Домашнее задание по АМВ

771 группа, Христолюбов Максим

1 марта 2019 г.

*Я только в конце заметил, что ψ — это конкретная функция из файлика а не абстрактная функция, я в подводящих задачах $(i)(ii)$ везде использовал произвольную придуманную функцию.

1 Задача 1

Любой дезъюнкт, в котором менее 3 литералов можно свести к конъюнкции дезъюнктов из ровно 3 литералов:
$x \vee y = (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \overline{z})$
$x = (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z})$
Значит, любой $x \in$3-SAT можно свести к $f(x) \in$РОВНО-3-ВЫПОЛНИМОСТЬ, причем длина каждого дезъюнкта увеличиться не более, чем в константное кол-во раз, следовательно $f(|x|) \leq c|x|$ и сводимость полиномиальна.

2 Задача 2

2.1 34 (i)

Пусть $A_\psi = \{\{x_1,\overline{x}_1\},\{x_2,\overline{x}_2\},\{x_3,\overline{x}_3\},\{x_1,x_2,\overline{x}_3\},\{\overline{x}_1,x_2,x_3\}\}$. Тогда его протыкающее множество будет $\{x_1,x_2,x_3\}$.

2.2 34 (ii)

Покажем, что мощность любого протыкающего множества системы A_ψ, построенного соответствующим образом, не превышает n. Это действительно так, ведь в множествах системы есть n множеств вида $\{x_i,\overline{x}_i\}$. В протыкающее множество должен входить как минимум один элемент из каждого из них, причем в них нет общих переменных. Значит, в протыкающее множество обязательно входит n разных элементов, каждый из которых взят из своего $\{x_i,\overline{x}_i\}$.

2.3 Сведение

По формуле из SAT, предварительно переведя ее в КНФ, можно построить по соответствующей схеме систему множеств A_ψ. Покажем, что A_ψ имеет протыкающее множество мощности n тогда и только тогда, когда формула выполнима.

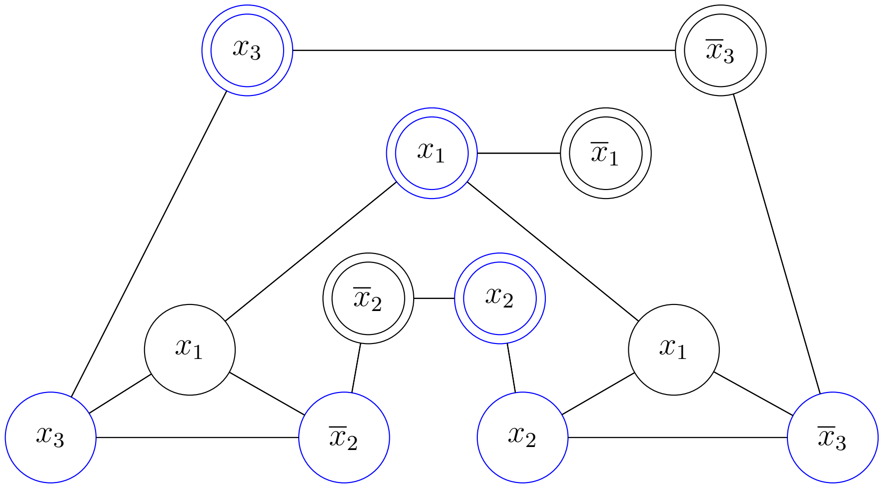
Если формула выполнима, тогда существует такой набор, который обращает ее в 1. На его основе можно построить протыкающее множество: те переменные, которые входят в набор как 1 включим в протыкающее множество, а те, что входят как 0, включим с отрицанием $\overline{x}_i$. Полученное множество, очевидно, протыкает все $\{x_i, \overline{x}_i\}$. Все переменные, входящие в это множество по построению обращаются на наборе в 1, а так как в каждом дезъюнкте есть хотя бы 1 переменная, равная 1, в силу выполнимости формулы на этом наборе, то во все множества системы (которые соответствуют дезъюнктам) входит хотя бы 1 переменная из полученного множество, значит, оно — протыкающее множество.

Если существует протыкающее множество мощности n, то в него входит или x_i, или $\overline{x}_i$ для каждого i. Рассмотрим набор, на котором все элементы протыкающего множества равны 1 ($x_i = 1$, если в нем x_i, и $x_i = 0$, если в нем $\overline{x}_i$). Тогда в каждое множество системы будет входить как минимум одна переменная равная 1, а значит, все дезъюнкты будут в себя включать хотя бы одну 1 и сами будут равны 1. Значит, и вся КНФ будет равна 1, то есть существует набор обращающий ее в 1, и формула выполнима.

3 Задача 3

3.1 35 (i)

В приведенном нижу графе вершины в двойных кружках — литеральные, в одинарных кружках — дезъюнктивные, а закрашенные в синий вершины — вершины, входящие в $(n + 2m)$-вершинное покрытие, n — кол-во литералов, m — кол-во дезъюнктов.



