Предисловие

Вы держите в руках переработанный конспект лекций одной из девяти тем, читаемых на физическом факультете Новосибирского государственного университета в рамках курса «Основы функционального анализа» в первой половине третьего семестра. Теме «Преобразование Фурье» отводится приблизительно 4 лекции и 3 семинара. Пособие содержит ту часть обширной теории преобразования Фурье, которую, с одной стороны, можно реально изложить и усвоить за отведённый учебным планом промежуток времени, а с другой стороны — которая реально необходима студентам для усвоения физических курсов, читаемых в последующем.

Коротко прокомментируем книги, использованные при написании настоящего пособия и рекомендуемые для более глубокого ознакомления с предметом.

Наше изложение наиболее близко к принятому в следующем широко распространенном учебнике:

1. Зорич, В. А. Математический анализ. Ч. 2. М.: Наука, 1984.

Несколько дальше от нашего изложения находятся классические учебники

2. Колмогоров, А. Н., Фомин, С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

3. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Наука, 1969.

Для более глубокого знакомства с преобразованием Фурье и его ролью в теоретической физике можно рекомендовать прекрасную книгу

4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 2 / Пер. с англ. М.: Мир, 1978.

Тем, кто хочет глубже разобраться в дискретном и быстром преобразованиях Фурье, можно рекомендовать следующие книги

5. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Наука, 1987.

6. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2 / Пер. с англ. М.: Мир, 1972.

Заметная часть приводимых ниже задач позаимствована из следующих сборников

7. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Функции многих переменных. Ст.-Петербург, 1994.

8. Владимиров В. С., Михайлов В. П., Вашарин А. А., Каримова Х. Х., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1974.

Там же можно найти дополнительные задачи к теме «Преобразование Фурье».

Большинство из перечисленных выше книг выдержало много изданий. Читатель может использовать любое из них.

§ 1. Интеграл Фурье как предельная форма ряда Фурье

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция. На основании теоремы о представимости функции в точке своим рядом Фурье можем, для любого $l > 0$, разложить f в ряд Фурье в промежутке $[-l, l]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right), \tag{1}$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n t}{l}\,dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2a}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n t}{l}\,dt, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{2b}$$

Разложение (1) обладает досадной несимметрией: его левая и правая части определены на всей числовой прямой, но равенство имеет место только в промежутке $[-l, l]$. Устраним этот недостаток, перейдя к пределу при $l \to +\infty$. При этом ограничимся наводящими соображениями, оставив строгие рассуждения на потом.

Преобразуем (1), подставив вместо a_n и b_n их выражения (2):

$$f(x) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{\pi n t}{l}\cos\frac{\pi n x}{l} + \sin\frac{\pi n t}{l}\sin\frac{\pi n x}{l}\right)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \frac{1}{l}\cdot\frac{l}{\pi}\int_{-l}^{l} f(t)\sum_{n=1}^{\infty}\cos[y_n(t-x)]\Delta y_n\,dt, \tag{3}$$

где использованы обозначения $y_n = \pi n/l$ и $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = \pi/l$.

Будем предполагать, что функция f не только непрерывно дифференцируема, но и «достаточно быстро убывает на бесконечности». Точнее, будем предполагать, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt.$$

сходится.

Тогда интеграл, входящий в первое слагаемое в (3), стремится к конечному пределу при $l \to +\infty$, а само первое слагаемое стремится к нулю.

Поскольку $\Delta y_n \to 0$ при $l \to +\infty$, то выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos[y_n(t-x)]\Delta y_n$$

можно интерпретировать как сумму Римана интеграла

$$\int \cos y(t-x)\, dy.$$

(Надо только иметь ввиду, что это очень не строгое соображение; нестрогое хотя бы потому, что написанный интеграл заведомо расходится.)

В результате мы можем надеяться, что, переходя к пределу при $l \to +\infty$ в выражении (3), мы получим

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Bigg[\int\limits_{0}^{+\infty} \cos y(t-x)\, dy \Bigg]\, dt.$$

Меняя порядок интегрирования и разлагая косинус разности по известной тригонометрической формуле, получим

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Bigg[\int\limits_{0}^{+\infty} f(t) \cos yt\, dt \cdot \cos yx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(t) \sin yt\, dt \cdot \sin yx \Bigg]\, dy,$$

или

$$f(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} [a(y) \cos yx + b(y) \sin yx]\, dy, \tag{4}$$

где

$$a(y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ty\, dt, \tag{5}$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ty\, dt. \tag{6}$$

Отметим, что при наших предположениях об f интегралы в (5) и (6) сходятся, а интеграл в (4), во всяком случае, не является интегралом, расходимость которого бросалась бы в глаза. При этом мы можем надеяться, что формула (4) будет справедлива на всей числовой прямой и будет играть роль разложения функции в ряд Фурье.

Правая часть формулы (4) называется *интегралом Фурье*, а сама формула (4) — *интегральной формулой Фурье*. Функция $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определённая формулой (5), называется *косинус-преобразованием Фурье* функции f. Функция $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, определённая формулой (6), называется *синус-преобразованием Фурье* функции f.

Обратите внимание, что формулы (4)–(6) удивительно напоминают уже привычные вам формулы разложения 2π-периодической функции в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{7}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

В самом деле, в формулах (5)–(6) и (8)–(9) участвует одинаковый коэффициент $1/\pi$, а интегрирование ведётся по всему промежутку, на котором определена f. Вот только дискретный параметр n заменён на непрерывный y. Аналогично, формула (4) очень напоминает (7): надо лишь заменить дискретный параметр n на непрерывный y и, в связи с этим, заменить сумму на интеграл (в некотором смысле с теми же пределами).

