

# Métodos numéricos iterativos aplicados a geodésicas

Gimena Caroceli Taranto (4788900-5),  
Gastón De Boni Rovella (5102000-7),  
Javier Quincke Leone (4956259-6),  
Maximiliano Ustria Bouzas (5502717-8)

*Instituto de Matemática y Estadística  
Facultad de Ingeniería. Universidad de la República  
Montevideo, Uruguay*

---

## Abstract

Tomando como objeto de estudio la geometría diferencial de curvas y superficies (o también la geometría de Riemann[4]), puede ser de interés hallar curvas que minimicen distancias localmente. Estas curvas son denominadas *geodésicas*. En este trabajo se introduce una noción general de las geodésicas, además de una breve deducción de las ecuaciones diferenciales que rigen su comportamiento. Se utilizan los símbolos de Christoffel junto con un cambio de variable para simplificar la expresión de las mismas.

Se estudian algunas superficies sencillas, en las que se calcula analíticamente la expresión de las geodésicas mediante la resolución de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Para el caso de la esfera, se propone una solución y se demuestra la unicidad de la misma, aplicando directamente el teorema de Picard.

Se analiza el caso del paraboloide hiperbólico. En primer lugar, se demuestra que las geodésicas en dicha superficie son un problema de valores iniciales. Luego, se utilizan métodos de discretización para hallar las geodésicas con el menor error posible. Se hace uso de los métodos de Euler hacia adelante, precedido por una breve introducción al mismo y una síntesis del algoritmo que utiliza. Se hace lo propio con el método del punto medio. Finalmente, se analizan los resultados obtenidos y se discute su eficiencia según el valor de los parámetros considerados.

*Keywords:* Geodésicas, Métodos de discretización, Euler hacia adelante, Método del punto medio.

---

## 1 Introducción

Se dice que una curva parametrizada no constante  $\gamma: I \rightarrow S$  es geodésica en  $t \in I$  si el campo de sus vectores tangentes  $\gamma'(t)$  es paralelo a lo largo de  $\gamma$  en  $t$ . En otras palabras, una curva es una geodésica si para cada punto perteneciente a la misma, la proyección ortogonal de su vector normal en el plano tangente a la superficie es el vector nulo. Como idea intuitiva para comprender qué son las geodésicas podemos pensar en el camino más corto entre dos puntos de una superficie, restringido a esa superficie. Es importante entender que una geodésica que une dos puntos no necesariamente es el camino más corto entre ellos, pero si tomamos el camino más corto, entonces este es una geodésica. Esto se verá más claro cuando se estudie el caso del cilindro.

Históricamente, se denominaba *geodésica* a la curva de menor longitud que une dos puntos en una superficie. La primera superficie en considerarse para esto fue justamente la superficie terrestre, y la motivación era encontrar el camino más corto entre dos puntos cualesquiera sobre la misma. Actualmente, la definición matemática de *geodésica* no es tan restrictiva.

El documento está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se da una deducción simplificada de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de las geodésicas de una superficie. Luego, se recorre un grupo de superficies simples, en las que se resuelven las ecuaciones presentadas anteriormente. En la sección 3 se introduce el problema y se observa su irresolubilidad analítica. En la sección 4 se explican los métodos a utilizar y se analiza teóricamente su eficiencia. En la sección 5 se presentan e interpretan los resultados obtenidos utilizando diferentes métodos, mientras que en la sección 6 se hace un resumen de las principales conclusiones extraídas del proyecto.

## 2 Marco teórico

### 2.1 Ecuaciones de las geodésicas

Veamos una deducción simplificada de cómo obtener las geodésicas de una superficie dada [6]. Sean:

$$\begin{aligned}\Phi: U \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \alpha: I \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 / \alpha(t) = \Phi(u(t), v(t))\end{aligned}$$

Una superficie y una curva restringida a la misma parametrizada por longitud de arco, respectivamente. Para que  $\alpha$  sea una geodésica, debe cumplir:

$$\alpha''(t) \parallel N \iff \alpha'' \parallel (\Phi_u \wedge \Phi_v) \iff \begin{cases} \alpha'' \cdot \Phi_u = 0 \\ \alpha'' \cdot \Phi_v = 0 \end{cases}$$

