МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Крымский Федеральный Университет им. В. И. Вернадского»

Физико-технический институт

Кафедра компьютерной инженерии и моделирования

Лабораторная работа № 2

«количество информации при неполной достоверности сообщений»

по дисциплине

«Теория информации и кодирование»

Выполнил:
Студент 3 курса
Направления подготовки
09.03.04 «Программная
инженерия»

ПИ-231(2)
Покидько М.С.
Проверил:
Таран Е.П.
«__» __________ 20_ г.

Оценка: ___________

Подпись: __________

Симферополь, 2025

Цель работы: Разработать программное обеспечение для моделирования канала с помехами и рассчитать количество информации, приходящее к получателю, при неполной достоверности сообщений.

Техническое задание: На вход информационного устройства поступает совокупность дискретных сообщений x_i, где $i=1 \div N$.

1. **Параметр:** Количество дискретных сообщений **N=55** (Вариант №7).
2. **Вероятности на входе $p(x_i)$:** Задаются случайным образом.
3. **Условие канала:** Вероятности безошибочной передачи сообщения $P(y_i | x_i)$ составляют **не менее 70%** (≥ 0.7).
4. **Эксперименты:** Провести комплекс **не менее 6 численных экспериментов**.

Основные формулы:

Энтропия как мера неопределенности для всей совокупности дискретных случайных сообщений

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{N} p(x_i)\log_2 p(x_i)$$

Вероятности появления дискретных сообщений должны удовлетворять следующему условию:

$$\sum_{i=1}^{N} p(x_i) = 1 \qquad (1.3).$$

Совокупность появления дискретных сообщений на выходе $\{y_j\}$ определяется вероятностями p(yj) в соответствии со следующим выражением:

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{N} p(x_i) \cdot p(x_i / y_j)$$

Условная энтропия, характеризующая остаточную неопределенность принятого сообщения относительной переданного, определяется соотношением:

$$H(X/Y) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} p(x_i, y_j)\log_2 p(x_i / y_j)$$

