

EXAMEN FINAL A2010 : SOLUTIONS

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE ET DE GÉNIE INFORMATIQUE

Question 1 (14 pts)

Partie A (1 pts)

Comme le spectre $F(\omega)$ du signal $f(t)$ est continu, $f(t)$ doit être non-périodique. De plus il s'agit d'un signal à énergie finie puisqu'il est borné en ω . Ainsi donc, la puissance de $f(t)$ sera nulle.

Partie B (2 pts)

L'énergie totale est donnée par :

$$E_{tot} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (1)$$

Si on observe attentivement le spectre $F(\omega)$, on remarque que l'énergie est séparée uniformément dans les deux triangles. Le plus facile pour faire ce calcul est d'intégrer sur un triangle recentré sur 0 et de considérer le double de ce résultat pour l'énergie totale. Ceci revient exactement au même que de calculer l'intégrale sur un triangle entre -1100 et -900 puis sur l'autre entre 900 et 1100. Ceci est possible puisque que le spectre est symétrique. Plus simple encore, étant donné que les triangles sont eux même symétriques, on peut simplifier le problème d'avantage en calculant l'intégrale sur un demi-triangle et en multipliant par 2 pour avoir l'énergie d'un triangle.

$$E_{tri} = \frac{2}{2\pi} \int_0^{100} \left| 1 - \frac{1}{100}\omega \right|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{100} \left(1 - \frac{\omega}{50} + \frac{\omega^2}{10000} \right) d\omega, \quad (2)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\omega - \frac{\omega^2}{100} + \frac{\omega^3}{30000} \right]_0^{100} = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{100^2}{100} + \frac{100^3}{30000} \right] = \frac{100}{3\pi}, \quad (3)$$

d'où :

$$E_{tot} = 2E_{tri} = \frac{200}{3\pi}. \quad (4)$$

Partie C (4 pts)

On cherche le spectre de $a(t)$, connaissant le spectre de $f(t)$. Entre $f(t)$ et $a(t)$ le signal est multiplié par un cosinus puis est filtré par un filtre $H(\omega)$ donné. La multiplication par le cosinus donne :

$$f'(t) = f(t) \cos(\omega_0 t) = f(t) \left[\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \right]. \quad (5)$$

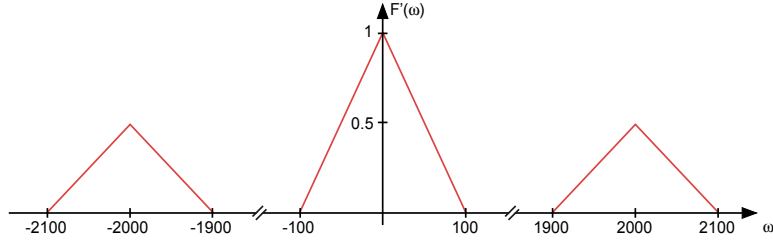


FIGURE 1 – Spectre de la fonction $f'(t)$, après modulation avec un cosinus de fréquence ω_0 .

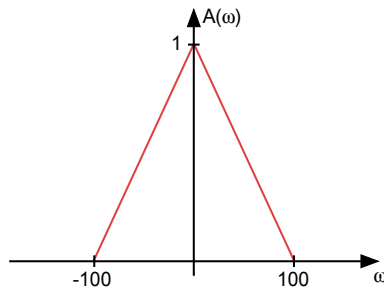


FIGURE 2 – Spectre $A(\omega)$ de la fonction $a(t)$.

