

# 十字形 QAM 信号的符号错误率计算方法

庄 宁, 于宏毅, 杨 珂

(解放军信息工程大学信息工程学院, 郑州 450002)

**摘 要:** 针对十字形正交幅度调制(QAM)信号的符号错误率计算问题, 提出一种通用的计算方法。根据十字形星座图的特点, 采用基于判决门限的区域划分方法进行符号错误率计算, 给出高斯白噪声信道和瑞利衰落信道下通用的十字形 QAM 的符号错误率的理论边界。分析和仿真结果表明, 给出的符号错误率为十字形 QAM 的误码率评估提供了一个准确的参考。

**关键词:** 十字形正交幅度调制; 符号错误率; 理论边界; 加性高斯白噪声; 瑞利衰落

## Symbol Error Ratio Computation Method for Cross QAM Signals

ZHUANG Ning, YU Hong-yi, YANG Ke

(College of Information Engineering, PLA University of Information Engineering, Zhengzhou 450002, China)

**【Abstract】** A method of Symbol Error Ratio(SER) computation for cross Quadrature Amplitude Modulation(QAM) signals is given. The constellation is divided into different regions based on decision boundaries according to the characteristics of cross QAM. The general theoretical bounds of SER for the cross QAM signals over Additive White Gaussian Noise(AWGN) channel and Rayleigh fading channel are given. Analysis and simulation results demonstrate that the theoretical bound offers an accurate criterion for SER of cross QAM.

**【Key words】** cross Quadrature Amplitude Modulation(QAM); Symbol Error Ratio(SER); theoretical bound; Additive White Gaussian Noise(AWGN); Rayleigh fading

DOI: 10.3969/j.issn.1000-3428.2011.13.092

### 1 概述

正交幅度调制(Quadrature Amplitude Modulation, QAM)作为一种高效的数字调制方式, 频谱利用率高, 在中、大容量数字微波通信系统、有线电视网络高数据传输、卫星通信等领域被广泛应用<sup>[1-2]</sup>。QAM 的星座图包括圆形、十字形和矩形。高阶 QAM 星座图一般为十字形和矩形。

矩形 QAM 可以简单等效为两路正交的脉冲幅度调制(Pulse Amplitude Modulation, PAM)信号, 容易求得符号错误率。对于十字形的  $M$  阶 QAM( $M=2^k$ ,  $k$  为奇数)信号, 因其星座图的特殊性, 不能简单等效为两路正交的 PAM 信号。文献[3]将十字形 QAM 信号近似为矩形 QAM, 给出了平均符号错误率的紧密上边界, 但没有给出符号错误率的理论边界。文献[4]针对格雷码编码方式下的十字形 32QAM 信号, 给出了平均比特错误率的计算方法, 并没有给出通用的符号错误率的计算方法和公式。

本文针对十字形 QAM 信号的星座图特点, 采用基于判决门限的区域划分方法对符号错误率进行计算, 得到了高斯白噪声信道和瑞利衰落信道下十字形 QAM 的符号错误率的理论边界, 为十字形 QAM 的符号错误率计算提供了一种通用的方法。

### 2 十字形 QAM 的符号错误率计算方法

QAM 的波形为:

$$s_m(t) = A_{mc}g(t)\cos 2\pi f_c t - A_{ms}g(t)\sin 2\pi f_c t, 0 \leq t \leq T$$

对于  $M$  阶 QAM 信号, 当星座图为矩形时( $M=2^k$ ,  $k$  为偶数), 其可以等效为正交载波上的 2 个 PAM 信号之和, 因此, QAM 的错误率可以很容易地由 PAM 的错误率求得。 $M$

元 PAM 的平均错误率为:

$$P_{\text{PAM}} = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6\varepsilon_{av}}{(M^2-1)N_0}}\right) \quad (1)$$

其中,  $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ ;  $\varepsilon_{av}$  为平均符号能量。

当星座图为十字形时, 不能简单地等效为正交载波上的 2 个 PAM 信号。本文即针对十字形 QAM 信号特点, 给出了加性高斯白噪声信道下通用的符号错误率的计算方法和公式, 并扩展到瑞利衰落信道。