§ 2. Теорема о представимости функции в точке своим интегралом Фурье

Наше обоснование нестрогих рассуждений, приведённых в предыдущем параграфе, будет опираться на следующее утверждение.

Лемма (Римана—Лебега для бесконечного промежутка). *Если* $a \in \mathbb{R}$ *и* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *абсолютно интегрируема на* $(a, +\infty)$, *т. е. если* $\int_a^{+\infty} |f(x)\, dx < +\infty$, *то*

$$\lim_{p \to +\infty} \int_a^{+\infty} f(x) \cos px \, dx == \lim_{p \to +\infty} \int_a^{+\infty} f(x) \sin px \, dx = 0.$$

Мы примем это утверждение без доказательства, поскольку оно лишь техническими деталями отличается от леммы Римана—Лебега, рассмотренной в разделе «Ряды Фурье».

Функцию $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ будем называть *кусочно-гладкой*, если она она является кусочно-гладкой в смысле теории рядов Фурье на любом конечном промежутке $[a,b]$, т. е. если в $[a,b]$ найдётся конечное число точек $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ таких, что в каждом открытом интервале $(x_j,x_{j+1}$ функция f непрерывно дифференцируема, а в каждой точке x_j у f существуют конечные пределы слева и справа

$$f(x_j-0)=\lim_{h\to 0+}f(x_j-h),f(x_j+0)=\lim_{h\to 0+}f(x_j+h),$$

а также существуют и конечны следующие пределы, похожие на левую и правую производные

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_j-h)-f(x_j-0)}{-h},\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_j+h)-f(x_j+0)}{h}.$$

Теорема (о представимости функции в точке своим интегралом Фурье). *Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — кусочно-гладкая абсолютно интегрируемая функция. Тогда для любого $x\in\mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\int\limits_0^{+\infty}[a(y)\cos yx+b(y)\sin yx]\,dy=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)],$$

где

$$a(y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos ty\,dt,$$

$$b(y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin ty\,dt.$$

Другими словами, эта теорема означает, что интеграл Фурье кусочно-гладкой абсолютно интегрируемой функции равен полусумме её пределов слева и справа. В частности, в точке непрерывности функции он в точности равен значению функции.

Доказательство. Положим

$$f_A(x)=\int\limits_0^{A}[a(y)\cos yx+b(y)\sin yx]\,dy$$

и убедимся, что $f_A(x)\to[f(x+0)+f(x-0)]/2$ при $A\to+\infty$.

Для начала преобразуем A, подставив вместо $a(y)$ и $b(y)$ их выражения через интегралы и воспользовавшись тригонометрической формулой для косинуса разности:

$$f_A(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^A dy\Big\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)[\cos ty\cdot\cos yx + \sin ty\cdot\sin yx]\,dt\Big\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^A dy\Big\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(t-x)\,dt\Big\}.$$

Изменив порядок интегрирования в последнем выражении, получим

$$f_A(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big[f(t)\int\limits_0^A \cos y(t-x)\,dy\Big]\,dt. \tag{10}$$

Для обоснования законности изменения порядка интегрирования в данном случае естественно использовать теорему Фубини: *если функция интегрируема по совокупности переменных, то все её повторные интегралы существуют и не только равны между собой, но равны и её кратному интегралу.* В нашем случае обосновать законность изменения порядка интегрирования как раз и значит доказать равенство повторных интегралов. Таким образом, всё дело упирается в интегрируемость функции двух переменных $(t,y)\mapsto f(t)\cos y(t-x)$ по множеству $\mathbb{R}\times[0,A]$. Поскольку всякая абсолютно интегрируемая функция интегрируема, то нам достаточно доказать, что модуль этой функции интегрируем. Однако модуль — величина неотрицательная, а из курса математического анализа известно, что *если для неотрицательной функции нескольких переменных сходится хоть один повторный интеграл, то эта функция интегрируема по совокупности всех переменных.* Следовательно, для наших целей достаточно установить сходимость следующего повторного интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int\limits_0^A |f(t)\cos y(t-x)|\,dy\Big]\,dt,$$

сходимость которого вытекает из следующих очевидных выкладок

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int\limits_0^A |f(t)\cos y(t-x)|\,dy\Big]\,dt \le$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \left[\int\limits_0^A \cos y(t-x)\, dy \right] dt \leq A \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty,$$

где последнее неравенство написано в силу условия теоремы, согласно которому f абсолютно интегрируема. Тем самым мы завершили обоснование законности изменения порядка интегрирования и доказали равенство (10).

Преобразуем формулу (10)

$$f_A(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[f(t) \int\limits_0^A \cos y(t-x)\, dy \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ f(t) \frac{\sin y(t-x)}{t-x} \Big|_{y=0}^{y=A} \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin A(t-x)}{t-x}\, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+u) \frac{\sin Au}{u}\, du.$$

Последнее равенство здесь получено с помощью линейной замены переменной $t - x = u$. Пользуясь аддитивностью, разобъём последний интеграл на два (по промежуткам $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, соответственно) и сделаем в первом из них замену $u \to -u$:

$$F_A(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+u) \frac{\sin Au}{u}\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} f(x+u) \frac{\sin Au}{u}\, du + \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} f(x+u) \frac{\sin Au}{u}\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{u} \sin Au\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{1} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{u} \sin Au\, du + \frac{1}{\pi} \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{u} \sin Au\, du.$$

Обозначим первый из этих интегралов через I_1, а второй через I_2.

