TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

EINFÜHRUNG IN DIE NUMERISCHE BERECHNUNG ELEKTROMAGNETISCHER FELDER

Vorlesung 2: Elektrische Schaltungen

Sebastian Schöps

ÜBERSICHT

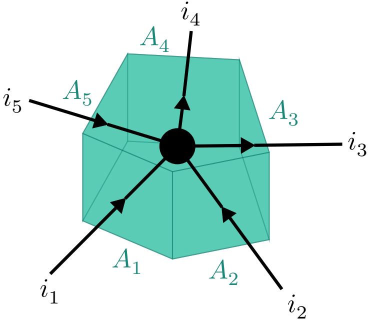
ÜBERSICHT

KIRCHHOFFSCHE KNOTENREGEL

- Statisches Durchflutungsgesetz

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J}\,\mathrm{d}V = \int_{\partial V} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0,$$

mit Volumen V um Netzwerkknoten



KIRCHHOFFSCHE KNOTENREGEL

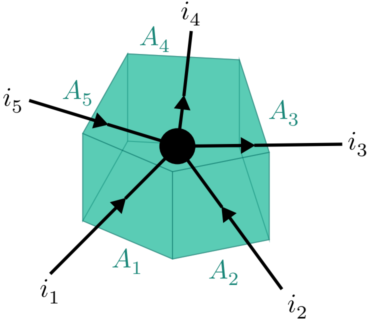
- Statisches Durchflutungsgesetz

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J}\, \mathrm{d}V = \int_{\partial V} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0,$$

  mit Volumen V um Netzwerkknoten

- Rand ist Vereinigung von Flächen A_k

$$\partial V = A_1 \mathbin{\dot\cup} \ldots \mathbin{\dot\cup} A_n$$



KIRCHHOFFSCHE KNOTENREGEL

- Statisches Durchflutungsgesetz

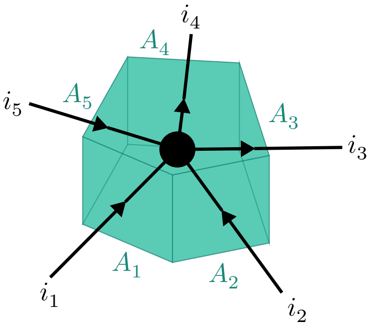
$$\int_V \nabla \cdot \vec{J}\,\mathrm{d}V = \int_{\partial V} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0,$$

mit Volumen V um Netzwerkknoten

- Rand ist Vereinigung von Flächen A_k

$$\partial V = A_1 \,\dot{\cup}\, \dots \,\dot{\cup}\, A_n$$

- Strom als Integral $\quad i_k = \int_{A_k} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$



KIRCHHOFFSCHE KNOTENREGEL

- Statisches Durchflutungsgesetz

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J}\,\mathrm{d}V = \int_{\partial V} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0,$$

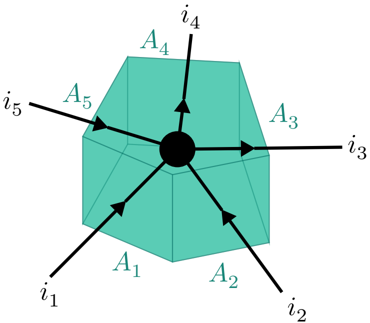
  mit Volumen V um Netzwerkknoten

- Rand ist Vereinigung von Flächen A_k

$$\partial V = A_1 \,\dot{\cup}\, \ldots \,\dot{\cup}\, A_n$$

- Strom als Integral $\quad i_k = \int_{A_k} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$

- Summe aller Ströme: $\quad \sum_{k=1}^{n} \pm i_k = \sum_{k=1}^{n} \pm \int_{A_k} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{\partial V} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$

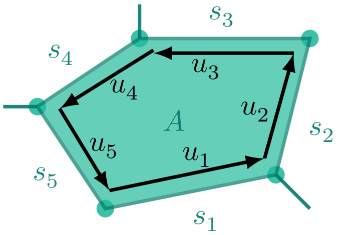


KIRCHHOFFSCHE MASCHENREGEL

- Statisches Induktionsgesetz

$$\int_A \nabla \times \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{\partial A} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0,$$

mit Fläche A umrahmt von Leitern



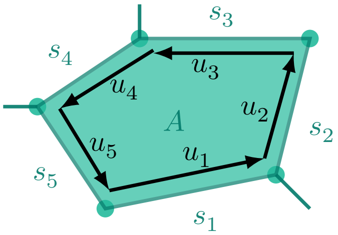
KIRCHHOFFSCHE MASCHENREGEL

- Statisches Induktionsgesetz

$$\int_A \nabla \times \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{\partial A} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0,$$

  mit Fläche A umrahmt von Leitern
- Rand ist Vereinigung von Strecken s_k

$$\partial A = s_1 \,\dot\cup\, \dots \,\dot\cup\, s_b$$



KIRCHHOFFSCHE MASCHENREGEL

- Statisches Induktionsgesetz

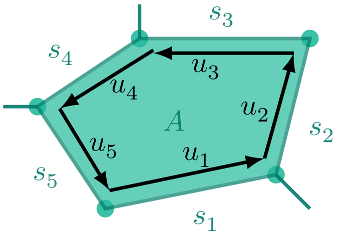
$$\int_A \nabla \times \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{\partial A} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0,$$

  mit Fläche A umrahmt von Leitern

- Rand ist Vereinigung von Strecken s_k

$$\partial A = s_1 \,\dot{\cup}\, \dots \,\dot{\cup}\, s_b$$

- Spannung als Integral $u_k = \int_{s_k} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$

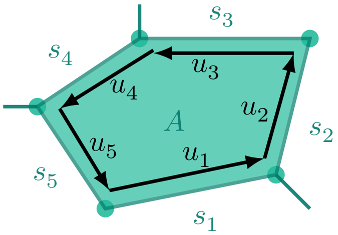


KIRCHHOFFSCHE MASCHENREGEL

- Statisches Induktionsgesetz

$$\int_A \nabla \times \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{\partial A} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0,$$

  mit Fläche A umrahmt von Leitern



- Rand ist Vereinigung von Strecken s_k

$$\partial A = s_1 \,\dot{\cup}\, \ldots \,\dot{\cup}\, s_b$$

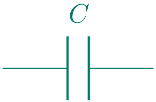
- Spannung als Integral $u_k = \int_{s_k} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$
- Summe aller Spannungen: $\sum_{k=1}^{n} \pm u_k = \sum_{k=1}^{n} \pm \int_{s_k} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\partial A} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$

ÜBERSICHT

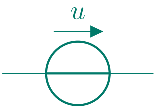
KONZENTRIERTE BAUELEMENTE

(a) Widerstand

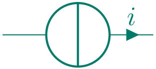
(b) Spule



(c) Kondensator



(d) Spannungsquelle



(e) Stromquelle

WIDERSTAND

- Ein **Ohmschen Widerstand** ist konstant und zeitinvariant

$$u(t) = R\,i(t) \qquad \text{bzw.} \qquad i(t) = G\,u(t)$$

mit dem Widerstand R oder Leitwert $G = 1/R$.

WIDERSTAND

- Ein **Ohmschen Widerstand** ist konstant und zeitinvariant

$$u(t) = R\,i(t) \qquad \text{bzw.} \qquad i(t) = G\,u(t)$$

  mit dem Widerstand R oder Leitwert $G = 1/R$.

- Einfacher Widerstand:

$$R = \frac{1}{\kappa}\frac{\Delta\ell}{\Delta A}$$

  mit spezifischem Leitwert κ, Länge $\Delta\ell$ und Querschnittsfläche ΔA.

WIDERSTAND

- Ein **Ohmschen Widerstand** ist konstant und zeitinvariant

$$u(t) = R\,i(t) \qquad \text{bzw.} \qquad i(t) = G\,u(t)$$

  mit dem Widerstand R oder Leitwert $G = 1/R$.

- Einfacher Widerstand:

$$R = \frac{1}{\kappa}\frac{\Delta\ell}{\Delta A}$$

  mit spezifischem Leitwert κ, Länge $\Delta\ell$ und Querschnittsfläche ΔA.