Utilisant les propriétés de de décalage, on retrouve directement le spectre recherché. On aurait pu aussi, de façon plus intuitive, faire la convolution du spectre du cosinus avec le spectre de $f(t)$. On a donc :

$$F'(\omega) = \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0). \quad (6)$$

Le spectre de $f'(t)$ est représenté à la figure 1. Le filtre $H(\omega)$ constitue une boîte de largeur 2000, centrée sur zéro. Une fois filtré, tout ce qui se trouve au delà de ± 1000 rad/s sera coupé. Le spectre de $a(t)$ sera donc uniquement le triangle centré sur zéro, donné par la figure 2. L'expression analytique de ce spectre est :

$$A(\omega) = \text{Tri}\left(\frac{\omega}{100}\right). \quad (7)$$

Partie D (4 pts)

On cherche le spectre de $b(t)$. On connaît le spectre de $a(t)$, trouvé en c), et le signal $e(t)$. On a :

$$b(t) = a(t)e(t) \quad \leftrightarrow \quad B(\omega) = \frac{1}{2\pi} [A(\omega) * E(\omega)], \quad (8)$$

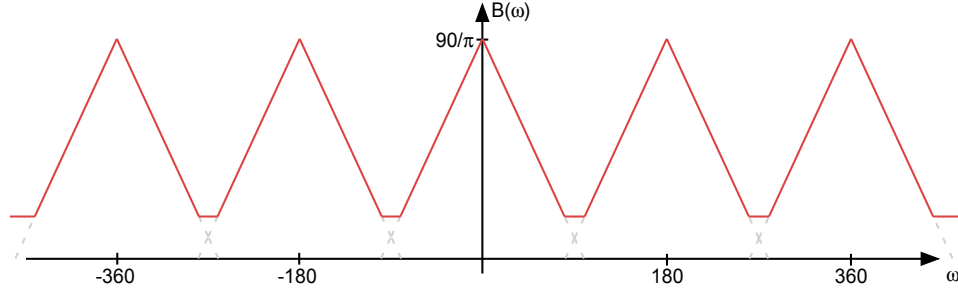


FIGURE 3 – Spectre $B(\omega)$ de la fonction $b(t)$.

et :

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e) \quad \leftrightarrow \quad E(\omega) = \omega_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_e), \quad (9)$$

avec :

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}. \quad (10)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{2\pi} [A(\omega) * E(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \left[\text{Tri}\left(\frac{\omega}{100}\right) * \frac{2\pi}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_e) \right], \quad (11)$$

$$= \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Tri}\left(\frac{\omega - n\omega_e}{100}\right). \quad (12)$$

$$(13)$$

Comme $T_e = 2\pi/180$, on a :

$$B(\omega) = \frac{90}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Tri}\left(\frac{\omega - 180n}{100}\right). \quad (14)$$

La figure 3 présente le spectre $B(\omega)$.

Partie E (0.5 pts)

La modulation avec le cosinus permet de ramener le signal en bande de base, c'est à dire autour de 0 Hz. Cette opération permettra, par la suite, de traiter le signal sans avoir à faire face aux limitations imposées par l'utilisation de hautes fréquences. Par exemple, il sera possible d'échantillonner le signal avec une fréquence d'échantillonnage beaucoup plus faible.

Partie F (0.5 pts)

Après la modulation (multiplication avec le cosinus), on se retrouve avec une partie du signal à de $\omega = 0$ et à de $\omega = \pm 2\omega_0$. Le filtre permet de garder seulement la partie autour de $\omega = 0$. Comme on veut échantillonner le signal plus tard dans le système (multiplication avec $e(t)$), cette opération va permettre de s'assurer que les composantes autour de $\omega = \pm 2\omega_0$ ne viennent pas se replier dans la bande spectrale d'intérêt.

Partie G (1 pts)

Non, il ne serait pas possible de reconstruire fidèlement $f(t)$ à partir de $b(t)$ parce que la fréquence d'échantillonnage, ω_e , est trop petite. Ceci fait en sorte qu'il y a du repliement spectral (*aliasing*) et le spectre original est perdu (voir figure 3). On doit remarquer que, ici, le critère de Nyquist n'est pas respecté. C'est à dire que la fréquence d'échantillonnage est plus petite que deux fois la largeur de bande du signal à échantillonner.