Поскольку
$$\int\limits_1^{+\infty} \left| \frac{f(x+u)+f(x-u)}{u} \right| du \le$$
$$\le \int\limits_1^{+\infty} |f(x+u)|\, du + \int\limits_1^{+\infty} |f(x-u)|\, du \le 2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(v)|\, dv < +\infty,$$
то функция $u \mapsto [f(x+u)+f(x-u)]/u$ абсолютно интегрируема по промежутку $[1,+\infty)$ и к I_2 можно применить лемму Римана—Лебега для бесконечного промежутка. Следовательно, $I_2 \to 0$ при $A \to +\infty$.

Подобное рассуждение не применимо к интегралу I_1, поскольку пока мы не в состоянии гарантировать интегрируемость функции $u \mapsto [f(x+u)+f(x-u)]/u$ в окрестности нуля. Исследуем I_1 более детально, для чего прибавим и вычтем предельные значения $f(x+u)$ и $f(x-u)$ в числителе подынтегрального выражения
$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{f(x+u)+f(x-u)}{u} \sin Au\, du =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{f(x+u)-f(x+0)}{u} \sin Au\, du + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{f(x-u)-f(x-0)}{u} \sin Au\, du +$$
$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{f(x+0)+f(x-0)}{u} \sin Au\, du. \qquad (11)$$
Поскольку f — кусочно гладкая функция, то интервал $[0,1]$ можно разбить на конечное число открытых промежутков (x_j, x_{j+1}) на каждом их которых функции $[f(x+u)+f(x+0)]/u$ и $[f(x-u)+f(x-0)]/u$ непрерывно дифференцируемы, а в каждой из концевых точек x_j имеют конечные пределы слева и справа. Особо подчеркнём, что они имеют конечные пределы в точке $x_j = 0$ справа, поскольку существование и конечность этих пределов специально оговаривается в определении кусочно-гладкой функции. Учитывая такую структуру функций $[f(x+u)+f(x+0)]/u$ и $[f(x-u)+f(x-0)]/u$, заключаем, что обе они абсолютно интегрируемы на интервале $[0,1]$. Следовательно, по лемме Римана—Лебега, первые два слагаемых в (11) стремятся к нулю при $A \to +\infty$.

Третье слагаемое в (11) преобразуем с помощью линейной замены переменной $Au = v$:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{f(x+0)+f(x-0)}{u}\sin Au\,du = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{\pi}\int\limits_0^A \frac{\sin v}{v}\,dv.$$

Из курса математического анализа вы знаете, что интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin v}{v}\,dv,$$

называемый*интегралом Дирихле*, сходится и его значение равно $\pi/2$. Таким образом, при $A \to +\infty$ третье слагаемое в (11) стремится к числу $[f(x+0)+f(x-0)]/2$.

Окончательно получаем

$$\lim_{A\to+\infty} f_A(x) = \lim_{A\to+\infty} I_1 + \lim_{A\to+\infty} I_2 = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

что и завершает доказательство теоремы.

Отметим, что существуют и другие условия, гарантирующие для данной точки совпадение значения интеграла Фурье со значением представляемой им функции. Однако следует иметь ввиду, что только непрерывности и абсолютной интегрируемости функции для этого недостаточно.

Задачи

Установите формулы, считая параметр a положительным

1.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ay}{y}\cos yx\,dy = \begin{cases} \pi/2, & \text{если } |x| < a, \\ \pi/4, & \text{если } |x| = a, \\ 0, & \text{если } |x| > a. \end{cases}$$

2.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos ay}{y^2}\cos yx\,dy = \begin{cases} \pi(a-|x|)/2, & \text{если } |x| \le a, \\ 0, & \text{если } |x| > a. \end{cases}$$

3.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \pi y}{1-y^2}\sin yx\,dy = \begin{cases} 2^{-1}\pi\sin x, & \text{если } |x| \le \pi, \\ 0, & \text{если } |x| > \pi. \end{cases}$$

4.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(\pi y/2)}{1-y^2}\cos yx\,dy = \begin{cases} 2^{-1}\pi\cos x, & \text{если } |x| \le \pi/2, \\ 0, & \text{если } |x| > \pi/2. \end{cases}$$

5.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{a\cos yx + y\sin yx}{a^2+y^2}\,dy = \begin{cases} \pi e^{-ax}, & \text{если } x > 0, \\ \pi/2, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

6.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2}\cos 2yx\,dy = \begin{cases} \pi(1-x)/2, & \text{если } |x| \le 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

§ 3. Разложение на полупрямой. Прямое и обратное синус- и косинус-преобразование Фурье

Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ представима своим интегралом Фурье (например, пусть для неё выполнены условия теоремы из § 2). Тогда для всех $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$f(x) = \int\limits_0^{+\infty} [a(y)\cos yx + b(y)\sin yx]\,dy, \tag{12}$$

где

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt, \tag{13}$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin yt\,dt. \tag{14}$$

Если, кроме того, функция f чётна, то подынтегральная функция в (13) оказывается чётной, а значит, этот интеграл можно заменить удвоенным интегралом по половинному промежутку. Подынтегральная функция в (14) при этом оказывается нечётной и интеграл в (14) зануляется для всех y. Поэтому для чётной функции, вместо (12)–(14) мы получаем следующие более простые и симметричные формулы

$$f(x) = \int\limits_0^{+\infty} a(y)\cos yx\,dy, \tag{15}$$

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \cos yt\, dt. \tag{16}$$

Аналогично, формулы (12)–(14) упрощаются и в случае, когда функция f нечётна. При этом результат выглядит так:

$$f(x) = \int\limits_0^{+\infty} b(y) \sin yx\, dy, \tag{17}$$

$$b(y) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \sin yt\, dt. \tag{18}$$

Предположим далее, что функция f задана лишь на полупрямой $(0, +\infty)$. Можно ли представить её интегралом Фурье? Конечно можно. Нужно лишь предварительно продолжить её разумным образом на всю прямую. Возникающий при этом произвол в выборе продолжения можно использовать для упрощения формул. В самом деле, продолжив функцию $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ чётным образом, мы, естественно, придём к формулам (15)–(16). При этом функция a, построенная по формуле (16), называется *прямым косинус-преобразованием Фурье* функции f, а функция f, построенная по формуле (15), называется *обратным косинус-преобразованием Фурье* функции a. Обратите внимание ещё раз на то, что прямое и обратное косинус-преобразования Фурье различаются лишь числовым множителем.

