步骤

- 已知若 $A$ 且 $B$ 则 $C$ ；现有 $A^*$ 且 $B^*$ ，求 $C^*$ ：

- 步骤： $D = \vec{A} \circ B$

$$D^* = \vec{A}^* \circ B^*$$

$$F = \min(D^*, D) \quad \lambda = (F)_{\max}$$

$$C^* = \lambda \wedge C$$

# 第II类MZ模糊推理步骤总结

- 已知若 $A_1$ 则 $B_1$ ，若 $A_2$ 则 $B_2$ ；现有 $A^*$ ，求 $B^*$ ：

- 步骤：
$$F_1 = \min(A_1, A^*) \quad \lambda_1 = (F_1)_{\max}$$

$$F_2 = \min(A_2, A^*) \quad \lambda_2 = (F_2)_{\max}$$

$$B_1^* = \lambda_1 \wedge B_1 \quad B_2^* = \lambda_2 \wedge B_2$$

$$B^* = B_1^* \cup B_2^*$$

- 模糊推理步骤的难点在于通过条件求出大前提和小前提。



# 模糊控制导论课程纲要

- 模糊控制基本概念
- 模糊集合及其运算
- 模糊关系的数学表示和运算
- 模糊控制逻辑基础与推理运算
- 模糊C均值聚类法
- 科技文献书写和阅读



# FCM算法的目标函数

- FCM算法的目标函数及其限制条件如下。  
 $\alpha \in (1, +\infty)$  是一个加权参数。

$$J = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij}^{\alpha} \|x_j - c_i\|^2$$

$$\sum_{i=1}^m u_{ij} - 1 = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$





# Lagrange 目标函数构造

- 使用Lagrange乘子法构建新的目标函数。对 $u_{ij}$ 、 $c_i$ 和 $\lambda_j$ 求偏导数，并使得偏导数等于0。

$$\bar{J} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij}^{\alpha} \|x_j - c_i\|^2 + \sum_{j=1}^n \lambda_j \left( \sum_{i=1}^m u_{ij} - 1 \right)$$



# 聚类中心的更新公式

- 对聚类中心求偏导数，并令其为0，有：

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial c_i} = 2 \sum_{j=1}^n u_{ij}^{\alpha} (c_i - x_j) = 0$$

$$\Rightarrow c_i = \frac{\sum_{j=1}^n u_{ij}^{\alpha} x_j}{\sum_{j=1}^n u_{ij}^{\alpha}}$$



# 隶属度的更新公式

- 对隶属度求偏导数，并令其为0，可以得到隶属度更新原始公式。

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial u_{ij}} = \alpha \|x_j - c_i\|^2 u_{ij}^{\alpha-1} + \lambda_j = 0$$

$$\Rightarrow u_{ij} = \left( \frac{-\lambda_j}{\alpha \|x_j - c_i\|^2} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

# 隶属度的更新公式

- 把这个表达式代入约束条件中，有：

$$\begin{aligned} \because \sum_{i=1}^m u_{ij} &= 1 \quad u_{ij} = \left( \frac{-\lambda_j}{\alpha \|x_j - c_i\|^2} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \\ \therefore \sum_{i=1}^m \left( \frac{-\lambda_j}{\alpha \|x_j - c_i\|^2} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} &= \left( \frac{-\lambda_j}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \sum_{i=1}^m \left( \frac{1}{\|x_j - c_i\|^{\frac{2}{\alpha-1}}} \right) = 1 \end{aligned}$$

# 隶属度的更新公式

$$\left(\frac{-\lambda_j}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \sum_{i=1}^m \left( \frac{1}{\|x_j - c_i\|^{\frac{2}{\alpha-1}}} \right) = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{-\lambda_j}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \left( \frac{1}{\|x_j - c_i\|^{\frac{2}{\alpha-1}}} \right)} = \frac{1}{\sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{\|x_j - c_k\|^{\frac{2}{\alpha-1}}} \right)}$$

# 隶属度的更新公式

$$\begin{aligned} u_{ij} &= \left( \frac{-\lambda_j}{\alpha \|x_j - c_i\|^2} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \left( \frac{-\lambda_j}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \cdot \frac{1}{\|x_j - c_i\|^{\frac{2}{\alpha-1}}} \\ &= \frac{1}{\sum_{k=1}^m \left( \frac{1}{\|x_j - c_k\|^{\frac{2}{\alpha-1}}} \right)} \cdot \frac{1}{\|x_j - c_i\|^{\frac{2}{\alpha-1}}} \end{aligned}$$

# 隶属度的更新公式

- 得了隶属度更新公式最终表达式:

$$u_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^m \left( \frac{\|x_j - c_i\|}{\|x_j - c_k\|} \right)^{\frac{2}{\alpha-1}}}$$



# 模糊控制导论课程纲要

- 模糊控制基本概念
- 模糊集合及其运算
- 模糊关系的数学表示和运算
- 模糊控制逻辑基础与推理运算
- 模糊C均值聚类法
- 科技文献书写和阅读





# 课程考核要求

- 平时(20%) + 期中(20%) + 期末(60%)
- 严格按照大纲教学目标出题和统计成绩
- 期中、期末考前严禁勾画重点
- 期末试题和往年试题重复率保持在15%以内
- 期末试题等级L1（最易）不得超过30%
- 期末试题等级L3（最难）不得低于30%
- 期末试题需要回归课本并持续改进，均衡难度