Donde  $N$  es la normal de la superficie. Derivamos  $\alpha$  respecto de  $t$ :

$$\alpha'(t) = \Phi_u u' + \Phi_v v'$$

$$\alpha''(t) = \Phi_{uu} u'^2 + \Phi_{uv} u' v' + \Phi_{vu} v' u' + \Phi_{vv} v'^2 + \Phi_u u'' + \Phi_v v''$$

Entonces, las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de las geodésicas son las siguientes:

$$\begin{cases} (\Phi_{uu} u'^2 + \Phi_{uv} u' v' + \Phi_{vu} v' u' + \Phi_{vv} v'^2 + \Phi_u u'' + \Phi_v v'') \cdot \Phi_u = 0 \\ (\Phi_{uu} u'^2 + \Phi_{uv} u' v' + \Phi_{vu} v' u' + \Phi_{vv} v'^2 + \Phi_u u'' + \Phi_v v'') \cdot \Phi_v = 0 \end{cases}$$

Para simplificar estas expresiones, es necesario definir brevemente el concepto de *Problema de Valores Iniciales* (PVI). Un PVI es una ecuación diferencial ordinaria (es decir, que relaciona una función desconocida de una única variable independiente con sus derivadas), junto con un valor inicial. Un PVI es de la siguiente forma:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donde  $y$  es la función a hallar y  $x$  es la variable de dicha función. Para continuar, se definen los símbolos de Christoffel de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_u - EE_v + FE_u}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_v - GG_u + FG_v}{2(EG - F^2)} & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} \end{aligned}$$

Donde  $E = \Phi_u \cdot \Phi_u$ ,  $F = \Phi_u \cdot \Phi_v$ ,  $G = \Phi_v \cdot \Phi_v$

Con el uso de estos símbolos, junto con un cambio de variable conveniente, las ecuaciones se reducen al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} u'(t) = p(t) \\ v'(t) = q(t) \\ p'(t) = -\Gamma_{11}^1 p^2(t) - 2\Gamma_{12}^1 p(t)q(t) - \Gamma_{22}^1 q^2(t) \\ q'(t) = -\Gamma_{11}^2 p^2(t) - 2\Gamma_{12}^2 p(t)q(t) - \Gamma_{22}^2 q^2(t) \end{cases}$$

De esta manera, dada una parametrización de una superficie, podemos encontrar la parametrización de las posibles geodésicas sobre dicha superficie.

## 2.2 Geodésicas en algunas superficies clásicas

En los siguientes casos de superficies se omitirán los valores iniciales, ya que se encontrarán las parametrizaciones de todas las geodésicas de cada superficie como función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^3$ , definida para todos los reales.

### 2.2.1 Plano

Se utilizará el plano  $x + y + z = 1 \Rightarrow z = 1 - x - y$

Parametrizando, nos queda:

$\Phi(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$ . Entonces:

$$\begin{cases} \Phi_u = (1, 0, -1) \\ \Phi_v = (0, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = 2 \\ F = 1 \\ G = 2 \end{cases} \Rightarrow \Gamma_{ij}^k = 0 \quad \forall i, j, k$$

Por lo tanto, las ecuaciones diferenciales se reducen a las siguientes:

$$(I) \begin{cases} u'(t) = p(t) \\ v'(t) = q(t) \\ p'(t) = 0 \Rightarrow p(t) = A \\ q'(t) = 0 \Rightarrow q(t) = B \end{cases}$$

Entonces, integrando directamente y eligiendo constantes A, B, C y D arbitrarias,  $u$  y  $v$  nos quedan:  $\Rightarrow \begin{cases} u(t) = At + B \\ v(t) = Ct + D \end{cases}$

Finalmente, sustituyendo las funciones  $u(t)$  y  $v(t)$  en la parametrización de la superficie, la curva geodésica  $\alpha(t)$  que verifica (I) nos queda como sigue:

$$\Phi(u(t), v(t)) = (At + B, Ct + D, 1 - (A + C)t - (B + D))$$

Con esta fórmula, obtuvimos todas las geodésicas posibles en el plano  $x+y+z = 1$ . Como puede suponerse, estas son todas las rectas sobre el plano en cuestión: el camino más corto para llegar de un punto a otro de un plano es claramente el segmento de recta que los une.