Аналогично, продолжив функцию $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ нечётным образом, мы получим для её интеграла Фурье формулы (17)–(18). При этом говорят, что формула (17) задаёт *прямое*, а формула (17) — *обратное синус-преобразование Фурье*.

Задачи

Представьте интегралом Фурье следующие функции, продолжив их а) чётным и б) нечётным образом на интервал $(-\infty, 0)$.

7.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } 0 \le x \le \pi, \\ 0, & \text{если } x > \pi. \end{cases}$$

8.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

9.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \le x < 1, \\ 0, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

10.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 3x, & \text{если } 0 \le x \le 2/3, \\ 0, & \text{если } x > 2/3. \end{cases}$$

Решите следующие интегральные уравнения, считая что x изменяется в указанных пределах.

11.

$$\int\limits_0^{+\infty} f(y) \cos xy \, dy = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x > 0.$$

12.

$$\int\limits_0^{+\infty} f(y) \cos xy \, dy = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

13.

$$\int\limits_0^{+\infty} f(y) \sin xy \, dy = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x > 0.$$

14.

$$\int\limits_0^{+\infty} f(y) \sin xy \, dy = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

15.

$$\int\limits_0^{+\infty} f(y) \sin xy \, dy = e^{-x}, \qquad x > 0.$$

16.

$$\int\limits_0^{+\infty} f(y) \sin xy \, dy = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x, & \text{если } 0 \le x \le \pi, \\ 0, & \text{если } x > \pi. \end{cases}$$

17.

$$\int\limits_0^{+\infty} f(y) \sin xy \, dy = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x, & \text{если } 0 \le x < \pi, \\ -\frac{\pi}{4}, & \text{если } x\pi, \\ 0, & \text{если } x > \pi. \end{cases}$$

18.

$$\int\limits_0^{+\infty} f(y)\sin xy\,dy = xe^{-x^2}, \qquad x > 0.$$

§ 4. Примеры вычисления синус- и косинус-преобразования Фурье и представления функции её интегралом Фурье

Пусть $a > 0$ и для всех положительных x функция f задана формулой $f(x) = e^{-ax}$.

Для вычисления косинус-преобразования Фурье функции f дважды применим интегрирование по частям

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos xy\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\cos xy\Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \frac{y}{a}\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin xy\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{a} - \frac{y}{a}\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\sin xy\Big|_{x=0}^{x=+\infty} + \frac{y}{a}\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos xy\,dx\right]\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{\pi y^2}{2a^2}a(y)\right).$$

Рассматривая это равенство как уравнение относительно $a(y)$, находим

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{a}{a^2+y^2}.$$

Аналогичный приём может быть применён и для вычисления синус-преобразования Фурье функции f. Опуская детали, укажем только результат:

$$b(y) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin xy\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{y}{a^2+y^2}.$$

Независимо от того, чётным или нечётным образом продолжена f на всю числовую прямую, это продолжение, как легко видеть, будет абсолютно интегрируемой кусочно-гладкой функцией. Следовательно, на основании теоремы о представимости функции своим интегралом

Фурье, может утверждать, что при $x > 0$ справедливы следующие равенства

$$e^{-ax} = \int\limits_0^{+\infty} a(y)\cos xy\,dy = \frac{2a}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2+y^2}\,dy$$

и

$$e^{-ax} = \int\limits_0^{+\infty} b(y)\sin xy\,dy = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{y\sin xy}{a^2+y^2}\,dy.$$

Вы уже встречали их в курсе математического анализа при изучении темы «Интегралы, зависящие от параметра». Тогда вы их записывали следующим образом

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{a^2+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2a}e^{-ax}$$

и

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{y\sin xy}{a^2+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}e^{-ax}$$

$(a > 0, x > 0)$ и называли *интегралами Лапласа*. Как видите, теория интеграла Фурье позволила нам без особых усилий вычислить эти трудные интегралы.

Задачи

Считая параметр a положительным, найдите косинус-преобразование Фурье следующих функций, заданных на полупрямой.

19.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < a, \\ 0, & \text{если } x > a. \end{cases}$$

20.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } 0 < x < a, \\ 0, & \text{если } x > a. \end{cases}$$

21. $f(x) = e^{-x^2}$.

22. $f(x) = \cos(x^2/2)$.

23. $f(x) = \sin(x^2/2)$.

Считая параметр a положительным, найдите синус-преобразование Фурье следующих функций, заданных на полупрямой.

24.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < a, \\ 0, & \text{если } x > a. \end{cases}$$

25. $f(x) = xe^{-x^2/2}$.

26. $f(x) = x^{-1} \sin x$.