Partie H (1 pts)

La fréquence d'échantillonnage minimale pour échantillonner le signal est égale au double de la bande de ce signal (critère de Nyquist). La bande de ce signal est de 100 rad/s. Alors la fréquence d'échantillonnage minimale, $\omega_{e_{min}}$, est de 200 rad/s. Donc :

$$T_{e_{max}} = \frac{2\pi}{\omega_{e_{min}}} = \frac{2\pi}{200} = \frac{\pi}{100} . \quad (15)$$

Question 2 (12 pts)

Partie A (1 pts)

a)

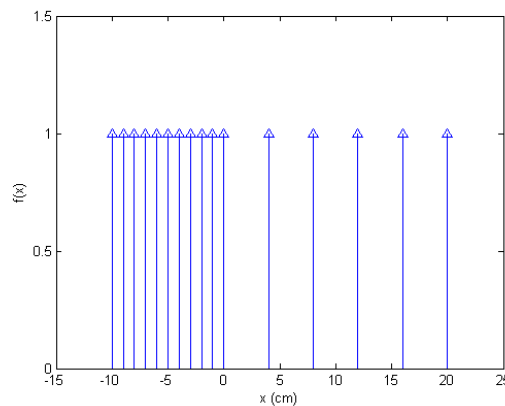


FIGURE 4 – $f(x)$

b) Les TF de $\text{rect}\left(\frac{x+5}{10}\right)$ et $\text{rect}\left(\frac{x-10}{20}\right)$ sont $10\text{sa}(5\sigma)\exp(j5\sigma)$ et $20\text{sa}(10\sigma)\exp(j10\sigma)$. Les TF des versions échantillonnées des deux signaux sont donc :

$$\begin{aligned}\text{rect}\left(\frac{x+5}{10}\right)\delta_{X_1}(x) &\Longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}10\text{sa}(5\sigma)\exp(j5\sigma)*\frac{2\pi}{1}\delta_{\frac{2\pi}{1}}(\sigma) \\ &= 10\text{sa}(5\sigma)\exp(j5\sigma)*\delta_{2\pi}(\sigma) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}10\text{sa}(5(\sigma-2\pi n))\exp(j5(\sigma-2\pi n))\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\text{rect}\left(\frac{x+10}{20}\right)\delta_{X_2}(x) &\Longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}20\text{sa}(10\sigma)\exp(j10\sigma)*\frac{2\pi}{4}\delta_{\frac{2\pi}{4}}(\sigma) \\ &= 5\text{sa}(10\sigma)\exp(j10\sigma)*\delta_{\frac{\pi}{2}}(\sigma) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}5\text{sa}(10(\sigma-\frac{\pi}{2}n))\exp(j10(\sigma-\frac{\pi}{2}n))\end{aligned}.$$

La TF de $f(x)$ est la somme des deux TF calculées plus haut.

c)