# 课程教学目标

- 目标1：掌握模糊控制的基本概念、基本理论、常用方法与技术。
- 目标2：能够综合应用模糊数学理论、模糊控制方法与技术进行模糊模型的理论推算与简单系统设计。
- 目标3：能够使用MATLAB语言对模糊控制和模糊系统进行仿真。
- 目标4：培养学生查阅资料的能力、自我学习的能力、总结归纳的能力、以及英语文献阅读能力。

# 课程成绩评定比例

	考核与评价方式及成绩比例（%）					成绩比例 （%）
	平时表现	平时作业	文献阅读 汇报	期中考试	期末考试	
课程目标1	4				12	16
课程目标2		5		15	39	59
课程目标3		5		5	9	19
课程目标4			6			6
合计	4	10	6	20	60	100



# 期末考试考察目标分值

- 目标1（基本概念）：掌握模糊控制的基本概念、基本理论、常用方法与技术。  **$(12 \div 0.6 = 20)$**
- 目标2（综合进阶）：能够综合应用模糊数学理论、模糊控制方法与技术进行模糊模型的理论推算与简单系统设计。  **$(39 \div 0.6 = 65)$**
- 目标3（编程实践）：能够使用MATLAB语言对模糊控制和模糊系统进行仿真。  **$(9 \div 0.6 = 15)$**



# 基础概念复习纲要

- 记忆 + 理解
- 不留复习空白角落
- 做好多种考察方式的准备



# 进阶综合复习纲要

- 计算过关，无低级错误
- 逻辑过关，推导正确
- 注意运算技巧
- 书写格式规范



# 编程实践复习纲要

- 如何输入和运算数据？
- 常用函数都有什么功能？
- 如何编写和调用子函数？
- 如何对程序流程进行控制？

help, clc, clear, close, plot, stem, figure,  
axis, legend, max, min, ones, zeros, size,  
xlabel, ylabel, box, hold, ...



# 综合练习

- 1、\_\_\_\_\_被誉为“计算机之父”。
- 2、“浓氢氧化钠溶液具有强烈的腐蚀性，5mol/L的氢氧化钠溶液能在很短的时间内严重灼伤皮肤”这句话中，表示事物性质的模糊描述词汇有\_\_\_\_\_。
- 3、Mamdani型模糊控制器的核心部分主要由\_\_\_\_\_、\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_三部分构成。在模糊化模块之前有\_\_\_\_\_模块，在清晰化模块之后有\_\_\_\_\_模块。





# 综合练习

4、模糊C均值算法对\_\_\_\_\_的数据聚类效果最好。

5、智能控制的三个分支是\_\_\_\_、\_\_\_\_和\_\_\_\_\_。

6、 $A=\{0,3,6\}$ ， $B=\{1,6,8\}$ ， $A \times B =$ \_\_\_\_\_。

7、命题 $P$ 是“ $1+1=3$ ”， $Q$ 是“ $2+3=7$ ”，则条件命题 $P \rightarrow Q$ 是\_\_\_\_\_。（填“真命题”、“假命题”或“模糊命题”）



# 综合练习

8、某Figure里横轴左右界分别设置为3和5，上下界分别设置为2和1，则坐标轴控制对应MATLAB语句是：

---

9、 $A$ 是定义在论域 $U = [0, t]$ 上的正规模糊集合，已知 $A(x) = \sin x$ ，则 $t$ 的取值范围是\_\_\_\_\_。

10、 $A$ 和 $B$ 是定义在论域 $U$ 上的模糊集合， $A$ 表示“不是很大”， $B$ 表示“略小”，如果 $C$ 表示“不大不小”，则 $C(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（用 $A(x)$ 和 $B(x)$ 的表达式）



某两个 MATLAB 子程序文件名为 fuzzy\_op1.m 和 fuzzy\_op2.m，可以实现模糊集合如下的复合运算从而生成两个新的模糊集合。其子程序的形式参数为 A、B、C、X 和 Y，均表示模糊集合。


$$X = A^c \cup (B \cap C) \quad Y = (A \cup C) \cap B^c$$

已知两个子程序的第一行代码分别如下：

```
function X = fuzzy_op1(A, B, C)
```

```
function Y = fuzzy_op2(A, B, C)
```

1、请写出这两个完整的 MATLAB 子程序代码。



2、连续论域  $U_1 = [-1, 4]$ ,  $P$ 、 $Q$  和  $R$  分别定义在  $U_1$  上, 运算如下。

$$P(x) = \exp(-x^2) \quad Q(x) = \exp[-(x-2)^2] \quad R(x) = 0.2x + 0.2$$

现有定义在  $U_1$  上模糊集合  $W$ , 计算如下:

$$W = R^c \cup (P \cap Q)$$

请引用本题中某合适的子程序编写 MATLAB 主程序画出  $W$  的图像,  
要求:

- ① 使用黑色虚线画出图像, 线粗为 1 磅;
- ② 横轴标签为 “x”, 纵轴标签为 “Membership Function”, 去掉外框。

3、离散论域  $U_2 = \{0, 1, 2\}$ ，定义在  $U_2$  上的模糊集合  $J$ 、 $K$  和  $L$  分别用 Zadeh 表示如下：

$$J = \frac{0.7}{0} + \frac{0.3}{2} \quad K = \frac{0.6}{1} + \frac{1}{2} \quad L = \frac{0.2}{0} + \frac{0.4}{1} + \frac{0.9}{2}$$

现有定义在  $U_2$  上模糊集合  $M$ ，计算如下：

$$M = (K \cup L) \cap J^c$$

请引用用本题中合适的子程序计算并画出  $M$ ，要求：

- ① 坐标轴左右界为-0.2 和 2.2，上下界为 1.1 和 0；
- ② 横轴标签为“x”，纵轴标签为“Membership Function”，去掉外框。



**THANK YOU!**