### 2.2.2 Cilindro

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad z \in \mathbb{R}$$

Lo parametrizamos utilizando coordenadas cilíndricas y aplicamos el procedimiento presentado anteriormente:

$$\Phi(u, v) = (r \cos(u), r \sin(u), v)$$

$$\begin{cases} \Phi_u = (-r \sin(u), r \cos(u), 0) \\ \Phi_v = (0, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = r^2 \\ F = 0 \\ G = 1 \end{cases} \Rightarrow \Gamma_{ij}^k = 0 \quad \forall i, j, k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(t) = At + B \\ v(t) = Ct + D \end{cases}$$

Se puede apreciar que los símbolos de Christoffel son los mismos que en el caso del plano, por lo tanto las ecuaciones diferenciales y sus soluciones también lo son. Esto puede interpretarse geoméricamente como que el cilindro es el plano "enroscado" sobre un eje paralelo a él, de manera que si lo plegáramos, donde antes veíamos las hélices que corresponden a las geodésicas del cilindro, ahora vemos rectas sobre el plano. Los casos extremos serían la circunferencia y la recta paralela al eje del cilindro, que en el plano se ven como dos rectas perpendiculares (paralelas a los ejes, por ejemplo). Sin más:

$$\Phi(u(t), v(t)) = (r \cos(At + B), r \sin(At + B), Ct + D)$$

Variando los parámetros  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  podemos obtener circunferencias (tomando  $C = 0$ ), rectas paraxiales (tomando  $A = 0$ ) y helicoides (ver figura 1).

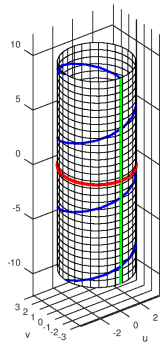


Fig. 1. Geodésicas representativas del cilindro: recta, hélice y circunferencia.

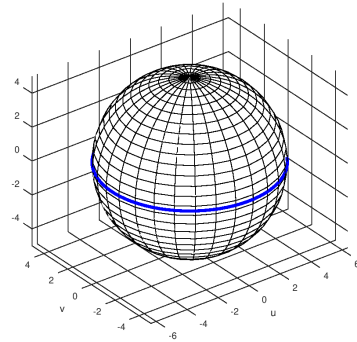


Fig. 2. Geodésicas representativas de la esfera: circunferencias de radio máximo, se ilustra la solución verificada en el ejemplo.

### 2.2.3 Esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Utilizando las coordenadas esféricas habituales, la parametrización queda como sigue:

$$\Phi(u, v) = (r \cos(u) \cos(v), r \sin(u) \cos(v), r \sin(v)) \quad u \in [0, 2\pi), \quad v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi_u = (-r \sin(u) \cos(v), r \cos(u) \cos(v), 0) \\ \Phi_v = (-r \sin(v) \cos(u), -r \sin(u) \sin(v), r \cos(v)) \end{cases}$$

$$E = r^2 \sin^2(u) \cos^2(v) + r^2 \cos^2(u) \cos^2(v) = r^2 \cos^2(v) \sin^2(u) + \cos^2(u) = r^2 \cos^2(v)$$

$$F = r^2 \sin(u) \sin(v) \cos(u) \cos(v) - r^2 \sin(u) \sin(v) \cos(u) \cos(v) = 0$$

$$G = r^2 \cos^2(u) \sin^2(v) + r^2 \sin^2(u) \sin^2(v) + r^2 \cos^2(v) = r^2 [\sin^2(v) + \cos^2(v)] = r^2$$

Derivando y operando, los coeficientes de Christoffel quedan de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0 \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{r^2(-2)r^2 \cos v \sin v}{2r^2 r^2 \cos^2 v} = \frac{-\sin v}{\cos v} = -tg(v) \\ \Gamma_{11}^2 = \frac{r^2 \cos^2 v + 2r^2 \cos v \sin v}{2r^4 \cos^2 v} = \cos(v) \sin(v) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = p(t), \\ v'(t) = q(t), \\ p'(t) = 2tg(v)p(t)q(t) \\ q'(t) = -\cos(v)\sin(v)p^2(t) \end{cases}$$

Observamos que no podemos resolver analíticamente las ecuaciones diferenciales obtenidas para el caso de la esfera. Es por esto que se proponen soluciones y veremos si verifican el problema de valores iniciales. Consideramos una circunferencia de radio máximo paralela al plano  $xy$  con  $z = 0$ , parametrizada como sigue:

$$\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t, 0) = \Phi(t, 0)$$

Podemos ver fácilmente que  $u(t) = t$ ,  $v(t) = 0$ , y sustituyendo en el PVI anterior, vemos que efectivamente esta curva es solución. Por lo tanto, tenemos que una circunferencia de radio máximo es una geodésica de la esfera. Por simetría central, eligiendo un punto arbitrario sobre la superficie de la esfera y una dirección, encontramos una circunferencia de radio máximo que pasa por ese punto y con dicha dirección. Por el teorema de existencia y unicidad de Picard [2] sabemos que esta solución es única. Se deja a cargo del lector la verificación de las hipótesis.

