UNIVERSITÉ
LAVAL

Faculté des Sciences et de génie
Département de génie électrique et de génie informatique

GEL-2001 Analyse de signaux
Jérôme Genest

Examen final

Date: Lundi le 13 décembre 2010

Durée: de 8h30 à 10h20

Salle: PLT-2751

Cet examen vaut 45% de la note finale.

Remarques:

i) *L'utilisation d'une calculatrice est permise.*

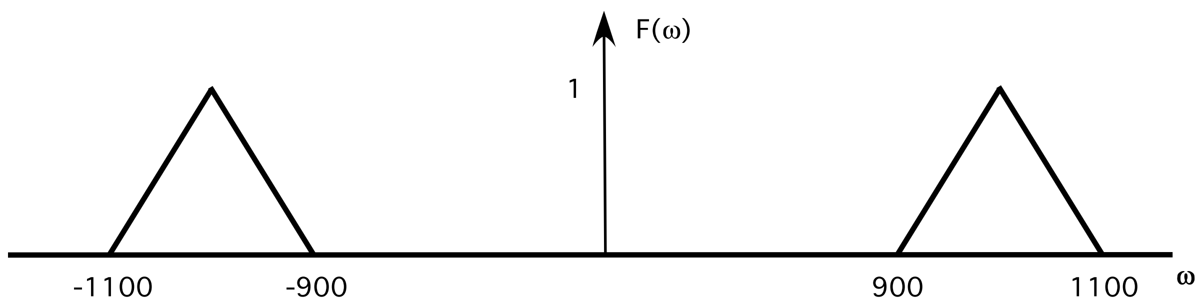
ii) *Aucun document n'est permis durant l'examen.*

iii) *Seule la liste des formules fournie à la fin du questionnaire est permise.*

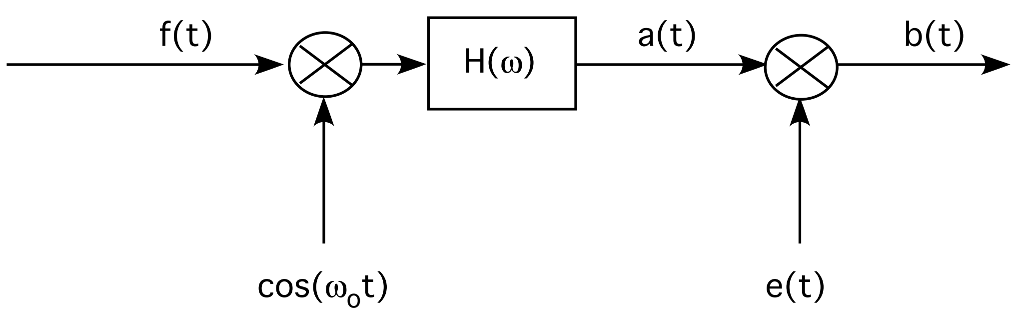
iv) *Votre carte d'identité doit être placée sur votre bureau en conformité avec le règlement de la Faculté.*

Problème 1 (14 points)

Un signal $f(t)$ a un spectre $F(\omega)$ illustré ci-bas:



Ce signal est envoyé au système suivant:



avec:

$$H(\omega) = \text{Rect}(\omega/2000) \quad \text{et} \quad e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e)w \tag{1}$$

$$\omega_o = 1000\text{rad/s} \quad \text{et} \quad T_e = 2\pi/180s. \tag{2}$$

a) Quelle est la puissance totale du signal $f(t)$?

b) Calculez l'énergie totale de $f(t)$.

c) Calculez et tracez la transformation de Fourier de a(t).

d) Calculez et tracez la transformation de Fourier de b(t).

