Método de Romberg

El método de Romberg es un algoritmo numérico que se utiliza para estimar el valor de una integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Este método fue desarrollado a partir de la extrapolación de Richardson aplicado a la regla compuesta del trapecio, con el propósito de mejorar su precisión. Este método se utiliza en casos en donde se requiera una gran precisión en la aproximación del valor de la integral.

Para este método, se manejan las siguientes entradas:

$$a, b : \ Limites\ de\ la\ integral$$

$$func : funcion\ f(x)\ a\ la\ cual\ se\ evalua\ con\ la\ integral$$

$$n : \ Numero\ de\ columnas\ y\ vectores\ que\ se\ evaluan\ en\ la\ matriz\ R$$

Es importante recalcar que la matriz R es utilizada como tabla para aproximar los siguientes valores en base de la iteración en base a los valores anteriores, entre mayor sea el valor de n, mayor será la precisión. Además, de salida tenemos el ultimo valor de esta tabla, el cual es el valor que se encuentra en la posición $R_{(n,n)}$, este valor es representado de la siguiente manera:

$$aprox : Valor\ resultado\ del\ metodo\ de\ Romberg$$

Se maneja de la siguiente manera:

$h = b - a$

$R(1,1) = \frac{h}{2}(\, f(a) + f(b)\,)$

$Para\ i = 2, \dots, n$

$$R(i,1) = \frac{1}{2}\left[R(i-1,1) + h\sum_{k=1}^{2^{i-2}} f(a + (k + 0.5)h)\right]$$

$Para\ j = 2, \dots, i$

$$R(i,j) = R(i,j-1) + \frac{R(i,j-1) - R(i-1,j-1)}{4^{j-1} - 1}$$

$$h = \frac{h}{2}$$

$aprox = R(n,n)$

Ejemplo:

Se procede a calcular la aproximación del valor de la integrar definida:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$$

Con los valores iniciales de:

$a = 0$

$b = \pi$

$func = \sin(x)$

$n = 5$

Primero se calcula el valor de h para cada valor desde n=1 hasta n=6:

$$h_{n=1,2} = b - a = \pi - 0 = \pi$$

$$h_{n=3} = \frac{h_{=1}}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$h_{n=4} = \frac{h_{n=2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$h_{n=5} = \frac{h_{n=3}}{2} = \frac{\pi}{8}$$

Después se calcula el valor de la primera posición de la tabla de Romberg R:

$$R(1,1) = \frac{h}{2}(\, f(a) + f(b)\,) = \frac{\pi}{2}(0 + 0.0548\,) = 0$$

Ahora calculamos los valores para la primera columna de la tabla de Romberg:

$$R(2,1) = \frac{1}{2}\left[R(1,1) + h_{n=2} \sum_{k=1}^{2^{2-2}} f(0 + (k + 0.5)\pi)\right] = 1{,}570796$$

$$R(3,1) = \frac{1}{2}\left[R(2,1) + h_{n=3} \sum_{k=1}^{2^{3-2}} f(0 + (k + 0.5)\pi)\right] = 1{,}896119$$

$$R(4,1) = \frac{1}{2}\left[R(3,1) + h_{n=4} \sum_{k=1}^{2^{4-2}} f(0 + (k + 0.5)\pi)\right] = 1{,}974231$$

$$R(5,1) = \frac{1}{2}\left[R(4,1) + h_{n=5} \sum_{k=1}^{2^{5-2}} f(0 + (k + 0.5)\pi)\right] = 1{,}993570$$

Seguido de esto, se calculan los valores de cada fila, desde la primera columna, hasta la columna que coincida con el valor del número de fila respectivo:

$$R(2,2) = R(2,1) + \frac{R(2,1) - R(1,1)}{4^1 - 1} = 2{,}094395$$

$$R(3,2) = R(3,1) + \frac{R(3,1) - R(2,1)}{4^1 - 1} = 2{,}004560$$

$$R(3,3) = R(3,2) + \frac{R(3,2) - R(2,2)}{4^2 - 1} = 1{,}998571$$

$$R(4,2) = R(4,1) + \frac{R(4,1) - R(3,1)}{4^1 - 1} = 2{,}000269$$

$$R(4,3) = R(4,2) + \frac{R(4,2) - R(3,2)}{4^2 - 1} = 1{,}999983$$

$$R(4,4) = R(4,3) + \frac{R(4,3) - R(3,3)}{4^3 - 1} = 2{,}000006$$

$$R(5,2) = R(5,1) + \frac{R(5,1) - R(4,1)}{4^1 - 1} = 2{,}000020$$

$$R(5,3) = R(5,2) + \frac{R(5,2) - R(4,2)}{4^2 - 1} = 2{,}000000$$

$$R(5,4) = R(5,3) + \frac{R(5,3) - R(4,3)}{4^3 - 1} = 2{,}000000$$

$$R(5,5) = R(5,4) + \frac{R(5,4) - R(4,4)}{4^4 - 1} = 2{,}000000$$

Al someter estos valores al método iterativo de Romberg, obtenemos la siguiente tabla de Romberg para R:

0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,5708	2,0944	0,0000	0,0000	0,0000
1,8961	2,0046	1,9986	0,0000	0,0000
1,9742	2,0003	2,0000	2,0000	0,0000
1,9936	2,0000	2,0000	2,0000	2,0000

Por lo tanto, tomamos como el valor de la aproximación de la integral, el valor que se encuentra en R(n,n) = R(5,5), el cual es de 2.

Referencias:

Burden, R., Faires, J. (2011) Numerical Analysis. Ninth edition. (pp. 213-220). Brooks/Cole.