



EINFÜHRUNG IN DIE NUMERISCHE BERECHNUNG ELEKTROMAGNETISCHER FELDER

Vorlesung 5: FIT für E-Statik

Sebastian Schöps

ÜBERSICHT

1

Übertrag: Kapazitätsbegriff

2

Numerische Lösung der Poissongleichung

3

Duale Rechengitter

4

Diskretisierungsmatrizen

5

Kanonische Nummerierung

6

Diskrete Ableitungsoperatoren

ÜBERSICHT

1

Übertrag: Kapazitätsbegriff

2

Numerische Lösung der Poissongleichung

3

Duale Rechengitter

4

Diskretisierungsmatrizen

5

Kanonische Nummerierung

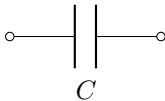
6

Diskrete Ableitungsoperatoren

VERTEILTE ELEMENTE (I)

Bisher:

- Klassische konzentrierte Elemente:



Plattenkondensator

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$$

Kugelkondensator

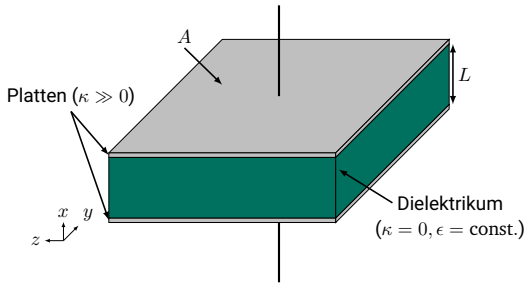
$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$

Verallgemeinerungen:

- Randeffekte
- parasitäre Effekte
- mehrere Platten

VERTEILTE ELEMENTE (II)

Bisher: „DIE Kapazität“ als charakteristische Größe einer Anordnung mit zwei (perfekt) leitfähigen Platten

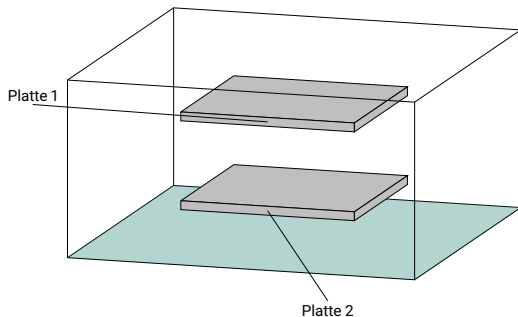


⇒ **Elektrische RB** für die Seiten mit den Platten

⇒ **Magnetische RB** für alle Flächen mit Normalenvektor y - und z -Richtung

VERTEILTE ELEMENTE (III)

Jetzt: Plattenanordnung im Raum mit beliebig wählbaren Randbedingungen



- **Elektrische RB** auf den Platten und der **Grundfläche**
- **Magnetische RB** für die restlichen Seiten des Quaders

VERTEILTE ELEMENTE (IV)

- **Superpositionsprinzip** ist eine Eigenschaft von **linearen Problemen** z.B.

$$-\nabla \cdot (\epsilon(\vec{r}) \nabla \Phi(\vec{r})) = \rho(\vec{r})$$

- Angenommen es gilt: $\rho(\vec{r}) = a\rho_1(\vec{r}) + b\rho_2(\vec{r})$ und $\Phi = 0$ auf dem Rand

⇒ Dann lassen sich **zwei getrennte Probleme** lösen

$$-\nabla \cdot (\epsilon(\vec{r}) \nabla \Phi_1(\vec{r})) = \rho_1(\vec{r})$$

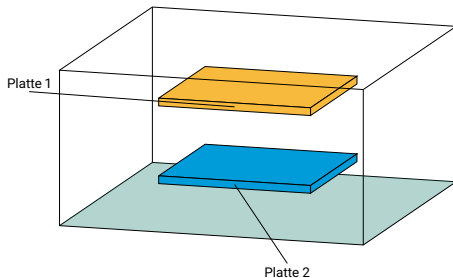
$$-\nabla \cdot (\epsilon(\vec{r}) \nabla \Phi_2(\vec{r})) = \rho_2(\vec{r})$$

- Die Gesamtlösung des ursprünglichen Problems ist

$$\Phi(\vec{r}) = a\Phi_1(\vec{r}) + b\Phi_2(\vec{r})$$

beschreiben

VERTEILTE ELEMENTE (V)



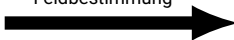
- Berechne Feldverteilungen für verschiedene Spannungsanregungen
- Bestimme Influenz-Ladung auf den Platten aus den Feldverteilungen

$0 = 0V$ auf Grundfläche

$\Phi_1 = 1V$ auf Platte 1

$\Phi_2 = 0V$ auf Platte 2

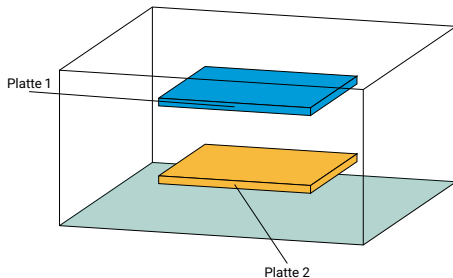
Feldbestimmung



Q_{11} auf Platte 1

Q_{21} auf Platte 2

VERTEILTE ELEMENTE (V)



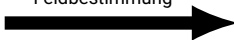
- Berechne Feldverteilungen für verschiedene Spannungsanregungen
- Bestimme Influenz-Ladung auf den Platten aus den Feldverteilungen

$0 = 0V$ auf Grundfläche

$\Phi_1 = 0V$ auf Platte 1

$\Phi_2 = 1V$ auf Platte 2

Feldbestimmung



Q_{12} auf Platte 1

Q_{22} auf Platte 2

VERTEILTE ELEMENTE (VI)

- Nutze das **Superpositionsprinzip**

⇒ Gesamtladung auf Platte 1:

$$Q_1 = Q_{11} + Q_{12} \xrightarrow{Q \sim U} \boxed{Q_1 = c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2}$$

⇒ Gesamtladung auf Platte 2:

$$Q_2 = Q_{21} + Q_{22} \xrightarrow{Q \sim U} \boxed{Q_2 = c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2}$$

- Es ist möglich dies in einem Matrix-Vektor-Produkt zusammenzufassen

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}_{\text{inf}} \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \mathbf{\Phi}$$

- Aber wie bestimmt man nun die **Kapazität**?

VERTEILTE ELEMENTE (VII)

- Addiere/Subtrahiere Potentiale, um Spannungen zu erhalten

$$Q_1 = c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2$$

$$Q_2 = c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2$$

VERTEILTE ELEMENTE (VII)

- Addiere/Subtrahiere Potentiale, um Spannungen zu erhalten

$$Q_1 = c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2 + c_{12}\Phi_1 - c_{12}\Phi_1$$

$$Q_2 = c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2 + c_{21}\Phi_2 - c_{21}\Phi_2$$

VERTEILTE ELEMENTE (VII)

- Addiere/Subtrahiere Potentiale, um Spannungen zu erhalten

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2 + c_{12}\Phi_1 - c_{12}\Phi_1 \\
 &= (c_{11} + c_{12}) \underbrace{(\Phi_1 - 0)}_{U_{10}} - c_{12} \underbrace{(\Phi_1 - \Phi_2)}_{U_{12}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2 &= c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2 + c_{21}\Phi_2 - c_{21}\Phi_2 \\
 &= -c_{21} \underbrace{(\Phi_2 - \Phi_1)}_{U_{21}} + (c_{22} + c_{21}) \underbrace{(\Phi_2 - 0)}_{U_{20}}
 \end{aligned}$$

VERTEILTE ELEMENTE (VII)

- Addiere/Subtrahiere Potentiale, um Spannungen zu erhalten

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2 + c_{12}\Phi_1 - c_{12}\Phi_1 \\
 &= \underbrace{(c_{11} + c_{12})}_{C_{11}} \underbrace{(\Phi_1 - 0)}_{U_{10}} - \underbrace{c_{12}}_{C_{12}} \underbrace{(\Phi_1 - \Phi_2)}_{U_{12}} \\
 Q_2 &= c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2 + c_{21}\Phi_2 - c_{21}\Phi_2 \\
 &= \underbrace{-c_{21}}_{C_{21}} \underbrace{(\Phi_2 - \Phi_1)}_{U_{21}} + \underbrace{(c_{22} + c_{21})}_{C_{22}} \underbrace{(\Phi_2 - 0)}_{U_{20}}
 \end{aligned}$$

VERTEILTE ELEMENTE (VII)

- Addiere/Subtrahiere Potentiale, um Spannungen zu erhalten

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2 + c_{12}\Phi_1 - c_{12}\Phi_1 \\
 &= \underbrace{(c_{11} + c_{12})}_{C_{11}} \underbrace{(\Phi_1 - 0)}_{U_{10}} - \underbrace{c_{12}}_{C_{12}} \underbrace{(\Phi_1 - \Phi_2)}_{U_{12}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_2 &= c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2 + c_{21}\Phi_2 - c_{21}\Phi_2 \\
 &= -\underbrace{c_{21}}_{C_{21}} \underbrace{(\Phi_2 - \Phi_1)}_{U_{21}} + \underbrace{(c_{22} + c_{21})}_{C_{22}} \underbrace{(\Phi_2 - 0)}_{U_{20}}
 \end{aligned}$$