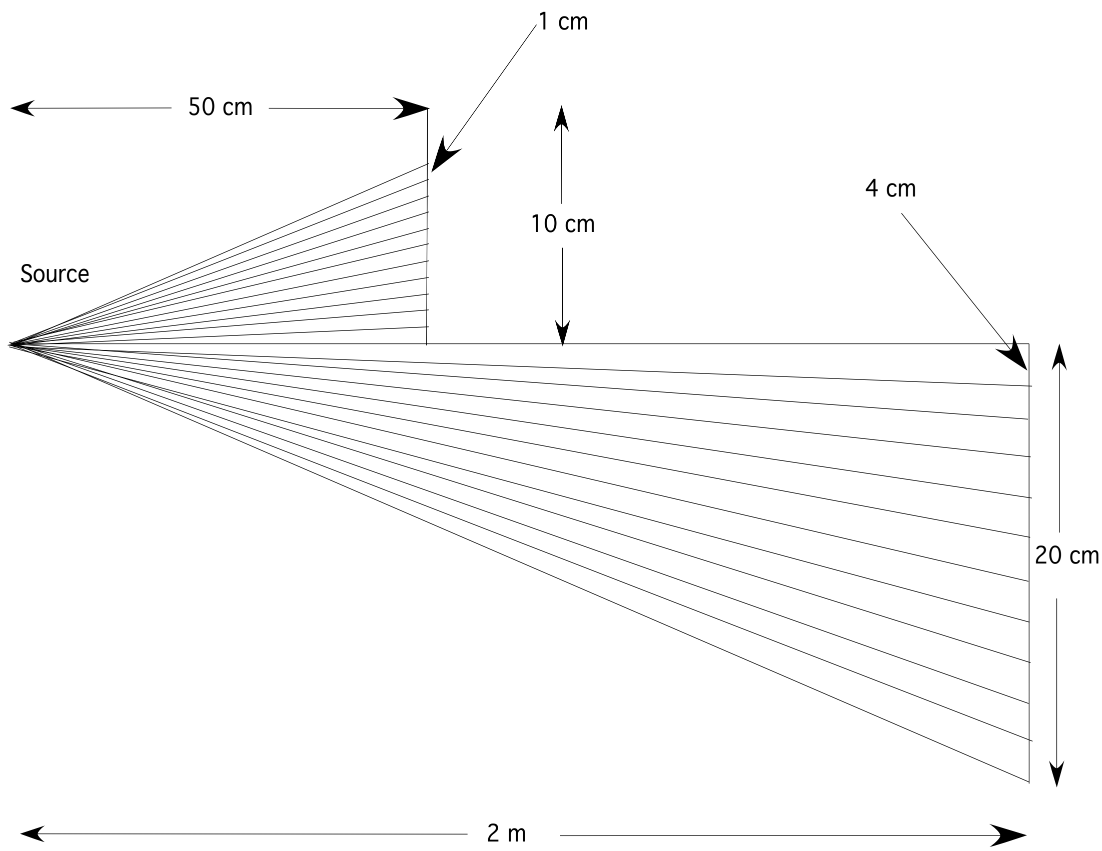
e) Quelle est l'utilité de la première multiplication (par le cosinus) ?

f) À quoi sert le filtre $H(\omega)$?

g) Pourrait-on reconstruire $f(t)$ à partir de $b(t)$? Pourquoi ?

h) Quelle est la période d'échantillonnage maximale possible pour discrétiser $a(t)$ sans perte d'information ?

Problème 2 (12 points)



Pour mesurer la profondeur de surfaces dans une scène, prenons une source qui émet des pinceaux lumineux à intervalles angulaires réguliers, tel qu'illustré sur la figure ci-haut. La source éclaire deux surfaces, une à 50 cm et une à 2 m. Sur la surface à 50 cm, l'éclairement de la source crée des points espacés de 1 mm tandis que sur la surface à 2 m, les points sont espacés de 4 mm.

Avec une caméra qui image les surfaces, on désire créer une image en profondeur de la scène (Notons que pour les besoins de l'examen, nous travaillons en une dimension, il s'agit donc d'une "image" 1D).