3.2 35 (ii)

Мощность любого покрытия не менее $n + 2m$, так как в графе есть n ребер, соединяющие литералы и их отрицания, их всех нужно покрыть, а значит, в вершинное подпокрытие обязательно входит литерал или его отрицание, это n вершин. Так же обязательно нужно покрыть ребра, соединяющие дезъюнктные вершины, поэтому в вершинное покрытие должны входить минимум 2 из каждой тройки вершин, образованной каждым дезъюнктом, а это $2m$ вершин. Значит, мощность вершинного покрытия не меньше $n + 2m$.

3.3 Сведение

Покажем, что если КНФ выполнима, то найдется вершинное покрытие мощностью $n + 2m$ в графе, построенным как указано в задаче 35. Так как КНФ выполнима, то в каждый дезъюнкт входит как минимум 1 переменная, обращающаяся в 1 на этои наборе. В таком случае можно выбрать покрытие так: те литеральные вершины, которые имеют значение 1 на наборе, обращающем КНФ в тождество, нужно включить в покрытие. Так же нужно включить по 2 дезъюнктивные вершины из каждого дезъюнкта. Поскольку в каждом дезъюнкте есть вершина, обращающаяся в 1, то она соединена ребром с литеральной вершиной, уже входящей в покрытие, а значит, ребро между ними уже покрыто. Поэтому включив в покрытие 2 остальные вершины дезъюнкта, можно добиться покрытия всех ребер между литеральными и дезъюнктивными вершинами. Ребра только между литеральными и только между дезъюнктивными уже покрыты. Значит, такое $(n + 2m)$-вершинное покрытие в таком графе существует.

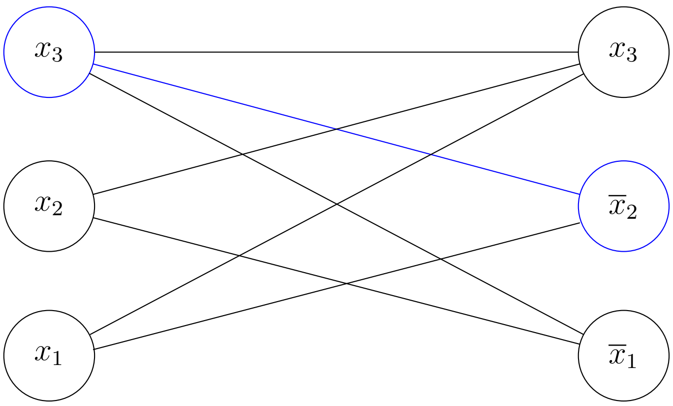
Ранее было показано, что размеры любого вершинного покрытия не меньше $n+2m$, а значит, если нашлось такое покрытие, то оно включает по 2 вершины из каждого дезъюнкта и по 1 из каждой пары литеральных вершины. Можно составить набор, обращающий КНФ в 1: если в паре литеральных вершин выбрана x_i в покрытие, то $x_i = 1$, иначе $x_i = 0$. На этом наборе в каждом дезъюнкте найдется множитель, равный 1, так как в каждую тройку дезъюнктных вершин входит вершин, соединенная с выбранной в покрытие литеральной вершиной, которая будет обращаться в 1. Значит, КНФ выполнима.

Сведение доказано, так как КНФ выполнима тогда и только тогда, когда соответствующий граф имеет вершинное покрытие размером $n + 2m$.

4 Задача 4

4.1 36 (i)

Пример построенного по КНФ графа с выделенным синим кликой.



4.2 36 (ii)

В клике не могут вершины из одного дезъюнкта по построению графа, всего дезъюнктов m, значит, мощность клики не больше m.

4.3 Сведение

Если в графе есть клика мощностью m, то она проходит по 1 разу через каждую тройку, соответствующие дезъюнктам, причем в ней не будет вершин, являющиеся отрицанием друг друга. Значит, по этой клике можно составить набор, обращающий КНФ в 1. Для каждой вершины, входящей в клику, переменная в ней будет обращаться в 1, тогда каждый дезъюнкт будет равен 1, и КНФ будет выполнимо.

Если КНФ выполнимо, то включим в клику по 1 вершине из каждого дезъюнкта, так чтобы они обращались в 1 на наборе, на котором КНФ выполнимо. Все эти вершины будут действительно попарно соединены, так как в них не будет отрицаний друг друга, а так же они будут из разных дезъюнктов.