- Die Verlustleistung und Energie sind

$$P_{\mathrm{Ohm}} = u\,i = R\,i^2 \qquad\qquad W_{\mathrm{Ohm}} = \int_0^t R\,i^2(s)\,\mathrm{d}s.$$

WIDERSTAND

- Ein **Ohmschen Widerstand** ist konstant und zeitinvariant

$$u(t) = R\, i(t) \qquad \text{bzw.} \qquad i(t) = G\, u(t)$$

  mit dem Widerstand R oder Leitwert $G = 1/R$.
- Einfacher Widerstand:

$$R = \frac{1}{\kappa} \frac{\Delta \ell}{\Delta A}$$

  mit spezifischem Leitwert κ, Länge $\Delta \ell$ und Querschnittsfläche ΔA.
- Die Verlustleistung und Energie sind

$$P_{\mathrm{Ohm}} = u\, i = R\, i^2 \qquad\qquad W_{\mathrm{Ohm}} = \int_0^t R\, i^2(s)\, \mathrm{d}s.$$

- Offener Schaltkreis ($G = 0, R = \infty$) und Kurzschluss ($G = \infty, R = 0$)

SPULE

- Element mit zwei Anschlüssen heißt **Spule**, wenn

$$\Phi_\mathrm{L}(i(t),t) = \int_A \vec{B}(\vec{r},t)\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

  wobei die Flussdichte $\vec{B}$ vom Strom $i(t)$ abhängt.

- Für die Spannung gilt

$$u(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_\mathrm{L}(i(t),t)\ .$$

  - Für die Spannung einer linearen zeitinvarianten Spule ergibt sich:

$$\Phi_\mathrm{L}(i(t),t) = Li(t) \qquad \text{bzw.} \qquad u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t)$$

  - Einfache Spule: **Induktivität** $L = \mu_0\mu_r\frac{N^2A}{\ell}$ mit magn. Feldkonstante μ_0, relativer Permeabilität μ_r, Wicklungszahl N, Länge ℓ und Fläche A.

KONDENSATOR

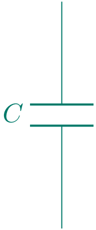
- Element mit zwei Anschlüssen heißt **Kondensator**, wenn

$$q_C(u(t),t) = \int_V \varrho(\vec{r},t)\,\mathrm{d}V,$$

  wobei Ladung implizit von Spannung $u(t)$ abhängt

- und für den Strom gilt

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_C(u(t),t)\ .$$



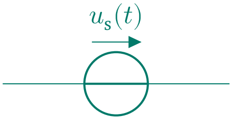
- Kennlinie linearer zeitinvarianter Kondensatoren

$$q_C(u(t),t) = Cu(t) \qquad \text{bzw.} \qquad i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t).$$

- Einfacher Plattenkondensator: **Kapazität** $C = \epsilon_0 \epsilon_\mathrm{r} \frac{A}{d}$ mit elektrischer Feldkonstante ϵ_0, relativer Permittivität ϵ_r, Abstand d und Fläche A.

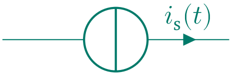
QUELLEN UND WEITERE ELEMENTE

Unabhängige Spannungsquellen



($u_s \equiv 0 \rightarrow$ Kurzschluss)

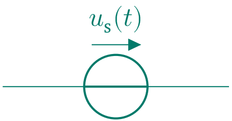
Unabhängige Stromquellen



($i_s \equiv 0 \rightarrow$ offener Schaltkreis)

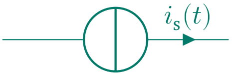
QUELLEN UND WEITERE ELEMENTE

Unabhängige Spannungsquellen



$(u_\mathrm{s} \equiv 0 \rightarrow$ Kurzschluss)

Unabhängige Stromquellen



$(i_\mathrm{s} \equiv 0 \rightarrow$ offener Schaltkreis)

Andere Schaltungselemente

- Gesteuerte Quellen, z.B. (VCVS, CCVS, CCCS, VCCS)

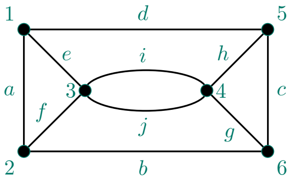
$$u(t) = u(u_\mathrm{c}(t), t), \qquad u(t) = u(i_\mathrm{c}(t), t), \qquad i(t) = i(i_\mathrm{c}(t), t), \qquad i(t) = i(u_\mathrm{c}(t), t)\ .$$

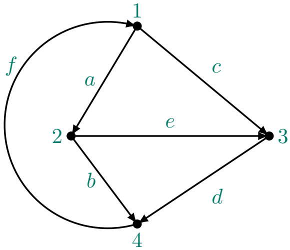
- Dioden: z.B. Shockley Model

$$i(t) = i_\mathrm{s}\left(e^{\frac{u(t)}{n u_\mathrm{t}}} - 1\right)$$

ÜBERSICHT

GRAPH DEFINITION





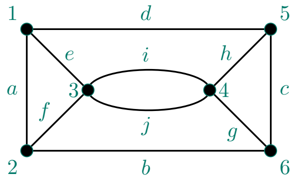
Ein **Graph** $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ besteht aus einer Menge von *Knoten* $\mathcal{V}$ und *Zweigen* $\mathcal{E}$.

- Die Enden von Zweigen sind **Knoten**.
- Falls die Zweige orientiert sind, so nennt man $\mathcal{G}$ *gerichtetet*.
- Graph heißt *verbunden* wenn zwischen je zwei Knoten mindestens ein Pfad existiert.

SCHLEIFEN

- Ein Teilgraph G_l eines verbundenen Graphen G heißt **Schleife**, wenn:

  1. G_l ist verbunden.
  2. Jeder Knoten von G_l verbindet genau zwei Zweige von G_l.

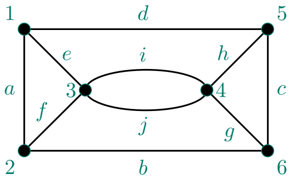


Beispiele:

SCHLEIFEN

- Ein Teilgraph G_l eines verbundenen Graphen G heißt **Schleife**, wenn:

  1. G_l ist verbunden.
  2. Jeder Knoten von G_l verbindet genau zwei Zweige von G_l.



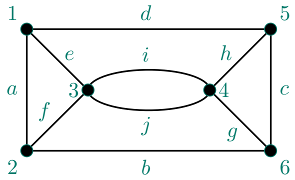
Beispiele:

- $\{a, b, c, d\}$ ist eine Schleife, aber

SCHLEIFEN

- Ein Teilgraph G_l eines verbundenen Graphen G heißt **Schleife**, wenn:

  1. G_l ist verbunden.
  2. Jeder Knoten von G_l verbindet genau zwei Zweige von G_l.



Beispiele:

- $\{a, b, c, d\}$ ist eine Schleife, aber
- $\{a, e, i, j, f\}$ ist keine Schleife

INZIDENZMATRIZEN

- Sei Graph $\mathcal{G}$ mit n Knoten und b Zweigen gegeben. Die $n \times b$ **Inzidenzmatrix** ist definiert als $\mathbf{A}_\mathsf{a} = (a_{ij})$ mit

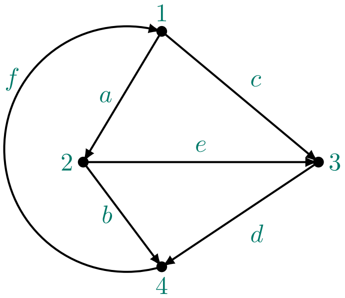
$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{falls Zweig } j \text{ vom Knoten } i \text{ weg führt} \\ -1 & \text{falls Zweig } j \text{ zum Knoten } i \text{ hin führt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

INZIDENZMATRIZEN

- Sei Graph $\mathcal{G}$ mit n Knoten und b Zweigen gegeben. Die $n \times b$ **Inzidenzmatrix** ist definiert als $\mathbf{A}_\mathrm{a} = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{falls Zweig } j \text{ vom Knoten } i \text{ weg führt} \\ -1 & \text{falls Zweig } j \text{ zum Knoten } i \text{ hin führt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- **Beispiel**:



