TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

EINFÜHRUNG IN DIE NUMERISCHE BERECHNUNG ELEKTROMAGNETISCHER FELDER

Vorlesung 4: Lösen von Differentialgleichungen

Sebastian Schöps

ÜBERSICHT

1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

2 Lösung im Frequenzbereich

3 Diskretisierung im Zeitbereich

4 Gaußelimination und LU-Zerlegung

5 Abschließender Kommentar zur Implementierung

ÜBERSICHT

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

- Gewöhnliche Differentialgleichungen (kurz: gDGLn) sind Gleichungssysteme vom Typ

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$$

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

- Gewöhnliche Differentialgleichungen (kurz: gDGLn) sind Gleichungssysteme vom Typ

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$$

- gesuchte Funktion $\mathbf{x} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ ist implizit via Ableitung definiert

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

- Gewöhnliche Differentialgleichungen (kurz: gDGLn) sind Gleichungssysteme vom Typ

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$$

- gesuchte Funktion $\mathbf{x} : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^n$ ist implizit via Ableitung definiert
- gegebene rechte Seite $\mathbf{f} : \mathcal{J} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, z.B.

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}\ \cos(\omega t)$$

  mit einer Matrix $\mathbf{K}$, Vektor $\mathbf{r}$ und Kreisfrequenz ω
- wenn $\mathbf{f}$ nicht von t abhängt, dann nennt man das Problem autonom

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

- Gewöhnliche Differentialgleichungen (kurz: gDGLn) sind Gleichungssysteme vom Typ

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$$

- gesuchte Funktion $\mathbf{x} : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^n$ ist implizit via Ableitung definiert
- gegebene rechte Seite $\mathbf{f} : \mathcal{J} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, z.B.

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}\ \cos(\omega t)$$

  mit einer Matrix $\mathbf{K}$, Vektor $\mathbf{r}$ und Kreisfrequenz ω

- wenn $\mathbf{f}$ nicht von t abhängt, dann nennt man das Problem autonom
- $\mathbf{f}$ schreibt jedem Tupel $(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{J} \times \mathbb{R}^n$ die Ableitungen $\mathbf{x}'(t)$ vor

KOMPONENTENWEISE DARSTELLUNG

- Komponentenschreibweise mit $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^\top$ folgt

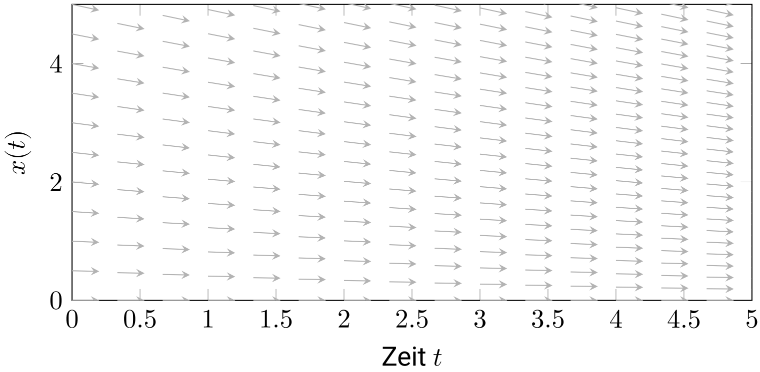
$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\
x_2'(t) &= f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\
&\vdots \\
x_n'(t) &= f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).
\end{aligned}$$

- Eindeutige Lösung erfordert Anfangswert (AW) an Stelle $t_0 \in \mathcal{I}$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

- Man nennt das Problem dann Anfangswertproblem (kurz: AWP)