5 Задача 5

5.1 37 (i) и (ii)

$\psi = p \vee q \vee r$, а $\overline{\psi} = p \wedge q \wedge r \wedge d \wedge (p \vee \overline{q}) \wedge (\overline{p} \vee \overline{r}) \wedge (\overline{q} \vee \overline{r}) \wedge (\overline{p} \vee \overline{d}) \wedge (q \vee \overline{d}) \wedge (r \vee \overline{d})$, если $p = q = r = 0$, тогда в нем выполнено не более 6 дезъюнктов (при $d = 0$ ровно 6), а в остальных случаях существует d, что выполнено 7 дезъюнктов, причем никогда не выполнено больше 7, например при $p = q = r = 1$,$d = 0$ выполнено 7 дезъюнктов.

5.2 Сведение

Дезъюнкт ψ обращается в 1 только тогда, когда существует d, что в $\overline{\psi}$ выполнено 7 дезъюнктов, значит, это можно использовать для проверки выполнимости ψ. Для любого дезъюнкта КНФ можно составить соответствующую конъюнкцию и образовать из них новую КНФ размером $7n$,n — кол-во дезъюнкций в исходной КНФ.

Тогда если исходная КНФ выполнима, то найдется $7n$ выполненных в новой КНФ дезъюнкций.

Если найдутся $7n$ выполнимых дезъюнкций в новой КНФ, то и исходная КНФ выполнима, так как это возможно только, когда в каждой десятке дезъюнкций (каждая из которых образована дезъюнктом) выполнено 7 дезъюнкций, а значит, существуте набор, на котором каждый дезъюнкт исходной КНФ выполнен, и КНФ выполнима.

6 Задача 6

Пусть есть полиномиальный алгоритм, проверяющий можно ли раскрасить граф в 3 цвета за $t(x)$. Построим алгоритм, находящий эту раскраску за полиномиальное время. Рассмотрим пару вершин i и j. Модифицируем x в $x(ij)$, добавив к нему пару вершин a,b и ребра ab,ia,ib,ja,jb.

При раскрашивании нового графа a и b должны иметь разные цвета, а так же цвета i и j должны быть отличными от их цвета, а так как всего 3 цвета, то i и j будут одного цвета. То же самое можно сделать для 3 и более вершин, например для i,j,k, добавив вершины a,b и ребра ab,ia,ja,ka,ib,jb,kb. Следовательно проверкой такого модифицированного графа на принадлежность 3-COLOR можно за полиномиальное время определить существует ли такая раскраска графа x, что некоторое множество вершин одного цвета.

Проверим, что граф x действительно можно раскрасить. В алгоритме без ограничения общности закрасим вершину 1 в 0-цвет и будем проверять $x(1i)$,$i \in N$, пока не найдем вершину p_1, которую тоже можно закрасить в 0. После этого будем проверять $x(1p_1i), i > p_1$, пока не найдем еще одну вершину p_2 цвета 0. Тогда проверяем $x(1p_1p_2i), i > p_2$ и так, пока в графе не останется вершин, которые можно закрасить в 0. После этого закрасим не закрашенную вершину v в 1-цвет и будем проверять $x(vi)$ аналогично цвету 0, ища какие еще вершины можно закрасить в 1. После одну из оставшихся вершин нужно закрасить в 2-цвет и повторить операцию. В итоге, все вершины будут закрашены, так как больше ни в какие цвета граф вершины x раскрасить нельзя, а еще в начале было установленно, что граф раскрасить можно в 3 цвета. Всего было не более $3n$ (n — число вершин графа) вызовов проверок на раскрашиваемость, размер модифицированного графа увеличивался не более чем в 2 раза, значит, приведенный алгоритм работает за полиномиальное время.

7 Задача 7

Формула имеет вид конъюнкции

$(y_0 \equiv f_0)(y_1 \equiv f_1) \dots (y_n \equiv f_n)y_n, f_k$ — формулы от y_i, x_i. Каждому узлу схемы соответствует собственная скобка. При вычислении значении схемы при определенном наборе высчитывается булевое значение узлов, основываясь на булевых значениях их потомков (x_i — листья). Будем делать то же самое в формуле, подставив в него этот набор. Значение f_k соответствует тому значению, которое принимает узел. Если бы y_k имело бы другое значение, то фвся конъюнкция оказалась бы заведомо 0, поэтому y_k принимает то же значение, что и соответствующий узел. Когда y_k войдет в формулу f_p, это будет значить, что какой-то узел вычисляет свое значение, основываясь на значении узла, соответствующем f_k. В итоге вычислении значений узлов с итоговым вычислением значения всей схемы эквивалентно определению значения набора $y_1 \dots y_n$, такого y_n равно значению схемы. Так как на таком наборе все множители, кроме

y_n равны 1, то только значение y_n определяет значение выражения, то есть значение выражение всегда равно значению схемы. Иначе говоря, если схема выполнима, то существует набор $\overline{x}$ и набор $\overline{y}$, обращающий формулу в 1. Если же схема не выполнима, то есть на всех наборах принимает значение 0, то даже если подобрать такой набор $\overline{y}$, чтобы все множители были равны 1, то обязательно $y_n = 0$, следовательно, формула не выполнима.