# Задание на одиннадцатую неделю.

**1.** Рассмотрим задачу максимизации функции $x + y$ на множестве неотрицательных $x$ и $y$ таких, что $2x + y \le 3$ и $x + 3y \le 5$. Какая задача будет двойственной к этой задаче? Найдите оптимальное значение функции в прямой задаче и докажите его оптимальность с использованием двойственности.

**2.** Задана сеть, в которой для каждой вершины $v \in V$ задано число $\varepsilon_v \in [0, 1]$ такое, что суммарный выходящий из вершины поток равен произведению $\varepsilon_v$ на суммарный входящий поток. Число $1 - \varepsilon_v$ можно трактовать как долю потерь в вершине $v$. Предложите полиномиальный алгоритм поиска максимального потока в сети с потерями.

**3.** На плоскости заданы точки $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 7)$, $(5, 11)$, $(7, 14)$, $(8, 15)$, $(10, 19)$. Требуется провести по этим точкам наименее уклоняющуюся прямую, т. е. такую прямую $ax + by + c = 0$, что $a$, $b$, $c$ являются решениями задачи $\min\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \max\limits_{1\le i\le 7} |ax_i + by_i + c|$. Предложите способ решения этой задачи с помощью вспомогательной задачи ЛП. Запишите эту задачу ЛП для указанной системы точек.

**4.** Многогранник $P_\varepsilon$ задан неравенствами $0 \le x_1 \le 1$, $\varepsilon x_1 \le x_2 \le 1 - \varepsilon x_1$, $\varepsilon x_2 \le x_3 \le 1 - \varepsilon x_2$, где $\varepsilon \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. Геометрически $P_\varepsilon$ — это деформированный куб. Покажите, что в этом многограннике есть путь по рёбрам, стартующий из начала координат и проходящий по всем вершинам, в котором величина координаты $x_3$ монотонно возрастает.

**5.** Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Покажите, что при ненулевом векторе $b$ система $\begin{cases} Ax \le b; \\ x \ge 0 \end{cases}$ совместна тогда и только тогда, когда несовместна система $\begin{cases} A^T y \ge 0; \\ y \ge 0; \\ b^T y < 0. \end{cases}$

**6.** Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Докажите, что однородная система $\begin{cases} Ax \le 0; \\ x \ge 0; \\ x \ne 0 \end{cases}$ совместна тогда и только тогда, когда несовместна система $\begin{cases} A^T y > 0; \\ y \ge 0. \end{cases}$

**7.** Доказать, что если не модифицировать построение двойственной задачи и не обрабатывать отдельно неравенства вида $x_i \leq 0$ и $x_j \geq 0$, то двойственная задача к двойственной задаче может не совпадать в точности с исходной. Доказать, что при указанной на семинаре обработке таких простейших неравенств двойственная к двойственной задача уже будет совпадать с исходной.

*Замечание.* Двойственная к двойственной задача всегда может быть приведена к исходной исключением некоторых переменных.

**8 (Доп).** Выясните связь двойственности ЛП и теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе. Можно следовать задаче 7.25 из книги Дасгупты.