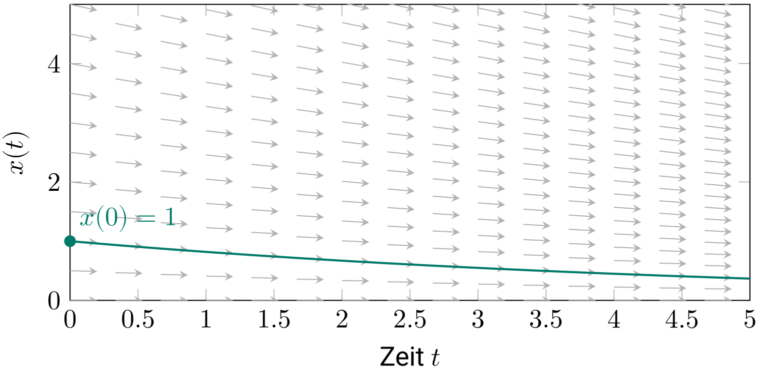
SKALARES BEISPIEL ZU STARTWERTEN



Dahlquists Gleichung

$$x'(t) = -kx(t) \qquad \text{(hier: } k = 0.2\text{)}$$

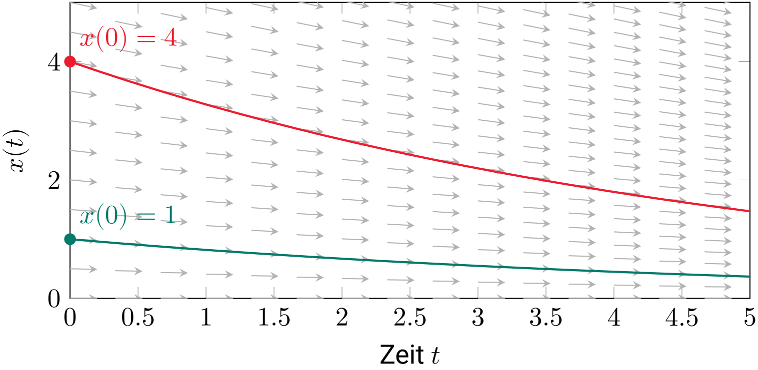
SKALARES BEISPIEL ZU STARTWERTEN



Dahlquists Gleichung

$$x'(t) = -kx(t) \qquad \text{(hier: } k = 0.2\text{)}$$

SKALARES BEISPIEL ZU STARTWERTEN



Dahlquists Gleichung

$$x'(t) = -kx(t) \qquad \text{(hier: } k = 0.2\text{)}$$

LINEARE UND SKALARE GDGLN

- Wir betrachten gDGL vom Typ

$$x'(t) = f(t, x) = -k \cdot x(t) + r(t) \qquad \text{mit} \qquad x(t_0) = x_0$$

wobei $k \in \mathbb{R}$ und r stetig in t, dann ist die Lösung (Beweis: Nachrechnen!)

$$x(t) = e^{-k(t-t_0)} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{k(s-t_0)} r(s) \, \mathrm{d}s \right)$$

bzw. für konstantes r

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{r}{k} \right) e^{-k(t-t_0)} + \frac{r}{k}.$$

LINEARE UND VEKTORWERTIGE GDGL

- Verallgemeinerung auf Systeme mit n-Gleichungen

$$\mathbf{x}'(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t) \qquad \text{wobei} \quad \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{und} \quad \mathrm{r} \text{ stetig in } t$$

LINEARE UND VEKTORWERTIGE GDGL

- Verallgemeinerung auf Systeme mit n-Gleichungen

$$\mathbf{x}'(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t) \qquad \text{wobei} \quad \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{und} \quad \mathbf{r} \text{ stetig in } t$$

- Wenn $\mathbf{K}$ normal ist, d.h. $\mathbf{K}^\top\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{K}^\top$, dann kann $\mathbf{K}$ unitär diagonalisiert werden

$$\mathbf{K} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{V} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

LINEARE UND VEKTORWERTIGE GDGL

- Verallgemeinerung auf Systeme mit n-Gleichungen

$$\mathbf{x}'(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t) \qquad \text{wobei} \quad \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{und} \quad \mathrm{r} \text{ stetig in } t$$

- Wenn $\mathbf{K}$ normal ist, d.h. $\mathbf{K}^\top\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{K}^\top$, dann kann $\mathbf{K}$ unitär diagonalisiert werden

$$\mathbf{K} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{V} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

- Das System entkoppelt in n einzelne Gleichungen

$$z_i' = -\lambda_i z_i + [\mathbf{V}r(t)]_i \qquad i = 1, \dots, n,$$

wobei die Unbekannte $\mathbf{z}(t) := \mathbf{V}\mathbf{x}(t)$ entsprechend transformiert ist

ANMERKUNGEN (I)

- eine gDGL hoher Ordnung kann man immer als ein System erster Ordnung umschreiben

$$x_1''(t) = f_1(t, x_1(t), x_1'(t)) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= f_1(t, x_1(t), x_2(t)) \end{aligned}$$

- ein nicht-autonomes System $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ kann mit $x_{n+1} := t$ und $g_{n+1} := 1$ autonomisiert werden, weil $x_{n+1}' = 1$ ist

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= g_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), x_{n+1}(t)) \\ x_2'(t) &= g_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), x_{n+1}(t)) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= g_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), x_{n+1}(t)) \\ x_{n+1}'(t) &= 1 \end{aligned}$$

ANMERKUNGEN (II)

- das gDGL-AWP kann als Integration umgeschrieben werden

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}\left(s, \mathbf{x}(s)\right) \mathrm{d}s.$$

  Man nennt daher numerische Lösungsverfahren für das gDGL-AWP auch (Zeit-)Integratoren.

- Oft „Massen"-Matrix auf der linken Seite:

$$\mathbf{M}\,\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)),$$

  und im Fall einer affin-linearen Funktion $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = -\mathbf{K}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t)$

$$\mathbf{M}\,\mathbf{x}'(t) + \mathbf{K}\,\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t)$$

  wobei $\mathbf{M}$ nicht vollen Rang haben muss (man spricht von Differential-algebraischen Gleichungen).

ÜBERSICHT

FREQUENZBEREICH (I)

- Anregung oft mit (Ko-)Sinus, z.B. aufgrund von Wechselstrom.
- Beschreibung durch Amplitude, Kreisfrequenz und Phasenwinkel.
- Betrachte die skalare lineare Gleichung

$$x'(t) = f(t, x) := -k \cdot x(t) + r(t)$$

mit Startwert $x(0) = x_0$, wobei $k > 0$ und Anregung

$$r(t) = \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}.$$

FREQUENZBEREICH (I)

- Anregung oft mit (Ko-)Sinus, z.B. aufgrund von Wechselstrom.
- Beschreibung durch Amplitude, Kreisfrequenz und Phasenwinkel.
- Betrachte die skalare lineare Gleichung

$$x'(t) = f(t, x) := -k \cdot x(t) + r(t)$$

mit Startwert $x(0) = x_0$, wobei $k > 0$ und Anregung

$$r(t) = \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}.$$

- Lösung

$$x(t) = \mathrm{e}^{-kt}\left(x_0 - \frac{k}{k^2+\omega^2}\right) + \frac{k\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)}{k^2+\omega^2}.$$