- Es ergeben sich die direkten Kapazitätskoeffizienten:

$$C_{ik} = \begin{cases} -c_{ik} & \text{für } i \neq k \\ \sum_{j=1}^n c_{kj} & \text{für } i = k \end{cases}$$

VERTEILTE ELEMENTE (VIII)

- Influenz- und Kapazitätskoeffizienten

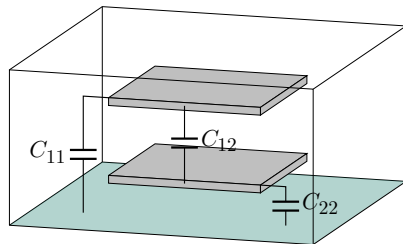
$$Q_1 = c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2$$

$$Q_2 = c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2$$

$$Q_1 = C_{11}\Phi_1 + C_{12}(\Phi_1 - \Phi_2)$$

$$Q_2 = C_{21}(\Phi_2 - \Phi_1) + C_{22}\Phi_2$$

- Reziprozität: $C_{ij} = C_{ji}$
- Eigenkapazitäten: C_{ii}
- Direkte Kapazität: C_{ij}
- Im Beispiel wäre C_{12} die bekannte Kapazität zwischen den Platten

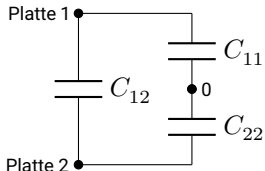


VERTEILTE ELEMENTE (VIII)

- Influenz- und Kapazitätskoeffizienten

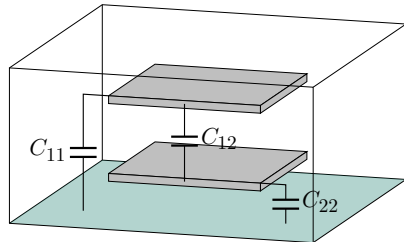
$$Q_1 = c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2$$

$$Q_2 = c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2$$



$$Q_1 = C_{11}\Phi_1 + C_{12}(\Phi_1 - \Phi_2)$$

$$Q_2 = C_{21}(\Phi_2 - \Phi_1) + C_{22}\Phi_2$$



- Gesamtkapazität:

$$C_{\text{tot}} = C_{12} + \frac{C_{11}C_{22}}{C_{11} + C_{22}}$$

VERTEILTE ELEMENTE (VIII)

- Influenz- und Kapazitätskoeffizienten

$$Q_1 = c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2$$

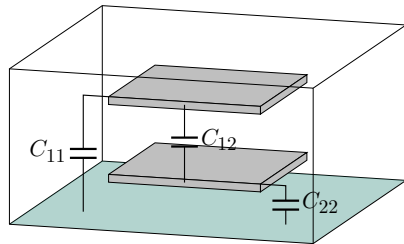
$$Q_2 = c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2$$

$$Q_1 = C_{11}\Phi_1 + C_{12}(\Phi_1 - \Phi_2)$$

$$Q_2 = C_{21}(\Phi_2 - \Phi_1) + C_{22}\Phi_2$$

- Relativer Beitrag der parasitären Kapazitäten

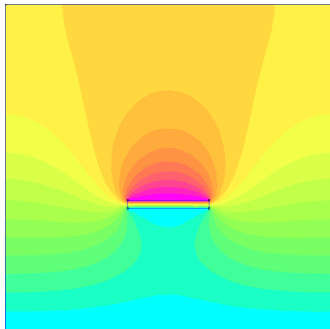
$$r := \frac{C_{\text{tot}} - C_{12}}{C_{\text{tot}}} = \frac{C_{11}C_{22}}{C_{\text{tot}}(C_{11} + C_{22})}$$



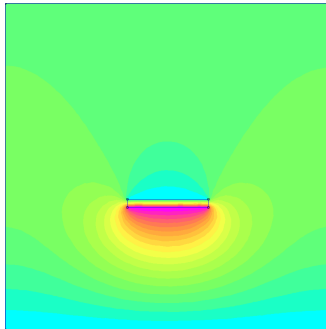
Vergrößere Abstand der Platten zum **elektrischen Rand** $\Rightarrow r$ verringert sich

VERTEILTE ELEMENTE (IX)

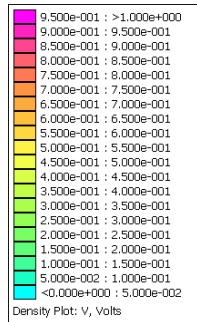
Simulation mit FEMM



Obere Platte auf 1V



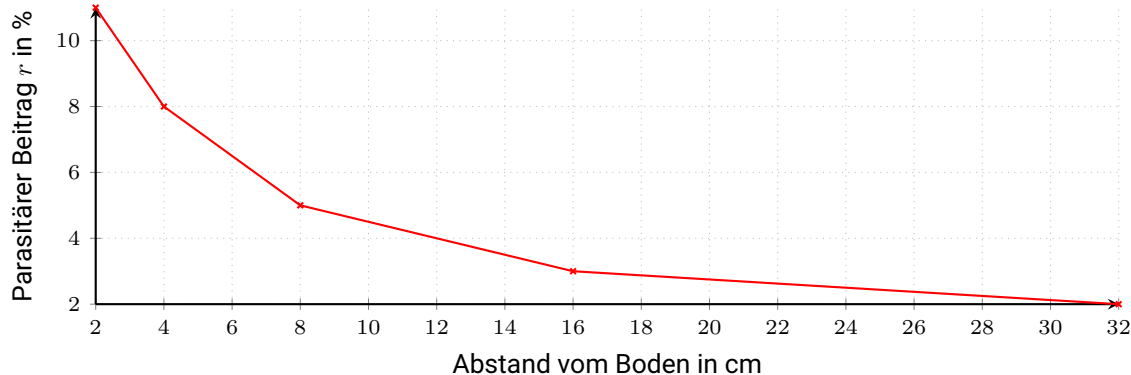
Untere Platte auf 1V



$$\mathbf{C}_{\text{inf}} = \begin{bmatrix} 1,11 \cdot 10^{-11} & -9,99 \cdot 10^{-12} \\ -9,99 \cdot 10^{-12} & 1,06 \cdot 10^{-11} \end{bmatrix} \mathbf{F}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1,12 \cdot 10^{-12} & 9,99 \cdot 10^{-12} \\ 9,99 \cdot 10^{-12} & 6,08 \cdot 10^{-13} \end{bmatrix} \mathbf{F}$$

VERTEILTE ELEMENTE (X)

Simulation mit FEMM



Platten: 10×10 cm, Abstand voneinander: 1 cm, zum Boden: 2 – 32 cm.

ZWISCHENBILANZ

- Beschreibung des (wirbelfreien) E-Feldes durch elektrisches Skalarpotential
- Herleitung der Potentialgleichung aus

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \varrho(\vec{r})$$

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \Phi(\vec{r})$$

für inhomogene Medien:

$$\nabla \cdot (\epsilon(\vec{r}) \nabla \Phi(\vec{r})) = -\varrho(\vec{r})$$

mit elektrischen/magnetischen Randbedingungen

- Herleitung der Stetigkeitsbedingungen
- Analytische Betrachtung einiger Beispiele
- Kapazitätsbegriff schlägt Brücke zur Schaltungsimulation

ÜBERSICHT

1

Übertrag: Kapazitätsbegriff

2

Numerische Lösung der Poissongleichung

3

Duale Rechengitter

4

Diskretisierungsmatrizen

5

Kanonische Nummerierung

6

Diskrete Ableitungsoperatoren

MOTIVATION

- Plattenkondensator (1D Modell)
- Potentialgleichung

$$\nabla \cdot (\epsilon(x) \nabla \Phi) = 0$$

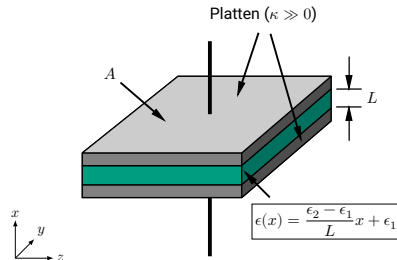
↓ 1D

$$\epsilon(x) \frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \frac{d\epsilon(x)}{dx} \frac{d\Phi}{dx} = 0$$

↓ Analytische Lösung

$$\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_0}{\ln(\epsilon_2) - \ln(\epsilon_1)} \left(\epsilon_1 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{L} x \right) + \Phi_0$$

- Numerisch einfacher zu lösen und zu visualisieren



HINTERGRUND ZU FIT (I)

- Die Methode der Finiten Integration (**Finite Integration Technique, FIT**)
- numerisches Verfahren zur **Diskretisierung** partieller Differentialgleichungen
- entwickelt speziell für die Lösung der **vektoriellen** Maxwellschen Gleichungen (Weiland, 1977)
- verwandt mit **Finite Differences Time Domain** (Yee, 1966)
- FIT verwendet die **integrale** statt differentieller Schreibweise der Gleichungen

Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media

KANE S. YEE

Abstract—Maxwell's equations are replaced by a set of finite difference equations. It is shown that if one chooses the field points appropriately, the set of finite difference equations is applicable for a boundary condition involving perfectly conducting surfaces. An example is given of the scattering of an electromagnetic plane by a perfectly conducting cylinder.