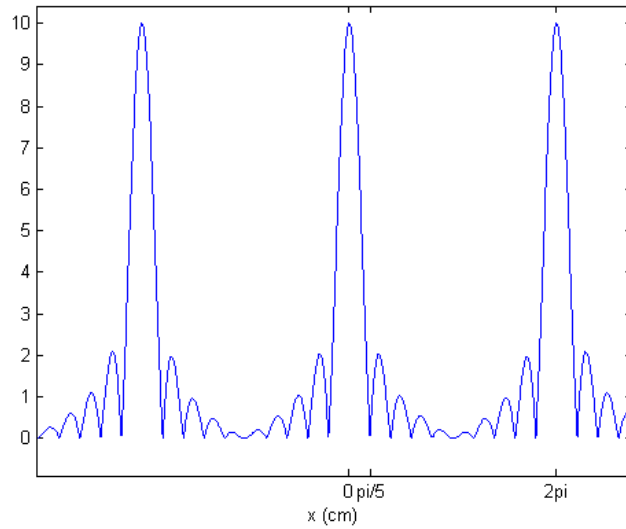


FIGURE 5 – Module du premier terme

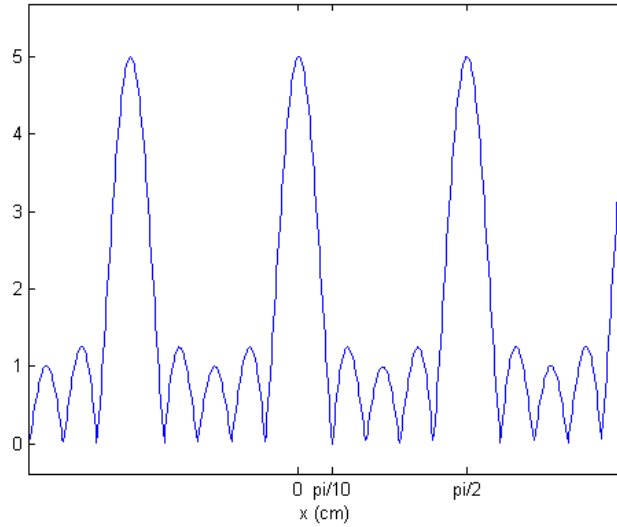


FIGURE 6 – Module du deuxième terme

d) Puisqu'on veut maximiser la résolution spatiale, on veut prendre la largeur de bande la plus grande possible sans laisser passer les copies. Puisqu'on est limité par la copie centrée à $\pi/2$, on choisit une largeur de $\pi/4$.

e) Le filtre est $H(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\sigma}{\pi/2}\right)$, dont la transformée de Fourier inverse est $h(t) = \frac{1}{4}\text{sinc}\left(\pi\frac{x}{4}\right)$.

f) Le premier zéro de $h(t)$, et donc la résolution spatiale, est de 4 cm.

g) La hauteur des pics vient à la fois de la largeur de la région correspondant au pic et au taux d'échantillonnage. Il est impossible d'extraire l'information de profondeur directement dans le domaine des fréquences. Par contre, dans le domaine temporel, l'amplitude du signal filtré sera proportionnelle à la densité des diracs échantillonneurs, ce qui permet de retrouver l'information de profondeur.

Question 3 (9 pts)

Partie A (1 pts)

a) Puisque chaque dirac ajoute une copie de $\text{rect}\left(\frac{x}{8}\right)$ centrée autour de lui-même, on peut écrire $a(x) = \sum_{k=-10}^0 \text{rect}\left(\frac{x-k}{8}\right)$.