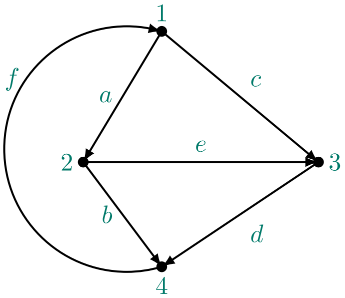
INZIDENZMATRIZEN

- Sei Graph $\mathcal{G}$ mit n Knoten und b Zweigen gegeben. Die $n \times b$ **Inzidenzmatrix** ist definiert als $\mathbf{A}_\mathsf{a} = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{falls Zweig } j \text{ vom Knoten } i \text{ weg führt} \\ -1 & \text{falls Zweig } j \text{ zum Knoten } i \text{ hin führt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- **Beispiel**:

$$\mathbf{A}_\mathsf{a} = \begin{array}{c@{}c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} \;a\; & \;\;b\;\; & \;\;c\;\; & \;\;d\;\; & \;\;e\;\; & \;f \end{array} & \end{array}$$



INZIDENZMATRIZEN: STRÖME (I)

- Sei eine Schaltung durch $\mathbf{A}_\mathrm{a}$ beschrieben und der Vektor aller Zweigströme des Netzwerks

$$\mathbf{i}^\top = [i_1, i_2, ..., i_b].$$

INZIDENZMATRIZEN: STRÖME (I)

- Sei eine Schaltung durch $\mathbf{A}_\mathsf{a}$ beschrieben und der Vektor aller Zweigströme des Netzwerks

$$\mathbf{i}^\top = [i_1, i_2, ..., i_b].$$

- Dann gilt

$$\mathbf{A}_\mathsf{a}\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

INZIDENZMATRIZEN: STRÖME (I)

- Sei eine Schaltung durch $\mathbf{A}_\mathrm{a}$ beschrieben und der Vektor aller Zweigströme des Netzwerks

$$\mathbf{i}^\top = [i_1, i_2, ..., i_b].$$

- Dann gilt

$$\mathbf{A}_\mathrm{a}\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

- weil die Zeile $\mathbf{a}_{k:} = [a_{k1}, a_{k2}, ..., a_{kb}]$ der Inzidenzmatrix $\mathbf{A}_\mathrm{a}$ die richtigen Ströme aufaddiert

$$\mathbf{a}_{k:}\mathbf{i} = \sum_{l=1}^{b} a_{kl} i_l$$

INZIDENZMATRIZEN: STRÖME (I)

- Sei eine Schaltung durch $\mathbf{A}_\mathsf{a}$ beschrieben und der Vektor aller Zweigströme des Netzwerks

$$\mathbf{i}^\top = [i_1, i_2, ..., i_b].$$

- Dann gilt

$$\mathbf{A}_\mathsf{a}\mathbf{i} = \mathbf{0}$$

- weil die Zeile $\mathbf{a}_{k:} = [a_{k1}, a_{k2}, ..., a_{kb}]$ der Inzidenzmatrix $\mathbf{A}_\mathsf{a}$ die richtigen Ströme aufaddiert

$$\mathbf{a}_{k:}\mathbf{i} = \sum_{l=1}^{b} a_{kl} i_l$$

- und die Summe aller am Knoten k zusammenfließenden Ströme muss aufgrund der Kirchhoffschen Knotenregel gleich Null sein, d.h.

$$\mathbf{a}_{k:}\mathbf{i} = 0 \quad \forall k.$$

INZIDENZMATRIZEN: STRÖME (II)

- Die Zeilen der Inzidenzmatrix eines verbundenen Graphen sind linear abhängig, eine Zeile ist überflüssig, z.B.

$$\mathbf{A}_{\mathsf{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

INZIDENZMATRIZEN: STRÖME (II)

- Die Zeilen der Inzidenzmatrix eines verbundenen Graphen sind linear abhängig, eine Zeile ist überflüssig, z.B.

$$\mathbf{A}_\mathrm{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Die **(reduzierte) Inzidenzmatrix** $\mathbf{A} \in \{-1, 0, 1\}^{(n-1)\times b}$ ergibt sich aus $\mathbf{A}_\mathrm{a}$ durch Streichen einer Zeile (z.B. n).

INZIDENZMATRIZEN: STRÖME (II)

- Die Zeilen der Inzidenzmatrix eines verbundenen Graphen sind linear abhängig, eine Zeile ist überflüssig, z.B.

$$\mathbf{A}_\mathsf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Die **(reduzierte) Inzidenzmatrix** $\mathbf{A} \in \{-1, 0, 1\}^{(n-1)\times b}$ ergibt sich aus $\mathbf{A}_\mathsf{a}$ durch Streichen einer Zeile (z.B. n).

- Dieser (n-te) Knoten wird Masseknoten genannt und wird damit implizit auf Potential von 0V gesetzt.

INZIDENZMATRIZEN: STRÖME (II)

- Die Zeilen der Inzidenzmatrix eines verbundenen Graphen sind linear abhängig, eine Zeile ist überflüssig, z.B.

$$\mathbf{A}_{\mathsf{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

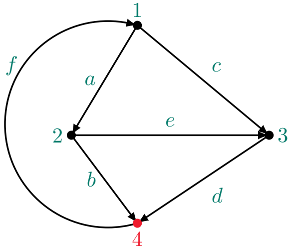
- Die **(reduzierte) Inzidenzmatrix** $\mathbf{A} \in \{-1, 0, 1\}^{(n-1)\times b}$ ergibt sich aus $\mathbf{A}_{\mathsf{a}}$ durch Streichen einer Zeile (z.B. n).
- Dieser (n-te) Knoten wird Masseknoten genannt und wird damit implizit auf Potential von 0V gesetzt.
- Das Knotengesetz gilt weiterhin für die anderen Knoten:

$$\mathbf{Ai} = \mathbf{0}.$$

INZIDENZMATRIZEN: STRÖME (III)

- **Beispiel:** $\mathrm{A_a i} = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \\ i_e \\ i_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Knoten 4: Masse

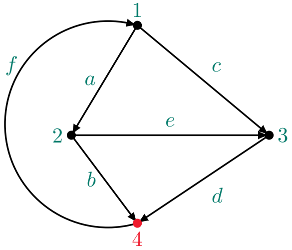
INZIDENZMATRIZEN: STRÖME (III)

- **Beispiel:** $\mathbf{A}_\mathrm{a}\mathbf{i} = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \\ i_e \\ i_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

und $\mathbf{A}\mathbf{i} = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_d \\ i_e \\ i_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Knoten 4: Masse

INZIDENZMATRIZEN: SPANNUNGEN (I)

- Sei $\mathbf{u}$ der Vektor der Zweigspannungen und φ_i die Spannung zwischen dem Knoten i und dem Masseknoten (bzw. **Potentiale**)

INZIDENZMATRIZEN: SPANNUNGEN (I)

- Sei $\mathbf{u}$ der Vektor der Zweigspannungen und φ_i die Spannung zwischen dem Knoten i und dem Masseknoten (bzw. **Potentiale**)
- Vektor der Potentiale: $\boldsymbol{\varphi}^\top = [\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}]$

INZIDENZMATRIZEN: SPANNUNGEN (I)

- Sei $\mathbf{u}$ der Vektor der Zweigspannungen und φ_i die Spannung zwischen dem Knoten i und dem Masseknoten (bzw. **Potentiale**)
- Vektor der Potentiale: $\boldsymbol{\varphi}^\top = [\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}]$
- Wenn Zweig k von Knoten i zum Knoten j zeigt, dann

$$u_k = \varphi_i - \varphi_j,$$

INZIDENZMATRIZEN: SPANNUNGEN (I)