INTRODUCTION

SOLUTIONS to the time-dependent Maxwell's equations in general form are unknown except for a few special cases. The difficulty is due mainly to the imposition of the boundary conditions. We shall show in this paper how to obtain the solution numerically when the boundary condition is that appropriate for a perfect conductor. In theory, this numerical attack can be employed for the most general case. However, because of the limited memory capacity of present day computers, numerical solutions to a scattering problem for which the ratio of the characteristic linear dimension of the obstacle to the wavelength is large will seem to be impractical. We shall show by an example that in the case of two dimensions, numerical solutions are practical even when the characteristic length of the

obstacle is moderately large compared to that of an incident wave.

A set of finite difference equations for the system of partial differential equations will be introduced in the early part of this paper. We shall then show that with an appropriate choice of the points at which the various field components are to be evaluated, the set of finite difference equations can be solved and the solution will satisfy the boundary condition. The latter part of this paper will specialize in two-dimensional problems, and as an example illustrating scattering of an incident plane by a perfectly conducting square will be presented.

MAXWELL'S EQUATION AND THE EQUIVALENT SET OF FINITE DIFFERENCE EQUATIONS

Maxwell's equations in an isotropic medium [1] are:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (1b)$$

$$\mathbf{D} = \mu \mathbf{E}, \quad (1c)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (1d)$$

Manuscript received August 24, 1965; revised January 26, 1966. This work was performed under the auspices of the U. S. Atomic Energy Commission.

Caltech

Eine Methode zur Lösung der Maxwellschen Gleichungen für sechskomponentige Felder auf diskreter Basis

von Thomas Weiland *

Mitteilung aus dem Fachgebiet Grundlagen der Elektrotechnik, Technische Hochschule Darmstadt

Es wird ein Diskretisierungsverfahren vorgestellt, das es gestattet, die inhomogenen sowie die homogenen Maxwellschen Gleichungen in einem endlichem, dreidimensionalen, quellenfreien Gebiet zu lösen. Die Materialverteilung (Permittivität, Permeabilität, Leitfähigkeit) kann eine beliebige Funktion des Ortes sein. Als numerisches Anwendungsbeispiel dient die Eigenwertberechnung dielektrisch gefüllter Hohlleiter.

A Discretization Method for the Solution of Maxwell's Equations for Six-Component Fields

A discretization method is described for the solution of the inhomogeneous, as well as the homogeneous, Maxwell equations in a finite, three-dimensional, source-free region. The distribution of material (permittivity, permeability, conductivity) can be an arbitrary function of the locus. The eigenvalue calculation of dielectric loaded waveguides serves as numerical example.

HINTERGRUND ZU FIT (II)

- FIT ist ähnlich zu **Finiten Elementen**, aber ohne die „schwache Formulierung“ (Nedelec, ab 1980)
- **Äquivalenzen** zwischen den Verfahren sind beweisbar

Mixed Finite Elements in \mathbb{R}^3

J.C. Nedelec

Centre de Mathématiques Appliquées – Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France

Summary. We present here some new families of non conforming finite elements in \mathbb{R}^3 . These two families of finite elements, built on tetrahedrons or on cubes are respectively conforming in the spaces $H(\text{curl})$ and $H(\text{div})$. We give some applications of these elements for the approximation of Maxwell's equations and equations of elasticity.

Subject Classifications: AMS(MOS): 65N30, CR: 5.17.

- Probleme mit vielen **Milliarden von Unbekannten** können effizient gelöst werden.
- FIT gehört zu den am häufigsten benutzten Verfahren für hochfrequente **elektromagnetische Simulationen**.
- Auch einsetzbar für andere physikalische Probleme, z.B. Wärmefluss, Elastodynamik, ... (aber heißt da oft anders).

ÜBERSICHT

1

Übertrag: Kapazitätsbegriff

2

Numerische Lösung der Poissongleichung

3

Duale Rechengitter

4

Diskretisierungsmatrizen

5

Kanonische Nummerierung

6

Diskrete Ableitungsoperatoren

RECHENGITTER

Rechengitter \mathbb{G} : Zerlegung des Raumes in nicht überlappende Volumina, definiert über geometrische **Elementarfiguren**

Gitterzelle V_n wobei $n = 1, \dots, N_V$

(engl.: volume oder cell)

RECHENGITTER

Rechengitter \mathbb{G} : Zerlegung des Raumes in nicht überlappende Volumina, definiert über geometrische **Elementarfiguren**

Gitterzelle V_n wobei $n = 1, \dots, N_V$

(engl.: volume oder cell)



Begrenzt durch **mehrere**

Gitterfläche A_n wobei $n = 1, \dots, N_A$

(engl.: facet)

RECHENGITTER

Rechengitter \mathbb{G} : Zerlegung des Raumes in nicht überlappende Volumina, definiert über geometrische **Elementarfiguren**

Gitterzelle V_n wobei $n = 1, \dots, N_V$

(engl.: volume oder cell)

↓ Begrenzt durch **mehrere**

Gitterfläche A_n wobei $n = 1, \dots, N_A$

(engl.: facet)

↓ Begrenzt durch **mehrere**

Gitterkanten L_n wobei $n = 1, \dots, N_L$

(engl.: edge oder link)

RECHENGITTER

Rechengitter \mathbb{G} : Zerlegung des Raumes in nicht überlappende Volumina, definiert über geometrische **Elementarfiguren**

Gitterzelle V_n wobei $n = 1, \dots, N_V$

(engl.: volume oder cell)

Begrenzt durch **mehrere**

Gitterfläche A_n wobei $n = 1, \dots, N_A$

(engl.: facet)

Begrenzt durch **mehrere**

Gitterkanten L_n wobei $n = 1, \dots, N_L$

(engl.: edge oder link)

Begrenzt durch **zwei**

Gitterpunkte P_n wobei $n = 1, \dots, N_P$

(engl.: knots, points, vertices oder nodes)

BEISPIEL DES RECHENGITTERS

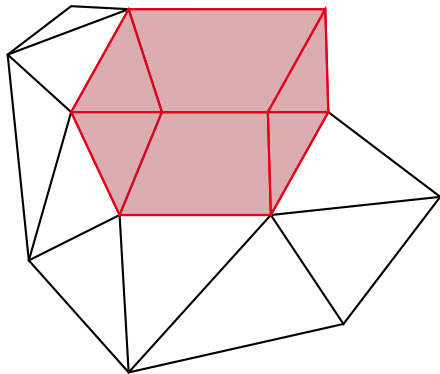
Elementarfiguren des Gitters \mathbb{G} :

Gitterzellen V_n

Gitterfläche A_n

Gitterkanten L_n

Gitterpunkte P_n



BEISPIEL DES RECHENGITTERS

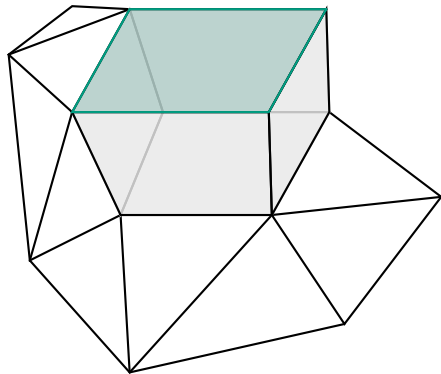
Elementarfiguren des Gitters \mathbb{G} :

Gitterzellen V_n

Gitterfläche A_n

Gitterkanten L_n

Gitterpunkte P_n



BEISPIEL DES RECHENGITTERS

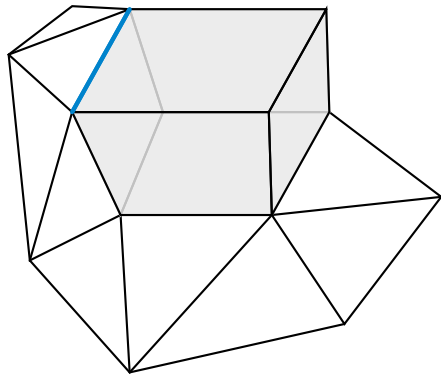
Elementarfiguren des Gitters \mathbb{G} :

Gitterzellen V_n

Gitterfläche A_n

Gitterkanten L_n

Gitterpunkte P_n



BEISPIEL DES RECHENGITTERS

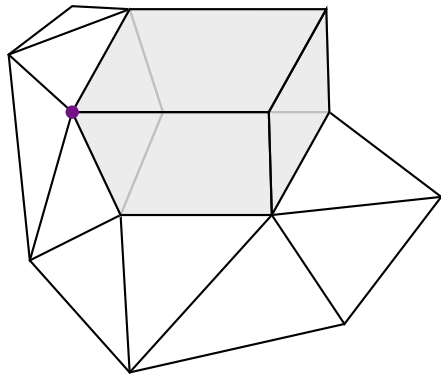
Elementarfiguren des Gitters \mathbb{G} :

Gitterzellen V_n

Gitterfläche A_n

Gitterkanten L_n

Gitterpunkte P_n



ZUSAMMENHANG VON GITTER UND FELDERN

- **Zerlegung des Raumes** durch das Rechengitter
- Maxwellgleichungen in **Integralform**
- Spezielle **Wahl** der Integrationskurven, -flächen und -volumina

Integrale Zustandsgrößen

$$\bar{e}_n := \int_{L_n} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s}$$

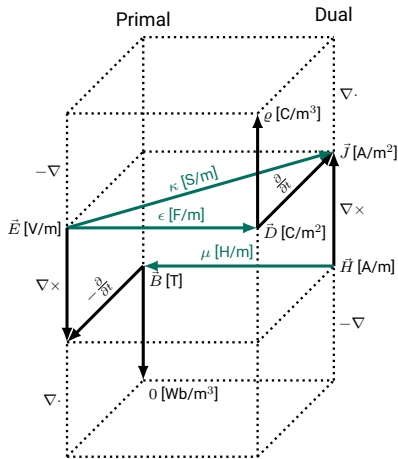
elektrische Gitterspannung

$$\bar{b}_n := \int_{A_n} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A}$$

magnetischer Gitterfluss

- Dadurch (zunächst) **näherungsfreie** Diskretisierung möglich.