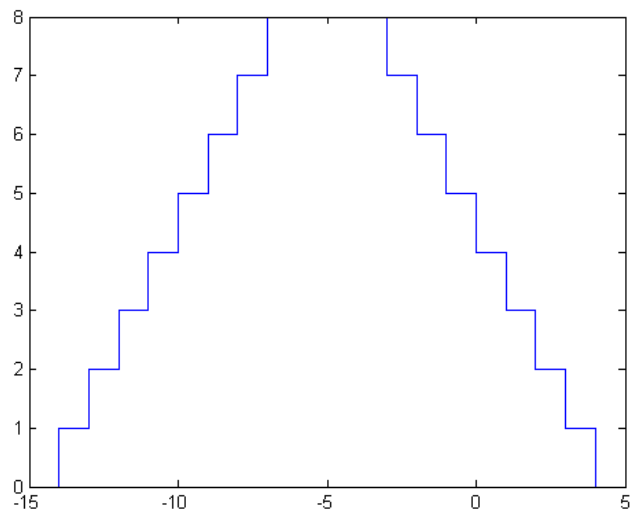


FIGURE 7 – $a(x)$

$$b)b(x) = \sum_{k=0}^5 \text{rect}\left(\frac{x-4k}{8}\right)$$

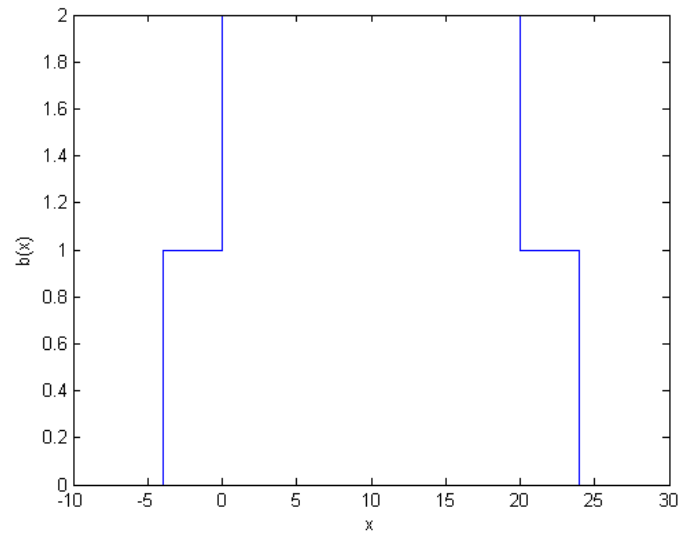


FIGURE 8 – $b(x)$

c) Les niveaux du signal filtré correspondent à la densité des diracs. Cette dernière étant inversement proportionnelle à la distance, on peut facilement retrouver l'information de profondeur.

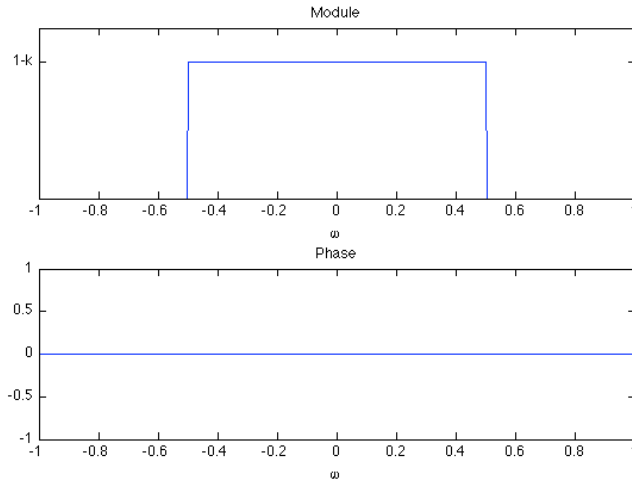


FIGURE 9 – Module et phase de $A(\omega)$

Question 4 (10 pts)

Soit le système suivant : $Y(\omega) = S(\omega)H(\omega) = S(\omega)[(1 - k) + G(\omega)]$
 où $G(\omega) = ke^{-j\omega a/2}(e^{j\omega a/2} + e^{-j\omega a/2})$.

Partie A (1.5 pts)

On demande de tracer le spectre de $A(\omega)$ en module et phase. $A(\omega) = S(\omega)(1 - k)$ et $S(\omega) = \text{Rect}(\omega)$. On va faire le tracer pour $0 < k < 1$ (voir figure 9).

Partie B (1.5 pts)

On demande de tracer le spectre de $A(\omega)$ en module et phase. $B(\omega) = S(\omega)G(\omega)$.

$$B(\omega) = S(\omega)G(\omega) = \text{Rect}(\omega)(ke^{-j\omega a/2}(e^{j\omega a/2} + e^{-j\omega a/2})) = \text{Rect}(\omega)2k\cos(\omega a/2)e^{-j\omega a/2}, \quad (16)$$

Le module et la phase sont présentés à la figure 10.

Partie C (2 pts)

On demande de simplifier $H(\omega)$ et calculer la réponse impulsionnelle du filtre $h(t)$.

$$H(\omega) = (1 - k) + (ke^{-j\omega a/2}(e^{j\omega a/2} + e^{-j\omega a/2})) = 1 - k + k + ke^{-j\omega a} = 1 + ke^{-j\omega a}, \quad (17)$$

$$h(t) = \delta(t) + k\delta(t - a), \quad (18)$$

car la transformation de Fourier inverse d'une constante est une impulsion.