§ 5. Комплексная форма интеграла Фурье. Преобразование Фурье. Формула обращения

Допустим, что функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ представима своим интегралом Фурье:

$$f(x) = \int\limits_0^{+\infty} [a(y) \cos xy + b(y) \sin xy] \, dy. \tag{17}$$

Подставим в (17) выражения для синуса и косинуса по формулам Эйлера

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

В результате получим

$$f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \left[a(y) \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} + b(y) \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right] dy =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{a(y) - ib(y)}{2} e^{ixy} \, dy + \int\limits_0^{+\infty} \frac{a(y) + ib(y)}{2} e^{-ixy} \, dy. \tag{18}$$

Непосредственно из определения функции a вытекает, что она является чётной:

$$a(-y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos t(-y) \, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ty \, dt = a(y).$$

Аналогично функция b является нечётной. Учитывая эти обстоятельства, сделаем замену переменной $y \to -y$ в последнем интеграле в (18):

$$f(x) == \int\limits_0^{+\infty} \frac{a(y) - ib(y)}{2} e^{ixy} \, dy - \int\limits_0^{-\infty} \frac{a(y) - ib(y)}{2} e^{ixy} \, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a(y) - ib(y)}{2} e^{ixy}\, dy.$$

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ и определения (5)–(6) косинус- и синус-преобразования, можем записать

$$\frac{a(y) - ib(y)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)[\cos ty - i\sin ty]\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ity}\, dt.$$

Таким образом мы получили новую формулу, эквивалентную формуле (17):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ity}\, dt\right] e^{ixy}\, dy. \quad (19)$$

Правая часть последнего равенства называется *комплексной формой интеграла Фурье.*

Равенство (19) наводит на мысль рассмотреть порознь следующие два преобразования. Одно из них сопоставляет функции f новую функцию $\widehat{f}$, определяемую равенством

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy}\, dx.$$

Это преобразование называется *прямым преобразованием Фурье* и обозначается через F_+. При этом функция $\widehat{f} = F_+[f]$ называется прямым преобразованием Фурье функции f.

Другое преобразование сопоставляет функции g новую функцию $\check{g}$, определяемую равенством

$$\check{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)e^{ixy}\, dy.$$

Это преобразование называется *обратным преобразованием Фурье* и обозначается через F_-. При этом функция $\check{g} = F_-[g]$ называется обратным преобразованием Фурье функции g.

Введённые определения позволяют высказать равенство (19) следующим образом: последовательное применение прямого, а затем обратного преобразований Фурье не изменяет функцию. Аналогично можно убедиться, что и последовательное применение сначала обратного, а затем прямого преобразований Фурье также не изменяет исходную функцию. Символами эти утверждения записывают короче

$$f = \check{\widehat{f}} = \widehat{\check{f}} \qquad \text{или} \qquad f = F_+[F_-[f]] = F_-[F_+[f]]$$

и называют *формулами обращения* преобразования Фурье.

В силу формул обращения, функции f и $\widehat{f}$ в определённом смысле равноправны. Однако, даже для вещественно-значной функции f, $\widehat{f}$ вообще говоря является комплексно-значной. Чтобы избежать такой асимметрии, при изучении преобразования Фурье мы будем изначально предполагать, рассматриваемые функции f принимают комплексные значения.

Задачи

27. Докажите, что $\widehat{f}(x) = \check{f}(-x)$ и $\check{f}(x) = \widehat{f}(-x)$. (Это простое наблюдение позволяет во всех последующих задачах реально вычислять только прямое преобразование Фурье.)

28. Докажите линейность прямого и обратного преобразований Фурье, т. е. установите, что для любых комплексных чисел a и b справедливы равенства

$$F_+[af+bg] = aF_+[f] + bF_+[g] \qquad \text{и} \qquad F_-[af+bg] = aF_-[f] + bF_-[g].$$

29. Докажите, что формулы обращения справедливы для комплексно-значных функций, а не только для вещественно-значных, как было доказано в тексте.

Считая a вещественным числом, а $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ непрерывной абсолютно интегрируемой функцией, докажите следующие равенства и найдите их аналоги для обратного преобразования Фурье.

30. $F_+[e^{iax}f(x)](y) = F_+[f](y-a)$, т. е. сдвиг по фазе у функции приводит к сдвигу по аргументу у её преобразования Фурье.

31. $F_+[f(x-a)](y) = e^{-iax}F_+[f](y)$, т. е. сдвиг по аргументу у функции приводит к сдвигу по фазе у её преобразования Фурье.

32. $F_+[f(x)\cos ax](y) = [\widehat{f}(y-a) + \widehat{f}(y+a)]/2$.

33. $F_+[f(x)\sin ax](y) = [\widehat{f}(y-a) - \widehat{f}(y+a)]/(2i)$.

34. Пусть функция f и её первая производная непрерывны и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Докажите равенства

$$F_+\left[\frac{df}{dx}\right](y) = (iy)F_+[f](y) \qquad \text{и} \qquad F_-\left[\frac{df}{dx}\right](y) = (-iy)F_-[f](y),$$

означающие, что преобразование Фурье переводит (с точностью до числового множителя) операцию дифференцирования в операцию умножения на независимую переменную.

35. Пусть функция f непрерывна $\mathbb{R}$ и пусть, кроме того, функции $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Докажите, что функции $\widehat{f}$ и $\check{f}$ дифференцируемы, причём

$$\frac{d\widehat{f}}{dx}(y) = -iF_+[xf(x)](y) \qquad \text{и} \qquad \frac{d\check{f}}{dx}(y) = iF_-[xf(x)](y).$$

Эти равенства означают, что преобразование Фурье переводит (с точностью до числового множителя) операцию умножения на независимую переменную в операцию дифференцирования.

§ 6. Пример вычисления преобразования Фурье

Пусть $a > 0$ и функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определена формулой $f(x) = e^{-ax^2}$. Найдём $\widehat{f}$ и $\check{f}$.