ZUSTANDSGRÖSSEN IM GITTER



$$\int_{\partial A} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

$$\int_{\partial A} \vec{H}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = \int_A \left(\frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \vec{J}(\vec{r}, t) \right) \cdot d\vec{A}$$

$$\int_{\partial V} \vec{D}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV$$

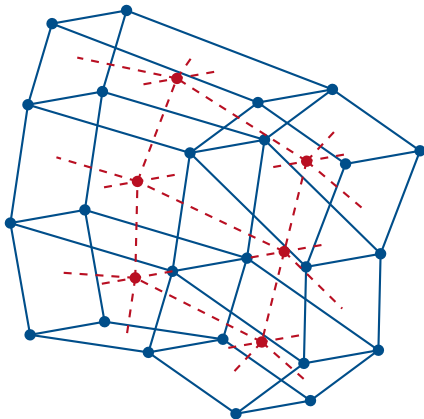
$$\int_{\partial V} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = 0$$

Über **Differentialoperator** verknüpfte Felder sollen auf dem **gleichen** Gitter definiert sein

Über **Materialgesetzen** verknüpfte Felder sollen auf **unterschiedlichen** Gittern definiert sein

EINFÜHRUNG EINES DUALEN GITTERS

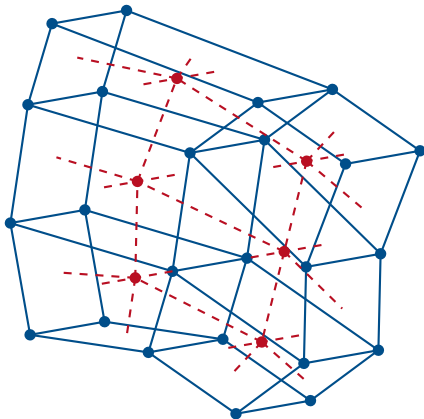
Primäres Gitter \mathbb{G} und duales Gitter $\tilde{\mathbb{G}}$



- jede **duale Kante** schneidet eine **primäre Fläche** in genau einem Punkt
- jede **primäre Kante** schneidet eine **duale Fläche** in genau einem Punkt
- jede **duale Zelle** enthält genau einen **primären Punkt**
- jede **primäre Zelle** enthält genau einen **dualen Punkt**
- einander zugeordnete Figuren haben den **gleichen Index**

EINFÜHRUNG EINES DUALEN GITTERS

Primäres Gitter \mathbb{G} und duales Gitter $\tilde{\mathbb{G}}$



Dualitätsbeziehung zwischen primärem Gitter \mathbb{G} und dualem Gitter $\tilde{\mathbb{G}}$

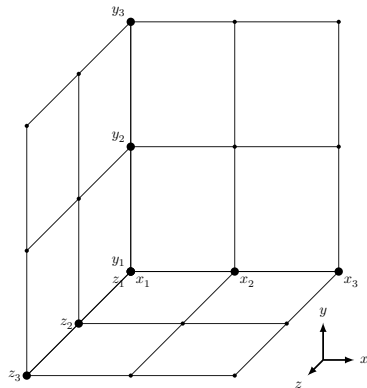
$$\tilde{L}_n \longleftrightarrow A_n$$

$$L_n \longleftrightarrow \tilde{A}_n$$

$$\tilde{P}_n \longleftrightarrow V_n$$

$$P_n \longleftrightarrow \tilde{V}_n$$

KARTESISCHES GITTERPAAR



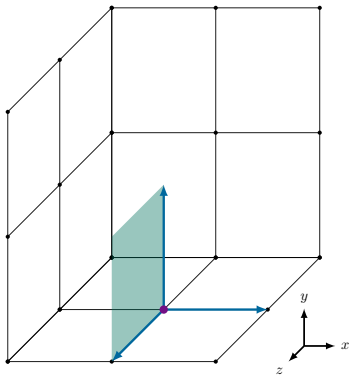
- Wir betrachten **Kartesische** Gitter mit Punkten $P_n = (x_i, y_j, z_k)$, s.d.

$$x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_{N_x},$$

$$y_1 < y_2 < \dots < y_j < \dots < y_{N_y},$$

$$z_1 < z_2 < \dots < z_k < \dots < z_{N_z}.$$

KARTESISCHES GITTERPAAR



- Wir betrachten **Kartesische** Gitter mit Punkten $P_n = (x_i, y_j, z_k)$, s.d.

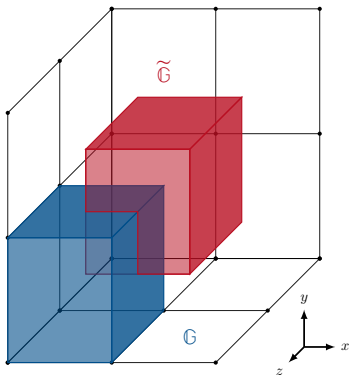
$$x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_{N_x},$$

$$y_1 < y_2 < \dots < y_j < \dots < y_{N_y},$$

$$z_1 < z_2 < \dots < z_k < \dots < z_{N_z}.$$

- Orientierung aller Kanten L und Flächennormalen A nur in die x, y, z Richtungen

KARTESISCHES GITTERPAAR



Primales Gitter

$$\hat{e}_n = \int_{L_n} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\hat{b}_n = \int_{A_n} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Duales Gitter

$$\hat{j}_n = \int_{\tilde{A}_n} \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$\hat{h}_n = \int_{\tilde{L}_n} \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

$$\hat{d}_n = \int_{\tilde{A}_n} \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

$$q_n = \int_{\tilde{V}_n} \rho dV$$

→ Integrale Zustandsgrößen

ÜBERSICHT

1

Übertrag: Kapazitätsbegriff

2

Numerische Lösung der Poissongleichung

3

Duale Rechengitter

4

Diskretisierungsmatrizen

5

Kanonische Nummerierung

6

Diskrete Ableitungsoperatoren

GRADIENT IM INDUKTIONSGESETZ (I)

Statisches Induktionsgesetz von Faraday-Lenz in Integralform:

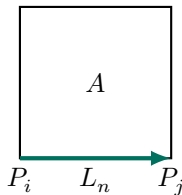
$$\int_{\partial\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\Phi \quad \text{für alle Flächen } \Gamma$$

- Beschreibt die integrierte **elektrische Feldstärke** entlang eines Randes einer beliebigen Fläche Γ

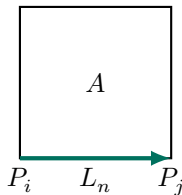
Idee der Diskretisierung mit FIT:

- Spezielle Wahl: Flächen A_n des primären Gitters \mathbb{G}

GRADIENT IM INDUKTIONSGESETZ (II)



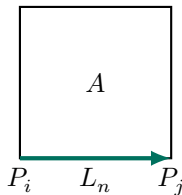
GRADIENT IM INDUKTIONSGESETZ (II)



- Für eine rechteckige primäre Fläche:

$$\partial A = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$$

GRADIENT IM INDUKTIONSGESETZ (II)



- Für eine rechteckige primäre Fläche:

$$\partial A = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$$

- Für jedes Stück des Randes

$$\int_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{gilt} \quad \oint_{L_n} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{L_n} -\nabla \Phi \cdot d\vec{s} = \underbrace{\Phi(P_i)}_{=:\phi_i} - \underbrace{\Phi(P_j)}_{=:\phi_j}$$

GRADIENT IM INDUKTIONSGESETZ (III)

Statisches Induktionsgesetz von Faraday-Lenz in Integralform:

$$\int_{L_n} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\Phi \quad \text{für alle } n = 1, \dots, N_L$$

Gittergesetz für das Potential:

$$\boxed{\hat{e}_n = \sum_i \pm \phi_i} \xrightarrow[\phi = [\phi_1 \quad \dots \quad \phi_{N_p}]^T]{\mathbf{\hat{e}} = [\hat{e}_1 \quad \dots \quad \hat{e}_{N_L}]^T} \boxed{\mathbf{\hat{e}} = -\mathbf{G}\phi}$$

GRADIENT IM INDUKTIONSGESETZ (III)

Statisches Induktionsgesetz von Faraday-Lenz in Integralform:

$$\int_{L_n} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\Phi \quad \text{für alle } n = 1, \dots, N_L$$

Gittergesetz für das Potential:

$$\boxed{\hat{e}_n = \sum_i \pm \phi_i} \xrightarrow[\phi = [\phi_1 \quad \dots \quad \phi_{N_p}]^T]{\mathbf{\hat{e}} = [\hat{e}_1 \quad \dots \quad \hat{e}_{N_L}]^T} \boxed{\mathbf{\hat{e}} = -\mathbf{G}\phi}$$

- Jede Zeile n bezieht sich auf eine primäre Kante L_n aus Ω

GRADIENT IM INDUKTIONSGESETZ (III)

Statisches Induktionsgesetz von Faraday-Lenz in Integralform:

$$\int_{L_n} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\Phi \quad \text{für alle } n = 1, \dots, N_L$$

Gittergesetz für das Potential:

$$\boxed{\hat{e}_n = \sum_i \pm \phi_i} \xrightarrow[\phi = [\phi_1 \quad \dots \quad \phi_{N_p}]^T]{\hat{\mathbf{e}} = [\hat{e}_1 \quad \dots \quad \hat{e}_{N_L}]^T} \boxed{\hat{\mathbf{e}} = -\mathbf{G}\phi}$$

- Jede Zeile n bezieht sich auf eine primäre Kante L_n aus Ω
- Primäre **Gradientenmatrix** \mathbf{G} erzeugt **vorzeichenrichtige** Summen.

