



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ICS1113 - OPTIMIZACIÓN

Entrega 1.2

9 de mayo de 2025

1º semestre 2025 - Profesores M. Castro - R. Cuadrado - C. Balbontín - G.
Pérez
Grupo 77

Integrantes:

Paula Astorga Montecino
Ethan Orellana Torres
Javiera Painemil Briones
Maximiliano Pisfil Muñoz
Maximiliano Berríos Díaz
Constanza Sepúlveda Abarzúa

Índice

1. Definición del problema	3
1.1. Introducción a la problemática	3
1.2. Valor potencial de resolver el problema	4
1.3. Objetivos del tomador de decisiones	4
1.4. Restricciones	7
2. Bibliografía	10

1. Definición del problema

1.1. Introducción a la problemática

El norte de Chile enfrenta una crisis hídrica sostenida, caracterizada por un déficit estructural del recurso que responde a la disminución de precipitaciones, el cambio climático, el aumento de la demanda y la sobreexplotación de acuíferos. En este contexto, la Provincia del Choapa, en la Región de Coquimbo, destaca como uno de los territorios más afectados del país registrando más de una década de déficit hídrico severo (Ministerio de Obras Públicas, 2024). Comunas como **Illapel, Salamanca, Los Vilos y Canela** presentan altos niveles de vulnerabilidad, especialmente en sectores rurales donde el acceso al agua depende de fuentes subterráneas y de los Sistemas de Agua Potable Rural (APR), los cuales en muchos casos están sobre exigidos o presentan riesgo de agotamiento (Biblioteca Digital CIREN, 2020).

Desde un enfoque humanitario básico, la Organización Mundial de la Salud (OMS) recomienda un mínimo de **100 litros de agua diarios por persona** para garantizar condiciones dignas de higiene, salud y alimentación. No obstante, en la provincia de Choapa, este umbral frecuentemente no se alcanza. En sectores rurales abastecidos por APR, el suministro de agua oscila entre **40 y 50 litros por persona al día**, y en situaciones de emergencia puede descender incluso por debajo de los **20 litros**, generando condiciones precarias para la salud y el bienestar de las comunidades (DGA, 2017; DIPRES, 2022).

Este contraste entre las necesidades básicas y la disponibilidad real de agua deja en evidencia una brecha crítica que se ha mantenido en el tiempo. Entre los principales desafíos se encuentran: la carencia de infraestructura hídrica moderna, las pérdidas significativas en redes de distribución (DGA, 2017), la planificación territorial fragmentada y la escasa articulación institucional (OECD, 2015), así como la limitada capacidad técnica y financiera de muchos comités APR en zonas rurales (CIREN, 2020).

Frente a esta situación, el tomador de decisiones relevante sería una institución designada por el Estado chileno, con competencia directa en la planificación y gestión de recursos hídricos, especialmente en lo relativo a infraestructura de distribución y eficiencia operacional. Esto incluye organismos como el Gobierno Regional de Coquimbo, el Ministerio de Obras Públicas (a través de la Dirección de Obras Hidráulicas), o entidades técnicas con participación pública o mixta que tengan como propósito mejorar el servicio de provisión de agua. Estas entidades son claves para diseñar e implementar estrategias efectivas ante un problema estructural de abastecimiento, ya que actualmente uno de los factores más determinantes en la escasez hídrica es la ineficiencia en la gestión del recurso (País Circular, 2019). Mejorar dicha gestión permitiría no solo reducir pérdidas, sino también anticiparse a escenarios futuros de escasez, cubriendo de manera más eficiente la creciente demanda hídrica, particularmente en regiones del norte como Coquimbo. El horizonte de planificación sugerido es de **1 año**, adecuado para evaluar la implementación de intervenciones de mediano plazo con impacto en la eficiencia del sistema.

1.2. Valor potencial de resolver el problema

Aplicar un modelo de optimización para reducir las pérdidas de agua en la provisión desde fuentes y su transporte entre terrenos puede generar impactos sustanciales. Desde una perspectiva **cuantitativa**, minimizar las pérdidas en cañerías y fuentes mejora significativamente la eficiencia del sistema. En territorios rurales como la Provincia de Choapa, donde la infraestructura es limitada y el recurso escaso, se estima que puede recuperarse entre un 15 % y un 30 % del recurso perdido por ineficiencias (OECD, 2015).

