

Задание на четвертую неделю.

0. Постройте NP-сертификат простоты числа $p = 3911$, $g = 13$. Простыми в рекурсивном построении считаются только числа 2, 3, 5.

1. (i) Докажите, что в Σ_2 лежит язык булевых формул от двух наборов переменных $\varphi(x_1, \dots, x_n, y_1 \dots y_n) = \varphi(\vec{x}, \vec{y})$ таких, что при некоторых значениях \vec{x} они справедливы вне зависимости от значений y_1, \dots, y_n .

(ii) Придумайте какую-нибудь свою задачу из класса Σ_3 (или Π_3 , на ваш вкус).

(iii) Докажите, что $\Sigma_k \subset \Sigma_{k+1} \cap \Pi_{k+1}$.

(iv) Докажите, что $\mathcal{NP} \subset \mathcal{PSPACE} \subset \mathcal{EXPTIME}$.

2. Покажите, как свести следующую задачу к вычислению некоторого перманента: найти количество перестановок n элементов, в которых части элементов (с номерами i_1, i_2, \dots, i_k) запрещено занимать позиции j_1, \dots, j_k соответственно.

3. Докажите, что язык выполнимых ДНФ $C_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_m$, где $C_i = (l_{i1} \wedge l_{i2} \wedge \dots \wedge l_{ik_i})$, l_{ij} — литералы, принадлежит \mathcal{P} . Найдите ошибку или пробел в рассуждении: любую КНФ можно преобразовать в эквивалентную ДНФ, поэтому задача выполнимости КНФ сводится к задаче выполнимости ДНФ и лежит в \mathcal{P} .

$\frac{1}{2}$. Расставьте и обоснуйте \mathcal{P} , \mathcal{NP} — complete, co — \mathcal{NP} — complete:

	Выполнимость	Тавтологичность
КНФ		
ДНФ		

Под выполнимостью понимается задача проверки наличия набора значений переменных, на котором формула равна 1. Под тавтологичностью понимается задача проверки свойства формулы принимать значение 1 на всех наборах.

4. Найдите Θ -асимптотику суммы $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$, оценив её с помощью интеграла $\int_1^n \sqrt{x} dx$ сверху и снизу. Выведите аналогичную формулу для

асимптотики $\sum_{k=1}^n k^\alpha$ для $\alpha > 0$.

5. Останется ли 3 – SAT полной, если ограничиться формулами, в которых каждая переменная входит не более 3 раз, а каждый литерал — не более 2 раз?

а) Под 3 – SAT понимается НЕ-БОЛЕЕ-3 – SAT.

б) (Бонусная задача) Покажите, что если имеется в виду РОВНО-3 – SAT, то не бывает невыполнимых формул указанного вида.

6. Постройте сводимость по Карпу языка (G, k) графов, в которых есть k -клика к языку графов, в которых есть клика хотя бы на половине вершин.

7. а) Верно ли, что существует такая функция $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, для любых констант $\forall c, d > 0$ выполнено

$$f(n) = \omega(n^c), \quad f(n) = o(2^{nd}),$$

т. е. функция $f(n)$ растет быстрее любого заданного полинома, но медленнее любой заданной экспоненты?

б) Некто анонсировал теорему (т. е. утверждение может быть и неверно), что любой МТ требуется $\Omega(n \log_2^{\log_2 n} n)$ тактов для того, чтобы проверять тавтологичность формул, заданных в формате 4-ДНФ, т. е. дизъюнктивных нормальных форм, в каждый конъюнкт которых входит не более четырех переменных (здесь n — длина входа). Считаем, что теорема верна. Верно ли, что из этого вытекает, что \mathcal{P} не совпадает с $\text{co-}\mathcal{NP}$?