GRADIENT IM INDUKTIONSGESETZ (III)

Statisches Induktionsgesetz von Faraday-Lenz in Integralform:

$$\int_{L_n} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\Phi \quad \text{für alle } n = 1, \dots, N_L$$

Gittergesetz für das Potential:

$$\boxed{\hat{e}_n = \sum_i \pm \phi_i} \xrightarrow[\phi = [\phi_1 \quad \dots \quad \phi_{N_p}]^T]{\hat{\mathbf{e}} = [\hat{e}_1 \quad \dots \quad \hat{e}_{N_L}]^T} \boxed{\hat{\mathbf{e}} = -\mathbf{G}\phi}$$

- Jede Zeile n bezieht sich auf eine primäre Kante L_n aus Ω
- Primäre **Gradientenmatrix** \mathbf{G} erzeugt **vorzeichenrichtige** Summen.
- **Keine Approximation** durch **Diskretisierung** weil integrale Betrachtung.

GRADIENT IM INDUKTIONSGESETZ (IV)

- Gradientmatrix **G** sammelt die Vorzeicheninformationen ein:

$$\hat{e}_n = \boxed{+} \phi_i \boxed{-} \phi_{i+1}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \text{Zeile } n \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

- Gleichung $\hat{\mathbf{e}} = -\mathbf{G}\boldsymbol{\phi}$
- Anzahl der Zeilen: primäre Kanten N_L
- Anzahl der Spalten: primäre Punkte N_P
- Nur $-1, 0$ oder 1 als Eintrag.

- Es folgt $\mathbf{G} \in \{-1, 0, 1\}^{N_L \times N_P}$.
- Positionen der Einträge** hängen vom **Indizierungsschema** ab.

DIVERGENZ IM GAUSSSCHEN GESETZ (I)

Gaußsches Gesetz in Integralform:

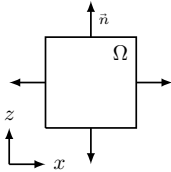
$$\int_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_{\Omega} \varrho \, d\Omega = Q \quad \text{für alle Zellen } \Omega$$

- Beschreibt die **elektrische Flussdichte** durch die **Hüllfläche** einer beliebigen Zelle Ω

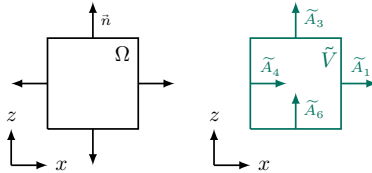
Idee der Diskretisierung mit FIT:

- Spezielle Wahl: Elementarzellen \tilde{V} des dualen Gitters $\tilde{\mathbb{G}}$

DIVERGENZ IM GAUSSSCHEN GESETZ (II)



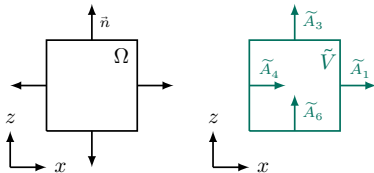
DIVERGENZ IM GAUSSSCHEN GESETZ (II)



- Für eine quaderförmige duale Zelle:

$$\partial \tilde{V} = \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2 \cup \tilde{A}_3 \cup \tilde{A}_4 \cup \tilde{A}_5 \cup \tilde{A}_6$$

DIVERGENZ IM GAUSSSCHEN GESETZ (II)



- Für eine quaderförmige duale Zelle:

$$\partial \tilde{V} = \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2 \cup \tilde{A}_3 \cup \tilde{A}_4 \cup \tilde{A}_5 \cup \tilde{A}_6$$

- **Richtungskonvention** \Rightarrow verschiedene **Vorzeichen** bei Integralzerlegung

$$\int_{\partial \tilde{V}} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \underbrace{\int_{\tilde{A}_1} \vec{D} \cdot d\vec{A}}_{\hat{\hat{d}}_1} + \underbrace{\int_{\tilde{A}_2} \vec{D} \cdot d\vec{A}}_{\hat{\hat{d}}_2} + \underbrace{\int_{\tilde{A}_3} \vec{D} \cdot d\vec{A}}_{\hat{\hat{d}}_3} - \underbrace{\int_{\tilde{A}_4} \vec{D} \cdot d\vec{A}}_{\hat{\hat{d}}_4} - \underbrace{\int_{\tilde{A}_5} \vec{D} \cdot d\vec{A}}_{\hat{\hat{d}}_5} - \underbrace{\int_{\tilde{A}_6} \vec{D} \cdot d\vec{A}}_{\hat{\hat{d}}_6}$$

DIVERGENZ IM GAUSSSCHEN GESETZ (III)

Gaußsches Gesetz in Integralform:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_{\Omega} \varrho \, d\Omega = Q \quad \text{für alle } \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

DIVERGENZ IM GAUSSSCHEN GESETZ (III)

Gaußsches Gesetz in Integralform:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_{\Omega} \varrho \, d\Omega = Q \quad \text{für alle } \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

Gittergesetz:

$$\boxed{\sum_i \pm \hat{\hat{d}}_i = q_n} \xrightarrow[\mathbf{q} = [q_1 \quad \dots \quad q_{N_{\tilde{V}}}]^T]{\hat{\mathbf{d}} = [\hat{\hat{d}}_1 \quad \dots \quad \hat{\hat{d}}_{N_{\tilde{A}}}]^T} \boxed{\tilde{\mathbf{S}} \hat{\hat{\mathbf{d}}} = \mathbf{q}}$$

DIVERGENZ IM GAUSSSCHEN GESETZ (III)

Gaußsches Gesetz in Integralform:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_{\Omega} \varrho \, d\Omega = Q \quad \text{für alle } \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

Gittergesetz:

$$\boxed{\sum_i \pm \hat{\hat{d}}_i = q_n} \xrightarrow[\mathbf{q} = [q_1 \quad \dots \quad q_{N_{\tilde{V}}}]^T]{\hat{\mathbf{d}} = [\hat{\hat{d}}_1 \quad \dots \quad \hat{\hat{d}}_{N_{\tilde{A}}}]^T} \boxed{\tilde{\mathbf{S}} \hat{\hat{\mathbf{d}}} = \mathbf{q}}$$

- Jede Zeile n bezieht sich auf eine duale Zelle \tilde{V}_n

DIVERGENZ IM GAUSSSCHEN GESETZ (III)

Gaußsches Gesetz in Integralform:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_{\Omega} \varrho \, d\Omega = Q \quad \text{für alle } \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

Gittergesetz:

$$\boxed{\sum_i \pm \hat{d}_i = q_n} \xrightarrow[\mathbf{q} = [q_1 \quad \dots \quad q_{N_{\tilde{V}}}]^T]{\hat{\mathbf{d}} = [\hat{d}_1 \quad \dots \quad \hat{d}_{N_{\tilde{A}}}]^T} \boxed{\tilde{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{q}}$$

- Jede Zeile n bezieht sich auf eine duale Zelle \tilde{V}_n
- **Quellenmatrix** (source matrix) $\tilde{\mathbf{S}}$ erzeugt **vorzeichenrichtige** Summe.

DIVERGENZ IM GAUSSSCHEN GESETZ (III)

Gaußsches Gesetz in Integralform:

$$\int_{\partial\Omega} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_{\Omega} \varrho \, d\Omega = Q \quad \text{für alle } \Omega \subset \mathbb{R}^3$$

Gittergesetz:

$$\boxed{\sum_i \pm \hat{\hat{d}}_i = q_n} \xrightarrow[\mathbf{q} = [q_1 \quad \dots \quad q_{N_{\tilde{V}}}]^T]{\hat{\mathbf{d}} = [\hat{\hat{d}}_1 \quad \dots \quad \hat{\hat{d}}_{N_{\tilde{A}}}]^T} \boxed{\tilde{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{q}}$$

- Jede Zeile n bezieht sich auf eine duale Zelle \tilde{V}_n
- **Quellenmatrix** (source matrix) $\tilde{\mathbf{S}}$ erzeugt **vorzeichenrichtige** Summe.
- **Keine Approximation** durch **Diskretisierung** weil integrale Betrachtung

DIVERGENZ IM GAUSSSCHEN GESETZ (IV)

- Divergenzmatrix sammelt die Vorzeicheninformationen ein:

$$q_n = \boxed{+} \hat{d}_1 \boxed{+} \hat{d}_2 \boxed{+} \hat{d}_3 \boxed{-} \hat{d}_4 \boxed{-} \hat{d}_5 \boxed{-} \hat{d}_6$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} & 0 & \boxed{-1} & 0 & \boxed{-1} & 0 & \boxed{-1} & 0 \end{array} \right]$$

Zeile n

- Gleichung $\tilde{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{d}} = \mathbf{q}$
- Anzahl der Zeilen: duale Zellen $N_{\tilde{\mathbf{V}}}$
- Anzahl der Spalten: duale Flächen $N_{\tilde{\mathbf{A}}}$
- Nur -1 , 0 oder 1 als Eintrag.