- Sei $\mathbf{u}$ der Vektor der Zweigspannungen und φ_i die Spannung zwischen dem Knoten i und dem Masseknoten (bzw. **Potentiale**)
- Vektor der Potentiale: $\boldsymbol{\varphi}^\top = [\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}]$
- Wenn Zweig k von Knoten i zum Knoten j zeigt, dann

$$u_k = \varphi_i - \varphi_j,$$

- Falls der Knoten i bzw. j der Masseknoten ist, so ergibt sich direkt

$$u_k = -\varphi_j \quad \text{bzw.} \quad u_k = \varphi_i.$$

INZIDENZMATRIZEN: SPANNUNGEN (I)

- Sei $\mathbf{u}$ der Vektor der Zweigspannungen und φ_i die Spannung zwischen dem Knoten i und dem Masseknoten (bzw. **Potentiale**)
- Vektor der Potentiale: $\boldsymbol{\varphi}^\top = [\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}]$
- Wenn Zweig k von Knoten i zum Knoten j zeigt, dann

$$u_k = \varphi_i - \varphi_j,$$

- Falls der Knoten i bzw. j der Masseknoten ist, so ergibt sich direkt

$$u_k = -\varphi_j \quad \text{bzw.} \quad u_k = \varphi_i.$$

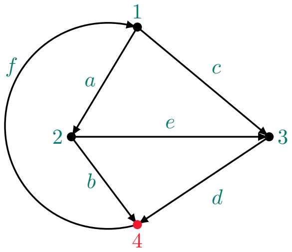
- In Matrixschreibweise gilt also

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\varphi}.$$

INZIDENZMATRIZEN: SPANNUNGEN (II)

- **Beispiel**: $\mathbf{u} = \mathbf{A}_\mathrm{a}^\top \boldsymbol{\varphi}$

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_d \\ u_e \\ u_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Knoten 4: Masse

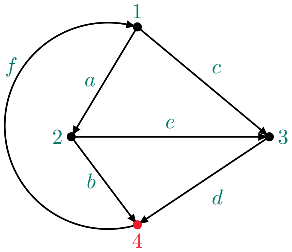
INZIDENZMATRIZEN: SPANNUNGEN (II)

- **Beispiel**: $\mathbf{u} = \mathbf{A}_\mathrm{a}^\top \boldsymbol{\varphi}$

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_d \\ u_e \\ u_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

und $\mathbf{u} = \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\varphi}$

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_d \\ u_e \\ u_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$$



Knoten 4: Masse

ÜBERSICHT

SPARSE TABLEAU ANALYSIS (I)

- Sparse Tableau Analysis (STA) basiert zu jedem Zeitpunkt auf

$$\mathbf{A}\mathbf{i}(t) = \mathbf{0} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{u}(t) = \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\varphi}(t)$$

  sowie den Zweigspannungs/strom-Beziehungen der Bauteile

$$\mathbf{f}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{i}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{i}(t)\right) = \mathbf{0}.$$

SPARSE TABLEAU ANALYSIS (I)

- Sparse Tableau Analysis (STA) basiert zu jedem Zeitpunkt auf

$$\mathbf{A}\mathbf{i}(t) = \mathbf{0} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{u}(t) = \mathbf{A}^\top \boldsymbol{\varphi}(t)$$

  sowie den Zweigspannungs/strom-Beziehungen der Bauteile

$$\mathbf{f}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{i}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{i}(t)\right) = \mathbf{0}.$$

- Differentialgleichungssystem mit den unbekannten und zeitabhängigen Variablen $\mathbf{i}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ und $\boldsymbol{\varphi}(t)$.
- Dimension ist $2b + n - 1$, wenn b wieder die Anzahl der Zweige und n die Anzahl der Knoten des Netzwerkes sind..

SPARSE TABLEAU ANALYSIS (II)

- **Annahme**: Sortierung der Zweige nach Typ, so dass

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{R} & \mathbf{A}_\mathrm{C} & \mathbf{A}_\mathrm{L} & \mathbf{A}_\mathrm{V} & \mathbf{A}_\mathrm{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{i}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_\mathrm{R}^\top & \mathbf{i}_\mathrm{C}^\top & \mathbf{i}_\mathrm{L}^\top & \mathbf{i}_\mathrm{V}^\top & \mathbf{i}_\mathrm{I}^\top \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{u}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_\mathrm{R}^\top & \mathbf{u}_\mathrm{C}^\top & \mathbf{u}_\mathrm{L}^\top & \mathbf{u}_\mathrm{V}^\top & \mathbf{u}_\mathrm{I}^\top \end{bmatrix}$$

SPARSE TABLEAU ANALYSIS (II)

- **Annahme**: Sortierung der Zweige nach Typ, so dass

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}_\mathrm{R} & \mathbf{A}_\mathrm{C} & \mathbf{A}_\mathrm{L} & \mathbf{A}_\mathrm{V} & \mathbf{A}_\mathrm{I}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{i}^\top = \begin{bmatrix}\mathbf{i}_\mathrm{R}^\top & \mathbf{i}_\mathrm{C}^\top & \mathbf{i}_\mathrm{L}^\top & \mathbf{i}_\mathrm{V}^\top & \mathbf{i}_\mathrm{I}^\top\end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{u}^\top = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_\mathrm{R}^\top & \mathbf{u}_\mathrm{C}^\top & \mathbf{u}_\mathrm{L}^\top & \mathbf{u}_\mathrm{V}^\top & \mathbf{u}_\mathrm{I}^\top\end{bmatrix}$$

- **Widerstände**: Leitwertmatrix $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(G_1, \dots, G_{b_\mathrm{R}})$ und Anzahl b_R

$$\mathbf{i}_\mathrm{R} = \mathbf{G}\,\mathbf{u}_\mathrm{R}\ .$$

SPARSE TABLEAU ANALYSIS (II)

- **Annahme**: Sortierung der Zweige nach Typ, so dass

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}_\mathrm{R} & \mathbf{A}_\mathrm{C} & \mathbf{A}_\mathrm{L} & \mathbf{A}_\mathrm{V} & \mathbf{A}_\mathrm{I}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{i}^\top = \begin{bmatrix}\mathbf{i}_\mathrm{R}^\top & \mathbf{i}_\mathrm{C}^\top & \mathbf{i}_\mathrm{L}^\top & \mathbf{i}_\mathrm{V}^\top & \mathbf{i}_\mathrm{I}^\top\end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}^\top = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_\mathrm{R}^\top & \mathbf{u}_\mathrm{C}^\top & \mathbf{u}_\mathrm{L}^\top & \mathbf{u}_\mathrm{V}^\top & \mathbf{u}_\mathrm{I}^\top\end{bmatrix}$$

- **Widerstände**: Leitwertmatrix $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(G_1, \ldots, G_{b_\mathrm{R}})$ und Anzahl b_R

$$\mathbf{i}_\mathrm{R} = \mathbf{G}\,\mathbf{u}_\mathrm{R}\ .$$

- **Kondensatoren:** Kapazitätsmatrix $\mathbf{C} = \mathrm{diag}(C_1, \ldots, C_{b_\mathrm{C}})$ und Anzahl b_C

$$\mathbf{i}_\mathrm{C} = \mathbf{C}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_\mathrm{C}\ ,$$

SPARSE TABLEAU ANALYSIS (II)

- **Annahme**: Sortierung der Zweige nach Typ, so dass

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}_\mathrm{R} & \mathbf{A}_\mathrm{C} & \mathbf{A}_\mathrm{L} & \mathbf{A}_\mathrm{V} & \mathbf{A}_\mathrm{I}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{i}^\top = \begin{bmatrix}\mathbf{i}_\mathrm{R}^\top & \mathbf{i}_\mathrm{C}^\top & \mathbf{i}_\mathrm{L}^\top & \mathbf{i}_\mathrm{V}^\top & \mathbf{i}_\mathrm{I}^\top\end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{u}^\top = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_\mathrm{R}^\top & \mathbf{u}_\mathrm{C}^\top & \mathbf{u}_\mathrm{L}^\top & \mathbf{u}_\mathrm{V}^\top & \mathbf{u}_\mathrm{I}^\top\end{bmatrix}$$