Desde el plano **económico**, optimizar la ubicación de fuentes y conexiones dentro de la provincia permite reducir gastos en soluciones de emergencia como el uso de camiones aljibe, los cuales representan más de **\$12.000 millones anuales** en las regiones del norte (DIPRES, 2022). Esto libera recursos para inversiones estructurales más sostenibles y duraderas en comunas como Illapel, Salamanca o Canela.

En términos **sociales**, el modelo permite identificar comunas dentro de Choapa con mayor déficit hídrico y orientar allí las decisiones de infraestructura, mejorando el acceso al recurso y abordando desigualdades territoriales.

Desde una dimensión **ambiental**, reducir pérdidas ayuda a satisfacer la demanda sin aumentar la extracción desde fuentes subterráneas ya sobreexplotadas, como los acuíferos de **Illapel o Quilimarí** (DGA, 2017). Así, se protege la regeneración del ecosistema hídrico local. En conjunto, el modelo contribuye a una gestión más eficiente, equitativa y sostenible del agua en la Provincia de Choapa.

1.3. Objetivos del tomador de decisiones


Frente a la escasez hídrica y las deficiencias en la infraestructura de distribución en la Provincia de Choapa, se propone un modelo de optimización que permita **minimizar las pérdidas de agua** tanto en las fuentes que suministran el recurso como en su transporte mediante cañerías hacia los terrenos comunales con demanda, mejorando así la eficiencia y equidad en la provisión del recurso hídrico a nivel comunal.

Para el desarrollo del modelo se asume que los terrenos comunales, ocupados por casas, escuelas, edificios u otras estructuras, pueden demandar o proveer agua según su función. En los casos en que operan como oferentes, se consideran cinco tipos de fuentes: plantas desalinizadoras, plantas de tratamiento de aguas grises, pozos, tranques y ríos. Sobre esta base, el tomador de decisiones debe implementar una serie de acciones estratégicas. La principal decisión es **definir el flujo de agua que circulará por cada cañería activa** en cada periodo. Esta decisión se modela mediante la variable continua $Y_{a,s,t}$, que representa el caudal de agua que fluye por la cañería a en la comuna s durante el periodo t . Esto permite distribuir el recurso desde las fuentes hacia los terrenos con demanda, considerando las pérdidas asociadas al transporte. Las pérdidas están representadas en el parámetro $\alpha_{a,s}$, que corresponde al porcentaje de pérdida de cada cañería en una comuna. A partir de lo anterior, el transporte del agua puede **definir si se construye una nueva cañería** previamente identificada como viable en el conjunto de posibles ubicaciones para las cañerías. Esto se

modela con la variable binaria $Q_{a,s,t}$, que indica si la cañería a es instalada en el sector s en el periodo t . Finalmente, se contempla la opción de agregar nuevas fuentes en terrenos que no contaban previamente con ellas, lo cual se representa mediante la variable $W_{f,n,s,t}$.

Para asegurar que las decisiones sean factibles en la práctica, el modelo incorpora un conjunto de restricciones fundamentales.

Como se menciono con anterioridad, el modelo al buscar minimizar la perdida de agua, se debe establecer una restricción que limite el flujo de agua que esta circulando a través de una comuna. Para esto se debe realizar un balance para equilibrar el agua aportada por las fuentes y las cañerías de entrada debe ser suficiente para satisfacer la demanda local considerando las pérdidas tanto en el transporte como en la eficiencia de cada fuente.



Esta condición es clave para asegurar que la distribución del recurso sea viable y refleja el principio de conservación del flujo en cada nodo del sistema de la red. Por otro lado, el resto de las restricciones abordan aspectos operacionales esenciales la capacidad máxima de cañerías (R2) y su activación (R3); la limitación de construcciones (R4 y R5) para evitar múltiples compras o duplicaciones; la operación sujeta a la instalación y del estado físico (R6 a R8); y el control del estado financiero mediante reglas de flujo de caja (R9–R11). Además, se considera la acumulación de fuentes (R12), la incompatibilidad entre operación y falla (R13–R14), y el límite de fuentes por terreno (R15). Todas estas restricciones permiten que el modelo represente con fidelidad la complejidad técnica y presupuestaria de una red de distribución hídrica eficiente y sostenible. 