Nous allons considérer comme point de départ que le signal spatial mesuré par la caméra est:

$$f(x) = \text{Rect}\left(\frac{x+5}{10}\right)\delta_{X_1}(x) + \text{Rect}\left(\frac{x-10}{20}\right)\delta_{X_4}(x). \tag{3}$$

avec $X_1 = 1$ cm, $X_4 = 4$ cm et toutes les unités en centimètres.

a) Tracez la fonction $f(x)$.

b) Calculez $F(\sigma)$ la transformation de Fourier de $f(x)$. Notez que σ représente les fréquences spatiales en rad/cm puisque x et σ forment une paire de Fourier, comme t et ω.

c) Tracez chacun des 2 termes en module.

d) Quelle est la largeur du filtre nécessaire pour isoler le contenu spectral autour de la fréquence $\sigma = 0$ et pour se débarrasser des autres copies spectrales ? (Considérez que vous pouvez faire un filtre en boîte idéal et que vous voulez maximiser la résolution spatiale). Le filtre doit fonctionner pour les 2 cas.

e) Calculez la réponse impulsionnelle du filtre choisi en d). [Si vous n'avez pas la réponse de d), choisissez une largeur].

f) Quelle est la résolution spatiale ? (La largeur (entre les zéros) de la réponse impulsionnelle)?

g) D'où vient la hauteur autour de $\sigma = 0$ des spectres tracés en c) ? Comment allons-nous retrouver l'information de profondeur?

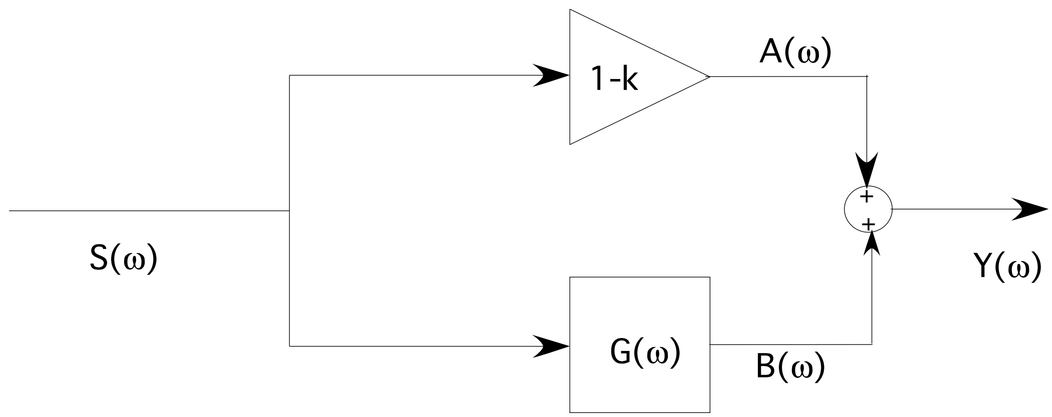
Problème 3 (9 points)

a) Calculez et tracez la convolution entre $a(x) = \text{Rect}\left(\frac{x+5}{10}\right)\delta_{X_1}(x)$, avec $X_1 = 1$ et un filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = \text{Rect}(x/8)$.

b) Calculez et tracez la convolution entre $b(x) = \text{Rect}\left(\frac{x-10}{20}\right)\delta_{X_4}(x)$, avec $X_4 = 4$ et un filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = \text{Rect}(x/8)$.

c) On sait que le signal $f(x) = a(x) + b(x)$ correspond à deux surfaces à des distances différentes (c.f problème 1). À quoi correspondent les niveaux du signal filtré ? Que peut-on conclure sur la distance des surfaces avec le signal obtenu en c) ?

Problème 4 (10 points)



Soit un signal $S(\omega) = \mathrm{Rect}(\omega)$ envoyé dans un système illustré ci-haut, tel que la sortie est:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= S(\omega)H(\omega) \\ &= S(\omega)[(1-k) + G(\omega)], \end{aligned}$$

avec $G(\omega) = ke^{-j\omega a/2}(e^{j\omega a/2} + e^{-j\omega a/2})$.

a) Tracez le spectre $A(\omega)$ du signal à la sortie de la première branche (module et phase).

b) Tracez le spectre $B(\omega)$ du signal à la sortie de la seconde branche (module et phase).

c) Simplifiez l'expression de la fonction de transfert globale $H(\omega)$ et calculez la réponse impulsionnelle du filtre.

d) Dessinez un bloc diagramme plus simple représentant ce système en temps.

e) Est-ce que le système est causal ? Pourquoi ?

f) À quoi cela correspond-il si, par exemple, $s(t) <-> S(\omega)$ est un signal sonore ?

g) Tracez $y(t)$, le signal à la sortie du filtre, pour $a >> 1$ et $k < 1$.