Для начала вычислим вспомогательный интеграл

$$J(a) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos x\, dx. \tag{20}$$

Интегрирование по частям даёт

$$J(a) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\, d(\sin x) =$$

$$= e^{-ax^2} \sin x\Big|_0^{+\infty} + 2a\int\limits_0^{+\infty} xe^{-ax^2} \sin x\, dx == -2a\int\limits_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\, d(\cos x) =$$

$$= -2a\left[xe^{-ax^2}\cos x\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} (e^{-ax^2} - 2ax^2e^{-ax^2})\cos x\, dx\right] =$$

$$= 2a\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos x\, dx - 4a^2\int\limits_0^{+\infty} x^2e^{-ax^2}\cos x\, dx.$$

Заметив, что последний интеграл можно трактовать как взятую со знаком минус производную по параметру a от функционала $J(a)$, можем переписать это равенство в виде

$$J(a) = 2aJ(a) + 4a^2 \frac{dJ}{da}. \tag{21}$$

При выводе формула (21) мы выполнили дифференцирование под знаком интеграла в (20). Как известно из курса математического анализа, эта операция законна, если исходный интеграл сходится, его подынтегральная функция имеет производную по параметру, и интеграл от этой производной сходится равномерно относительно того множества, в точках которого ищется производная. Применительно к интегралу $J(a)$ проблему составляет только равномерная сходимость интеграла от производной, то есть интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} \cos x \, dx. \tag{22}$$

Фиксировав $a_0 > 0$, видим, что неравенство $|x^2 e^{-ax^2} \cos x| \le x^2 e^{-a_0 x^2}$ справедливо для всех $a \in [a_0/2, +\infty)$ и всех $x \in \mathbb{R}$. Тем самым мы указали интегрируемую мажоранту для интеграла (22) относительно параметра a, изменяющегося в интервале $[a_0/2, +\infty)$. Поэтому интеграл (22) сходится равномерно в интервале $[a_0/2, +\infty)$, а значит, почленное дифференцирование интеграла (20) законно в любой точке этого интервала, в том числе и в точке a_0. Однако, $a_0 > 0$ было выбрано произвольно. Следовательно, интеграл (20) можно дифференцировать под знаком интеграла при любом положительном a.

Итак, мы убедились, что уравнение (21) справедливо для всех $a > 0$. Решая это уравнение с разделяющимися переменными обычным образом, последовательно получаем

$$(1 - 2a)J(a) = 4a^2 \frac{dJ}{da}, \qquad \frac{1 - 2a}{4a^2} da = \frac{dJ}{J},$$

$$\ln\, J = -\frac{1}{4a} - \frac{1}{2}\ln\, a + C_1, \qquad J(a) = \frac{C}{\sqrt{a}} e^{-1/4a}, \tag{23}$$

где C_1 и $C = e^{C_1}$ — некоторые постоянные. Таким образом, мы нашли выражение функции $J(a)$ с точностью до постоянного множителя C, конкретное значение которого будет найдено позже.

Обратимся собственно к вычислению прямого преобразования Фурье функции $f(x) = e^{-ax^2}$:

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ixy}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} [\cos xy - i \sin xy]\, dx.$$

Последний интеграл получен с использованием формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Поскольку мнимая часть его подынтегральной функции нечётна по x, то интеграл от неё равен нулю. Вещественная же часть есть функция чётная и интеграл от неё по симметричному относительно нуля промежутку равен удвоенному интегралу по половинному промежутку. Поэтому

$$\widehat{f}(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos xy\, dx.$$

Считая y отличным от нуля, сделаем в последнем интеграле линейную замену переменной, положив $x|y| = z$ и воспользуемся формулой (23) для интеграла (20):

$$\widehat{f}(y) = \frac{2}{|y|\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-az^2/y^2} \cos z\, dz =$$

$$= \frac{2}{|y|\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{C|y|}{\sqrt{a}} e^{-y^2/4a} = \frac{2C}{\sqrt{2\pi a}} e^{-y^2/4a}, \tag{24}$$

где постоянная C всё ещё остаётся неопределённой.

Выше мы вывели формулу (24) для всех y, не равных нулю. Докажем теперь, что она справедлива и для $y = 0$. Для этого, прежде всего, заметим, что правая часть формулы (24)

$$y \mapsto \frac{2C}{\sqrt{2\pi a}} e^{-y^2/4a}$$

есть функция непрерывная на всей числовой прямой. Далее убедимся, что и левая часть формулы (24)

$$y \mapsto \widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ixy}\, dx$$

также является функцией, непрерывной не всей числовой прямой. Из курса математического анализа вы знаете, что интеграл, зависящий от параметра (в нашем случае — от y), непрерывен, если подынтегральная функция непрерывна по y, а интеграл сходится равномерно относительно y. В нашем случае непрерывность подынтегральной функции

$$(x, y) \mapsto e^{-ax^2}e^{-ixy}$$

по параметру y очевидна, а равномерная сходимость интеграла следует из наличия интегрируемой мажоранты:

$$|e^{-ax^2}e^{-ixy}| \leq e^{-ax^2}.$$

Таким образом, (24) утверждает, что две непрерывные функции раны при всех $y \neq 0$. Но тогда эти функции равны и при $y = 0$. Следовательно, равенство (24) справедливо для всех y.

Чтобы найти постоянную C, мы как раз и подставим значение $y = 0$ в формулу (24):

$$\frac{2C}{\sqrt{2\pi a}} = \widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,dx.$$

Сделав в последнем интеграле замену переменной $t = \sqrt{a}x$, получим

$$\frac{2C}{\sqrt{2\pi a}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

Отсюда, используя известное вам из курса математического анализа значение интеграла Пуассона

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi},$$

находим $C = \sqrt{\pi}/2$ и

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-y^2/4a}.$$

При $a = 1/2$ эта формула становится особенно изящной:

$$(\widehat{e^{-x^2/2)}})(y) = e^{-y^2/2}.$$

Словами её можно выразить так: функция $x \mapsto e^{-x^2/2)}$ является собственным вектором прямого преобразования Фурье, отвечающим собственному значению 1 (нужно лишь вспомнить, что преобразование Фурье линейно, а в курсе линейной алгебры вы называли ненулевой вектор v, удовлетворяющий равенству $Av = \lambda v$, собственным вектором линейного оператора A, отвечающим собственному значению λ).