Modelo Propuesto

Conjuntos

- S : Conjunto de comunas de la provincia tanto tanto en coquimbo.
- $T = \{1, \dots, t_f\}$: Conjunto de t_f semanas.
- N_s : Conjunto de terrenos de una comuna $s \in S$.
- F : Conjunto de los distintos tipos de fuentes que proporcionan agua.
- $A_s \subseteq N_s \times N_s$: Conjunto de posibles cañerías donde se pueden conectar pares de terrenos dentro de la misma comuna $s \in S$.
- $\delta^-(i)$: Conjunto de cañerías que llegan al terreno i , es decir, $\delta^-(i) = \{(j, i) \in A_s \mid j \in N_s\}$ en la comuna $s \in S$.
- $\delta^+(i)$: Conjunto de cañerías que salen del terreno i , es decir, $\delta^+(i) = \{(i, j) \in A_s \mid j \in N_s\}$ en la comuna $s \in S$.

Parámetros

- $d_{n,s,t}$: Demanda de flujo de agua en cada terreno $n \in N_s$ perteneciente a la comuna $s \in S$ en el tiempo $t \in T$ [m^3/s].
- $k_{a,s}$: Capacidad máxima del flujo de agua de cada cañería $a \in A_s$ del comuna $s \in S$ [m^3/s].
- m_f : Cantidad de flujo agua que puede suministrar la fuente $f \in F$ [m^3/s].
- $\alpha_{a,s}$: Porcentaje de pérdida asociado a la cañería $a \in A_s$ en un comuna $s \in S$.
- β_f : Porcentaje de perdida asociado a la fuente $f \in F$.
- $c_{f,s}$: Costo asociado a construir una fuente $f \in F$ en la comuna $s \in S$ [CLP].
- $c'_{a,s}$: Costo asociado a instalar una cañería $a \in A_s$ en la comuna $s \in S$ [CLP].
- $c''_{a,s}$: Costo asociado a arreglar una cañería $a \in A_s$ en la comuna $s \in S$ [CLP].
- I_0 : Presupuesto de inicio en el periodo $t = 1$
- e_t : Dinero recibido por demanda en [$CLP \cdot s/m^3$]. 
- $g_{f,n,s}$: Máximo de fuentes de tipo $f \in F$ construidas en un terreno $n \in N_s$ en un comuna $s \in S$. 
- φ : Cantidad de periodos máximos los cuales puede durar una cañería sin mantención antes de que se rompa.

Variables

- $W_{f,n,s,t}$: Número de fuentes nuevas construidas del tipo $f \in F$ en el terreno $n \in N_s$, en la comuna $s \in S$ en el tiempo $t \in T$.
- $X_{f,n,s,t}$: Número total de fuentes instaladas del tipo $f \in F$ en el terreno $n \in N_s$, en la comuna $s \in S$ en el tiempo $t \in T$.
- $Y_{a,s,t}$: Flujo de agua que fluye a través de la cañería $a \in A_s$ en la comuna $s \in S$ en el periodo $t \in T$ [m^3].
- P_t : Dinero al **final** del período $t \in T$.
- $Q_{a,s,t} = \begin{cases} 1 & \text{Se construye la cañería } a \in A_s \text{ en la comuna } s \in S \text{ en el período } t \in T \\ 0 & \text{E.O.C.} \end{cases}$
- $R_{a,s,t} = \begin{cases} 1 & \text{Está operando la cañería } a \in A_s \text{ en la comuna } s \in S \text{ en el período } t \in T \\ 0 & \text{E.O.C.} \end{cases}$

- $L_{a,s,t} = \begin{cases} 1 & \text{Se arregla la cañería } a \in A_s \text{ en la comuna } s \in S \text{ en el período } t \in T \\ 0 & \text{E.O.C.} \end{cases}$
- $V_{a,s,t} = \begin{cases} 1 & \text{Se encuentra instalada la cañería } a \in A_s \text{ en la comuna } s \in S \text{ en el período } t \in T \\ 0 & \text{E.O.C.} \end{cases}$
- $U_{a,s,t} = \begin{cases} 1 & \text{Se encuentra rota la cañería } a \in A_s \text{ en la comuna } s \in S \text{ en el período } t \in T \\ 0 & \text{E.O.C.} \end{cases}$

Función objetivo

Minimizar la perdida de agua de cada cañería y de cada fuente en cada comuna de la provincia de Choapa. Considera la perdida asociada por una cañería funcionando y la perdida asociada por el tipo de fuente decidida.