- **Widerstände**: Leitwertmatrix $\mathbf{G} = \mathrm{diag}(G_1, \ldots, G_{b_\mathrm{R}})$ und Anzahl b_R

$$\mathbf{i}_\mathrm{R} = \mathbf{G}\,\mathbf{u}_\mathrm{R}\ .$$

- **Kondensatoren:** Kapazitätsmatrix $\mathbf{C} = \mathrm{diag}(C_1, \ldots, C_{b_\mathrm{C}})$ und Anzahl b_C

$$\mathbf{i}_\mathrm{C} = \mathbf{C}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{u}_\mathrm{C}\ ,$$

- **Spulen:** Induktivitätsmatrix $\mathbf{L} = \mathrm{diag}(L_1, \ldots, L_{b_\mathrm{L}})$ und Anzahl b_L

$$\mathbf{u}_\mathrm{L} = \mathbf{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{i}_\mathrm{L}\ .$$

SPARSE TABLEAU ANALYSIS (III)

Finde $\mathbf{u}, \mathbf{i}, \varphi$ s.d.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_\mathrm{R}\mathbf{i}_\mathrm{R}(t) + \mathbf{A}_\mathrm{C}\mathbf{i}_\mathrm{C}(t) + \mathbf{A}_\mathrm{L}\mathbf{i}_\mathrm{L}(t) + \mathbf{A}_\mathrm{V}\mathbf{i}_\mathrm{V}(t) + \mathbf{A}_\mathrm{I}\mathbf{i}_\mathrm{I}(t) &= \mathbf{0} \;, \\
\mathbf{i}_\mathrm{R}(t) &= \mathbf{G}\mathbf{u}_\mathrm{R}(t) \;, \\
\mathbf{i}_\mathrm{C}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{u}_\mathrm{C}'(t) \;, \\
\mathbf{u}_\mathrm{L}(t) &= \mathbf{L}\mathbf{i}_\mathrm{L}'(t) \;, \\
\mathbf{u}_\mathrm{V}(t) &= \mathbf{u}_\mathrm{s}(t) \;, \\
\mathbf{i}_\mathrm{I}(t) &= \mathbf{i}_\mathrm{s}(t) \;, \\
\mathbf{u}_\mathrm{R}(t) &= \mathbf{A}_\mathrm{R}^\top\varphi(t) \;, \\
\mathbf{u}_\mathrm{C}(t) &= \mathbf{A}_\mathrm{C}^\top\varphi(t) \;, \\
\mathbf{u}_\mathrm{L}(t) &= \mathbf{A}_\mathrm{L}^\top\varphi(t) \;, \\
\mathbf{u}_\mathrm{V}(t) &= \mathbf{A}_\mathrm{V}^\top\varphi(t) \;, \\
\mathbf{u}_\mathrm{I}(t) &= \mathbf{A}_\mathrm{I}^\top\varphi(t) \;.
\end{aligned}
$$

SPARSE TABLEAU ANALYSIS (III)

Finde $\mathbf{u}, \mathbf{i}, \varphi$ s.d.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_\mathrm{R}\mathbf{i}_\mathrm{R}(t) + \mathbf{A}_\mathrm{C}\mathbf{i}_\mathrm{C}(t) + \mathbf{A}_\mathrm{L}\mathbf{i}_\mathrm{L}(t) + \mathbf{A}_\mathrm{V}\mathbf{i}_\mathrm{V}(t) + \mathbf{A}_\mathrm{I}\mathbf{i}_\mathrm{I}(t) &= \mathbf{0}\ ,\\
\mathbf{i}_\mathrm{R}(t) &= \mathbf{G}\mathbf{u}_\mathrm{R}(t)\ ,\\
\mathbf{i}_\mathrm{C}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{u}_\mathrm{C}'(t)\ ,\\
\mathbf{u}_\mathrm{L}(t) &= \mathbf{L}\mathbf{i}_\mathrm{L}'(t)\ ,\\
\mathbf{u}_\mathrm{V}(t) &= \mathbf{u}_\mathrm{s}(t)\ ,\\
\mathbf{i}_\mathrm{I}(t) &= \mathbf{i}_\mathrm{s}(t)\ ,\\
\mathbf{u}_\mathrm{R}(t) &= \mathbf{A}_\mathrm{R}^\top\varphi(t)\ ,\\
\mathbf{u}_\mathrm{C}(t) &= \mathbf{A}_\mathrm{C}^\top\varphi(t)\ ,\\
\mathbf{u}_\mathrm{L}(t) &= \mathbf{A}_\mathrm{L}^\top\varphi(t)\ ,\\
\mathbf{u}_\mathrm{V}(t) &= \mathbf{A}_\mathrm{V}^\top\varphi(t)\ ,\\
\mathbf{u}_\mathrm{I}(t) &= \mathbf{A}_\mathrm{I}^\top\varphi(t)\ .
\end{aligned}
$$

MODIFIZIERTE KNOTENANALYSE (LINEAR)

- Sukzessives Einsetzen ergibt sich das (reduzierte) Problem:

  Finde φ, $\mathbf{i}_\mathrm{L}$, $\mathbf{i}_\mathrm{V}$, so dass für $t \in \mathcal{I}$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A}_\mathrm{C}\mathbf{C}\mathbf{A}_\mathrm{C}^\top \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t) + \mathbf{A}_\mathrm{R}\mathbf{G}\mathbf{A}_\mathrm{R}^\top\varphi(t) + \mathbf{A}_\mathrm{L}\mathbf{i}_\mathrm{L}(t) + \mathbf{A}_\mathrm{V}\mathbf{i}_\mathrm{V}(t) &= -\mathbf{A}_\mathrm{I}\mathbf{i}_\mathrm{s}(t) \\ \mathbf{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{i}_\mathrm{L}(t) - \mathbf{A}_\mathrm{L}^\top\varphi(t) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_\mathrm{V}^\top\varphi(t) &= \mathbf{u}_\mathrm{s}(t)\ . \end{aligned}}$$

  mit Startwerten φ_0, $\mathbf{i}_{\mathrm{L},0}$, $\mathbf{i}_{\mathrm{V},0}$.

- wobei „$\mathbf{0}$” die Nullmatrix/-vektor bezeichnet. Unnötige Zeilen oder Spalten (z.B. keine Widerstände im Netzwerk) werden einfach ignoriert.

MODIFIZIERTE KNOTENANALYSE (MATRIZEN)

- Alternativ in Matrix-/Vektorschreibweise

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{C}\mathbf{C}\mathbf{A}_\mathrm{C}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{M}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(t) \\ \mathbf{i}_\mathrm{L}(t) \\ \mathbf{i}_\mathrm{V}(t) \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{R}\mathbf{G}\mathbf{A}_\mathrm{R}^\top & \mathbf{A}_\mathrm{L} & \mathbf{A}_\mathrm{V} \\ -\mathbf{A}_\mathrm{L}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_\mathrm{V}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(t) \\ \mathbf{i}_\mathrm{L}(t) \\ \mathbf{i}_\mathrm{V}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_\mathrm{I}\mathbf{i}_\mathrm{s}(t) \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{u}_\mathrm{s}(t) \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{r}(t)}$$

MODIFIZIERTE KNOTENANALYSE (MATRIZEN)

- Alternativ in Matrix-/Vektorschreibweise

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{C}\mathbf{C}\mathbf{A}_\mathrm{C}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{M}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(t) \\ \mathbf{i}_\mathrm{L}(t) \\ \mathbf{i}_\mathrm{V}(t) \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{R}\mathbf{G}\mathbf{A}_\mathrm{R}^\top & \mathbf{A}_\mathrm{L} & \mathbf{A}_\mathrm{V} \\ -\mathbf{A}_\mathrm{L}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_\mathrm{V}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(t) \\ \mathbf{i}_\mathrm{L}(t) \\ \mathbf{i}_\mathrm{V}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_\mathrm{I}\mathbf{i}_\mathrm{s}(t) \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{u}_\mathrm{s}(t) \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{r}(t)}$$

- Es kann abstrakt geschrieben werden als eine Art Differentialgleichung

$$\mathbf{M}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t)$$

MODIFIZIERTE KNOTENANALYSE (MATRIZEN)