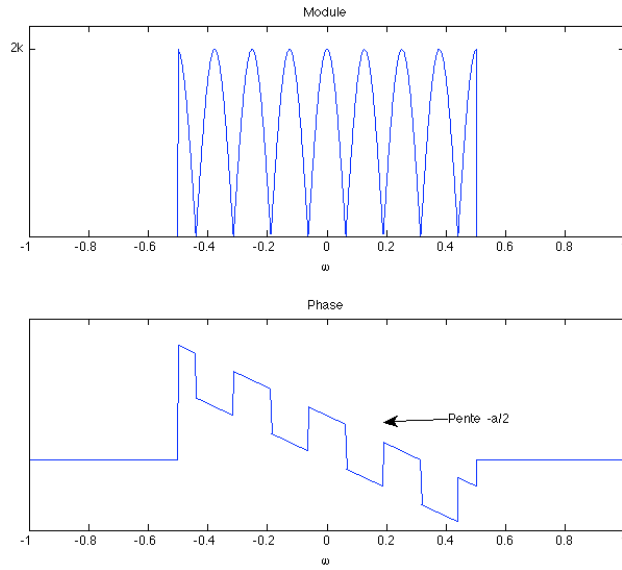


FIGURE 10 – Module et phase de $B(\omega)$

Partie D (1 pts)

On demande de dessiner $h(t)$ en diagramme bloc (voir figure 11).

Partie E (1 pts)

Le système est causal, car il s'agit d'une transmission directe en plus d'une transmission en retard (copie en temps).

Partie F (1 pts)

Il s'agit d'un écho. Un petit peu de temps après le signal(délai a), celui-ci réapparaît.

Partie G (2 pts)

On demande de tracer $y(t)$ qui est le résultat de la convolution entre $s(t)$ et $h(t)$.

$$y(t) = s(t) * (\delta(t) + k\delta(t-a)) = \frac{1}{2\pi} Sa(t/2) * (\delta(t) + k\delta(t-a)) = \frac{1}{2\pi} Sa(t/2) + \frac{k}{2\pi} Sa((t-a)/2), \quad (19)$$

La figure 12 présente le tracer de $y(t)$. La largeur du lobe principal est de 4π .

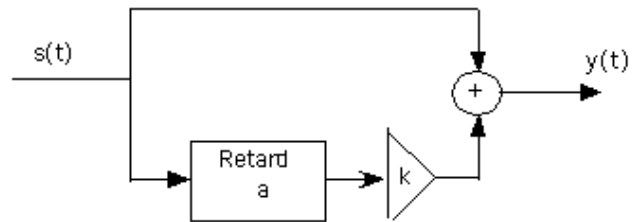


FIGURE 11 – Module et phase de $B(\omega)$

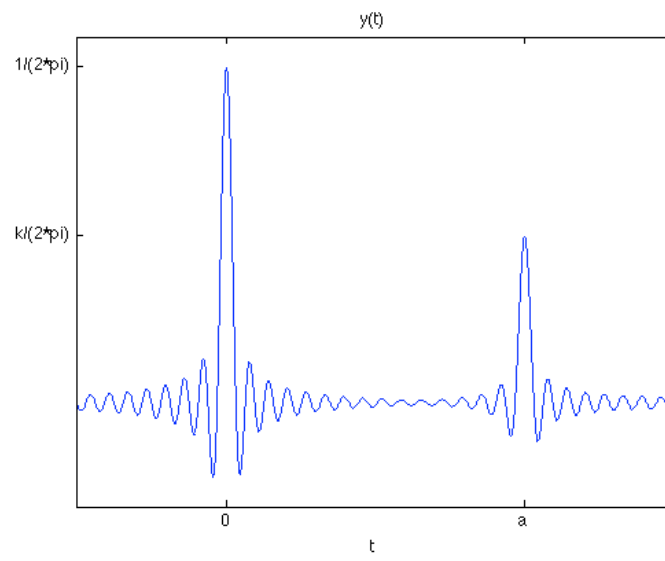


FIGURE 12 – Signal $y(t)$