Extrema - Übungsaufgaben

Tuesday, January 3, 2023 12:02 PM

Aufgabe 1: Bestimme die Hoch, Tief- und Sattelpunkte der Funktion f.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 3$. Notwendiges Kriterium $f'(x) = 0$

$0 = f'(x)$
$\Leftrightarrow 0 = 3x^2 - 3 \quad | +3$
$\Leftrightarrow 3 = 3x^2 \quad | \div 3 \quad | \sqrt{}$
$\Rightarrow x_1 = -1 \wedge x_2 = 1$

Hinreichendes Kriterium:
$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 9 \quad > 0$
$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 3 = -3 \quad < 0$
$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9 \quad > 0$

An der Stelle $x_1 = -1$ liegt ein lokales Maximum vor, weil man einen VZW von + zu - hat;
An der Stelle $x_2 = 1$ liegt ein lokales Minimum vor, weil man einen VZW von - zu + hat.

$H_1(x_1 | f(x_1)) = H_1(-1|4)$
$T_2(x_2 | f(x_2)) = T_2(1|0)$

---

b) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4$

$f'(x) = 4x^3 - 16x$. Notwendiges Kriterium: $f'(x) = 0$

$0 = f'(x)$
$\Leftrightarrow 0 = 4x^3 - 16x$
$\Leftrightarrow 0 = x(4x^2 - 16)$
$\Rightarrow 0 = x \vee 0 = 4x^2 - 16$

$0 = 4x^2 - 16 \quad | +16$
$16 = 4x^2 \quad | \div 4$
$4 = x^2 \quad | \sqrt{}$
$\Leftrightarrow \pm 2 = x$
$\Rightarrow x_1 = -2 \wedge x_2 = 0 \wedge x_3 = 2$

Hinreichendes Kriterium:
$f'(-3) = -60 \quad < 0$
$f'(-1) = 12 \quad > 0$
$f'(1) = -12 \quad < 0$
$f'(3) = 60 \quad > 0$

An der Stelle $x_1 = -2$ liegt ein lokales Minimum vor, weil man einen VZW von - zu + hat;
An der Stelle $x_2 = 0$ liegt ein lokales Maximum vor, weil man einen VZW von + zu - hat;
An der Stelle $x_3 = 2$ liegt ein lokales Minimum vor, weil man einen VZW von - zu + hat.

$T_1(-2|-12) \quad H_2(0|4) \quad T_3(2|-12)$

---

c) $f(x) = x^2 + 4x + 2$

$f'(x) = 2x + 4$. Notwendiges Kriterium: $f'(x) = 0$

$0 = f'(x)$
$\Leftrightarrow 0 = 2x + 4 \quad | -4$
$\Leftrightarrow -4 = 2x \quad | \div 2$
$\Rightarrow x_1 = -2$

Hinreichendes Kriterium:
$f'(-3) = -2 \quad < 0$
$f'(0) = 4 \quad > 0$

An der Stelle $x_1 = -2$ liegt ein lokales Minimum vor, weil man einen VZW von - zu + hat.

$T_1(-2|-2)$

---

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x + \frac{11}{4}$

$f'(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Notwendiges Kriterium: $f'(x) = 0$

$0 = f'(x)$
$\Leftrightarrow 0 = x^3 - 3x^2 + 4 \quad | TR$
$\Rightarrow x_1 = -1 \wedge x_2 = 2$

Hinreichendes Kriterium:
$f'(-2) = -16 \quad < 0$
$f'(0) = 4 \quad > 0$
$f'(3) = 4 \quad > 0$

An der Stelle $x_1 = -1$ liegt ein lokales Minimum vor, weil man einen VZW von - zu + hat;
An der Stelle $x_2 = 2$ liegt ein Sattelpunkt vor, weil man einen VZW von + zu + hat.

$T_1(-1|0)$ $S_2(2|6{,}75)$

e) $f(x) = 3x^3$

$f'(x) = 9x^2$ Notwendiges Kriterium: $f'(x) = 0$

$0 = f'(x)$

$\Leftrightarrow 0 = 9x^2 \quad |:9$

$\Leftrightarrow 0 = x^2 \quad |\sqrt{\ }$

$\Rightarrow x_1 = 0$

Hinreichendes Kriterium:

$f'(-1) = 9 > 0$

$f'(1) = 9 > 0$

An der Stelle $x_1 = 0$ liegt ein Sattelpunkt vor, weil man einen VZW von + zu + hat.

$S_1(0|0)$