- Alternativ in Matrix-/Vektorschreibweise

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{C}\mathbf{C}\mathbf{A}_\mathrm{C}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{M}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(t) \\ \mathbf{i}_\mathrm{L}(t) \\ \mathbf{i}_\mathrm{V}(t) \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{R}\mathbf{G}\mathbf{A}_\mathrm{R}^\top & \mathbf{A}_\mathrm{L} & \mathbf{A}_\mathrm{V} \\ -\mathbf{A}_\mathrm{L}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_\mathrm{V}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(t) \\ \mathbf{i}_\mathrm{L}(t) \\ \mathbf{i}_\mathrm{V}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_\mathrm{I}\mathbf{i}_\mathrm{s}(t) \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{u}_\mathrm{s}(t) \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{r}(t)}$$

- Es kann abstrakt geschrieben werden als eine Art Differentialgleichung

$$\mathbf{M}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t)$$

- Gesucht ist die zeitabhängige vektorwertige Funktion

$$\mathbf{x}(t) = [\boldsymbol{\varphi}^\top(t), \mathbf{i}_\mathrm{L}^\top(t), \mathbf{i}_\mathrm{V}^\top(t)]^\top \in \mathbb{R}^{(n-1)+b_\mathrm{L}+b_\mathrm{V}}$$

MODIFIZIERTE KNOTENANALYSE (MATRIZEN)

- Alternativ in Matrix-/Vektorschreibweise

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{C}\mathbf{C}\mathbf{A}_\mathrm{C}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{M}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(t) \\ \mathbf{i}_\mathrm{L}(t) \\ \mathbf{i}_\mathrm{V}(t) \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_\mathrm{R}\mathbf{G}\mathbf{A}_\mathrm{R}^\top & \mathbf{A}_\mathrm{L} & \mathbf{A}_\mathrm{V} \\ -\mathbf{A}_\mathrm{L}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_\mathrm{V}^\top & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(t) \\ \mathbf{i}_\mathrm{L}(t) \\ \mathbf{i}_\mathrm{V}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_\mathrm{I}\mathbf{i}_\mathrm{s}(t) \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{u}_\mathrm{s}(t) \end{bmatrix}}_{=:\mathbf{r}(t)}$$

- Es kann abstrakt geschrieben werden als eine Art Differentialgleichung

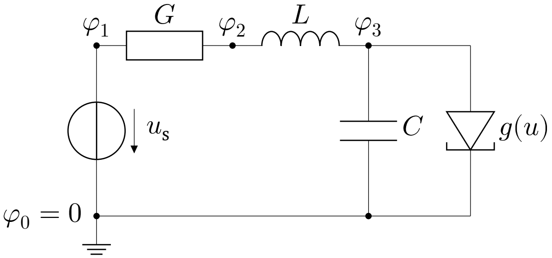
$$\mathbf{M}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t)$$

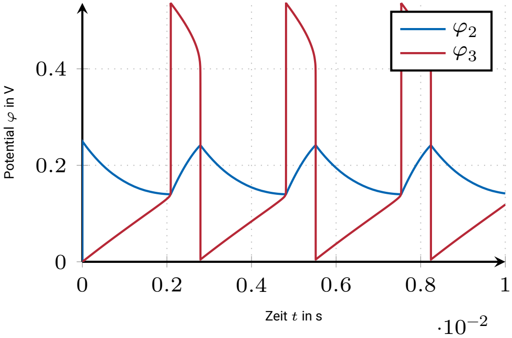
- Gesucht ist die zeitabhängige vektorwertige Funktion

$$\mathbf{x}(t) = [\boldsymbol{\varphi}^\top(t), \mathbf{i}_\mathrm{L}^\top(t), \mathbf{i}_\mathrm{V}^\top(t)]^\top \in \mathbb{R}^{(n-1)+b_\mathrm{L}+b_\mathrm{V}}$$

- Um Verhalten des Systems zu bestimmen, ist Anfangsbedingung $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ zur Zeit t_0 nötig.

TUNNELDIODENOSZILLATOR (I)





Parameter: Induktivität $L = 2 \times 10^{-3}$ H, Kapazität $C = 1 \times 10^{-7}$ F, Leitfähigkeit $G = 1$ S, konstanter Spannungsquelle $u_s = 0.25$ V und Tunneldiode als nichtlinearer Widerstand $g(u) = 1.80048 - 8.766u + 10.8u^2$S.

TUNNELDIODENOSZILLATOR (II)

- Inzidenzmatrizen

$$\mathbf{A}_\mathrm{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_\mathrm{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_\mathrm{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_\mathrm{I} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

TUNNELDIODENOSZILLATOR (II)

- Inzidenzmatrizen

$$\mathbf{A}_{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\mathrm{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\mathrm{L}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\mathrm{V}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

- Unbekannte $\boldsymbol{\varphi}^\top = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$ und zwei Strömen $\mathbf{i}_{\mathrm{I}} = (i_{\mathrm{L}})$ und $\mathbf{i}_{\mathrm{V}} = (i_{\mathrm{V}})$

TUNNELDIODENOSZILLATOR (II)

- Inzidenzmatrizen

$$\mathbf{A}_\mathrm{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_\mathrm{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_\mathrm{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_\mathrm{I} = \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}$$

- Unbekannte $\boldsymbol{\varphi}^\top = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$ und zwei Strömen $\mathbf{i}_\mathrm{I} = (i_\mathrm{L})$ und $\mathbf{i}_\mathrm{V} = (i_\mathrm{V})$
- Gleichungen gegeben durch

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ i_\mathrm{L} \\ i_\mathrm{V} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G & -G & 0 & 0 & 1 \\ -G & G & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g(\varphi_3) & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ i_\mathrm{L} \\ i_\mathrm{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -u_\mathrm{s} \end{bmatrix}$$

TUNNELDIODENOSZILLATOR (II)

- Inzidenzmatrizen

$$\mathbf{A}_\mathrm{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_\mathrm{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_\mathrm{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_\mathrm{I} = \begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}$$

- Unbekannte $\boldsymbol{\varphi}^\top = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$ und zwei Strömen $\mathbf{i}_\mathrm{I} = (i_\mathrm{L})$ und $\mathbf{i}_\mathrm{V} = (i_\mathrm{V})$
- Gleichungen gegeben durch

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ i_\mathrm{L} \\ i_\mathrm{V} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G & -G & 0 & 0 & 1 \\ -G & G & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & g(\varphi_3) & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ i_\mathrm{L} \\ i_\mathrm{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -u_\mathrm{s} \end{bmatrix}$$

- Den Beitrag eines Bauteils nennt man Stempel, z.B. $\begin{bmatrix} G & -G \\ -G & G \end{bmatrix}$.

TUNNELDIODENOSZILLATOR (III)

Netzliste für SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis)

```
V N1 0 0.25
R N1 N2 1
C N3 0 0.1u
L N2 N3 2m
B N3 0 I=1.80048*v(N3)-8.766*v(N3)*v(N3)+10.8*v(N3)*v(N3)*v(N3)
.tran 0.01 uic
.backanno
.end
```

- jede (normale) Zeile legt einen Zweig mit Bauteil fest:

  `Elementtyp  Anfangsknoten  Endknoten  Parameter`

- Anweisung `.tran` definiert eine Zeitbereichsanalyse (transient)
- Anweisung `0.01` definiert das Zeitintervall $[0, 0.01]$s
- Anweisung `uic` legt (Null-) Startwerte fest

ÜBERSICHT

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

- Gewöhnliche Differentialgleichungen (kurz: gDGLn) sind Gleichungssysteme vom Typ

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$$

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

- Gewöhnliche Differentialgleichungen (kurz: gDGLn) sind Gleichungssysteme vom Typ

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$$

- gesuchte Funktion $\mathbf{x} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^n$ ist implizit via Ableitung definiert

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

- Gewöhnliche Differentialgleichungen (kurz: gDGLn) sind Gleichungssysteme vom Typ

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$$

- gesuchte Funktion $\mathbf{x} : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^n$ ist implizit via Ableitung definiert
- gegebene rechte Seite $\mathbf{f} : \mathcal{J} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, z.B.

