

Задание на пятую неделю.

1. Имеются окрашенные прямоугольные таблички трёх типов: черный квадрат размера 2×2 , белый квадрат того же размера и серый прямоугольник 2×1 (последний можно поворачивать на 90°). Нужно подсчитать число способов F_n замостить полосу размера $2 \times n$. Найдите явную аналитическую формулу для F_n и вычислите F_{30000} по модулю 31.

2. Выполните задачи 1, Д-1 из приложенного файла (все по 1 баллу).

3 (Доп). Пусть язык $L \in \mathcal{NP}$. Покажите, что он полиномиально сводится (по Карпу) к языку STOP описаний пар (M, ω) машин Тьюринга и входов таких, что M останавливается на входе ω .

4. Пусть стало известно, что $\mathcal{NPC} \cap \text{co-}\mathcal{NP} \neq \emptyset$. Верно ли, что отсюда следует, что $\mathcal{NP} = \text{co-}\mathcal{NP}$?

5. (Доп) Рассматривается язык L выполнимых формул от n переменных вида $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$, где каждый C_k имеет один из трех видов: $(x_i \equiv x_j)$, $(\bar{x}_i \equiv x_j)$, $(x_i \equiv \bar{x}_j)$, $(\bar{x}_i \equiv \bar{x}_j)$.

(i) Верно ли, что этот язык \mathcal{NP} -полон?

(ii) Верно ли, что если каждый C_k будет иметь вид $(x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \equiv x_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \equiv \dots \equiv x_{i_l}^{\alpha_{i_l}})$, то язык будет \mathcal{NP} -полон? (Под $x_i^{\alpha_i}$ понимается либо x_i , либо \bar{x}_i)

6. Подбрасываем «честную» монету 10 раз. Подсчитайте вероятности следующих событий:

(i) (1/6 балла) число выпавших «орлов» равно числу «решек»;

(ii) (1/6 балла) выпало больше «орлов» чем «решек»;

(iii) (1/6 балла) при $i = 1, \dots, 5$ одинаковы результаты i -го и $11-i$ -го бросаний;

(iv) (1/2 балла) «орел» выпал не менее четырех раз подряд.

7. (i) Вычислите условную вероятность, что при бросаний двух игральные кости на первой выпало шесть, если сумма равна семи.

(ii) При двух бросках игровой кости выпало X_1 и X_2 , соответственно. Вычислите $\mathbb{E}\{\max\{X_1, X_2\}\} + \mathbb{E}\{\min\{X_1, X_2\}\}$.

(iv) Независимы ли события: «при броске кубика выпало четное число» и «при броске кубика выпало число, кратное трём»?

(v) Найти вероятность, что случайно выбранный граф на n вершинах является простым циклом; найти её предел при $n \rightarrow \infty$.

8 (ВТФ?). Две урны содержат одинаковое количество шаров. Шары окрашены в белый и черный цвета. Из каждой урны вынимают по n шаров с возвращением, где $n \geq 3$. Найдите n и «состав» каждой урны, если вероятность того, что все шары, взятые из первой урны, белые, равна вероятности того, что все шары, взятые из второй урны, либо белые, либо черные.

9. Симметричную монетку бросают неограниченное число раз. Какая из последовательностей встретится раньше с большей вероятностью: ROR или PRO?

10. (i) Имеется генератор случайных битов, выдающий 0 и 1 с вероятностью $1/2$. Предложите алгоритм, использующий этот генератор и выдающий 0 с вероятностью $1/3$ и 1 с вероятностью $2/3$. Оцените его время работы в лучшем и в худшем случае.

(ii) Обратно: из генератора $(1/3; 2/3)$ получите $(1/2)$.