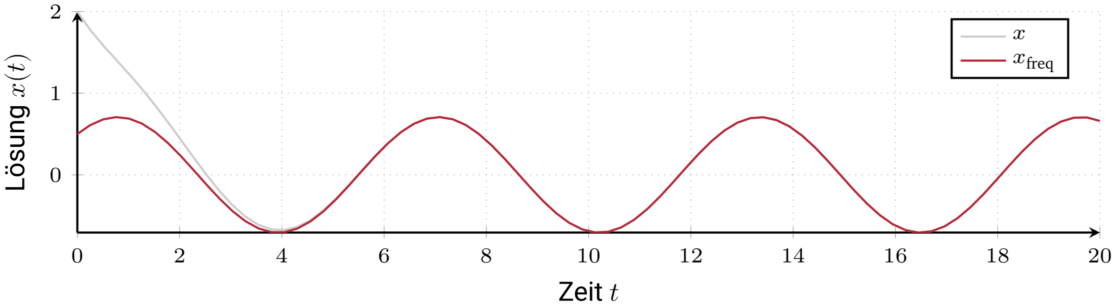
- Zwei Teile: Dämpung des Startwerts und Schwingung

FREQUENZBEREICH (II)

- Einsetzen des Phasors $\underline{x}$ ergibt

$$x_{\text{freq}}(t) = \mathrm{e}^{-kt}\left(x_0 - \frac{k}{k^2+\omega^2}\right) + \frac{k\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)}{k^2+\omega^2}.$$

- Vergleich von Zeit- und Frequenzbereich für $k = \omega = 1$ und $x(0) = 2$



FREQUENZBEREICH (III)

- Eingeschwungenen: setze $x(t)$ als Schwingung mit unbekanntem Phasor $\underline{x} := \hat{x}\mathrm{e}^{j\vartheta}$ an

$$x_{\text{freq}}(t) = \operatorname{Re}\left\{\underline{x}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\},$$

FREQUENZBEREICH (III)

- Eingeschwungenen: setze $x(t)$ als Schwingung mit unbekanntem Phasor $\underline{x} := \hat{x}\mathrm{e}^{j\vartheta}$ an

$$x_{\text{freq}}(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{x}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\},$$

- zeitliche Ableitung von $x(t)$ lassen sich als Realteile darstellen

$$x'_{\text{freq}}(t) = \mathrm{Re}\left\{j\omega\underline{x}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} \quad \text{und} \quad \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}.$$

FREQUENZBEREICH (III)

- Eingeschwungenen: setze $x(t)$ als Schwingung mit unbekanntem Phasor $\underline{x} := \hat{x}\mathrm{e}^{j\vartheta}$ an

$$x_{\text{freq}}(t) = \operatorname{Re}\left\{\underline{x}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\},$$

- zeitliche Ableitung von $x(t)$ lassen sich als Realteile darstellen

$$x'_{\text{freq}}(t) = \operatorname{Re}\left\{j\omega\underline{x}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} \quad \text{und} \quad \cos(\omega t) = \operatorname{Re}\left\{\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}.$$

- Einsetzen in die Differentialgleichung $x'(t) + k \cdot x(t) - r(t) = 0$ liefert

$$\operatorname{Re}\left\{(j\omega\underline{x} + k\underline{x} - 1)\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} = 0$$

FREQUENZBEREICH (III)

- Eingeschwungenen: setze $x(t)$ als Schwingung mit unbekanntem Phasor $\underline{x} := \hat{x}\mathrm{e}^{j\vartheta}$ an

$$x_{\text{freq}}(t) = \operatorname{Re}\left\{\underline{x}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\},$$

- zeitliche Ableitung von $x(t)$ lassen sich als Realteile darstellen

$$x'_{\text{freq}}(t) = \operatorname{Re}\left\{j\omega\underline{x}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} \quad \text{und} \quad \cos(\omega t) = \operatorname{Re}\left\{\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}.$$

- Einsetzen in die Differentialgleichung $x'(t) + k \cdot x(t) - r(t) = 0$ liefert

$$\operatorname{Re}\left\{(j\omega\underline{x} + k\underline{x} - 1)\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} = 0$$

- Lösung durch Umstellen der Gleichung

$$j\omega\underline{x} + k\underline{x} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \underline{x} = \frac{1}{k + j\omega}.$$

SYSTEME IM FREQUENZBEREICH

- vektorwertiges Problem (inkl. algebraischen Gleichungen)

$$\mathbf{M}\mathbf{x}'(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t) \qquad \text{mit } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

SYSTEME IM FREQUENZBEREICH

- vektorwertiges Problem (inkl. algebraischen Gleichungen)

$$\mathbf{M}\mathbf{x}'(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t) \qquad \text{mit } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

- Frequenzbereichsannahme $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{freq}}(t)$

$$\operatorname{Re}\left\{(\mathbf{M}j\omega\underline{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{r}})\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} = \mathbf{0}$$

SYSTEME IM FREQUENZBEREICH

- vektorwertiges Problem (inkl. algebraischen Gleichungen)

$$\mathbf{M}\mathbf{x}'(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t) \qquad \text{mit } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

- Frequenzbereichsannahme $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\mathrm{freq}}(t)$

$$\mathrm{Re}\left\{(\mathbf{M}j\omega\underline{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{r}})\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} = \mathbf{0}$$