Наконец, найдём обратное преобразование Фурье от $f(x) = e^{-ax^2}$. Наиболее просто сделать это, выразив обратное преобразование Фурье функции через её прямое преобразование:

$$\check{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{+ixy}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix(-y)}\, dx = \widehat{f}(-y) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-y^2/4a}.$$

В частности мы видим, что прямое и обратное преобразования Фурье от функции $f(x) = e^{-ax^2}$ совпадают между собой.

Задачи

Найдите прямое и обратное преобразования Фурье следующих функций.

36.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

37.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| \le 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

38.

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{если } |x| \le 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

39.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } |x| \le 1, \\ 0, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

40. $f(x) = e^{-x^2/2} \cos ax$, $a \in \mathbb{R}$.

41. $f(x) = e^{-x^2/2} \sin ax$, $a \in \mathbb{R}$.

42. $f(x) = e^{-x^2/2} e^{iax}$, $a \in \mathbb{R}$.

43. $f(x) = xe^{-a|x|}$, $a > 0$.

44.
$$f(x) = \frac{d}{dx}(xe^{-|x|}.$$

45.
$$f(x) = \frac{d}{dx}(x^2e^{-|x|}.$$

46.
$$f(x) = \begin{cases} e^{ix}, & \text{если } |x| \le \pi, \\ 0, & \text{если } |x| > \pi. \end{cases}$$

47.
$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } |x| \le \pi, \\ 0, & \text{если } |x| > \pi. \end{cases}$$

48.
$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } |x| \le \pi, \\ 0, & \text{если } |x| > \pi. \end{cases}$$

49.
$$f(x) = \begin{cases} e^{ix}, & \text{если } x \in [0, \pi], \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

50.
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \in [1, 2], \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

51.
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

52.
$$f(x) = \frac{d^3}{dx^3}\frac{1}{1+x^2}.$$

53. Докажите, что преобразование Фурье функции $f(x) = 1/(1+x^{12})$ имеет непрерывную производную десятого порядка.

54. Докажите, что преобразование Фурье функции $f(x) = xe^{-|x|^3}$ является бесконечно дифференцируемой функцией.

55. Докажите, что преобразование Фурье абсолютно интегрируемой непрерывной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ является вещественно-значным если и только если равенство $\bar{f}(-x) = f(x)$ справедливо для всех $x \in \mathbb{R}$.

56. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — абсолютно интегрируемая непрерывная функция. Докажите, что$\widehat{f} = \check{f}$ если и только если f — чётная функция.

§ 7. Быстро убывающие функции

Предыдущим параграфом закончено знакомство с первоначальными фактами теории преобразования Фурье. В последующих параграфах мы встаём на более продвинутую точку зрения и развиваем теорию преобразования Фурье для так называемых быстро убывающих функций. Это позволяет нам не делать различия между преобразованиями Фурье функций одной или нескольких переменных, а также существенно упрощает технические детали. Начнём с определений.

Определение 1. *Мультииндексом* α называется вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$, все компоненты α_j которого — неотрицательные целые числа. При этом число n называют *длиной мультииндекса* α, число $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n$ — его *весом* и часто используют обозначение $\alpha! = \alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdot\dots\cdot\alpha_n!$. *Суммой* двух мультииндексов α и β называют новый мультииндекс $(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \dots, \alpha_n+\beta_n)$, обозначая его через $\alpha+\beta$. Пишут $\alpha \le \beta$, если для всех $j = 1, 2, \dots, n$ выполняются неравенства $\alpha_j \le \beta_j$. Для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ произведение $x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdot\dots\cdot x_n^{\alpha_n}$ кратко записывают как x^α, а для любой (достаточно гладкой) функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ её производную

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdot\partial x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

кратко записывают как $D^\alpha f$. Эти обозначения существенно сокращают формулы.

Определение 2. Функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называют *быстро убывающей*, если 1) f бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n$ и 2) для каждого мультииндекса α и каждого положительного числа p найдётся постоянная $K_{\alpha,p} < +\infty$ такая, что $|D^\alpha f(x)| \le K_{\alpha,p}/(1+|x|^p$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Здесь $|x|$ обозначает длину вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$: $|x| = (x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)^{1/2}$.

Определение 3. Функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называют *быстро убывающей*, если 1) f бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n$ и 2) для любых мультииндексов α, β функция $x \mapsto x^\alpha D^\beta f(x)$ ограничена в $\mathbb{R}^n$ (т. е. найдётся постоянная $C_{\alpha,\beta} < +\infty$ такая, что $|x^\alpha D^\beta f(x)| \le C_{\alpha,\beta}$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$).

Лемма. *Определения 2 и 3 эквивалентны.*

Доказательство леммы мы опускаем, поскольку оно имеет чисто технический характер.

Прежде чем привести примеры быстро убывающих функций, напомним следующий факт, известный вам из курса математического анализа: Функция $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданная формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ e^{-1/x}, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

обладает свойствами

1) $\omega(x) \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$;

2) $\omega(x) > 0$ для $x > 0$;

3) $\omega(x) = 0$ для $x < 0$;

4) ω бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}$.