#### 2.2.4 Cono

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$\begin{aligned} &\text{Parametrizamos la superficie como: } \Phi(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u), \quad u > 0 \\ \Rightarrow &\begin{cases} \Phi_u = (\cos(v), \sin(v), 1) \\ \Phi_v = (-u \sin(v), u \cos(v), 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = \cos^2(v) + \sin^2(v) + 1 = 2 \\ F = 0 \\ G = u^2 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0 \\ \Gamma_{22}^1 = \frac{-u}{2} \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{1}{u} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = p(t), \\ v'(t) = q(t), \\ p'(t) = \frac{1}{2}u(t)q^2(t) \\ q'(t) = -2\frac{1}{u(t)}p(t)q(t) \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos ver que en este caso, la solución no es nada trivial. Se intenta de observar, intuitivamente, que las geodésicas del cono quedan definidas localmente por planos que lo intersectan formando un ángulo recto con su superficie. Esto es una consecuencia directa de la condición de geodésicas exhibida en la sección 2.1. Si es de interés del lector, puede indagar en propiedades de isometría del cono con el plano que permiten afirmar que existe una parametrización del cono tal que  $E = G = 1$ ,  $F = 0$  [1]. Esta parametrización es la siguiente:

$$\Phi(u, v) = \left( \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{2}} \cdot \cos(\sqrt{2} \cdot \arctan(\frac{v}{u})), \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{2}} \cdot \sin(\sqrt{2} \cdot \arctan(\frac{v}{u})), \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{2}} \right)$$

Con esta parametrización, los coeficientes de Christoffel son nulos y las funciones  $u(t)$  y  $v(t)$  quedan igual al caso del plano y el cilindro. Lamentablemente, la única curva trivial y visualizable en su totalidad es la recta. Las demás geodésicas, como se aclaró anteriormente, quedan definidas localmente intersectando un plano perpendicular a la superficie del cono. La figura 3 se adjunta en modo meramente ilustrativo, la curva de intersección no pretende ser una representación exacta de la geodésica.

### 3 Problema

En esta sección nos encargaremos de analizar en profundidad el caso del paraboloide hiperbólico y sus geodésicas. Esto incluye: utilizar el método anterior para demostrar que puede escribirse como un problema de valores iniciales, observar su irresolubilidad analítica y aplicar algoritmos matemáticos y computacionales para aproximar la solución con el menor error posible.

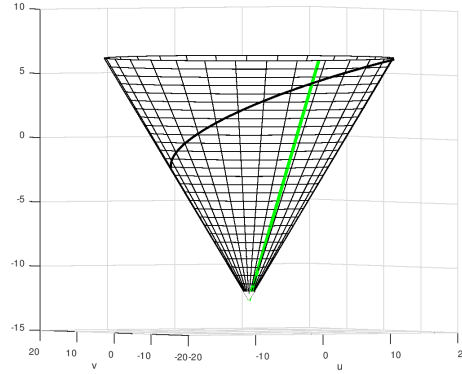


Fig. 3. Geodésicas del cono: recta e intersección de plano perpendicular a la superficie

Utilizamos la parametrización  $r(u, v) = (u, v, uv)$  y hallamos el problema de valores iniciales de la misma forma que en los ejemplos:

$$\begin{cases} r_u = (1, 0, v) \\ r_v = (0, 1, u) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = 1 + v^2 \\ F = uv \\ G = 1 + u^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0 \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{v}{u^2 + v^2 + 1} \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{u}{u^2 + v^2 + 1} \end{cases}$$

Por lo tanto, el PVI nos queda:

$$\begin{cases} u'(t) = p(t) \\ v'(t) = q(t) \\ p'(t) = \frac{-2v(t)}{u^2(t) + v^2(t) + 1} p(t) q(t) \\ q'(t) = \frac{-2u(t)}{u^2(t) + v^2(t) + 1} p(t) q(t) \end{cases}$$

