Bei der Berechnung des **Flächeninhalts zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse** über dem Intervall $[a; b]$ geht man so vor:
1. Man bestimmt die Nullstellen von f auf $[a; b]$.
2. Man untersucht, welches Vorzeichen $f(x)$ in den Teilintervallen hat.
3. Man bestimmt die Inhalte der Teilflächen und addiert sie.

Wird eine **Fläche** über dem Intervall $[a; b]$ **von den Graphen zweier Funktionen f und g begrenzt** und gilt $f(x) \geqq g(x)$ für alle $x \in [a; b]$, dann gilt für ihren Inhalt A:
$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Soll ein Flächeninhalt wie in Fig. 1 mit einem Rechner berechnet werden, kann man sich die Bestimmung der Nullstellen ersparen, indem man die Betragsfunktion verwendet und nur das Integral $\int_a^c |f(x)|\,dx$ berechnet.

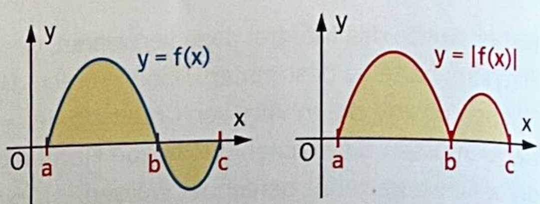

Fig. 1

CAS-Arbeitsblatt
Flächeninhalt
8s82uf

Beispiel 1 Flächen teilweise unterhalb, teilweise oberhalb der x-Achse
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 2x$. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f, der x-Achse und den Geraden $x = -1$ und $x = 3$ eingeschlossen wird.
a) ohne Rechner b) mit Rechner

■ Lösung: a) *Es handelt sich um die gefärbte Fläche in Fig. 2.*
Bestimmung der Nullstellen $f(x) = 0$:
$x(x-2) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.
$$A = \int_{-1}^{0}(x^2 - 2x)\,dx - \int_{0}^{2}(x^2 - 2x)\,dx + \int_{2}^{3}(x^2 - 2x)\,dx$$
$$= \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{0}^{2} + \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{2}^{3}$$
$$= \tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{3} = 4.$$
b) *Man verwendet statt der Funktion f die Betragsfunktion $|f(x)|$ von f.*
Es ist $A = \int_{-1}^{3}|x^2 - 2x|\,dx = 4$ (Fig. 3).

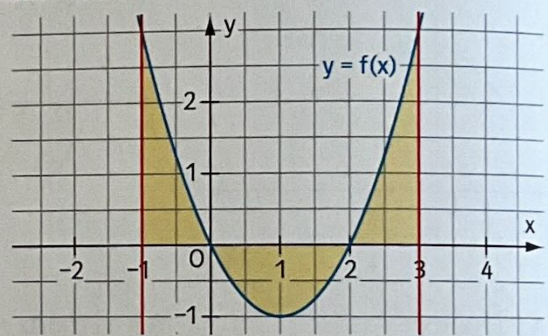

Fig. 2

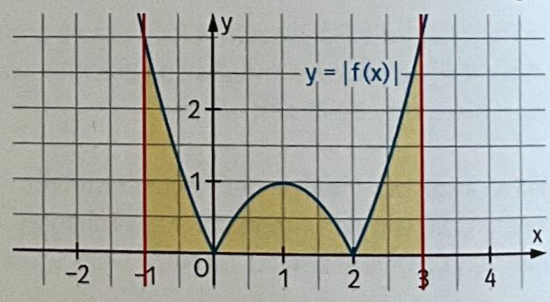

Fig. 3

Beispiel 2 Fläche zwischen zwei Graphen; die Graphen schneiden sich nicht im Integrationsbereich.
Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = e^{-x}$ und $g(x) = 2$ (Fig. 5). Berechnen Sie den Inhalt A der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g, der y-Achse und der Geraden $x = 3$ begrenzt wird.

■ Lösung: *Die Fläche ist in Fig. 5 gefärbt.*
Im Intervall $[0; 3]$ ist $g(x) \geqq f(x)$. Also gilt:
$$A = \int_0^3 (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^3 (2 - e^{-x})\,dx = \left[2x + e^{-x}\right]_0^3$$
$$= (6 + e^{-3}) - (0 + e^{0}) = 5 + e^{-3} \approx 5{,}05.$$

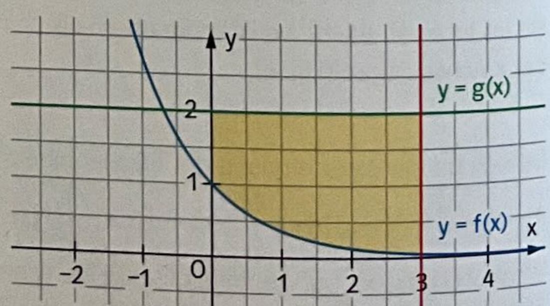

Fig. 4