#### 2.1 基于判决门限的区域划分

十字形  $M$  阶 QAM( $M=2^k$ ,  $k$  为  $\geq 5$  的奇数)信号如图 1 所示, 可以划分为核心区与边缘区。

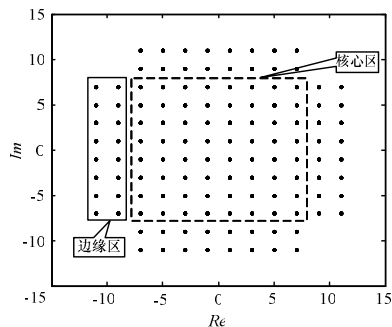


图1 核心区与边缘区错误率分布

**作者简介:** 庄 宁(1986—), 女, 硕士研究生, 主研方向: 通信信号处理; 于宏毅, 教授、博士生导师; 杨 珂, 博士研究生

**收稿日期:** 2010-12-22

**E-mail:** ning.zhuang0507@gmail.com

核心区信号点的判决类似于 PAM 信号, 边缘区信号点较特殊, 图 2 标出了第 2 象限内角点符号的判决门限<sup>[5]</sup>, 其他象限相同。将具有相同判决门限的信号点划分到同一区域, 在同一区域内的信号点具有相同的符号错误率。核心区信号点的错误率为  $P_{\text{mid}}$ ; 边缘区的信号点的错误率为  $P_{\text{side}}$ ; 角点符号的错误率为  $P_1, P_2, \dots, P_{\sqrt{2^{k-5}}}$ 。

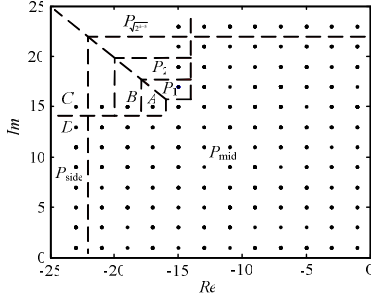


图 2 区域划分错误率分布

表 1 给出了不同错误率对应的星座点个数, 假设发送信号等概率, 则  $M$  阶 QAM 的平均符号错误率为:

$$P_{\text{QAM}} = \frac{2^{k-1} + 4(\sqrt{2^{k-5}} - 1)(\sqrt{2^{k-1}} - 1)}{M} P_{\text{mid}} + \frac{4(\sqrt{2^{k-1}} - 2)}{M} P_{\text{side}} + \frac{8}{M} \sum_{m=1}^{\sqrt{2^{k-5}}-1} P_m + \frac{8}{M} P_{\sqrt{2^{k-5}}} \quad (2)$$

由式(2)可知, 计算出各个区域错误率可以得到十字形 QAM 的平均符号错误率。

表 1 不同错误率对应的星座点个数

区域错误率	星座点个数
$P_{\text{mid}}$	$2^{k-1} + 4(\sqrt{2^{k-5}} - 1)(\sqrt{2^{k-1}} - 1)$
$P_{\text{side}}$	$4(\sqrt{2^{k-1}} - 2)$
$P_1$	8
$P_2$	8
...	8
$P_{\sqrt{2^{k-5}}}$	8

## 2.2 区域概率计算

(1)  $P_{\text{mid}}$

设两相邻两星座点之间的最小距离是  $d_{\text{min}} = d\sqrt{2\varepsilon_g}$ , 在实轴和虚轴方向上, 当噪声超过  $d_{\text{min}}/2$  时导致错误判决, 有:

$$P_{\text{lm}} = P\left(|r - s_m| > d\sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon_g}\right) = 2Q\left(\sqrt{\frac{d^2\varepsilon_g}{N_0}}\right) = 2Q$$

其中,  $Q = Q\left(\sqrt{\frac{d^2\varepsilon_g}{N_0}}\right)$ 。信号点正确判决的概率是  $(1 - P_{\text{lm}})^2$ , 符号错误率为:

$$P_{\text{mid}} = 1 - (1 - P_{\text{lm}})^2 = 4Q(1 - Q) \quad (3)$$

(2)  $P_{\text{side}}$

星座图外围的信号点, 如点  $D$  虚轴方向的判决同核心区, 所以  $P_{\text{lm}_D} = 2Q$ 。实轴方向的判决相当于 PAM 信号的外层电平, 有:

$$P_{\text{Re}_D} = P\left(s_m - r > d\sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon_g}\right) = Q$$

所以点  $D$  的符号错误率为:

$$P_{\text{side}} = 1 - (1 - P_{\text{lm}_D})(1 - P_{\text{Re}_D}) = Q(3 - 2Q) \quad (4)$$