- Auflösen nach $\underline{\mathbf{x}}$ ergibt

$$(\mathbf{M}j\omega + \mathbf{K})\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{r}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\mathbf{x}} = (\mathbf{M}j\omega + \mathbf{K})^{-1}\,\underline{\mathbf{r}}$$

SYSTEME IM FREQUENZBEREICH

- vektorwertiges Problem (inkl. algebraischen Gleichungen)

$$\mathbf{M}\mathbf{x}'(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t) \qquad \text{mit } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

- Frequenzbereichsannahme $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{freq}}(t)$

$$\text{Re}\left\{(\mathbf{M}j\omega\underline{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{r}})\text{e}^{j\omega t}\right\} = \mathbf{0}$$

- Auflösen nach $\underline{\mathbf{x}}$ ergibt

$$(\mathbf{M}j\omega + \mathbf{K})\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{r}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\mathbf{x}} = (\mathbf{M}j\omega + \mathbf{K})^{-1}\,\underline{\mathbf{r}}$$

- Rekonstruktion der Zeitbereichslösung

$$\mathbf{x}_{\text{freq}}(t) = \text{Re}\left\{\underline{\mathbf{x}}\text{e}^{j\omega t}\right\}$$

ÜBERSICHT

DIFFERENZENQUOTIENT

- Die erste Ableitung einer Funktion

$$x'(t_i) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_i) = \lim_{h\to 0} \frac{x(t_i+h)-x(t_i)}{h}$$

kann durch (finiten) Differenzenquotienten angenähert werden, z.B.

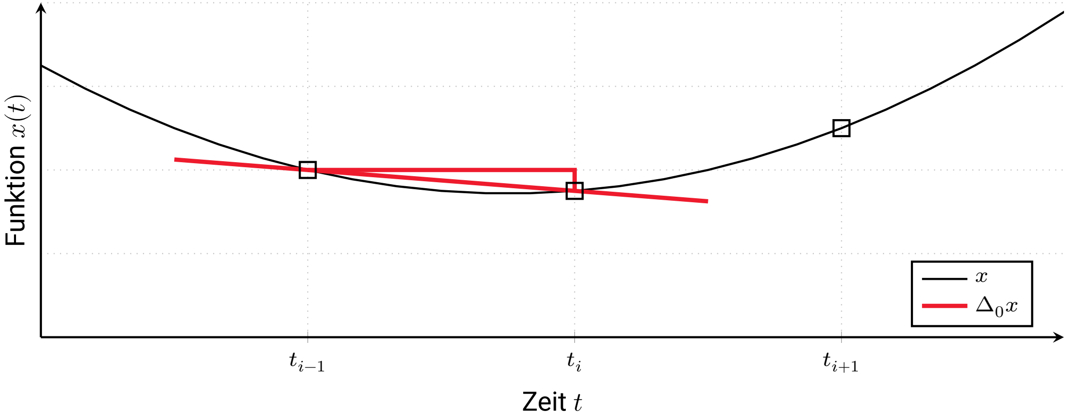
$$\Delta_0 x(t_i,h) := \frac{x(t_i)-x(t_{i-1})}{h}$$ („linksseitig“ oder „rückwärts“)

$$\Delta_1 x(t_i,h) := \frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{h}$$ („rechtsseitig“ oder „vorwärts“)

$$\Delta_2 x(t_i,h) := \frac{x(t_{i+1})-x(t_{i-1})}{2h}$$ („zentral“)

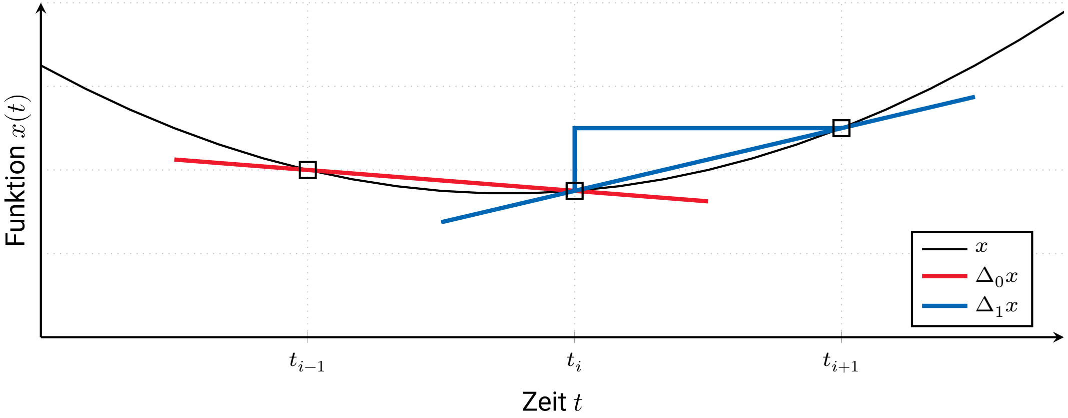
mit $t_{i\pm 1} = t_i \pm h$ und fester Schrittweite $h > 0$