Разработанная программа:

```
import numpy as np
import math
import pandas as pd
from typing import Dict, Any

# Параметры для Варианта №7
N = 55
NUM_EXPERIMENTS = 6

def log2(x: float) -> float:
    """Безопасный расчет log2(x), возвращает 0 для x=0."""
    return math.log2(x) if x > 0 else 0

def calculate_probabilities_and_information(N: int) -> Dict[str, Any]:
    """Выполняет один численный эксперимент для заданного N."""

    # 1. Генерация массива входных вероятностей P(X) (p(xi))
    r_x = np.random.uniform(0.01, 1.0, N)
    P_X = r_x / np.sum(r_x)

    # 2. Генерация матрицы переходных вероятностей P(Y|X) (P(yj|xi)) (N x N)
    P_Y_X = np.zeros((N, N))
    for i in range(N):
        # Вероятность безошибочной передачи p(yi|xi) >= 0.70
        P_Y_X[i, i] = np.random.uniform(0.70, 1.0)
        R_i = 1.0 - P_Y_X[i, i]

        # Распределение оставшейся вероятности на ошибки
        r_error = np.random.uniform(0.0, 1.0, N - 1)
        r_error_normalized = r_error / np.sum(r_error) * R_i

        k = 0
        for j in range(N):
            if i != j:
                P_Y_X[i, j] = r_error_normalized[k]
                k += 1

    # 3. Расчет матрицы совместных вероятностей P(X,Y) (p(xi, yj))
    P_X_Y = P_X[:, np.newaxis] * P_Y_X

    # 4. Расчет массива выходных вероятностей P(Y) (p(yj))
    P_Y = np.sum(P_X_Y, axis=0)

    # 5. Расчет энтропий
    H_X = -np.sum(P_X * np.array([log2(p) for p in P_X]))
    H_Y = -np.sum(P_Y * np.array([log2(p) for p in P_Y]))
    H_X_Y = -np.sum(P_X_Y * np.array([[log2(p) for p in row] for row in P_X_Y]))
    H_Y_X = H_X_Y - H_X # Энтропия помех (Шум)
    H_X_Y_cond = H_X_Y - H_Y # Остаточная неопределенность (Потери)

    # 6. Количество информации
    I_X_Y = H_X + H_Y - H_X_Y

    return {
        "H(X)": H_X,
        "H(Y)": H_Y,
        "H(X,Y)": H_X_Y,
```

```python
        "H(Y|X)": H_Y_X,
        "H(X|Y)": H_X_Y_cond,
        "I(X,Y)": I_X_Y,
        "P_X": P_X,
        "P_Y": P_Y,
        "P_Y_X": P_Y_X,
        "P_X_Y": P_X_Y
    }

results = []
for _ in range(NUM_EXPERIMENTS):
    results.append(calculate_probabilities_and_information(N))

# Сбор результатов в DataFrame для удобства вывода
results_df = pd.DataFrame([
    {
        "H(X)": res["H(X)"],
        "H(Y)": res["H(Y)"],
        "H(X,Y)": res["H(X,Y)"],
        "H(Y|X)": res["H(Y|X)"],
        "H(X|Y)": res["H(X|Y)"],
        "I(X,Y)": res["I(X,Y)"],
    } for res in results
])

# Расчет средних значений
avg_results = results_df.mean().rename("Среднее значение")
results_df = pd.concat([results_df, avg_results.to_frame().T]).round(4)
results_df.index = [f"Эксперимент №{i+1}" for i in range(NUM_EXPERIMENTS)] + ["СРЕДНЕЕ"]

# --- Вывод результатов ---
first_res = results[0]
print(f"--- РЕЗУЛЬТАТЫ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ №2 (Вариант №7, N={N}, 6 экспериментов) ---")
print("======================================================================\n")
print("### 3.1. Исходные массивы вероятностей для Эксперимента №1")
print("Массив P(X) и P(Y) содержат 55 элементов. Ниже приведена вырезка для наглядности:")
print("\n**Массив входных вероятностей P(X) (Первые 10 элементов):**")
print(np.around(first_res['P_X'][:10], 8))
print("\n**Массив выходных вероятностей P(Y) (Первые 10 элементов):**")
print(np.around(first_res['P_Y'][:10], 8))
print("\n----------------------------------------------------------------------\n")
print("### 3.2. Фрагменты расчетных матриц (6x6) для Эксперимента №1")
print("Матрицы P(Y|X) и P(X,Y) имеют размер 55x55. Для отчета достаточно представить фрагмент:")

# Фрагмент матрицы переходных вероятностей P(Y|X)
print("\n**Матрица переходных вероятностей P(Y|X) (фрагмент 6x6):**")
print(np.around(first_res['P_Y_X'][:6, :6], 5))

# Фрагмент матрицы совместных вероятностей P(X,Y)
print("\n**Матрица совместных вероятностей P(X,Y) (фрагмент 6x6):**")
print(np.around(first_res['P_X_Y'][:6, :6], 8))
print("\n----------------------------------------------------------------------\n")
print("### 3.3. Результаты численных экспериментов (Сводная таблица)")
print("Таблица содержит рассчитанные значения всех необходимых энтропий и количества информации для 6 экспериментов и их средние значения:")


# Вывод таблицы результатов
print(results_df.to_markdown(floatfmt=".4f"))
```

5.1. Алгоритм работы программы

1. Генерация массива входных вероятностей P(X) с нормировкой ∑p(xi)=1.
2. Генерация матрицы переходных вероятностей P(Y|X) (55×55) с условием P(yi|xi)≥0.7 на диагонали.
3. Расчет матрицы совместных вероятностей P(X,Y)=P(X)·P(Y|X).
4. Расчет энтропий H(X), H(Y), H(X,Y).
5. Расчет условных энтропий H(Y|X) и H(X|Y).
6. Расчет количества информации I(X,Y).
7. Повторение шагов 1-6 **6 раз** для усреднения результатов.

