Домашнее задание по АМВ

771 группа, Христолюбов Максим

5 мая 2019 г.

1 Задача 1

Двойственной задачей будет минимизация $3a + 5b$, с ограничениями $2a + b - c = 1$, $a + 3b - d = 1$, $a,b,c,d \geq 0$. Решением двойственной задачи является $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{5}$, при котором $3a+5b = \frac{11}{5}$. При решении прямой задачи $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{7}{5}$, $x+y = \frac{11}{5}$. Так как значения функций решений прямой и обратной задачи совпадают, то эти решения оптимальны.

2 Задача 2

Проблема работы стандартного алгоритма поиска максимального потока в такой сети с потерями в том, что ребра и значения мощности потока на них выбираются случайным образом (с помощью поиска в глубину). Поэтому на каждом из шаге алгоритм находит не оптимальный, с точки зрения потока с потерями, путь, и обращает ребра, не входящие в максимальный поток. **Если на каждом шаге выбора пути, по которому потечет поток, выбирать путь, который сохраняет максимальную часть потока, идущего по нему, из всех путей из s до t**, тогда алгоритм будет работать на сети с потерями. Действительно, выбор пути в изначальной задаче ни на что не влияет, поэтому выбор пути с максимальным коэффициентом сохранности не нарушит корректности и мощность будет максимальна. Однако теперь получившийся поток будет "наилучшего"качества в том смысле, что вершины t достигнет максимальная его часть.

Часть потока, которая сохранится, определяется произведением ϵ_v вершин, которые входят в путь. Для того, чтобы найти путь с минимальными потерями можно использовать модификацию алгоритма Дейкстры поиска кратчайшего пути для графа с весами на вершинах, а не на ребрах. Тогда в вершинах нужно установить весами коэффициенты потерь. От того что тут произведение, а не сумма весов, ничего не измениться (можно взять логарифмы). Алгоритм Дейкстры для вершин с весами можно получить присвоив всем ребрам нулевые веса, а каждую вершину заменить на ребро с соответствующим весом, в которое с одной стороны входят все ребра, входящую в изначальную вершину, а с другой стороны выходят все ребра, исходящие из исходной вершины.

3 Задача 3

При оптимальном решении для одной из этих точек (для k-ой) выполняется неравенство $|ax_k + by_k + c| \geq |ax_i + by_i + c|$, то есть от нее отклонений максимально. Если знать, что это за точка, то можно решить задачу линейного программирования по минимизации $|x_k a + y_k b + c|$ (что эквивалентно последовательному решению двух задач линейного программирования: по минимизации выражения $x_k a + y_k b + c$ с условием, что оно не меньше

0, и по максимизации $x_k a + y_k b + c$ с условием, что оно не больше 0), с условием, что $|x_k a + y_k b + c| \geq |x_i a + y_i b + c|$. Ее ответ как раз будет ответом на задачу задания.

Если для какой из 7 точек отклонение от оптимального решения максимально неизвестно, то можно просто перебрать $k = 1..7$, а потом выбрать минимальное значение $|x_k a + y_k b + c|$. Таким образом, решение сводится к решению $7 = 28$ задач линейного программирования (7 точек, 2 на раскрытие одного модуля, 2 на другого).

4 Задача 4

Многогранник органичен 6 плоскостями, которые задаются уравнениями $x_1 = 0, x_1 = 1, x_2 = \epsilon x_1, x_2 = 1 - \epsilon x_1, x_3 = \epsilon x_2, x_3 = 1 - \epsilon x_2$. Точки пересечения этих плоскостей можно выстроить в требуемом порядке: $(0{,}0{,}0) \to (1{,}\epsilon{,}\epsilon^2) \to (1{,}1 - \epsilon{,}\epsilon - \epsilon * 2) \to (0{,}1{,}\epsilon) \to (0{,}1{,}1 - \epsilon) \to (1{,}1 - \epsilon{,}1 - \epsilon + \epsilon^2) \to (1{,}\epsilon{,}1 - \epsilon^2) \to (0{,}0{,}1)$.

5 Задача 5

Покажем, что невозможно ситуация, когда обе системы либо не совместны одновременно, либо обе совместны, а значит, одна совместна тогда и только тогда, когда не совместна другая.

Если они обе не совместны, то можно взять $x = 0$, $y > 0$, удовлетворяющий $A^T y \geq 0$, и для них будет выполняться $Ax > b$, а значит, $(Ax)^T y > b^T y$. Тогда $0 = x^T A^T y > b^T y \geq 0$ — противоречие.

Если они обе совместны, тогда, так как $y \geq 0$,$b \geq Ax$, $b^T y \geq (xA)^T y$. А из $x > 0$,$A^T y \geq 0$ следует $x^T A^T y \geq 0$. Тогда $0 > b^T y \geq x^T A^T y \geq 0$ — противоречие.

6 Задача 6

Аналогично, покажем, что системы не могут быть одновременно совместны и не совместны.

Если обе не совместны, то возьмем $x \geq 0$,$y > 0$, для них $Ax > 0$, значит, $y^T Ax \geq 0$, так же $A^T y \leq 0$, значит, $x^T A^T y \leq 0$. Тогда $0 < y^T Ax = x^T Ay \leq 0$ — противоречие.

Если обе системы совместны, то $y^T Ax \leq 0$, так же $x^T A^T y > 0$. Тогда $0 \geq y^T Ax = x^T A^T y > 0$ — противоречие.

7 Задача 7

К задаче $\left\{ \begin{array}{ccc} c^T x & \to & max \\ Ax & \leq & b \end{array} \right.$ двойственной является задача $\left\{ \begin{array}{ccc} b^T y & \to & min \\ yA & = & c \\ y & \geq & 0 \end{array} \right.$, а двойственной к ней $\left\{ \begin{array}{ccc} (c^*)^T z & \to & max \\ (A\ E)z & = & b^* \\ z & \geq & 0 \end{array} \right.$, где c^* — вектор c, дополненный 0, в тех компонентах, которые умножаются на неравенства из $y \geq 0$. Размерность z не совпадает с размерностью x, так как условий в двойственной задаче (а их количество и равно количеству компонент z) к изначальной задаче больше, чем переменных в прямой задаче из-за $y \geq 0$.

Но если отдельно работать с неравенствами при нахождении двойственной к двойственной задаче, то получиться$\left\{ \begin{array}{ccc} c^T z & \to & max \\ Ax & \leq & b \end{array} \right.$, что совпадает с исходной задачей.