1. Sara y Hebe tienen dos mazos de 5 cartas cada uno. El mazo *"común"* tiene las siguientes cartas $(1, 2, 3, 4, 5)$ y el mazo de la *"buena suerte"* tiene $(1, 4, 4, 5, 5)$. Sara elige un mazo al azar y Hebe juega con el restante. Luego cada una muestra una carta al azar de su mazo, la que muestre la carta más alta gana esa ronda (en caso de ser el mismo valor empatan la ronda) y ambas devuelven la carta a su mazo. Sara tuvo una mala racha y perdió las primeras tres rondas, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el mazo de la *"buena suerte"*?

C : SARA ELIGE MAZO COMUN ; $P(C) = \frac{1}{2}$

B : " " " "BUENA SUERTE" ; $P(B) = \frac{1}{2}$

S : " PERDIÓ TRES RONDAS

HAY QUE CALCULAR $P(B|S)$

i) SI OCURRIÓ C, SARA TIENE EL MAZO $\underbrace{\{1,2,3,4,5\}}_{I}$ Y HEBE $\underbrace{\{1,4,4,5,5\}}_{II}$

EN CADA RONDA SE FORMA UN PAR (x,y) DE CARTAS CON $x \in I$ e $y \in II$.

HAY 25 PARES POSIBLES EQUIPROBABLES. LOS CASOS CON LOS CUALES SARA PIERDE LA RONDA SON:

$(1,4)\ (1,4)\ (1,5)\ (1,5)\ (2,4)\ (2,4)\ (2,5)\ (2,5)\ (3,4)\ (3,4)\ (3,5)\ (3,5)$

$(4,5)\ (4,5) \longrightarrow$ 14 CASOS

LUEGO SARA TIENE PROBABILIDAD $14/25$ DE PERDER CADA RONDA.

LAS CARTAS SE REPONEN Y LOS MAZOS SON LOS MISMOS EN CADA RONDA POR LO QUE SUPONEMOS QUE LOS RESULTADOS DE LAS RONDAS SON INDEPENDIENTES. ENTONCES, SI OCURRIÓ C, LA PROBABILIDAD DE QUE SARA HAYA PERDIDO TRES RONDAS ES:

$$P(S|C) = \frac{14}{25} \times \frac{14}{25} \times \frac{14}{25} = \left(\frac{14}{25}\right)^3$$

ii) SI OCURRIÓ B, SARA TIENE EL MAZO $\underbrace{\{1,4,4,5,5\}}_{II}$ Y HEBE EL MAZO $\underbrace{\{1,2,3,4,5\}}_{I}$

DE LA MISMA FORMA QUE EN EL CASO i) CONTAMOS LOS CASOS PARA LOS QUE SARA PIERDE UNA RONDA:

$(1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (1,5)\ (4,5)\ (4,5) \longrightarrow$ 6 CASOS

LUEGO: $P(S|B) = \left(\frac{6}{25}\right)^3$

ENTONCES:

$$P(B|S) = \frac{P(S|B)\,P(B)}{P(S)}$$

$$= \frac{P(S|B)\,P(B)}{P(S|B)\,P(B) + P(S|C)\,P(C)}$$

$$= \frac{\left(\frac{6}{25}\right)^3 \cdot 1/2}{\left(\frac{6}{25}\right)^3 \frac{1}{2} + \left(\frac{14}{25}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}} \cong \boxed{0.07297}$$

2. Se tienen dos máquinas para producir varillas. La longitud (en metros) de las varillas producidas por la máquina 1 es una variable aleatoria con distribución uniforme sobre el intervalo $(9, 12)$, la de las varillas producidas por la máquina 2 también es uniforme pero sobre el intervalo $(10, 14)$. Se colocan en una caja cuatro varillas producidas por la máquina 1 y seis producidas por la máquina 2. ¿Cuál es la probabilidad de que en la caja haya más de 1 varilla que mida más de 11 metros?