DIFFERENZENQUOTIENT: VISUALISIERUNG



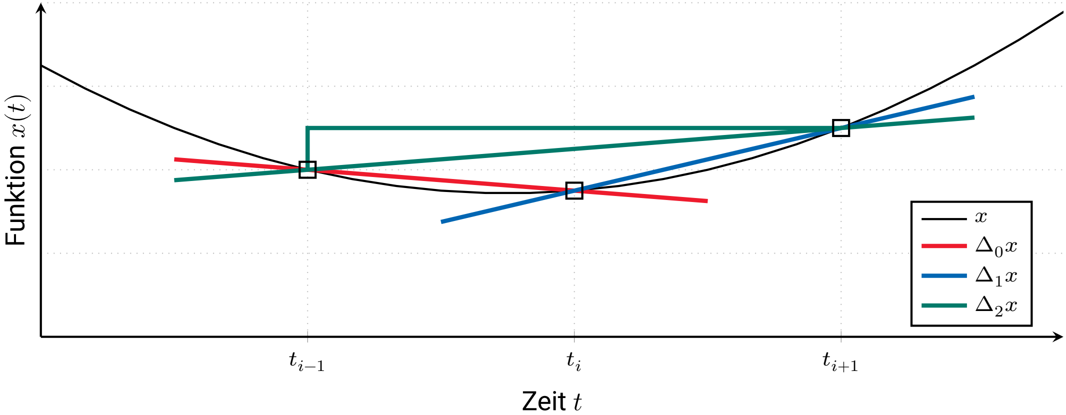
Differenzenquotienten an der Stelle $t_1 = 1$ mit $t_{i-1} = t_i - h$ bzw. $t_{i+1} = t_i + h$, wobei h die Gitterschrittweite bezeichnet.

DIFFERENZENQUOTIENT: VISUALISIERUNG



Differenzenquotienten an der Stelle $t_1 = 1$ mit $t_{i-1} = t_i - h$ bzw. $t_{i+1} = t_i + h$, wobei h die Gitterschrittweite bezeichnet.

DIFFERENZENQUOTIENT: VISUALISIERUNG



Differenzenquotienten an der Stelle $t_1 = 1$ mit $t_{i-1} = t_i - h$ bzw. $t_{i+1} = t_i + h$, wobei h die Gitterschrittweite bezeichnet.

DIFFERENZENQUOTIENT: KONVERGENZ

- Die Genauigkeit der Näherung, z.B. für

$$\Delta_2 x(t_i, h) := \frac{x(t_{i+1}) - x(t_{i-1})}{2h}$$

kann mittels Taylor nachgerechnet werden:

$$x(t_{i+1}) = x(t_i + h) = x(t_i) + x'(t_i) \cdot h + \frac{x''(t_i)}{2} \cdot h^2 + \frac{x'''(t_i)}{6} \cdot h^3 + \mathcal{O}(h^4)$$
$$x(t_{i-1}) = x(t_i - h) = x(t_i) - x'(t_i) \cdot h + \frac{x''(t_i)}{2} \cdot h^2 - \frac{x'''(t_i)}{6} \cdot h^3 + \mathcal{O}(h^4)$$

- Subtraktion der beiden Taylor-Entwicklungen ergibt

$$x'(t_i) = \frac{x(t_i + h) - x(t_i - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2).$$

DIFFERENZENQUOTIENT: KONVERGENZ

- Die Genauigkeit der Näherung, z.B. für

$$\Delta_2 x(t_i, h) := \frac{x(t_{i+1}) - x(t_{i-1})}{2h}$$

kann mittels Taylor nachgerechnet werden:

$$x(t_{i+1}) = x(t_i + h) = x(t_i) + x'(t_i) \cdot h + \frac{x''(t_i)}{2} \cdot h^2 + \frac{x'''(t_i)}{6} \cdot h^3 + \mathcal{O}(h^4)$$
$$x(t_{i-1}) = x(t_i - h) = x(t_i) - x'(t_i) \cdot h + \frac{x''(t_i)}{2} \cdot h^2 - \frac{x'''(t_i)}{6} \cdot h^3 + \mathcal{O}(h^4)$$

- Subtraktion der beiden Taylor-Entwicklungen ergibt

$$x'(t_i) = \frac{x(t_i + h) - x(t_i - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2).$$

EULER-VERFAHREN

- **Ziel**: Annäherung von $x_i \approx x(t_i)$ mit Zeitschrittverfahren für

$$x'(t) = f(t, x) := -k \cdot x(t) + r(t) \qquad \text{mit } x(t_0) = x_0$$

EULER-VERFAHREN

- **Ziel**: Annäherung von $x_i \approx x(t_i)$ mit Zeitschrittverfahren für

$$x'(t) = f(t,x) := -k \cdot x(t) + r(t) \qquad \text{mit } x(t_0) = x_0$$

- Linksseitiger Quotient Δ_0:

implizites Euler-Verfahren

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{h} = f(t_i, x_i) = -k\, x_i + r(t_i)$$