- Es folgt $\tilde{\mathbf{S}} \in \{-1, 0, 1\}^{N_{\tilde{\mathbf{V}}} \times N_{\tilde{\mathbf{A}}}}$.
- **Positionen der Einträge** hängen vom **Indizierungsschema** ab

ÜBERSICHT

1

Übertrag: Kapazitätsbegriff

2

Numerische Lösung der Poissongleichung

3

Duale Rechengitter

4

Diskretisierungsmatrizen

5

Kanonische Nummerierung

6

Diskrete Ableitungsoperatoren

KANONISCHE NUMMERIERUNG

- **Kartesisches** Gitter mit Koordinaten

$$x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_{N_x}$$

$$y_1 < y_2 < \dots < y_j < \dots < y_{N_y}$$

$$z_1 < z_2 < \dots < z_k < \dots < z_{N_z}$$

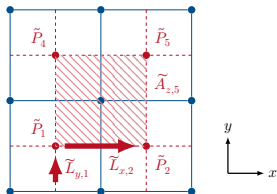
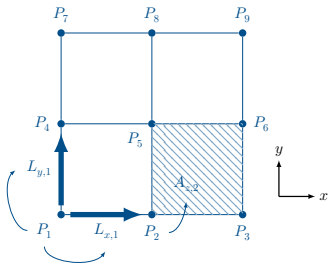
- Jeder Punkt P_n kann mit **kanonischen Index** adressiert werden

$$n = 1 + (i - 1) \cdot M_x + (j - 1) \cdot M_y + (k - 1) \cdot M_z$$

dabei sind $M_x = 1$, $M_y = N_x$ und $M_z = N_x \cdot N_y$

- Primäre Gitterfiguren werden mit dem **kleinsten Index** beteiligter Punkte und ihrer **Orientierung** identifiziert, z.B. $L_{v,n}$ und $\tilde{L}_{v,n}$ mit $v \in \{x, y, z\}$.

VISUALISIERUNG DER NUMMERIERUNG



- Im **kartesischen Gitter** existieren **3-mal** so viele Kanten und Flächen, wie Punkte
- Gerichtete Größen werden nach Richtung **geordnet** bspw.

$$L_{x,1}, \dots, L_{x,N_P},$$

$$L_{y,1}, \dots, L_{y,N_P},$$

$$L_{z,1}, \dots, L_{z,N_P}$$

mit $N_P = N_x \cdot N_y \cdot N_z$

- Duale Gittergrößen: nicht kleinster, sondern **größter** beteiligter Punkt bestimmt kanonischen Index.

INDIZIERUNG DER GITTERFIGUREN

Primäres Gitter

Duales Gitter

Gitterpunkt P_n

INDIZIERUNG DER GITTERFIGUREN

Primäres Gitter

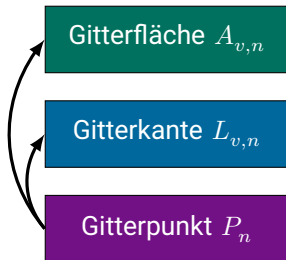
Duales Gitter



INDIZIERUNG DER GITTERFIGUREN

Primäres Gitter

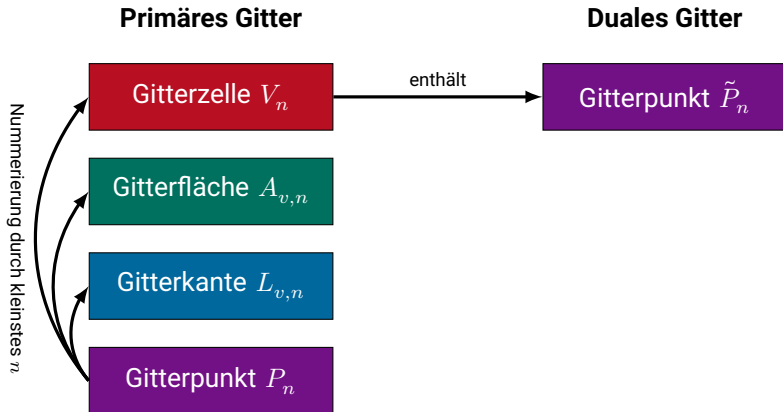
Duales Gitter



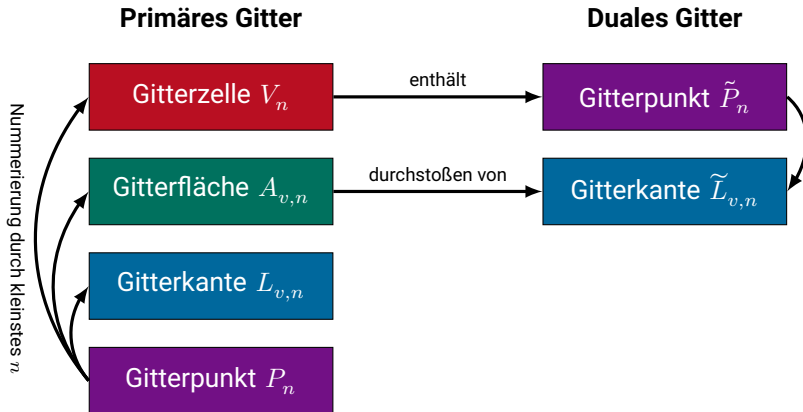
INDIZIERUNG DER GITTERFIGUREN



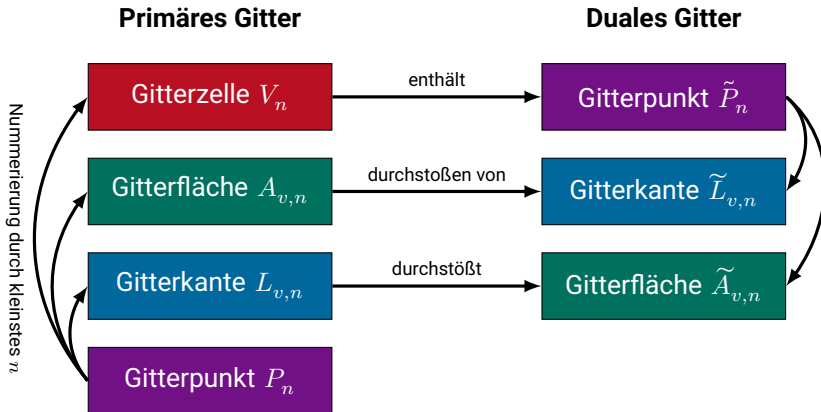
INDIZIERUNG DER GITTERFIGUREN



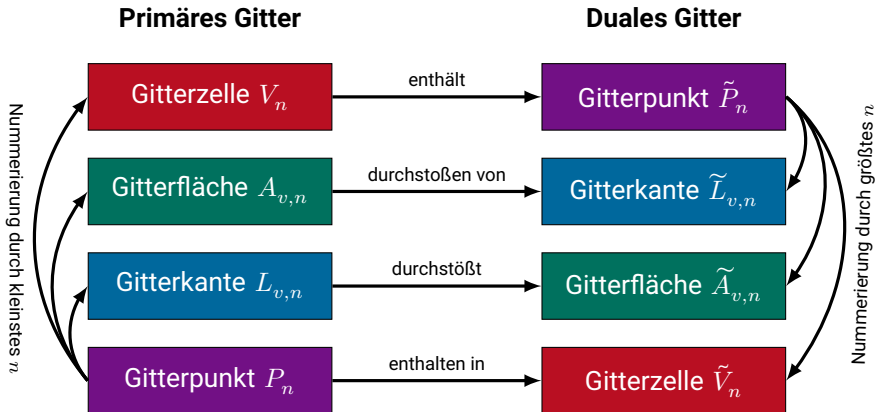
INDIZIERUNG DER GITTERFIGUREN



INDIZIERUNG DER GITTERFIGUREN



INDIZIERUNG DER GITTERFIGUREN



NUMMERIERUNG DER FELDGRÖSSEN

- Feldintegrale werden entsprechend der Elementarfiguren nummeriert.
- **Beispiel:** der Vektor der elektrischen Gitterspannungen ist

$$\hat{\mathbf{e}} := \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x \\ \hat{\mathbf{e}}_y \\ \hat{\mathbf{e}}_z \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{e}}_x := \begin{bmatrix} \hat{e}_{x,1} \\ \vdots \\ \hat{e}_{x,N_p} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_y := \begin{bmatrix} \hat{e}_{y,1} \\ \vdots \\ \hat{e}_{y,N_p} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{e}}_z := \begin{bmatrix} \hat{e}_{z,1} \\ \vdots \\ \hat{e}_{z,N_p} \end{bmatrix},$$

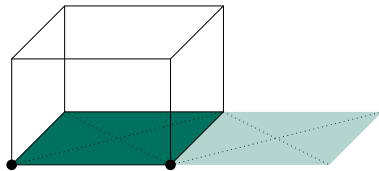
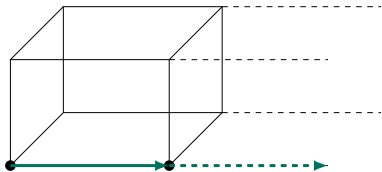
wobei jede Spannung als Integral über eine primäre Kante definiert ist

$$\hat{e}_{v,n} = \int_{L_{v,n}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{für } v \in \{x, y, z\} \text{ und } n = 1, \dots, N_p.$$

- Alle anderen Vektoren werden analog aufgebaut.