Con valores iniciales:

$$u(t_0) = u_0, \quad v(t_0) = v_0, \quad p(t_0) = u'(t_0) = p_0, \quad q(t_0) = v'(t_0) = q_0$$

Esto podemos reescribirlo de una forma más compacta, definiendo una función  $y(t) = (u(t), v(t), p(t), q(t))$  y vector inicial  $y(t_0) = (u_0, v_0, p_0, q_0)$

De esta forma, el PVI nos queda:

$$\begin{cases} y'(t) = (p(t), q(t), \frac{-2v(t)}{u^2(t) + v^2(t) + 1} p(t) q(t), \frac{-2u(t)}{u^2(t) + v^2(t) + 1} p(t) q(t)) \\ y(t_0) = (u_0, v_0, p_0, q_0) \end{cases}$$

Es claro que no poseemos las herramientas matemáticas necesarias para resolver analíticamente este problema debido a la presencia de términos



cuadráticos en el divisor de dos de las ecuaciones. Por ello, lo mejor que podemos hacer es generar un método de aproximación mediante el cual se estime el valor funcional  $u(t), v(t)$  de una cantidad finita de puntos en un intervalo. Si los puntos están lo suficientemente cerca y el error del valor obtenido respecto del valor funcional es sensiblemente pequeño, podremos visualizar las geodésicas aproximadas del paraboloides hiperbólico indistinguiblemente de las reales.

## 4 Metodología

Para comenzar, se considera un intervalo temporal cerrado  $[t_0, t_f]$  y se discretiza. Esto es, se observan un número finito de puntos  $t_0, t_1, \dots, t_{N-1}, t_N = t_f$  y en este caso son tales que  $d(t_i, t_{i+1}) = d(t_j, t_{j+1}) \forall i, j = 1, \dots, N-1$ . El objetivo será aproximar lo mejor posible el valor funcional en cada uno de estos puntos. La función a considerar es  $y(t) = (u(t), v(t), p(t), q(t))$ , aunque para observar la geodésica sobre el paraboloides hiperbólico solo nos van a interesar las funciones  $u(t)$  y  $v(t)$ . De aquí en más, estas son las únicas funciones que analizaremos, expondremos sus resultados y graficaremos.

### 4.1 Método de Euler hacia adelante

Como primer método de discretización, se utilizó el denominado *Euler hacia adelante*, o método de la tangente, en el que se aproxima la derivada en un punto como el cociente de la diferencia entre dos pasos consecutivos  $y_{k+1}$  e  $y_k$  y el paso  $h$ . Esto es:

$$y'(t_k) \approx \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} \Rightarrow y(t_{k+1}) \approx y(t_k) + hy'(t_k)$$

De esta manera, conociendo la condición inicial  $y(t_0)$ , junto con la ecuación diferencial que nos relaciona la función  $y$  con su derivada primera, podemos obtener el valor  $y(t_{k+1})$  a partir de  $y(t_k)$ . Esto es posible justamente debido a la posibilidad de plantear el problema como un PVI, que nos indica  $\forall t$  hacia dónde se desplazará la curva  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  (solución del problema) en un instante  $t$  dado <sup>1</sup>.

Se generó el código en *Octave*<sup>2</sup> del método de Euler hacia adelante

<sup>1</sup> Nuevamente, esta es solo una idea intuitiva diseñada para guiar al lector e idealmente facilitar la comprensión del método de Euler.

<sup>2</sup> Todos los códigos utilizados en la práctica pueden encontrarse en el siguiente enlace: <https://github.com/MaxiUstria/octaveFormulas>

básandonos en el siguiente algoritmo (para un intervalo  $[t_0, t_f]$ ):

Dados  $t_0$ ;  $y(t_0) = y_0$ ;  $i = 0$ ;  $h$  :

```
while  $t_i < t_f$  do  
     $y_{i+1} = y_i + h * y'_i$   
     $t_{i+1} = t_i + h$   
     $i = i + 1$   
end while
```

Puede verse que, definidos los valores iniciales, el algoritmo es esencialmente un bucle en el cual, mientras no se alcance  $t_f$ : se le asigna al elemento  $y_{i+1}$  su respectiva estimación según el método; se le aumenta a la variable temporal el paso  $h$  elegido; y se aumenta en 1 el índice  $i$ .