$$\left(\frac{1}{h} + k\right) x_i = \frac{1}{h} x_{i-1} + r(t_i)$$

EULER-VERFAHREN

- **Ziel**: Annäherung von $x_i \approx x(t_i)$ mit Zeitschrittverfahren für

$$x'(t) = f(t,x) := -k \cdot x(t) + r(t) \qquad \text{mit } x(t_0) = x_0$$

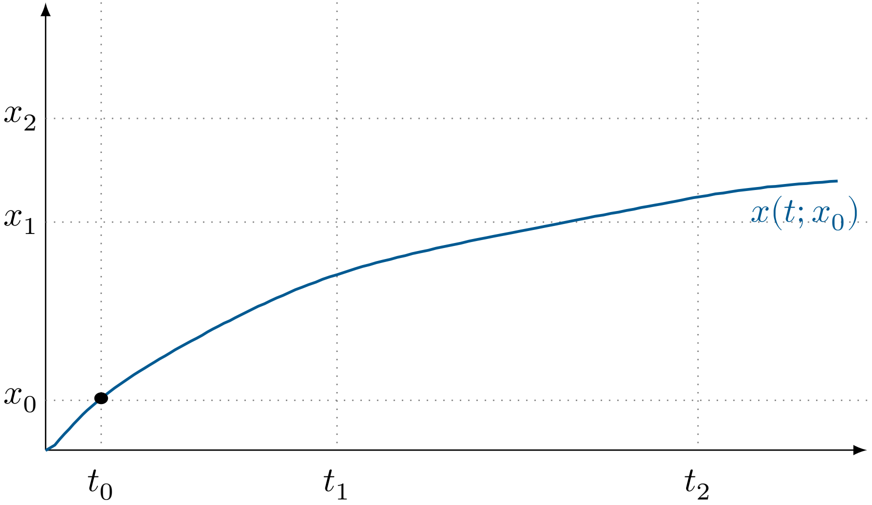
- Linksseitiger Quotient Δ_0: **implizites Euler-Verfahren**

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{h} = f(t_i, x_i) = -k\, x_i + r(t_i)$$
$$\left(\frac{1}{h} + k\right) x_i = \frac{1}{h} x_{i-1} + r(t_i)$$

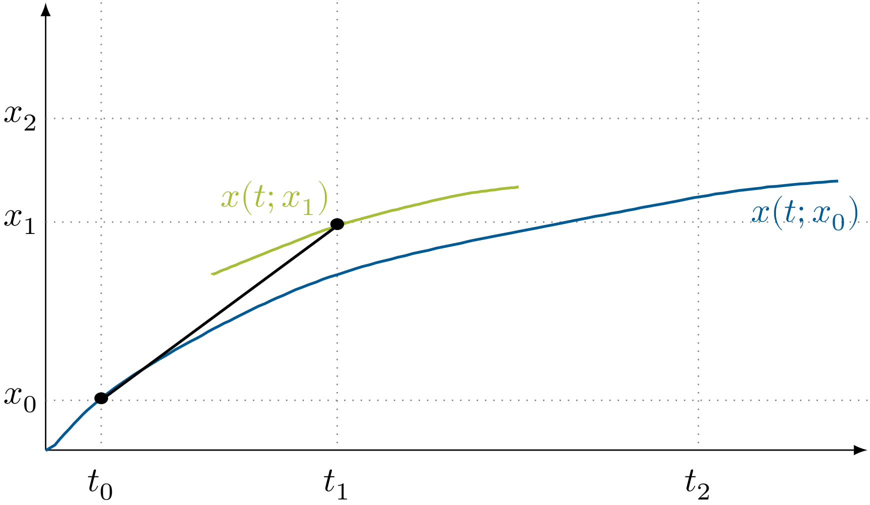
- Rechtsseitiger Quotient Δ_1: **explizites Euler-Verfahren**

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{h} = f(t_i, x_i) = -k\, x_i + r(t_i)$$
$$x_{i+1} = (1 - h\,k)\, x_i + h\, r(t_i)$$

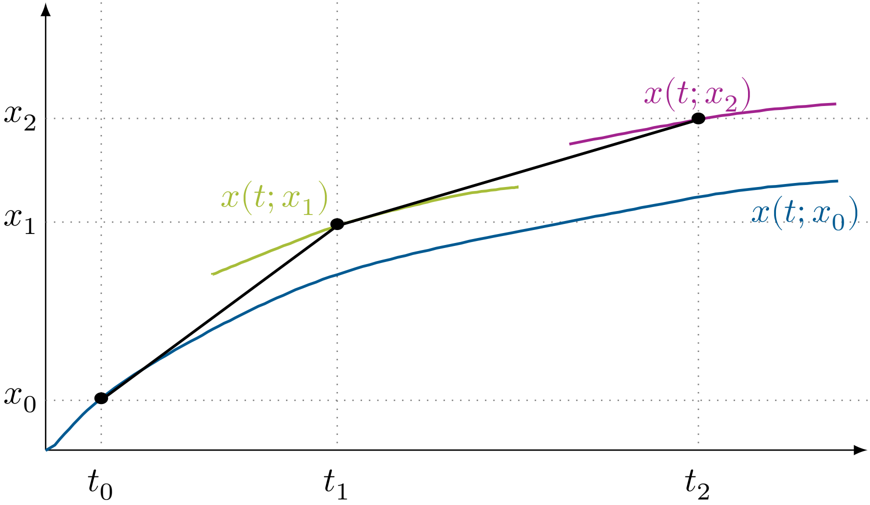
VISUALISIERUNG DES EULER-VERFAHRENS



VISUALISIERUNG DES EULER-VERFAHRENS



VISUALISIERUNG DES EULER-VERFAHRENS



FREQUENZBEREICH VS. EULER

- Die Verfahren lassen sich auf den vektorwertigen Fall verallgemeinern

$$\mathbf{M}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{r}(t) \qquad \text{mit } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

- Frequenzbereichslöser

$$(j\omega\mathbf{M} + \mathbf{K})\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{r}}$$

- Implizites Euler-Verfahren

$$\left(\frac{1}{h}\mathbf{M} + \mathbf{K}\right)\,\mathbf{x}_i = \frac{1}{h}\mathbf{M}\mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{r}(t_i) \qquad \text{for } i = 1 \text{ to } n$$