GEISTERKANTEN, -FLÄCHEN UND -VOLUMEN

- Das kanonische Nummerierungsschema führt zu jedem Punkt **ein** Volumen, **drei** Kanten und **drei** Flächen.
- Das führt am Rand zu **Geisterfiguren**, d.h. Figuren, die zwar nummeriert, aber nicht gebraucht werden:



- Die entsprechenden Feldgrößen, z.B. \hat{e}_{x,N_x} müssen bei Berechnungen entfernt bzw. auf null gesetzt werden.

ÜBERSICHT

1

Übertrag: Kapazitätsbegriff

2

Numerische Lösung der Poissongleichung

3

Duale Rechengitter

4

Diskretisierungsmatrizen

5

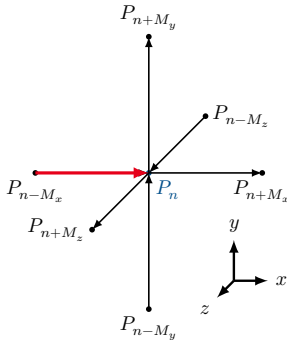
Kanonische Nummerierung

6

Diskrete Ableitungsoperatoren

PRIMÄRE GRADIENTENMATRIX (I)

- Ein primärer Punkt mit den angrenzenden Kanten:



- Integrale des elektrischen Feldes:

$$\hat{\mathbf{e}} = -\mathbf{G}\phi$$

- Jedes Potential ϕ_n ist an sechs Kanten beteiligt, daher:

$$\hat{e}_{x,n-M_x} = \phi_{n-M_x} - \phi_n,$$

$$\hat{e}_{x,n} = \phi_n - \phi_{n+M_x},$$

$$\hat{e}_{y,n-M_y} = \phi_{n-M_y} - \phi_n,$$

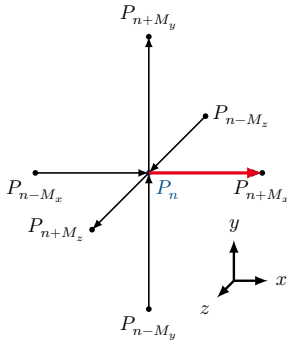
$$\hat{e}_{y,n} = \phi_n - \phi_{n+M_y},$$

$$\hat{e}_{z,n-M_z} = \phi_{n-M_z} - \phi_n,$$

$$\hat{e}_{z,n} = \phi_n - \phi_{n+M_z}$$

PRIMÄRE GRADIENTENMATRIX (I)

- Ein primärer Punkt mit den angrenzenden Kanten:



- Integrale des elektrischen Feldes:

$$\hat{\mathbf{e}} = -\mathbf{G}\phi$$

- Jedes Potential ϕ_n ist an sechs Kanten beteiligt, daher:

$$\hat{e}_{x,n-M_x} = \phi_{n-M_x} - \phi_n,$$

$$\hat{e}_{x,n} = \phi_n - \phi_{n+M_x},$$

$$\hat{e}_{y,n-M_y} = \phi_{n-M_y} - \phi_n,$$

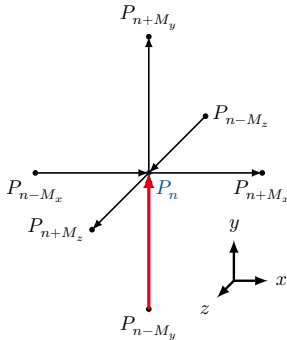
$$\hat{e}_{y,n} = \phi_n - \phi_{n+M_y},$$

$$\hat{e}_{z,n-M_z} = \phi_{n-M_z} - \phi_n,$$

$$\hat{e}_{z,n} = \phi_n - \phi_{n+M_z}$$

PRIMÄRE GRADIENTENMATRIX (I)

- Ein primärer Punkt mit den angrenzenden Kanten:



- Integrale des elektrischen Feldes:

$$\hat{\mathbf{e}} = -\mathbf{G}\phi$$

- Jedes Potential ϕ_n ist an sechs Kanten beteiligt, daher:

$$\hat{e}_{x,n-M_x} = \phi_{n-M_x} - \phi_n,$$

$$\hat{e}_{x,n} = \phi_n - \phi_{n+M_x},$$

$$\hat{e}_{y,n-M_y} = \phi_{n-M_y} - \phi_n,$$

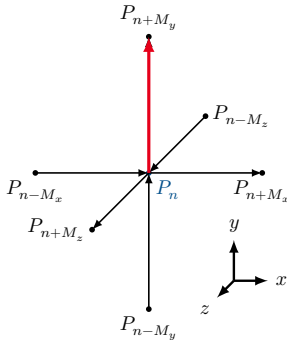
$$\hat{e}_{y,n} = \phi_n - \phi_{n+M_y},$$

$$\hat{e}_{z,n-M_z} = \phi_{n-M_z} - \phi_n,$$

$$\hat{e}_{z,n} = \phi_n - \phi_{n+M_z}$$

PRIMÄRE GRADIENTENMATRIX (I)

- Ein primärer Punkt mit den angrenzenden Kanten:



- Integrale des elektrischen Feldes:

$$\hat{\mathbf{e}} = -\mathbf{G}\phi$$

- Jedes Potential ϕ_n ist an sechs Kanten beteiligt, daher:

$$\hat{e}_{x,n-M_x} = \phi_{n-M_x} - \phi_n,$$

$$\hat{e}_{x,n} = \phi_n - \phi_{n+M_x},$$

$$\hat{e}_{y,n-M_y} = \phi_{n-M_y} - \phi_n,$$

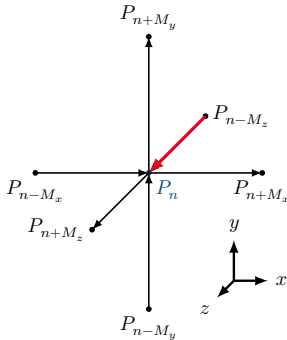
$$\hat{e}_{y,n} = \phi_n - \phi_{n+M_y},$$

$$\hat{e}_{z,n-M_z} = \phi_{n-M_z} - \phi_n,$$

$$\hat{e}_{z,n} = \phi_n - \phi_{n+M_z}$$

PRIMÄRE GRADIENTENMATRIX (I)

- Ein primärer Punkt mit den angrenzenden Kanten:



- Integrale des elektrischen Feldes:

$$\hat{\mathbf{e}} = -\mathbf{G}\phi$$

- Jedes Potential ϕ_n ist an sechs Kanten beteiligt, daher:

$$\hat{e}_{x,n-M_x} = \phi_{n-M_x} - \phi_n,$$

$$\hat{e}_{x,n} = \phi_n - \phi_{n+M_x},$$

$$\hat{e}_{y,n-M_y} = \phi_{n-M_y} - \phi_n,$$

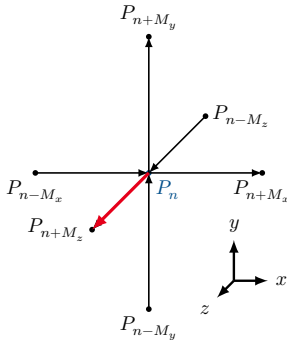
$$\hat{e}_{y,n} = \phi_n - \phi_{n+M_y},$$

$$\hat{e}_{z,n-M_z} = \phi_{n-M_z} - \phi_n,$$

$$\hat{e}_{z,n} = \phi_n - \phi_{n+M_z}$$

PRIMÄRE GRADIENTENMATRIX (I)

- Ein primärer Punkt mit den angrenzenden Kanten:



- Integrale des elektrischen Feldes:

$$\bar{\mathbf{e}} = -\mathbf{G}\phi$$

- Jedes Potential ϕ_n ist an sechs Kanten beteiligt, daher:

$$\bar{e}_{x,n-M_x} = \phi_{n-M_x} - \phi_n,$$

$$\bar{e}_{x,n} = \phi_n - \phi_{n+M_x},$$

$$\bar{e}_{y,n-M_y} = \phi_{n-M_y} - \phi_n,$$

$$\bar{e}_{y,n} = \phi_n - \phi_{n+M_y},$$

$$\bar{e}_{z,n-M_z} = \phi_{n-M_z} - \phi_n,$$

$$\bar{e}_{z,n} = \phi_n - \phi_{n+M_z}$$

PRIMÄRE GRADIENTENMATRIX (II)

- In der Statik ist das elektrische Feld $\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \Phi = -\nabla \Phi$

PRIMÄRE GRADIENTENMATRIX (II)

- In der Statik ist das elektrische Feld $\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \Phi = -\nabla \Phi$
- Durch die kanonische Indizierung ergibt sich für $w \in \{x, y, z\}$:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x \\ \hat{\mathbf{e}}_y \\ \hat{\mathbf{e}}_z \end{bmatrix} = -\mathbf{G}\phi \quad \text{mit} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_x \\ \mathbf{P}_y \\ \mathbf{P}_z \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (\mathbf{P}_w)_{p,q} = \begin{cases} -1 & q = p \\ 1 & q = p + M_w \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