Para seguir con el análisis del algoritmo es esencial dar un par de nociones básicas [5]. Se define  $T(n)$  al tiempo de ejecución de un programa que tiene una entrada de tamaño  $n$ . Luego,  $T(n)$  es  $O(f(n))$  (orden  $f(n)$ ) si existe una función  $f(n)$  tal que el tiempo de ejecución del programa esta acotado superiormente por la función, es decir, existen  $n_0$  y  $c$  constantes tales que para todo  $n \geq n_0$ ,  $T(n) \leq cf(n)$ . Por último, vale la pena destacar que un algoritmo se considera eficiente si su tiempo de ejecución es de orden polinomial (si es posible).

La idea es que el algoritmo (aplicado a nuestro caso de estudio en el que  $y$  es un vector de cuatro coordenadas) genere una matriz de cinco columnas  $(t, u, v, p, q)$ , y  $N = \frac{t_f - t_0}{h}$  filas, dando un total de  $5N$  entradas. En cuanto al tiempo de ejecución del mismo, es trivial ver que todas las líneas de código dentro del *while* son asignaciones simples que se ejecutan en un tiempo constante, por lo cual el tiempo de ejecución del algoritmo está dado por cuántas veces se entra al mismo. El bucle efectivamente termina luego de  $N$  pasos, ejecutando cada paso en un tiempo constante. Por lo tanto, la duración total de ejecución dependerá linealmente con la cantidad  $N$  de valores de  $t_i$  que se consideren en el intervalo, es decir, el tiempo de ejecución  $T(N)$  es  $O(N)$ .

#### 4.2 Método de diferencia centrada

Como segundo método numérico utilizaremos la *diferencia centrada*, o método del punto medio. Es esencialmente el mismo que *Euler hacia adelante*, pero tomando como aproximación de la derivada en  $y_k$  el cociente entre la diferencia del punto siguiente y el anterior, sobre  $2h$ . Es decir:

$$y'(t_k) \approx \frac{y(t_{k+1}) - y(t_{k-1}))}{2h} \Rightarrow y(t_{k+1}) \approx y(t_{k-1}) + 2hy'(t_k)$$

Es claro que para aplicar esta iteración precisamos los dos valores inmediatamente anteriores al que queremos calcular. Es por esto que para calcular  $y_1$  usamos *Euler hacia adelante*, y una vez que tenemos  $y_0$  (por condición inicial) e  $y_1$ , estamos en condiciones de proceder normalmente con el método.

El algoritmo del método del punto medio es el siguiente:

Dados  $t_0$ ;  $y(t_0) = y_0$ ;  $i = 1$ ;  $h$  :

```

 $y_1 = y_0 + h * y'_0$ 
while  $t_i < t_f$  do
     $y_{i+1} = y_{i-1} + 2h * y'_i$ 
     $t_{i+1} = t_i + h$ 
     $i = i + 1$ 
end while

```

Se observa que tanto el algoritmo como el análisis de rendimiento son completamente análogos al caso anterior.

## 5 Resultados obtenidos

A modo de evaluación de la eficiencia de cada método, se utilizó la función *lsode* del software *Octave*, la cual resuelve la ecuación diferencial dada con métodos numéricos muy superiores que la aproximación por diferencia hacia adelante o el método del punto medio<sup>3</sup>. Es por esto que se tomó esto como la solución de referencia, a partir de la cual se calculó el error absoluto ( $\Delta_x$ ) y relativo ( $\delta_x$ ) de cada vector  $u(t_k)$  y  $v(t_k)$ :  $\Delta_x = \|x - y\|$ ,  $\delta_x = \frac{\|x - y\|}{\|x\|}$  siendo  $x$  el valor de referencia e  $y$  el obtenido numéricamente. De todas formas, solo se analizó el error relativo, ya que como puede observarse, el error absoluto depende fuertemente del número de entradas del vector, y al tomar un paso de menor valor, el número de entradas del vector aumenta proporcionalmente. Es por esto que el error absoluto podría dar mayor aunque estemos eligiendo un paso más pequeño, lo cual puede ser poco intuitivo.

Además, se incluye un valor de *error promedio* ( $E$ ), en el cual para cada punto calculado  $u_k$  y  $v_k$  (solución de la ecuación diferencial en  $t_k$ ), se le calcula la distancia (valor absoluto de la resta) con el punto correspondiente obtenido con

<sup>3</sup> Por más información sobre la función *lsode*: <https://octave.sourceforge.io/octave/function/lsode.html>

*lsode*. Esto se realiza para todo  $t \in t_0, t_1, \dots, t_f$  y a este vector de errores se le calcula el promedio. En pocas palabras, se obtiene un promedio general de la distancia entre la solución obtenida y la dada por *lsode*.