- Am Ende müssen (nicht-)lineare Gleichungssysteme gelöst werden

ÜBERSICHT

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

- Gegeben ist das Problem: finde $\mathbf{x}$ so dass

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- Die formale Lösung des linearen Gleichungssystems ist

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

wobei $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ notwendig und hinreichend für Existenz der Inversen

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

- Gegeben ist das Problem: finde $\mathbf{x}$ so dass

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- Die formale Lösung des linearen Gleichungssystems ist

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

  wobei $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ notwendig und hinreichend für Existenz der Inversen
- Todsünden der Numerik
  - Berechnung mit der Cramerschen Regel
  - Berechne eine Determinate numerisch
  - Inversion einer Matrix

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

- Gegeben ist das Problem: finde $\mathbf{x}$ so dass

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

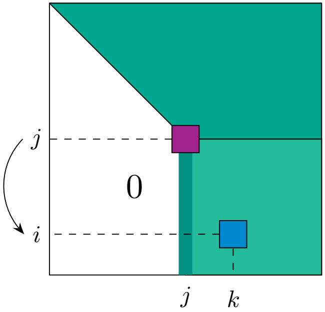
- Die formale Lösung des linearen Gleichungssystems ist

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

  wobei $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ notwendig und hinreichend für Existenz der Inversen
- Todsünden der Numerik
  - Berechnung mit der Cramerschen Regel
  - Berechne eine Determinate numerisch
  - Inversion einer Matrix
- Löse stets ein lineares Gleichungssystem zur rechten Seite $\mathbf{b}$

GAUSSELIMINATION

```
1  for j = 1 to n-1
2   for i = j+1 to n
3    l_ij := a_ij / a_jj;
4    for k = j to n
5     a_ik := a_ik - l_ij a_jk;
6    end
7    b_i := b_i - l_ij b_j;
8   end
9  end
10 for i = n downto 1
11  x_i = 1/a_ii (b_i - sum_{j=i+1}^{n} a_ij x_j);
12 end
```



- Einführung von Eliminationsfaktoren l_{ij}
- Diagonalelemente a_{jj} heißen Pivots (Zeile 3)
- In der Praxis: Pivotsuche, so dass $a_{jj} > 0$

LU-ZERLEGUNG (I)

```
4       for k = j to n
5          a_ik := a_ik - l_ij a_jk ;
6       end
```

- Eliminationsschritt in Zeilen 4-6 in Matrixform

$$\mathbf{A} := \mathbf{N}_{ij}(-l_{ij})\mathbf{A}$$

- Matrix, die Zeile j mit α multipliziert und zu i addiert

$$\mathbf{N}_{ij}(\alpha) := \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & \alpha & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Operation ist umkehrbar, es gilt $\mathbf{I} = \mathbf{N}_{ij}(\alpha) \cdot \mathbf{N}_{ij}(-\alpha)$
- In Schritt j sind $a_{i\,1}, \dots, a_{i\,j-1} = 0$ in Zeilen $i = j, \dots, n$, daher kein Einfluss

LU-ZERLEGUNG (II)

- Definiere **obere Dreiecksmatrix** („upper“)

$$\mathbf{U} := \mathbf{N}_{n\,n-1}(-l_{n\,n-1}) \cdots \mathbf{N}_{2\,1}(-l_{2\,1})\mathbf{A}$$

- und **untere Dreiecksmatrix** („lower“)

$$\mathbf{L} := \mathbf{N}_{2\,1}(l_{2\,1}) \cdots \mathbf{N}_{n\,n-1}(l_{n\,n-1})$$

- Die Gaußelimination ermöglicht eine **Matrixzerlegung**

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

- Naive Berechnung benötigt $\mathcal{O}(n^3)$ Operationen (drei Schleifen von 1 bis n)
- Zerlegung ist eindeutig, Reihenfolge der Operationen aber nicht

VORWÄRTS-/RÜCKWÄRTSSUBSTITUTION

- Löse $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ mit Vorwärtssubstitution, d.h.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \dots & l_{n\,n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

durch $y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j$ für $\quad i = 1 : n$

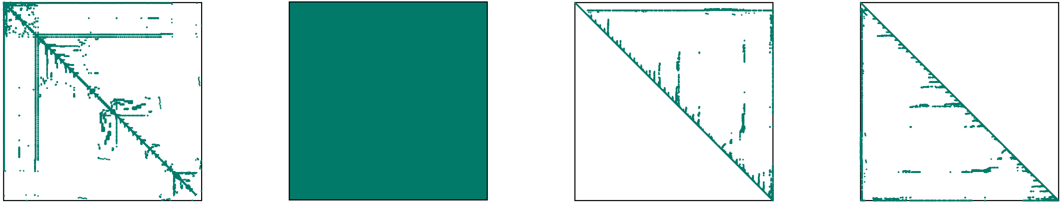
- Löse $\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ mit Rückwärtssubstitution, d.h.

$$\begin{bmatrix} u_{11} & & u_{1\,n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & u_{n\,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

durch $x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right)$ für $\quad i = n : -1 : 1$

BESETZUNGSSTRUKTUR: MATRIX `RAJAT04`

Visualisieren der Einträge, die nicht null sind (englisch: „nonzeros“):



(a) Systemmatrix $\mathbf{A}$ (nnz=8725 nonzeros)