$$\min \left(\sum_{t \in T} \sum_{a \in A_s} \sum_{s \in S} \alpha_{a,s} \cdot Y_{a,s,t} + \sum_{t \in T} \sum_{f \in F} \sum_{s \in S} \sum_{n \in N_s} \beta_f \cdot m_f \cdot X_{f,n,s,t} \right) \quad \blacktriangledown$$

1.4. Restricciones

R1: Ecuación de flujo

El balance de flujo en cada terreno equilibra el aporte de las fuentes y las tuberías entrantes con las salidas, incorporando las pérdidas asociadas al rendimiento de las fuentes y al desgaste promedio de las cañerías.

$$\sum_{f \in F} (1 - \beta_f) m_f X_{f,n,s,t} + \sum_{a \in \delta^-(n)} (1 - \alpha_{a,s}) Y_{a,s,t} - \sum_{a \in \delta^+(n)} (1 - \alpha_{a,s}) Y_{a,s,t} = d_{n,s,t} \quad \blacktriangledown$$

$$\forall n \in N_s, \forall s \in S, \forall t \in T$$

R2: Capacidad máxima de flujo:

El flujo de agua en la cañería a en la comuna s es máximo k cuando la cañería a existe, es nula en otro caso.

$$Y_{a,s,t} \leq k_{a,s} \cdot R_{a,s,t} \quad \forall a \in A_s, \forall s \in S, \forall t \in T \quad \blacktriangledown$$

R3: Activación de cañería:

Solo es posible instalar una vez una cañería:

$$\sum_{t \in T} Q_{a,s,t} \leq 1 \quad \forall a \in A_s \quad \forall s \in S \quad \blacktriangledown$$

R4: Primera compra:

El gasto de instalar cada cañería más el costo de construcción de cada fuente debe ser menor o igual al presupuesto inicial.

$$\sum_{s \in S} \sum_{f \in F} \sum_{n \in N_s} c_{f,s} \cdot W_{f,n,s,1} + \sum_{s \in S} \sum_{a \in A_s} c'_{a,s} \cdot Q_{a,s,1} \leq I_0$$

R5: Cañería previamente instalada, sigue instalada:

Si se instala, entonces queda marcada como que se instaló para todos los próximos períodos:

$$Q_{a,s,t} \leq V_{a,s,t} \quad \forall a \in A_s, \forall s \in S, \forall t \in T$$

$$V_{a,s,t} \leq V_{a,s,t+1} \quad \forall a \in A_s, \forall s \in S, \forall t \in \{1, \dots, t_0\}$$

R6: Solo puede operar una cañería que está instalada:

Una cañería sólo puede operar si fue instalada previamente:

$$\sum_{t=t'}^{t_f} V_{a,s,t} \geq \sum_{t=t'}^{t_f} R_{a,s,t} \quad \forall a \in A_s, \forall s \in S, \forall t' \in T$$

R7: Persistencia del estado de falla:

Si una cañería está rota y no se repara, permanece rota al siguiente período:

$$U_{a,s,t+1} \geq U_{a,s,t} - L_{a,s,t} \quad \forall a \in A_s, \forall s \in S, \forall t \in \{1, \dots, t_f - 1\}$$

R8: Condición de ruptura de cañería:

Si no se repara una cañería en φ períodos consecutivos, esta se rompe automáticamente:

$$U_{a,s,t} \geq R_{a,s,t} - \sum_{\tau=t}^{t+\varphi} L_{a,s,\tau} \quad \forall a \in A_s, \forall s \in S, \forall t \in \{1, \dots, t_f - \varphi\}$$

R9: Flujo de caja — periodo inicial:

Se calcula el dinero al final del primer período. **No incluye costos de reparación**, ya que en la primera semana no es posible reparar. La demanda se asume cumplida en función de lo construido ese mismo período.

$$I_0 - \sum_{s \in S} \sum_{a \in A_s} c'_{a,s} \cdot Q_{a,s,1} - \sum_{s \in S} \sum_{n \in N_s} \sum_{f \in F} c_{f,s} \cdot W_{f,n,s,1} + e_1 \cdot \sum_{s \in S} \sum_{n \in N_s} d_{n,s,1} = P_1$$

R10: **Flujo de caja** — para todo período $t \in \{2, \dots, n\}$:

Se actualiza el presupuesto en cada período: se suma lo recibido por demanda cumplida y se restan costos de nuevas instalaciones y reparaciones.