Para el tiempo de ejecución, se corrió el código varias veces y se hizo un promedio. Solamente se expresa el resultado final.

Para todos estos cálculos, se utilizó como condición inicial  $y_0 = (-9, -8, 3, 2)$  y como intervalo temporal  $t \in [0, 2]$  (únicamente por un tema de visualización gráfica, con otros valores iniciales y valores de  $t$  los resultados son comparativamente similares). En la figura 4 vemos la geodésica superpuesta a la superficie en tres dimensiones, mientras que en la figura 5 se graficó y amplió  $v(t)$  en función de  $u(t)$  para visualizar la distancia entre las soluciones.

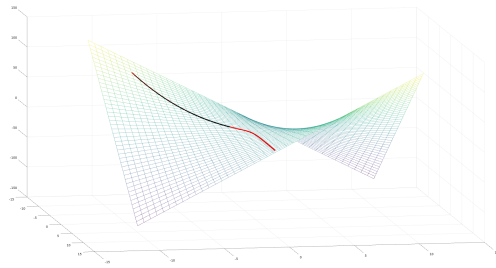


Fig. 4. Paraboloide hiperbólico con la geodésica aproximada mediante *Diferencia Centrada*.

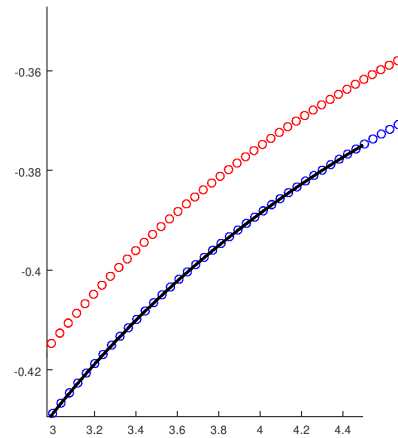


Fig. 5.  $v(t)$  en función de  $u(t)$ . En rojo *Euler hacia adelante*, en azul *Diferencia centrada* y en negro la solución obtenida con *lsode*.

En las tablas 1 y 2 mostradas a continuación se detallan, según el paso  $h$  elegido, los distintos valores obtenidos del error promedio, el error relativo y el tiempo de ejecución.

**Tabla 1: Errores relativos**

<b>h</b>	<b>tiempo (s)</b>	$\delta_u^{euler}$	$\delta_u^{difCentral}$	$\delta_v^{euler}$	$\delta_v^{difCentral}$
0.01	0.124843	0.048847	0.0010881	0.011559	0.0080927
0.001	0.506277	0.0049144	$7.6801 \times 10^{-6}$	0.0011661	$4.9484 \times 10^{-6}$
0.0001	4.33316	$4.9342 \times 10^{-4}$	$2.5553 \times 10^{-6}$	$1.1698 \times 10^{-4}$	$6.1501 \times 10^{-7}$
0.00001	34.7684	$5.1603 \times 10^{-5}$	$2.5399 \times 10^{-6}$	$1.2148 \times 10^{-5}$	$6.0804 \times 10^{-7}$

**Tabla 2: Errores promedio**

<b>h</b>	<b>tiempo (s)</b>	$E_u^{euler}$	$E_u^{DifCentral}$	$E_v^{euler}$	$E_v^{DifCentral}$
0.01	0.124843	0.61723	0.077698	0.32810	0.059953
0.001	0.506277	0.19866	0.0070076	0.10486	0.0053280
0.0001	4.33316	0.062973	0.0053531	0.033323	0.0029738
0.00001	34.7684	0.020569	0.0053329	0.010920	0.0029393

Observando los valores en las tablas, se deduce fácilmente que el error es cada vez menor a medida que disminuimos el valor del paso, tal y como se esperaba, aunque disminuye cada vez más lentamente cuando  $h$  es cada vez más chico. Esto puede deberse principalmente a dos cosas: en primer lugar, a un literal estancamiento del error, en el que la solución se acerca tan lentamente al valor real que es prácticamente indistinguible; o también a que la solución dada por *lsode* ya no está tanto más cerca de la real respecto a la calculada con los métodos aquí presentados, por lo que el concepto de "error" pierde su significado original. No es necesario aclarar que el método del punto medio arrojó resultados muy superiores: eligiendo este método y un paso  $h$  del orden de los milésimos, podemos conseguir errores relativos del orden de los millonésimos (mil veces menor que el error obtenido con *Euler hacia adelante*) en tiempos de ejecución menores a un segundo.

