Extrema – Übungsaufgaben (1)

Aufgabe 1: *Bestimme* die Hoch, Tief- und Sattelpunkte der Funktion f.

a) $f(x)=x^3-3x+2$

b) $f(x)=x^4-8x^2+4$

c) $f(x)=x^2+4x+2$

d) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+4x+\frac{11}{4}$

e) $f(x)=3x^3$

a) $f'(x)=3x^2-3$. Notwendiges Kriterium: $f'(x)=0$

$$0=f'(x)$$
$$\Leftrightarrow 0=3x^2-3$$
$$\Rightarrow x_1=-1 \;\wedge\; x_2=1$$

Hinreichendes Kriterium:

$f'(-2)=3\cdot(-2)^2-3=9 \;>0$

$f'(0)=3\cdot 0^2-3=-3 \;<0$

$f'(2)=3\cdot 2^2-3=9 \;>0$

An der Stelle $x_1=-1$ liegt ein lokales Maximum vor, weil man einen Vorzeichenwechsel von + zu – hat;

An der Stelle $x_2=1$ liegt ein lokales Minimum vor, weil man einen Vorzeichenwechsel von - zu + hat.

$H_1(x_1|f(x_1))=H_1(-1|4) \quad T_2(x_2|f(x_2))=T_2(1|0)$

b) $f'(x)=4x^3-16x$. Notwendiges Kriterium: $f'(x)=0$

$$0=f'(x)$$
$$\Leftrightarrow 0=4x^3-16x \quad |\textit{ausklammern von } x$$
$$\Leftrightarrow 0=x(4x^2-16)$$
$$\Rightarrow 0=x \;\vee\; 0=4x^2-16$$

$$0=4x^2-16 \quad |+16 \quad |\div 4 \quad |\sqrt{}$$
$$\Rightarrow x_1=-2 \;\wedge\; x_2=0 \;\wedge\; x_3=2$$

Hinreichendes Kriterium:

$f'(-3)=-60 \;<0$

$f'(-1)=12 \;>0$

$f'(1)=-12 \;<0$

$f'(3)=60 \;>0$

An der Stelle $x_1=-2$ liegt ein lokales Minimum vor, weil man einen Vorzeichenwechsel von – zu + hat;

An der Stelle $x_2=0$ liegt ein lokales Maximum vor, weil man einen Vorzeichenwechsel von + zu – hat;

An der Stelle $x_3=2$ liegt ein lokales Minimum vor, weil man einen Vorzeichenwechsel von – zu + hat.

$T_1(x_1|f(x_1))=T_1(-2|-12) \quad H_2(x_2|f(x_2))=H_2(0|4)$

$T_3(x_3|f(x_3))=T_3(2|-12)$

c) $f'(x)=2x+4$. Notwendiges Kriterium: $f'(x)=0$

$$0=f'(x)$$
$$\Leftrightarrow 0=2x+4 \quad |-4 \quad |\div 2$$
$$\Rightarrow x_1=-2$$

Hinreichendes Kriterium:

$f'(-3)=2\cdot(-3)+4=-6+4=-2 \;<0$

$f'(0)=2\cdot 0+4=4 \;>0$

An der Stelle $x_1=-2$ liegt ein lokales Minimum vor, weil man einen Vorzeichenwechsel von – zu + hat.

$T_1(x_1|f(x_1))=T_1(-2|-2)$

d) $f'(x)=x^3-3x^2+4$. Notwendiges Kriterium: $f'(x)=0$

$$0=f'(x)$$
$$\Leftrightarrow 0=x^3-3x^2+4 \quad |TR$$
$$\Rightarrow x_1=-1 \ \wedge \ x_2=2$$

Hinreichendes Kriterium:
$f'(-2)=-16 \ <0$
$f'(0)=4 \ >0$
$f'(3)=4 \ >0$
An der Stelle $x_1=-1$ liegt ein lokales Minimum vor, weil man ein Vorzeichenwechsel von – zu + hat;
An der Stelle $x_2=2$ liegt ein Sattelpunkt vor, weil man ein Vorzeichenwechsel von + zu + hat.
$T_1(x_1|f(x_1))=T_1(-1|0) \quad S_2(x_2|f(x_2))=S_2(2|6{,}75)$

e) $f'(x)=9x^2$ Notwendiges Kriterium: $f'(x)=0$

$$0=f'(x)$$
$$\Leftrightarrow 0=9x^2 \quad |\div 9 \quad |\sqrt{}$$
$$\Rightarrow x_1=0$$

Hinreichendes Kriterium:
$f'(-1)=9 \ >0$
$f'(1)=9 \ >0$
An der Stelle $x_1=0$ liegt ein Sattelpunkt vor, weil man ein Vorzeichen wechsel von + zu + hat.
$S_1(x_1|f(x_1))=S_1(0|0)$