(3)  $P_1, P_2, \dots, P_{\sqrt{2^{k-5}}}$

点  $A$  在虚轴方向上的判决门限分别为  $d_{\text{min}}/2$  和  $d_{\text{min}}$ ; 实轴方向上左右判决门限的阈值均为  $d_{\text{min}}/2$ , 有:

$$P_{\text{lm}_A} = P\left(s_m - r > d\sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon_g}\right) + P\left(r - s_m > d\sqrt{2\varepsilon_g}\right) = Q + Q_1$$

其中,  $Q_1 = Q\left(\sqrt{\frac{4d^2\varepsilon_g}{N_0}}\right)$ 。

$$P_{\text{Re}_A} = P\left(|s_m - r| > d\sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon_g}\right) = 2Q$$

点  $A$  符号错误率为:

$$P_1 = 1 - (1 - P_{\text{lm}_A})(1 - P_{\text{Re}_A}) = 1 - (1 - Q - Q_1)(1 - 2Q) \quad (5)$$

点  $B$  在虚轴方向上的判决门限分别为  $d_{\text{min}}/2$  和  $2d_{\text{min}}$ , 有:

$$P_{\text{lm}_B} = P\left(s_m - r > d\sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon_g}\right) + P\left(r - s_m > 2d\sqrt{2\varepsilon_g}\right) = Q + Q_2$$

其中,  $Q_2 = Q\left(\sqrt{\frac{4 \times 2^2 d^2 \varepsilon_g}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{16d^2 \varepsilon_g}{N_0}}\right)$ 。

点  $B$  实轴方向上的判决同点  $A$ , 所以有  $P_{\text{Re}_B} = P_{\text{Re}_A} = Q$ ,

点  $B$  符号错误率为:

$$P_2 = 1 - (1 - P_{\text{lm}_B})(1 - P_{\text{Re}_B}) = 1 - (1 - Q - Q_2)(1 - 2Q) \quad (6)$$

同理, 有:

$$P_m = 1 - (1 - Q - Q_m)(1 - 2Q) \quad (7)$$

其中,  $1 \leq m < \sqrt{2^{k-5}}$ ,  $Q_m = Q\left(\sqrt{\frac{4m^2 d^2 \varepsilon_g}{N_0}}\right)$ 。

如图 2 所示, 当信号点位于  $C$  点位置时, 虚轴方向上的判决门限分别为  $d_{\text{min}}/2$  和  $\sqrt{2^{k-5}}d_{\text{min}}$ ,  $P_{\text{lm}_C} = Q + Q_{\sqrt{2^{k-5}}}$ ; 实轴方向同点  $D$ ,  $P_{\text{Re}_C} = Q$ 。点  $C$  的符号错误率为:

$$P_{\sqrt{2^{k-5}}} = 1 - (1 - Q - Q_{\sqrt{2^{k-5}}})(1 - 2Q) \quad (8)$$

其中,  $Q_{\sqrt{2^{k-5}}} = Q\left(\sqrt{\frac{4 \times 2^{k-5} d^2 \varepsilon_g}{N_0}}\right)$ 。

## 2.3 平均符号能量

2.2 节中的区域概率均是关于参数  $d_{\text{min}}$  的关系式, 为得到区域概率和信噪比的关系, 需进行平均符号能量的计算。本文采用基于区域划分的计算方法, 如图 3 所示。

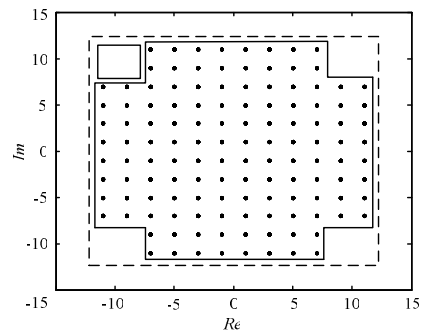


图 3 QAM 信号能量求解示意图

在图 3 中, 虚线区域内可以等效为两路正交的  $\lceil \sqrt{M} \rceil$  阶 PAM 信号(符号  $\lceil \cdot \rceil$  为向上取整), 则:

$$\varepsilon_{\text{sum}} = \frac{1}{3}(\lceil \sqrt{M} \rceil^2 - 1) \cdot \lceil \sqrt{M} \rceil^2$$

星座图一角缺失的信号点呈矩形分布, 如图 3 左上角实线矩形框, 其能量为:

$$\varepsilon_{\text{corner}} = \frac{1}{2} d^2 \varepsilon_g \cdot 2a \sum_{m=1}^a \left( \sqrt{\frac{M}{2}} + 2m - 1 \right)^2 = ad^2 \varepsilon_g \sum_{m=1}^a \left( \sqrt{\frac{M}{2}} + 2m - 1 \right)^2$$