CON PEQUEÑAS VARIANTES, ES EL MISMO PROBLEMA 2) DEL PARCIAL DEL 2/11. YA LO HEMOS RESUELTO

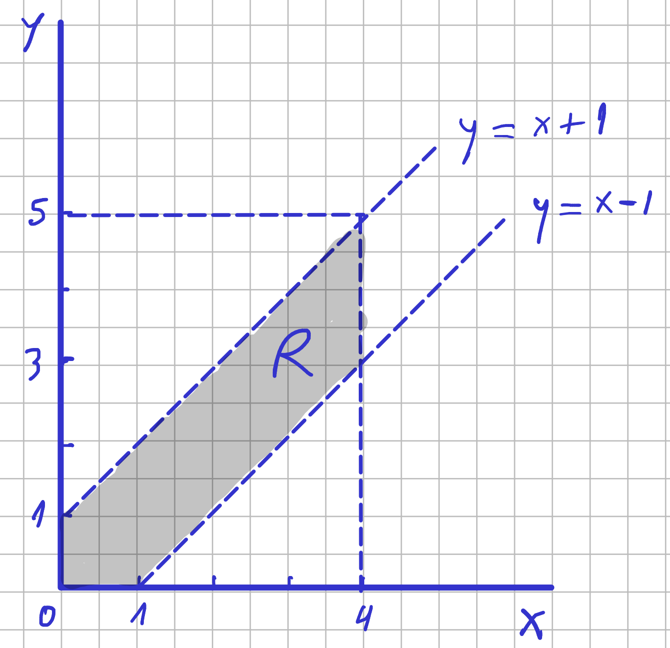
---

3. Se usan dos métodos para medir la temperatura de la superficie de un producto. La distribución de probabilidad conjunta de las dos mediciones (X, Y) es una distribución uniforme en la región

$$R = \{(x, y) : 0 < x < 4, x - 1 < y < x + 1\}$$

Hallar y graficar la función de distribución de $W = |X - Y|$.

HACEMOS UN GRÁFICO DEL SOPORTE DE LA DENSIDAD CONJUNTA DE X e Y.



OBSERVAMOS QUE PARA $(X, Y) \in R$, $W = |X - Y|$ TOMA VALORES EN $[0, 1)$. HAY QUE CALCULAR $F_W(w) = P(W \leq w)$ PARA $w \in \mathbb{R}$

Como $W \in [0,1)$ tenemos que:

$$P(W \le w) = 0 \quad \text{para} \quad w \le 0$$
$$P(W \le w) = 1 \quad \text{"} \quad w \ge 1$$

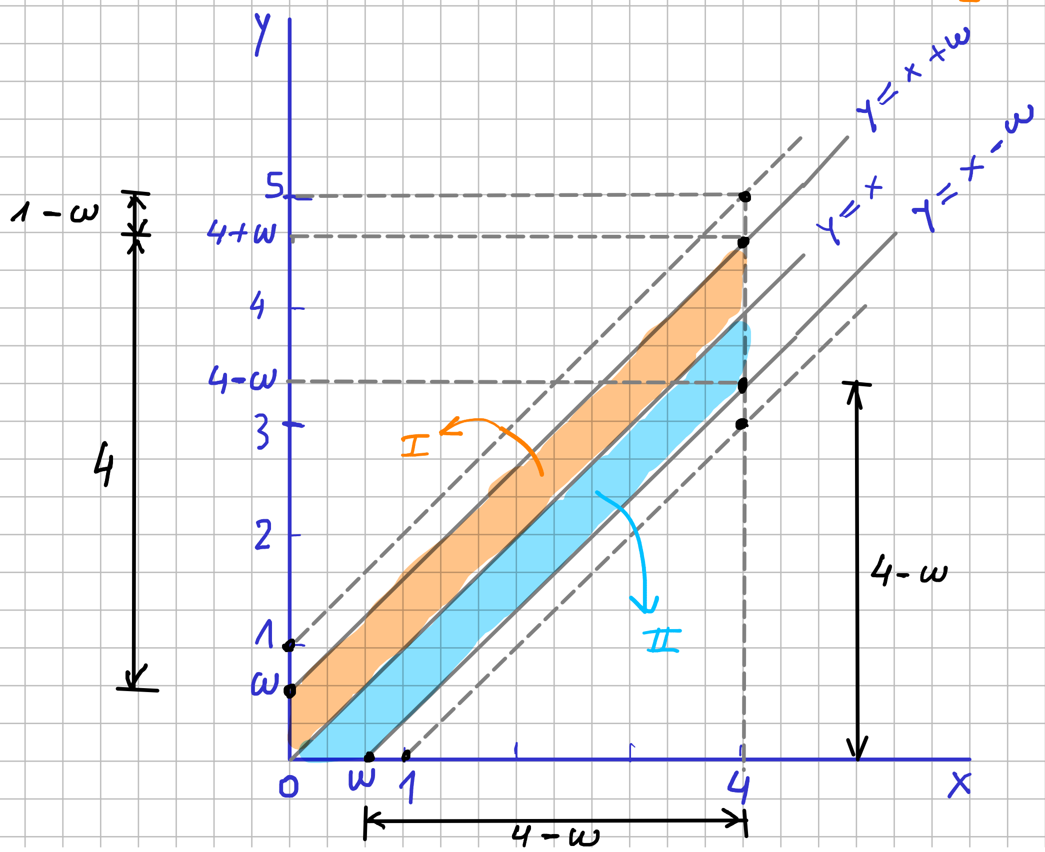
Para $0 < w < 1$: $\quad P(W \le w) = P(|X-Y| \le w)$