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}\ \cos(\omega t)$$

  mit einer Matrix $\mathbf{K}$, Vektor $\mathbf{r}$ und Kreisfrequenz ω
- wenn $\mathbf{f}$ nicht von t abhängt, dann nennt man das Problem autonom

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

- Gewöhnliche Differentialgleichungen (kurz: gDGLn) sind Gleichungssysteme vom Typ

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$$

- gesuchte Funktion $\mathbf{x} : \mathcal{J} \to \mathbb{R}^n$ ist implizit via Ableitung definiert
- gegebene rechte Seite $\mathbf{f} : \mathcal{J} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, z.B.

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}\ \cos(\omega t)$$

  mit einer Matrix $\mathbf{K}$, Vektor $\mathbf{r}$ und Kreisfrequenz ω
- wenn $\mathbf{f}$ nicht von t abhängt, dann nennt man das Problem autonom
- $\mathbf{f}$ schreibt jedem Tupel $(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{J} \times \mathbb{R}^n$ die Ableitungen $\mathbf{x}'(t)$ vor

KOMPONENTENWEISE DARSTELLUNG

- Komponentenschreibweise mit $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^\top$ folgt

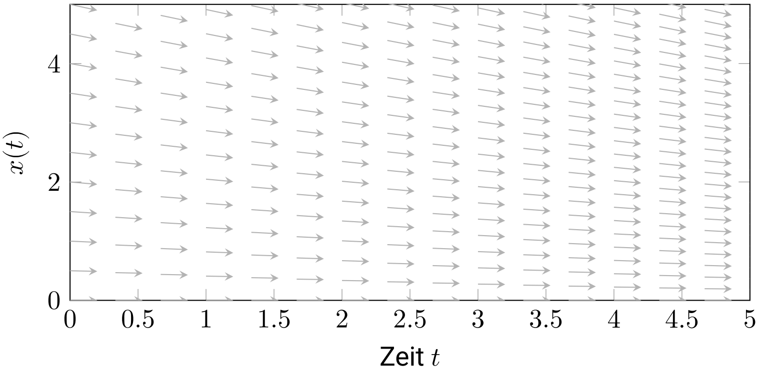
$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ x_2'(t) &= f_2(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \end{aligned}$$

- Eindeutige Lösung erfordert Anfangswert (AW) an Stelle $t_0 \in \mathcal{I}$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

- Man nennt das Problem dann Anfangswertproblem (kurz: AWP)

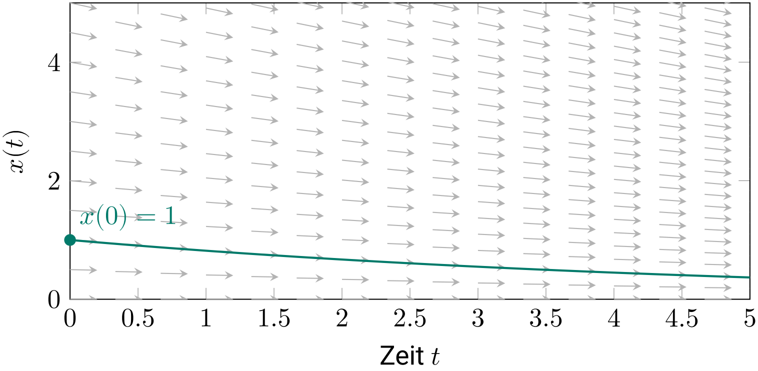
SKALARES BEISPIEL ZU STARTWERTEN



Dahlquist's Gleichung

$$x'(t) = -kx(t) \qquad \text{(hier: } k = 0.2\text{)}$$

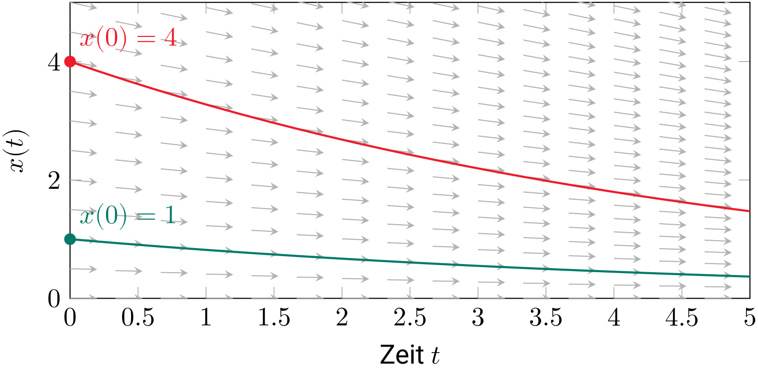
SKALARES BEISPIEL ZU STARTWERTEN



Dahlquist’s Gleichung

$$x'(t) = -kx(t) \qquad \text{(hier: } k = 0.2\text{)}$$

SKALARES BEISPIEL ZU STARTWERTEN



Dahlquist's Gleichung

$$x'(t) = -kx(t) \qquad \text{(hier: } k = 0.2\text{)}$$

LINEARE UND SKALARE GDGLN

- Wir betrachten gDGL vom Typ

$$x'(t) = f(t,x) = -k \cdot x(t) + r(t) \qquad \text{mit} \qquad x(t_0) = x_0$$

wobei $k \in \mathbb{R}$ und r stetig in t, dann ist die Lösung (Beweis: Nachrechnen!)

$$x(t) = e^{-k(t-t_0)} \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{k(s-t_0)} r(s) \, \mathrm{d}s \right)$$

bzw. für konstantes r

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{r}{k} \right) e^{-k(t-t_0)} + \frac{r}{k}.$$

LINEARE UND VEKTORWERTIGE GDGL

- Verallgemeinerung auf Systeme mit n-Gleichungen

$$\mathbf{x}'(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t) \qquad \text{wobei} \quad \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{und} \quad \mathrm{r} \text{ stetig in } t$$

LINEARE UND VEKTORWERTIGE GDGL

- Verallgemeinerung auf Systeme mit n-Gleichungen

$$\mathbf{x}'(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t) \qquad \text{wobei} \quad \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{und} \quad \mathrm{r} \text{ stetig in } t$$

- Wenn $\mathbf{K}$ normal ist, d.h. $\mathbf{K}^\top\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{K}^\top$, dann kann $\mathbf{K}$ unitär diagonalisiert werden

$$\mathbf{K} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{V} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

LINEARE UND VEKTORWERTIGE GDGL

- Verallgemeinerung auf Systeme mit n-Gleichungen

$$\mathbf{x}'(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t) \qquad \text{wobei} \quad \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{und} \quad \mathrm{r} \text{ stetig in } t$$

- Wenn $\mathbf{K}$ normal ist, d.h. $\mathbf{K}^\top\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{K}^\top$, dann kann $\mathbf{K}$ unitär diagonalisiert werden

$$\mathbf{K} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{V} \qquad \text{mit} \quad \mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

- Das System entkoppelt in n einzelne Gleichungen

$$z_i' = -\lambda_i z_i + [\mathbf{V}r(t)]_i \qquad i = 1, \dots, n,$$

wobei die Unbekannte $\mathbf{z}(t) := \mathbf{V}\mathbf{x}(t)$ entsprechend transformiert ist

ANMERKUNGEN (I)

- eine gDGL hoher Ordnung kann man immer als ein System erster Ordnung umschreiben

$$x_1''(t) = f_1(t, x_1(t), x_1'(t)) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= f_1(t, x_1(t), x_2(t)) \end{aligned}$$

- ein nicht-autonomes System $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ kann mit $x_{n+1} := t$ und $g_{n+1} := 1$ autonomisiert werden, weil $x_{n+1}' = 1$ ist

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= g_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), x_{n+1}(t)) \\ x_2'(t) &= g_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), x_{n+1}(t)) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= g_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), x_{n+1}(t)) \\ x_{n+1}'(t) &= 1 \end{aligned}$$

ANMERKUNGEN (II)

- das gDGL-AWP kann als Integration umgeschrieben werden

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}\left(s, \mathbf{x}(s)\right) \, \mathrm{d}s.$$

  Man nennt daher numerische Lösungsverfahren für das gDGL-AWP auch (Zeit-)Integratoren.