其中,  $a = \sqrt{2^{k-5}}$ 。

在图 3 中, 十字框内 QAM 的符号能量为:

$$\varepsilon_{\text{QAM}} = \varepsilon_{\text{sum}} - 4\varepsilon_{\text{corner}} \quad (9)$$

假定信号等概, 则平均符号能量为:

$$\varepsilon_{\text{av-QAM}} = \frac{1}{M} \varepsilon_{\text{QAM}} \quad (10)$$

由式(9)、式(10), 得:

$$d^2 \varepsilon_g = \frac{M \cdot \varepsilon_{\text{av-QAM}}}{\frac{1}{3} \left[ \sqrt{M} \right]^2 \left( \left[ \sqrt{M} \right]^2 - 1 \right) - 4a \sum_{m=1}^a \left( \sqrt{\frac{M}{2}} + 2m - 1 \right)^2}$$

令  $c = \lceil M \rceil$ , 则:

$$d^2 \varepsilon_g = \frac{M \cdot \varepsilon_{\text{av-QAM}}}{\frac{1}{3} c^2 (c^2 - 1) - 4a \sum_{m=1}^a \left( \sqrt{\frac{M}{2}} + 2m - 1 \right)^2} = \frac{k \cdot M \cdot \varepsilon_{\text{bav-QAM}}}{\frac{1}{3} c^2 (c^2 - 1) - 4a \sum_{m=1}^a \left( \sqrt{\frac{M}{2}} + 2m - 1 \right)^2} \quad (11)$$

其中,  $\varepsilon_{\text{av-QAM}}/N_0$  是平均符号信噪比;  $\varepsilon_{\text{bav-QAM}}/N_0$  是平均比特信噪比。

### 3 十字形 QAM 的符号错误率计算

#### 3.1 高斯白噪声信道

将式(11)代入式(2)得到十字形  $M$  阶 QAM ( $M = 2^k, k$  为奇数)信号的符号错误率:

$$P_{\text{QAM}} = \frac{8}{M} \sum_{m=1}^a Q_m - \frac{8Q}{M} \left( \frac{M}{2} - 3a + Q \left( 3b - \frac{M}{2} - 1 \right) - 2 \sum_{m=1}^{a-1} Q_m - Q_a \right) \quad (12)$$

其中,  $Q = Q \left( \sqrt{\frac{d^2 \varepsilon_g}{N_0}} \right)$ ;  $Q_m = Q \left( \sqrt{\frac{4m^2 d^2 \varepsilon_g}{N_0}} \right)$ ;  $Q_a = Q \left( \sqrt{\frac{4a^2 d^2 \varepsilon_g}{N_0}} \right)$ ;  
 $a = \sqrt{2^{k-5}}$ ;  $b = \sqrt{2^{k-3}}$ ;  $d^2 \varepsilon_g$  与平均符号信噪比的关系见式(11)。

#### 3.2 瑞利衰落信道

由式(12)可知, 加性高斯白噪声信道下, 十字形 QAM 的符号错误率是由  $F_1(\alpha; \gamma) = \text{erfc}(\sqrt{\alpha\gamma})$  和  $F_2(\alpha; \beta; \gamma) = \text{erfc}(\sqrt{\alpha\gamma}) \text{erfc}(\sqrt{\beta\gamma})$  组成的和函数,  $\gamma$  为平均符号信噪比。可以将高斯信道下的符号错误率扩展到瑞利衰落信道。

瑞利衰落信道下, 接收到信号的包络服从瑞利分布, 设发送信号为  $s$ , 则接收信号  $r = hs + n$ ,  $n$  为加性高斯白噪声。所以瑞利衰落信道下的符号信噪比:

$$\gamma = \frac{|h|^2 E_s}{N_0} = |h|^2 \bar{\gamma}$$

其中,  $|h|$  为瑞利分布;  $\bar{\gamma}$  为加性高斯白噪声信道下的符号信噪比。瑞利衰落信道下  $\gamma$  是自由度为 2 的  $\chi^2$  分布, 概率密度函数为:

$$p_r(\gamma) = \frac{1}{\bar{\gamma}} e^{-\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}}, \gamma > 0$$