$$P_{t-1} + e_t \cdot \sum_{s \in S} \sum_{n \in N_s} d_{n,s,t} - \sum_{s \in S} \sum_{a \in A_s} c'_{a,s} \cdot Q_{a,s,t} - \sum_{s \in S} \sum_{n \in N_s} \sum_{f \in F} c_{f,s} \cdot W_{f,n,s,t} - \sum_{s \in S} \sum_{a \in A_s} c''_{a,s} \cdot L_{a,s,t} = P_t \quad \blacktriangledown$$

$$\forall t \in \{2, \dots, t_f\}$$

R11: **No se permite saldo negativo:**

El dinero al final de cada semana debe ser positivo:

$$P_t \geq 0 \quad \forall t \in T \quad \blacktriangledown$$

R12: **Acumulación de fuentes instaladas:**

Caso Base: $X_{f,n,s,1} = W_{f,n,s,1}$

El total de fuentes instaladas es la suma de las nuevas fuentes más las antiguas:

$$X_{f,n,s,t} = W_{f,n,s,t} + X_{f,n,s,t-1} \quad \forall f \in F, \forall n \in N_s, \forall s \in S, \forall t \in (2, \dots, t_f) \quad \blacktriangledown$$

R13: **Una cañería rota no esta operando:**

Sólo puede operar una cañería siempre que no este rota.

$$U_{a,s,t} + R_{a,s,t} \leq 1 \quad \forall a \in A_s, \forall s \in S, \forall t \in T \quad \blacktriangledown$$

R14: **Arreglar una cañería:**

Si una cañería rota se arregla, deja de estar rota en la misma semana.

$$L_{a,s,t} + U_{a,s,t} \leq 1 \quad \forall a \in A_s, \forall s \in S, \forall t \in T \quad \blacktriangledown$$

R15: **Fuentes máximas por terreno:**

El numero de fuentes $X_{f,n,s,t}$ en un terreno $n \in N$ no puede superar su limite

$$X_{f,n,s,t} \leq g_{f,n,s} \quad \forall f \in F, \forall n \in N_s, \forall s \in S, \forall t \in T \quad \blacktriangledown$$

Naturaleza de las variables:

- $Q_{a,s,t}, R_{a,s,t}, L_{a,s,t}, U_{a,s,t}, V_{a,s,t} \in \{0, 1\}, \quad \forall a \in A_s, \forall s \in S, \forall t \in T$
- $W_{f,n,s,t}, X_{f,n,s,t} \in \mathbb{Z} \geq 0, \quad \forall f \in F, \forall n \in N_s, \forall s \in S, \forall t \in T$
- $Y_{a,s,t} \geq 0, \quad \forall a \in A_s, \forall s \in S, \forall t \in T$
- $P_t \geq 0, \quad \forall t \in T$

2. Bibliografía

- Centro de Información de Recursos Naturales (CIREN). (2020). *Plan estratégico de gestión hídrica cuenca del Choapa*. Biblioteca Digital CIREN. <https://bibliotecadigital.ciren.cl/handle/123456789/29127>
- Dirección de Presupuestos. (2022). *Gasto en emergencias hídricas en regiones afectadas por sequía*. Ministerio de Hacienda, Gobierno de Chile. https://www.dipres.gob.cl/597/articles-141155_informe_final.pdf
- Dirección General de Aguas. (2017). *Inventario nacional de acuíferos*. Ministerio de Obras Públicas, Gobierno de Chile. <https://bibliotecadigital.ciren.cl/items/5c705214-8f97-4b8d-9b14-35f0fc3c1362>
- Ministerio de Obras Públicas. (2024, agosto 27). *Decreto N° 94: Declara zona de escasez hídrica a la provincia de Choapa*. Biblioteca del Congreso Nacional de Chile. <https://c.bcn.cl/3tae0>
- País Circular. (2019, septiembre 18). *El drama del agua en Chile: ineficiencia en la gestión es uno de los principales factores de la escasez hídrica*. <https://www.paiscircular.cl/reportajes/el-drama-del-agua-en-chile/>
- OECD. (2015). *Water Governance in Chile: Acknowledging Fragmentation, Promoting Integration*. OECD Studies on Water. <https://doi.org/10.1787/9789264230740-en>
- Organización Mundial de la Salud. (2003). *Domestic water quantity, service level and health*. WHO Press. <https://apps.who.int/iris/handle/10665/67884>