- Oft „Massen“-Matrix auf der linken Seite:

$$\mathbf{M}\,\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)),$$

  und im Fall einer affin-linearen Funktion $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = -\mathbf{K}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t)$

$$\mathbf{M}\,\mathbf{x}'(t) + \mathbf{K}\,\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t)$$

  wobei $\mathbf{M}$ nicht vollen Rang haben muss (man spricht von Differential-algebraischen Gleichungen).

ÜBERSICHT

FREQUENZBEREICH (I)

- Anregung oft mit (Ko-)Sinus, z.B. aufgrund von Wechselstrom.
- Beschreibung durch Amplitude, Kreisfrequenz und Phasenwinkel.
- Betrachte die skalare lineare Gleichung

$$x'(t) = f(t, x) := -k \cdot x(t) + r(t)$$

mit Startwert $x(0) = x_0$, wobei $k > 0$ und Anregung

$$r(t) = \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}.$$

FREQUENZBEREICH (I)

- Anregung oft mit (Ko-)Sinus, z.B. aufgrund von Wechselstrom.
- Beschreibung durch Amplitude, Kreisfrequenz und Phasenwinkel.
- Betrachte die skalare lineare Gleichung

$$x'(t) = f(t,x) := -k \cdot x(t) + r(t)$$

mit Startwert $x(0) = x_0$, wobei $k > 0$ und Anregung

$$r(t) = \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}.$$

- Lösung

$$x(t) = \mathrm{e}^{-kt}\left(x_0 - \frac{k}{k^2+\omega^2}\right) + \frac{k\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)}{k^2+\omega^2}.$$

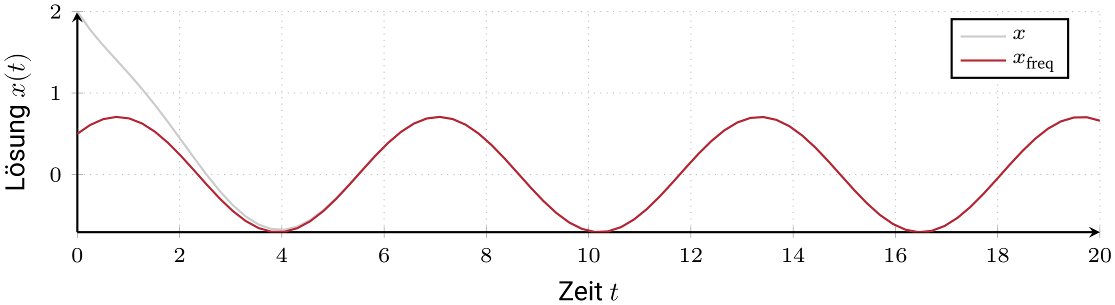
- Zwei Teile: Dämpung des Startwerts und Schwingung

FREQUENZBEREICH (II)

- Einsetzen des Phasors $\underline{x}$ ergibt

$$x_{\mathrm{freq}}(t) = \mathrm{e}^{-kt}\left(x_0 - \frac{k}{k^2+\omega^2}\right) + \frac{k\cos(\omega t) + \omega\sin(\omega t)}{k^2+\omega^2}.$$

- Vergleich von Zeit- und Frequenzbereich für $k = \omega = 1$ und $x(0) = 2$



FREQUENZBEREICH (III)

- Eingeschwungenen: setze $x(t)$ als Schwingung mit unbekanntem Phasor $\underline{x} := \hat{x}\mathrm{e}^{j\vartheta}$ an

$$x_{\text{freq}}(t) = \operatorname{Re}\left\{\underline{x}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\},$$

FREQUENZBEREICH (III)

- Eingeschwungenen: setze $x(t)$ als Schwingung mit unbekanntem Phasor $\underline{x} := \hat{x}\mathrm{e}^{j\vartheta}$ an

$$x_{\text{freq}}(t) = \operatorname{Re}\left\{\underline{x}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\},$$

- zeitliche Ableitung von $x(t)$ lassen sich als Realteile darstellen

$$x'_{\text{freq}}(t) = \operatorname{Re}\left\{j\omega\underline{x}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} \quad \text{und} \quad \cos(\omega t) = \operatorname{Re}\left\{\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}.$$

FREQUENZBEREICH (III)

- Eingeschwungenen: setze $x(t)$ als Schwingung mit unbekanntem Phasor $\underline{x} := \hat{x}\mathrm{e}^{j\vartheta}$ an

$$x_{\text{freq}}(t) = \operatorname{Re}\left\{\underline{x}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\},$$

- zeitliche Ableitung von $x(t)$ lassen sich als Realteile darstellen

$$x'_{\text{freq}}(t) = \operatorname{Re}\left\{j\omega\underline{x}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} \quad \text{und} \quad \cos(\omega t) = \operatorname{Re}\left\{\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}.$$

- Einsetzen in die Differentialgleichung $x'(t) + k \cdot x(t) - r(t) = 0$ liefert

$$\operatorname{Re}\left\{(j\omega\underline{x} + k\underline{x} - 1)\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} = 0$$

FREQUENZBEREICH (III)

- Eingeschwungenen: setze $x(t)$ als Schwingung mit unbekanntem Phasor $\underline{x} := \hat{x}\mathrm{e}^{j\vartheta}$ an

$$x_{\text{freq}}(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{x}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\},$$

- zeitliche Ableitung von $x(t)$ lassen sich als Realteile darstellen

$$x'_{\text{freq}}(t) = \mathrm{Re}\left\{j\omega\underline{x}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} \quad \text{und} \quad \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}.$$

- Einsetzen in die Differentialgleichung $x'(t) + k \cdot x(t) - r(t) = 0$ liefert

$$\mathrm{Re}\left\{(j\omega\underline{x} + k\underline{x} - 1)\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} = 0$$

- Lösung durch Umstellen der Gleichung

$$j\omega\underline{x} + k\underline{x} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \underline{x} = \frac{1}{k + j\omega}.$$

SYSTEME IM FREQUENZBEREICH

- vektorwertiges Problem (inkl. algebraischen Gleichungen)

$$\mathbf{M}\mathbf{x}'(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t) \qquad \text{mit } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

SYSTEME IM FREQUENZBEREICH

- vektorwertiges Problem (inkl. algebraischen Gleichungen)

$$\mathbf{M}\mathbf{x}'(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t) \qquad \text{mit } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

- Frequenzbereichsannahme $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\mathrm{freq}}(t)$

$$\mathrm{Re}\left\{(\mathbf{M}j\omega\underline{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{r}})\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} = \mathbf{0}$$

SYSTEME IM FREQUENZBEREICH

- vektorwertiges Problem (inkl. algebraischen Gleichungen)

$$\mathbf{M}\mathbf{x}'(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t) \qquad \text{mit } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

- Frequenzbereichsannahme $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{freq}}(t)$

$$\mathrm{Re}\left\{(\mathbf{M}j\omega\underline{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{r}})\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} = \mathbf{0}$$

- Auflösen nach $\underline{\mathbf{x}}$ ergibt

$$(\mathbf{M}j\omega + \mathbf{K})\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{r}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\mathbf{x}} = (\mathbf{M}j\omega + \mathbf{K})^{-1}\,\underline{\mathbf{r}}$$

SYSTEME IM FREQUENZBEREICH

- vektorwertiges Problem (inkl. algebraischen Gleichungen)

$$\mathbf{M}\mathbf{x}'(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t) \qquad \text{mit } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

- Frequenzbereichsannahme $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\text{freq}}(t)$

$$\mathrm{Re}\left\{(\mathbf{M}j\omega\underline{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{r}})\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} = \mathbf{0}$$

- Auflösen nach $\underline{\mathbf{x}}$ ergibt

$$(\mathbf{M}j\omega + \mathbf{K})\,\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{r}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\mathbf{x}} = (\mathbf{M}j\omega + \mathbf{K})^{-1}\,\underline{\mathbf{r}}$$

- Rekonstruktion der Zeitbereichslösung

$$\mathbf{x}_{\text{freq}}(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{\mathbf{x}}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}$$