6. Результаты численных экспериментов

```
--- РЕЗУЛЬТАТЫ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ №2 (Вариант №7, N=55, 6 экспериментов) ---
======================================================================

### 3.1. Исходные массивы вероятностей для Эксперимента №1
Массив P(X) и P(Y) содержат 55 элементов. Ниже приведена вырезка для наглядности:

**Массив входных вероятностей P(X) (Первые 10 элементов):**
[0.01632658 0.02377645 0.01780946 0.0055197  0.02720993 0.00838088
 0.00832879 0.02380389 0.03598018 0.00114638]

**Массив выходных вероятностей P(Y) (Первые 10 элементов):**
[0.01496494 0.02230589 0.0162857  0.00823689 0.02791523 0.01057745
 0.00985047 0.02024893 0.0318684  0.00388437]

----------------------------------------------------------------------

### 3.2. Фрагменты расчетных матриц (6x6) для Эксперимента №1
Матрицы P(Y|X) и P(X,Y) имеют размер 55x55. Для отчета достаточно представить фрагмент:

**Матрица переходных вероятностей P(Y|X) (фрагмент 6x6):**
[[7.2111e-01 3.5400e-03 8.3100e-03 7.4300e-03 9.5800e-03 5.3000e-04]
 [2.5000e-03 8.0767e-01 6.3800e-03 4.9000e-03 1.1100e-03 4.0400e-03]
 [8.2700e-03 8.4900e-03 7.2435e-01 3.4600e-03 5.9100e-03 1.5700e-03]
 [3.0000e-05 2.0000e-05 7.0000e-05 9.9754e-01 4.0000e-05 7.0000e-05]
 [2.2500e-03 2.1100e-03 1.6800e-03 1.0600e-03 9.1232e-01 6.2000e-04]
 [4.2000e-04 9.5000e-04 3.7000e-04 3.0000e-05 5.3000e-04 9.6076e-01]]

**Матрица совместных вероятностей P(X,Y) (фрагмент 6x6):**
[[1.177321e-02 5.772000e-05 1.356600e-04 1.212300e-04 1.564100e-04
  8.690000e-06]
 [5.933000e-05 1.920355e-02 1.516700e-04 1.164000e-04 2.636000e-05
  9.617000e-05]
 [1.472500e-04 1.511700e-04 1.290021e-02 6.153000e-05 1.052600e-04
  2.793000e-05]
 [1.700000e-07 1.100000e-07 3.900000e-07 5.506110e-03 2.100000e-07
  3.700000e-07]
 [6.114000e-05 5.753000e-05 4.572000e-05 2.878000e-05 2.482420e-02
  1.690000e-05]
 [3.480000e-06 7.920000e-06 3.070000e-06 2.300000e-07 4.450000e-06
  8.052030e-03]]

----------------------------------------------------------------------

### 3.3. Результаты численных экспериментов (Сводная таблица)
Таблица содержит рассчитанные значения всех необходимых энтропий и количества информации для 6 экспериментов и их средние значения:
|                | H(X)  |  H(Y)  |  H(X,Y)  |  H(Y|X)  |  H(X|Y)  |  I(X,Y)  |
|:---------------|-------:|-------:|---------:|---------:|---------:|---------:|
| Эксперимент №1 | 5.4971 | 5.5999 |   7.0131 |   1.5161 |   1.4132 |   4.0838 |
| Эксперимент №2 | 5.5921 | 5.6423 |   6.8984 |   1.3063 |   1.2561 |   4.3360 |
| Эксперимент №3 | 5.5424 | 5.6084 |   6.9636 |   1.4211 |   1.3552 |   4.1873 |
| Эксперимент №4 | 5.4116 | 5.5367 |   6.9181 |   1.5065 |   1.3814 |   4.0302 |
| Эксперимент №5 | 5.4808 | 5.5792 |   6.9145 |   1.4337 |   1.3353 |   4.1455 |
| Эксперимент №6 | 5.5379 | 5.6172 |   7.0217 |   1.4839 |   1.4046 |   4.1333 |
| СРЕДНЕЕ        | 5.5103 | 5.5973 |   6.9549 |   1.4446 |   1.3576 |   4.1527 |
```

На основе проведенного комплекса численных экспериментов для дискретного канала с помехами (Вариант №7, N=55) получены следующие выводы:

1. **Факт наличия помех:**
    - Было установлено, что **Остаточная неопределенность ⟨H(X|Y)⟩** (≈avg_H_X_Y_cond:.4f бит) имеет ненулевое значение. Это является прямым доказательством того, что канал связи является **недостоверным (зашумленным)**, и получатель не может полностью устранить неопределенность относительно переданного сообщения.
    - Ненулевое значение **Энтропии помех ⟨H(Y|X)⟩** (≈avg_H_Y_X:.4f бит) подтверждает, что сам канал вносит искажения.
2. **Сравнение энтропий:**
    - Среднее количество информации, приходящее к получателю, **⟨I(X,Y)⟩** (≈avg_I_X_Y:.4f бит) **меньше**, чем средняя априорная неопределенность источника **⟨H(X)⟩** (≈avg_H_X:.4f бит).
    - Это уменьшение точно соответствует величине остаточной неопределенности ⟨H(X|Y)⟩, согласно основному соотношению теории информации: $I(X,Y)=H(X)-H(X|Y)$.
3. **Заключение:**
    - Цель лабораторной работы достигнута. Разработанное программное обеспечение позволило смоделировать канал с заданными параметрами и произвести расчет всех необходимых информационных характеристик.
    - Результаты экспериментов подтверждают теоретическое положение о том, что при наличии помех в канале **количество информации, получаемое приемником, уменьшается** на величину информационных потерь.

Вывод: В процессе выполнения лабораторной работы было выполнено несколько численных экспериментов. Полученное среднее количество информации меньше энтропии на входе, что говорит о том, что некоторые данные могут быть утеряны при наличии помех в процессе передачи и приема.