Si $X < Y$ es $|X-Y| = -X+Y$

Si $X \ge Y$ es $|X-Y| = X-Y$

Entonces:

$$P(|X-Y| \le w) = P(\underbrace{-X+Y \le w, X<Y}_{I}) + P(\underbrace{X-Y \le w, X \ge Y}_{II})$$



Dibujamos las regiones correspondientes a las probabilidades. Como (X,Y) es uniforme sobre R calculamos las probabilidades como cocientes de áreas

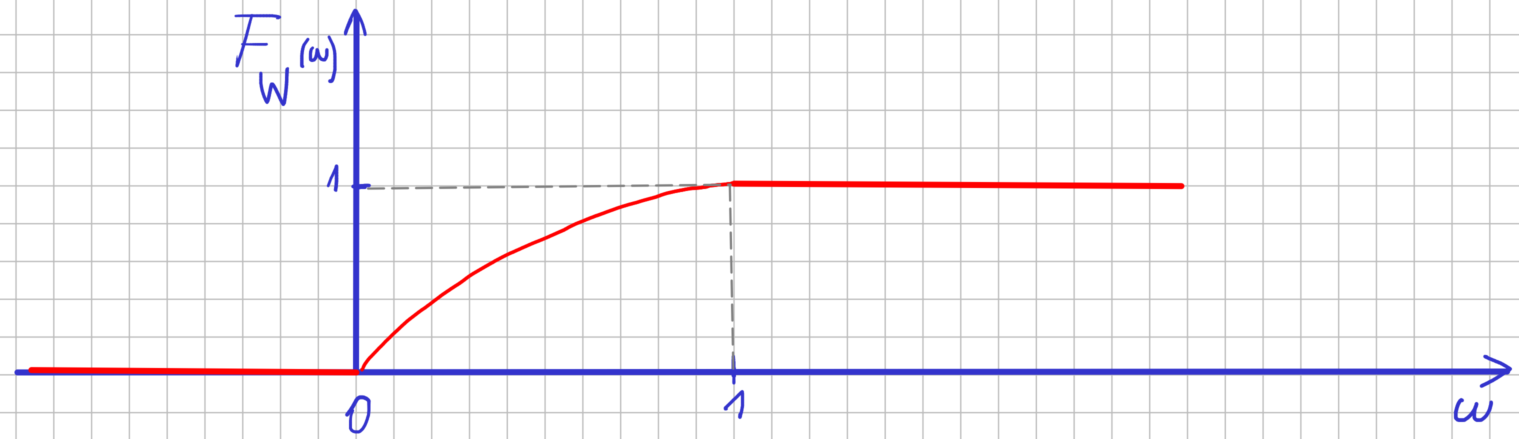
$$\text{ÁREA DE } R = 4 \times 5 - \frac{1}{2} \times 3 \times 3 - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 15/2$$

$$\text{ÁREA DE } I \cup II = 4 \times 5 - 4(1-w) - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2}(4-w)^2$$

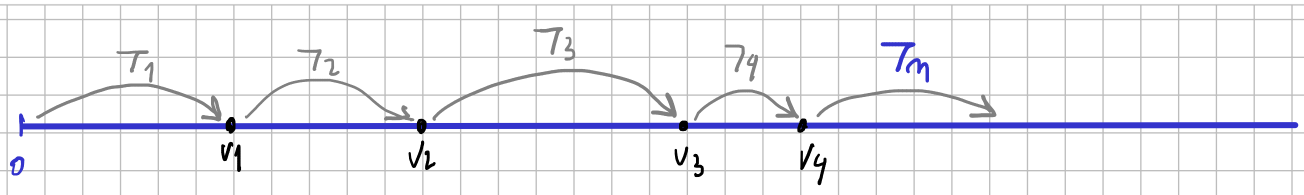
$$= 8w - \tfrac{1}{2} w^2$$

ENTONCES: $$P(|X-Y| \le w) = \frac{8w - \frac{1}{2}w^2}{\frac{15}{2}} = \frac{16}{15} w - \frac{1}{15} w^2$$

$$\boxed{F_W(w) = \left(\frac{16}{15} w - \frac{1}{15} w^2\right) \mathbb{1}\{0 \le w < 1\} + \mathbb{1}\{w \ge 1\}}$$