(b) Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ (1014123 nonzeros)

(c) Dreiecksmatrix $\mathbf{U}$ (6322 nonzeros)

(d) Dreiecksmatrix $\mathbf{L}$ (6531 nonzeros)

Abbildung: Besetzungsstruktur der System-Matrix (a), ihrer Inversen (b), sowie der LU-Zerlegung (c,d).
Quelle: `https://sparse.tamu.edu/Rajat/rajat04`

ÜBERSICHT

ZUSAMMENFASSUNG

- Kirchhoffsche Gesetze sind ein Spezialfall der Maxwell Gleichungen

ZUSAMMENFASSUNG

- Kirchhoffsche Gesetze sind ein Spezialfall der Maxwell Gleichungen
- Schaltungen können als gerichtete Graphen interpretiert werden

ZUSAMMENFASSUNG

- Kirchhoffsche Gesetze sind ein Spezialfall der Maxwell Gleichungen
- Schaltungen können als gerichtete Graphen interpretiert werden
- Schaltungstopolgie wird in Netzlisten gespeichert

ZUSAMMENFASSUNG

- Kirchhoffsche Gesetze sind ein Spezialfall der Maxwell Gleichungen
- Schaltungen können als gerichtete Graphen interpretiert werden
- Schaltungstopolgie wird in Netzlisten gespeichert
- aus Netzlisten kann man leicht die Inzidenzmatrix $\mathbf{A}$ aufbauen

ZUSAMMENFASSUNG

- Kirchhoffsche Gesetze sind ein Spezialfall der Maxwell Gleichungen
- Schaltungen können als gerichtete Graphen interpretiert werden
- Schaltungstopolgie wird in Netzlisten gespeichert
- aus Netzlisten kann man leicht die Inzidenzmatrix $\mathbf{A}$ aufbauen
- Matrix $\mathbf{A}$ erlaubt es die Kirchhoffschen Gesetze leicht auszudrücken

ZUSAMMENFASSUNG

- Kirchhoffsche Gesetze sind ein Spezialfall der Maxwell Gleichungen
- Schaltungen können als gerichtete Graphen interpretiert werden
- Schaltungstopolgie wird in Netzlisten gespeichert
- aus Netzlisten kann man leicht die Inzidenzmatrix $\mathbf{A}$ aufbauen
- Matrix $\mathbf{A}$ erlaubt es die Kirchhoffschen Gesetze leicht auszudrücken
- modifizierte Knotenanalyse ist eine sehr effiziente Formulierung

ZUSAMMENFASSUNG

- Kirchhoffsche Gesetze sind ein Spezialfall der Maxwell Gleichungen
- Schaltungen können als gerichtete Graphen interpretiert werden
- Schaltungstopolgie wird in Netzlisten gespeichert
- aus Netzlisten kann man leicht die Inzidenzmatrix $\mathbf{A}$ aufbauen
- Matrix $\mathbf{A}$ erlaubt es die Kirchhoffschen Gesetze leicht auszudrücken
- modifizierte Knotenanalyse ist eine sehr effiziente Formulierung
- Formulierung besteht aus differentiellen und algebraischen Gleichungen

ZUSAMMENFASSUNG

- Kirchhoffsche Gesetze sind ein Spezialfall der Maxwell Gleichungen
- Schaltungen können als gerichtete Graphen interpretiert werden
- Schaltungstopolgie wird in Netzlisten gespeichert
- aus Netzlisten kann man leicht die Inzidenzmatrix $\mathbf{A}$ aufbauen
- Matrix $\mathbf{A}$ erlaubt es die Kirchhoffschen Gesetze leicht auszudrücken
- modifizierte Knotenanalyse ist eine sehr effiziente Formulierung
- Formulierung besteht aus differentiellen und algebraischen Gleichungen
- Zeitintegratoren (z.B. impliziter Euler) sind zur Lösung nötig

ZUSAMMENFASSUNG

- Kirchhoffsche Gesetze sind ein Spezialfall der Maxwell Gleichungen
- Schaltungen können als gerichtete Graphen interpretiert werden
- Schaltungstopolgie wird in Netzlisten gespeichert
- aus Netzlisten kann man leicht die Inzidenzmatrix $\mathbf{A}$ aufbauen
- Matrix $\mathbf{A}$ erlaubt es die Kirchhoffschen Gesetze leicht auszudrücken
- modifizierte Knotenanalyse ist eine sehr effiziente Formulierung
- Formulierung besteht aus differentiellen und algebraischen Gleichungen
- Zeitintegratoren (z.B. impliziter Euler) sind zur Lösung nötig
- in jedem Schritt muss ein (nicht-)lineares Gleichungssystem gelöst werden

PSEUDOCODE SCHALTUNGSSIMULATOR

```
read netlist
set x_0
for i = 1 to #Timesteps
  x_i^1 :=x_{i-1}
  for j = 1 to #Newton
    for k = 1 to #Elements
      get k-th stamp [a_k^j,b_k^j] from x_i^j
      [A^j,b^j]:=[A^j,b^j]+[a_k^j,b_k^j]
    end
    solve A^j x_i^{j+1}=b^j
  end
  store x_i:=x_i^{j+1}
end
```

- Nichtlineare Probleme benötigen zusätzliche Numerik, z.B. das Newton-Verfahren.
- Matrix via Stempel, z.B. $a_k = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} C & -C \\ -C & C \end{bmatrix} = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$