Se aclara que se consideró el error debido al almacenamiento limitado de la máquina, pero su influencia se consideró insignificante comparada con el error debido a la aproximación de la derivada por un cociente incremental. (*Octave* utiliza una representación por punto flotante con 53 bits para la mantisa y 11 para el exponente de 2) [3].

## 6 Conclusiones

A lo largo de este trabajo, debimos definir conceptos importantes relacionados a curvas que minimizan distancias localmente: las geodésicas. Para ello, nos valimos de herramientas teóricas de geometría de curvas y superficies, además de una importante cuota de intuición. La mayor parte del trabajo se basó en entender en profundidad las herramientas numéricas (y a veces analíticas) a utilizar, generación del algoritmo apropiado y un ordenado seguimiento del mismo.

Los ejemplos se encargaron de aportar intuición y familiaridad con las geodésicas, y eso fue crucial para un mejor aprovechamiento y entendimiento de lo realizado posteriormente: primero, se mostró que existen superficies en las que puede resolverse analíticamente su sistema de ecuaciones diferenciales y así obtener sus geodésicas. Luego de haberse afianzado un poco más a la idea, se exhibió el caso de la esfera, en el que era posible intuir las geodésicas y luego comprobar que verificaban las ecuaciones diferenciales.

Para la resolución de las ecuaciones diferenciales, se destaca la excelente aproximación que se consigue utilizando un paso suficientemente pequeño, sin exagerar demasiado el tiempo de ejecución del código: en menos de un minuto, puede conseguirse una geodésica con un error relativo del orden de los millonésimos. Sobre esto, a medida que conseguimos soluciones cada vez más precisas, sería conveniente utilizar un método que calcule el error independientemente de lo que consideramos la solución de referencia (la obtenida mediante *lsode*), ya que al ir aumentando la precisión no podemos decir con certeza que el método provisto por *Octave* pueda considerarse "exacto" con respecto al calculado.

Para un futuro, y para errores cada vez menores, será fundamental contar con un método que aproxime mejor la derivada de una función. En otras palabras, utilizar un método iterativo que cuente con una base matemática posiblemente más compleja que un desarrollo de Taylor de orden 1. Sin embargo, consideramos la aproximación actual muy buena, dada la simplicidad con la que se deducen y construyen los métodos. Además, se pudo haber disminuido el orden del error aplicando *Extrapolación de Richardson*, en el cual se combinan convenientemente dos expresiones de la aproximación de la derivada evaluadas en  $h$  y  $\frac{h}{q}$ ,  $q \in \mathbb{R}$ , logrando que el error decaiga más rápidamente a 0 con  $h$  [7].

En conclusión, este trabajo significó una buena introducción a importantes

prácticas de aproximación numérica, estimación y reducción del error, resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y elección de parámetros para una relación óptima entre precisión y eficiencia.

## References

- [1] Manfredo Perdigao do Carmo and Ketí Tenenblat. *Manfredo P. Do Carmo Selected Papers*. Springer, 2012.
- [2] Earl A. Coddington, Norman Levinson, and T. Teichmann. Theory of ordinary differential equations. *Physics Today*, 9(2), 1956.
- [3] J.W. Eaton, D. Bateman, and S. Hauberg. *The Gnu Octave 4.0 Reference Manual 1/2: Free Your Numbers*. Samurai Media Limited, 2015.
- [4] Gabino González-Diez, Christos Kourouniotis, William J. Harvey, and Frederick P. Gardiner. *Geometry of Riemann Surfaces*. Number Vol. 368 in London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2010.
- [5] Jon Kleinberg and Éva Tardos. *Algorithm Design: Pearson New International Edition*. Pearson, 2014.
- [6] N.M. ( 1 ) Patrikalakis and T. ( 2 ) Maekawa. *Shape interrogation for computer aided design and manufacturing*. Springer Berlin Heidelberg, (1)Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering, 2010.
- [7] L. F. Richardson. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 210:307–357, 1911.