瑞利衰落信道下符号错误率为  $\bar{\gamma}$  的函数<sup>[4]</sup>:

$$\bar{F}_1(\alpha; \bar{\gamma}) = 1 - \sqrt{\frac{\alpha \bar{\gamma}}{1 + \alpha \bar{\gamma}}} \quad (13)$$

$$\bar{F}_2(\alpha; \beta; \bar{\gamma}) = 1 - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha \bar{\gamma}}{1 + \alpha \bar{\gamma}}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\alpha(1 + \alpha \bar{\gamma})}{\beta \alpha \bar{\gamma}}} \right) - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\beta \bar{\gamma}}{1 + \beta \bar{\gamma}}} \tan^{-1} \left( \sqrt{\frac{\beta(1 + \beta \bar{\gamma})}{\alpha \beta \bar{\gamma}}} \right) \quad (14)$$

将式(12)~式(14)联合即可得到瑞利衰落信道十字形 QAM 信号的符号错误率。

### 4 32QAM 与 128QAM 的符号错误率计算

将  $M = 32$  和  $M = 128$  代入式(12)得出高斯白噪声信道下 32QAM 和 128QAM 的符号错误率:

$$P_{\text{QAM-32}} = Q \left( \frac{13}{4} - \frac{11}{4} Q - \frac{1}{4} Q_1 \right) + \frac{1}{4} Q_1 \quad (15)$$

其中,  $Q = Q \left( \sqrt{\frac{1}{10} \frac{\varepsilon_{\text{av-QAM}}}{N_0}} \right)$ ;  $Q_1 = Q \left( \sqrt{\frac{4}{10} \frac{\varepsilon_{\text{av-QAM}}}{N_0}} \right)$ 。

$$P_{\text{QAM-128}} = Q \left( \frac{29}{8} - \frac{53}{16} Q - \frac{1}{8} Q_1 - \frac{1}{16} Q_2 \right) + \frac{1}{16} (Q_1 + Q_2) \quad (16)$$

其中,  $Q = Q \left( \sqrt{\frac{1}{41} \frac{\varepsilon_{\text{av-QAM}}}{N_0}} \right)$ ;  $Q_1 = Q \left( \sqrt{\frac{4}{41} \frac{\varepsilon_{\text{av-QAM}}}{N_0}} \right)$ ;  $Q_2 = Q \left( \sqrt{\frac{16}{41} \frac{\varepsilon_{\text{av-QAM}}}{N_0}} \right)$ 。

文献[3]给出了十字形 QAM 的平均符号错误率的紧密上边界:

$$P_{\text{QAM}} \leq 1 - \left[ 1 - 2Q \left( \sqrt{\frac{3\varepsilon_{\text{av-QAM}}}{(M-1)N_0}} \right) \right] \leq 4Q \left( \sqrt{\frac{3k\varepsilon_{\text{bav-QAM}}}{(M-1)N_0}} \right)$$

在高斯白噪声信道下对 32QAM 与 128QAM 的误码率仿真。将仿真结果、本文的理论边界与文献[3]的紧密上边界图进行比较, 如图 4 所示。

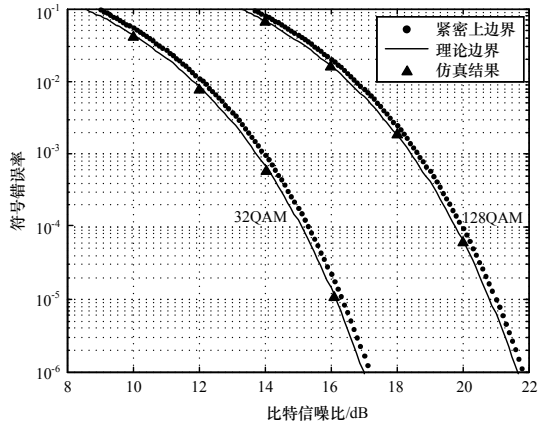


图 4 32QAM 和 128QAM 符号错误率

由图 4 可知, 实际符号错误率与理论边界重合。本文给出的十字形 QAM 信号的符号错误率的计算方法和理论边界适用于所有十字形 QAM 信号, 为误码率评估提供了一个准确的参考。

### 5 结束语

针对十字形 QAM 的符号错误率问题, 本文提出了一种基于区域划分的计算方法, 分区域求解错误率和符号能量。给出了加性高斯白噪声和瑞利衰落信道下十字形 QAM 的平均符号错误率, 为误码率评估提供了一个准确的参考。文中提出的区域划分方法可以应用到其他信号, 根据信号的星座图特点进行区域划分, 求得符号错误率。

(下转第 284 页)