4. El tiempo (en minutos) entre llegadas de vehículos a un peaje de una autopista tiene distribución exponencial de media 2, independientes entre sí. La probabilidad de que cada uno de estos vehículos sea un camión es 0.25 (independientes unos de otros y de los tiempos de arribo). Si en una hora pasaron exactamente 10 camiones, ¿cuál es el número esperado de vehículos que han pasado en esa hora?



$T_n \sim Exp(\lambda)$ INDEPENDIENTES $\longrightarrow$ ARRIBO VEHÍCULOS : PROCESO POISSON (λ)

$E[T_n] = 2\,\text{MIN} \longrightarrow \lambda = 1/2\,\text{MIN} = 30/\text{HORA}$

CADA VEHÍCULO $\xrightarrow{0.25}$ C (CAMIÓN) $\longrightarrow$ ARRIBO CAMIONES : PROCESO POISSON (0.25λ)

CADA VEHÍCULO $\xrightarrow{0.75}$ $\bar{C}$ (NO CAMIÓN) $\longrightarrow$ ARRIBO OTROS : PROCESO POISSON (0.75λ)

PARA UN INTERVALO DE LONGITUD $\Delta t = 1$ hora SE DEFINEN

N : CANTIDAD VEHÍCULOS ARRIBADOS $\qquad N \sim Poisson(\lambda \Delta t)$

N_C : " CAMIONES " $\qquad N_C \sim Poisson(0.25\lambda \Delta t)$

$N_{\bar{C}}$: " OTROS " $\qquad N_{\bar{C}} \sim Poisson(0.75\lambda \Delta t)$

SE PIDE $E[N \mid N_C = 10]$

ENTONCES:

$$E[N \mid N_C = 10] = E[N_C + N_{\bar{C}} \mid N_C = 10] = 10 + E[N_{\bar{C}} \mid N_C = 10]$$

$= 10 + E[N_{\bar{C}}]$ POR SER N_C y $N_{\bar{C}}$ INDEPENDIENTES

$$= 10 + 0.75 \times \frac{30}{\cancel{\text{HORA}}} \times 14 \cancel{\text{hm}} = \boxed{32.5}$$

5. El tiempo que demora Ximena en resolver un ejercicio de la guía de Probabilidad es una variable aleatoria de media 40 minutos y desvío 10 minutos. Si la cantidad total de ejercicios es 184, calcular aproximadamente la cantidad de horas necesarias para resolver, con probabilidad de al menos 0.95, todos los ejercicios de la guía.

T_i : TIEMPO, EN MINUTOS, PARA RESOLVER EL i-ÉSIMO EJERCICIO

$i \in \{1, 2, 3, \ldots, 184\}$; SUPONEMOS LAS T_i INDEPENDIENTES

$E[T_i] = 40$; $V[T_i] = 10^2$; $\sum_{i=1}^{184} T_i$: TIEMPO TOTAL PARA RESOLVER LOS 184 EJERCICIOS, EN MINUTOS.

SE QUIERE CALCULAR UNA CANTIDAD t DE MINUTOS TAL QUE

$$P\left(\sum_{i=1}^{184} T_i \leq t\right) \geq 0.95$$

COMO EL TIEMPO TOTAL ES UNA SUMA DE 184 VARIABLES IID CON ESPERANZAS Y VARIANZAS FINITAS, SE PUEDE APLICAR EL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE PARA APROXIMAR LA PROBABILIDAD

$$P\left(\sum_{i=1}^{184} T_i \leq t\right) \simeq P\left(Z \leq \frac{t - 184 \times 40}{\sqrt{184 \times 10^2}}\right) \geq 0.95$$

CON $Z \sim N(0,1)$

ENTONCES:

$$\Phi\left(\frac{t - 184 \times 40}{10\sqrt{184}}\right) \geq 0.95$$

$$\frac{t - 7360}{10\sqrt{184}} \geq \Phi^{-1}(0.95) = 1.64485$$

$$\longrightarrow t \geq 7583{,}118 \text{ MIN}$$

$$\longrightarrow \boxed{t \geq 126{,}385 \text{ HORAS}}$$