PRIMÄRE GRADIENTENMATRIX (II)

- In der Statik ist das elektrische Feld $\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \Phi = -\nabla \Phi$
- Durch die kanonische Indizierung ergibt sich für $w \in \{x, y, z\}$:

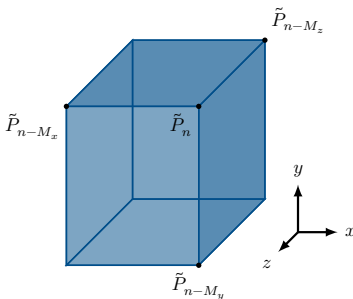
$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x \\ \hat{\mathbf{e}}_y \\ \hat{\mathbf{e}}_z \end{bmatrix} = -\mathbf{G}\phi \quad \text{mit} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_x \\ \mathbf{P}_y \\ \mathbf{P}_z \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (\mathbf{P}_w)_{p,q} = \begin{cases} -1 & q = p \\ 1 & q = p + M_w \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Matrizen \mathbf{P}_w haben nur (Nichtnull-)Einträge nur auf zwei Diagonalen

$$\mathbf{P}_x = \begin{bmatrix} \text{red } -1 & & \\ & \text{red } -1 & \\ & & \text{blue } +1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_y = \begin{bmatrix} \text{red } -1 & & \\ & \text{blue } +1 & \\ & & \text{red } -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P}_z = \begin{bmatrix} \text{red } -1 & & \\ & \text{blue } +1 & \\ & & \text{red } -1 \end{bmatrix}$$

DUALE DIVERGENZMATRIX (I)

- Duale Zelle \tilde{V}_n mit kanonischer Indizierung

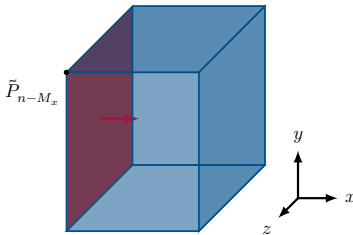


- Integralzerlegung

$$\int_{\partial \tilde{V}_n} \vec{D} \cdot d\vec{A} = -\hat{d}_{x,n-M_x} + \hat{d}_{x,n} - \hat{d}_{y,n-M_y} + \hat{d}_{y,n} - \hat{d}_{z,n-M_z} + \hat{d}_{z,n}$$

DUALE DIVERGENZMATRIX (I)

- Duale Zelle \tilde{V}_n mit kanonischer Indizierung

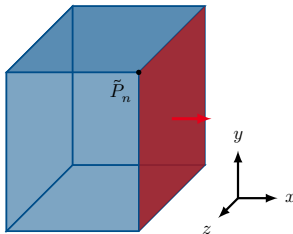


- Integralzerlegung

$$\int_{\partial \tilde{V}_n} \vec{D} \cdot d\vec{A} = -\hat{\hat{d}}_{x,n-M_x} + \hat{\hat{d}}_{x,n} - \hat{\hat{d}}_{y,n-M_y} + \hat{\hat{d}}_{y,n} - \hat{\hat{d}}_{z,n-M_z} + \hat{\hat{d}}_{z,n}$$

DUALE DIVERGENZMATRIX (I)

- Duale Zelle \tilde{V}_n mit kanonischer Indizierung

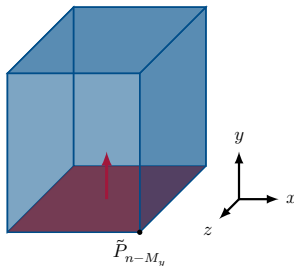


- Integralzerlegung

$$\int_{\partial \tilde{V}_n} \vec{D} \cdot d\vec{A} = -\hat{d}_{x,n-M_x} + \hat{d}_{x,n} - \hat{d}_{y,n-M_y} + \hat{d}_{y,n} - \hat{d}_{z,n-M_z} + \hat{d}_{z,n}$$

DUALE DIVERGENZMATRIX (I)

- Duale Zelle \tilde{V}_n mit kanonischer Indizierung

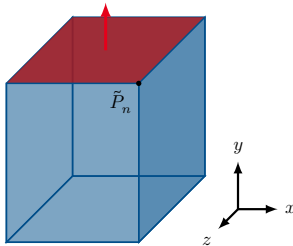


- Integralzerlegung

$$\int_{\partial \tilde{V}_n} \vec{D} \cdot d\vec{A} = -\hat{d}_{x,n-M_x} + \hat{d}_{x,n} - \hat{d}_{y,n-M_y} + \hat{d}_{y,n} - \hat{d}_{z,n-M_z} + \hat{d}_{z,n}$$

DUALE DIVERGENZMATRIX (I)

- Duale Zelle \tilde{V}_n mit kanonischer Indizierung

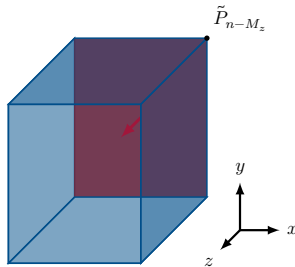


- Integralzerlegung

$$\int_{\partial \tilde{V}_n} \vec{D} \cdot d\vec{A} = -\hat{\hat{d}}_{x,n-M_x} + \hat{\hat{d}}_{x,n} - \hat{\hat{d}}_{y,n-M_y} + \hat{\hat{d}}_{y,n} - \hat{\hat{d}}_{z,n-M_z} + \hat{\hat{d}}_{z,n}$$

DUALE DIVERGENZMATRIX (I)

- Duale Zelle \tilde{V}_n mit kanonischer Indizierung

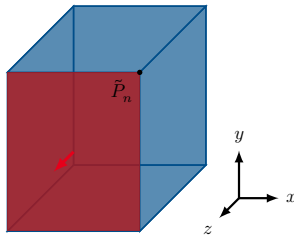


- Integralzerlegung

$$\int_{\partial \tilde{V}_n} \vec{D} \cdot d\vec{A} = -\hat{d}_{x,n-M_x} + \hat{d}_{x,n} - \hat{d}_{y,n-M_y} + \hat{d}_{y,n} - \hat{d}_{z,n-M_z} + \hat{d}_{z,n}$$

DUALE DIVERGENZMATRIX (I)

- Duale Zelle \tilde{V}_n mit kanonischer Indizierung



- Integralzerlegung

$$\int_{\partial \tilde{V}_n} \vec{D} \cdot d\vec{A} = -\hat{\hat{d}}_{x,n-M_x} + \hat{\hat{d}}_{x,n} - \hat{\hat{d}}_{y,n-M_y} + \hat{\hat{d}}_{y,n} - \hat{\hat{d}}_{z,n-M_z} + \hat{\hat{d}}_{z,n}$$

DUALE DIVERGENZMATRIX (II)

- Divergenz von \vec{D} ist gegeben durch $\nabla \cdot \vec{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \rho$

DUALE DIVERGENZMATRIX (II)

- Divergenz von \vec{D} ist gegeben durch $\nabla \cdot \vec{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \rho$
- Durch die Indizierung mit dem kanonischen Index ergibt sich

$$\tilde{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{d}}_x \\ \widehat{\mathbf{d}}_y \\ \widehat{\mathbf{d}}_z \end{bmatrix} = \mathbf{q} \quad \text{wobei} \quad \tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_x & \tilde{\mathbf{P}}_y & \tilde{\mathbf{P}}_z \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{P}}_w = -\mathbf{P}_w^\top$$

für die Richtungen $w \in \{x, y, z\}$, so dass

$$\tilde{\mathbf{P}}_x = \begin{bmatrix} \text{red line } +1 \\ \text{blue line } -1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{P}}_y = \begin{bmatrix} \text{red line } +1 \\ \text{blue line } -1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{P}}_z = \begin{bmatrix} \text{red line } +1 \\ \text{blue line } -1 \end{bmatrix}$$

$M_x \quad M_y \quad M_z$

DUALE DIVERGENZMATRIX (II)

- Divergenz von \vec{D} ist gegeben durch $\nabla \cdot \vec{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \rho$
- Durch die Indizierung mit dem kanonischen Index ergibt sich

$$\tilde{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{d}}_x \\ \hat{\mathbf{d}}_y \\ \hat{\mathbf{d}}_z \end{bmatrix} = \mathbf{q} \quad \text{wobei} \quad \tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_x & \tilde{\mathbf{P}}_y & \tilde{\mathbf{P}}_z \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{P}}_w = -\mathbf{P}_w^\top$$

für die Richtungen $w \in \{x, y, z\}$, so dass

$$\tilde{\mathbf{P}}_x = \begin{bmatrix} \text{red line } +1 \\ \text{blue line } -1 \\ \text{blue line } -1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{P}}_y = \begin{bmatrix} \text{red line } +1 \\ \text{blue line } -1 \\ \text{blue line } -1 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{P}}_z = \begin{bmatrix} \text{red line } +1 \\ \text{blue line } -1 \\ \text{blue line } -1 \end{bmatrix}$$

- Wegen $\tilde{\mathbf{P}}_w = -\mathbf{P}_w^\top$ gilt für die duale Divergenzmatrix: $\tilde{\mathbf{S}} = -\mathbf{G}^\top$