Напомним, что свойство 4) устанавливается следующим образом. Очевидно, для любых $m \geq 1$ и $x < 0$ m-я производная функции ω в точке x существует и равна 0. Индукцией по m несложно показать, что для любых $m \geq 1$ и $x > 0$ m-я производная функции ω в точке x существует и имеет вид

$$\frac{d^m \omega}{dx^m}(x) = P_m\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x},$$

где P_m — некоторый многочлен степени m. Поскольку на плюс бесконечности экспонента растёт быстрее любого многочлена, то последнее выражение стремится к нулю при x стремящемся к нулю справа. Отсюда вытекает, что функция $d^m\omega/dx^m$ имеет (первую) производную в нуле и она равна нулю. Значит, ω имеет все производные в нуле, а значит — является бесконечно дифференцируемой.

Напомним также, что функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называется *финитной*, если она зануляется вне некоторого шара конечного радиуса, Т. Е. если существует число $R < +\infty$, такое что $f(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ для которых $|x| > R$.

Из сказанного следует, что при любом выборе $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$ функция $\omega_{x_0,\varepsilon} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определённая формулой $\omega_{x_0,\varepsilon}(x) = \omega(\varepsilon^2 - |x - x_0|^2)$, обладает свойствами

1) $\omega_{x_0,\varepsilon}$ бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n$ (как суперпозиция многочлена $\varepsilon^2 - |x - x_0|^2$ и бесконечно дифференцируемой функции ω);

2) $\omega_{x_0,\varepsilon}$ финитна, точнее $\omega_{x_0,\varepsilon}(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $|x - x_0| > \varepsilon$ (ведь для таких x аргумент $\varepsilon^2 - |x - x_0|^2$ функции ω становится отрицательным);

3) $\omega_{x_0,\varepsilon}$ строго положительна в открытом шаре $|x - x_0| < \varepsilon$.

Другими словами, функция $\omega_{x_0,\varepsilon}$ является неотрицательной (и не равной тождественному нулю) бесконечно дифференцируемой финитной функцией. Такие функции будут нам нужны не только при изучении преобразования Фурье. Мы всегда будем использовать для них введённое обозначение $\omega_{x_0,\varepsilon}$.

Теперь мы готовы привести примеры быстро убывающих функций.

1) *Любая финитная бесконечно дифференцируемая функция является быстро убывающей.*

Доказательство. Фиксируем мультииндексы α и β и предположим, что нам дана бесконечно дифференцируемая финитная функция f, зануляющаяся при всех $|x| > R$. Очевидно, при этом и её производная $D^\beta f$ зануляется при всех $|x| > R$. С другой стороны, множество $|x| \leq R$ компактно, а значит (по теореме Вейерштрасса) непрерывная функция $x \mapsto |x^\alpha D^\beta f(x)|$ достигает на нём своего максимального значения. Обозначив это максимальное значение через $C_{\alpha,\beta}$, а точку, в которой оно достигается, через x_*, можем написать

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| = \sup_{|x|\leq R} |x^\alpha D^\beta f(x)| \leq C_{\alpha,\beta} < +\infty.$$

На основании определения 3, отсюда следует, что f — быстро убывающая функция.

2) *Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, то функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{-a_1x_1^2-a_2x_2^2-\cdots-a_nx_n^2}$ является быстро убывающей.*

Доказательство следует из того, что любая производная функции f имеет вид «многочлен от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, умноженный на f», а экспонента на плюс бесконечности растёт быстрее любого многочлена.

Отметим, что функция из примера 2), являясь быстро убывающей, не является, однако, финитной.

Обсудим полезные для дальнейшего свойства быстро убывающих функций.

1) *Если f и g — быстро убывающие функции, то для любых комплексных чисел a и b функция $af + bg$ является быстро убывающей.*

Доказательство. То, что линейная комбинация двух бесконечно дифференцируемых функций бесконечно дифференцируема — хорошо известно. Неравенство же, участвующее в определении 3, непосредственно вытекает из самых общих свойств супремума функции:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta(af + bg)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |ax^\alpha D^\beta f(x) + bx^\alpha D^\beta g(x)| \leq$$

$$\leq |a| \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| + |b| \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta g(x)| < +\infty.$$

2) *Если f — быстро убывающая функция, то для любого мультииндекса α функция $D^\alpha f$ также является быстро убывающей.*

Доказательство. Любая производная бесконечно дифференцируемой функции является бесконечно дифференцируемой функцией. Поэтому $D^\alpha f$ — бесконечно дифференцируема.

С другой стороны, поскольку f — быстро убывающая, то, согласно определению 3, для любых мультииндексов β и γ найдётся постоянная $C_{\beta,\gamma}$ такая, что $|x^\beta D^\gamma f(x)| \le C_{\beta,\gamma}$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Но тогда $|x^\beta D^\gamma [D^\alpha f(x)| = |x^\beta D^{\alpha+\gamma} f(x)]| \le C_{\beta,\alpha+\gamma} < +\infty$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. А значит, $D^\alpha f$ — быстро убывающая функция.

3) *Если f — быстро убывающая функция, то для любого мультииндекса α функция $x^\alpha f$ является быстро убывающей.*

Доказательство. Из известной вам из курса математического анализа формулы Лейбница для произведения функций

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} \cdot v$$

следует, что

$$D^\alpha (u \cdot v) = \sum_{\beta \le \alpha} C_\alpha^\beta (D^\beta) \cdot (D^{\alpha-\beta} v),$$

где C_α^β — некоторые постоянные. Поэтому

$$D^\gamma (x^\alpha f(x)) = \sum_{\delta \le \gamma} K_\gamma^\delta x^{\alpha-\delta} (D^{\gamma-\delta} f),$$

где K_γ^δ — некоторые постоянные. Следовательно,

$$|x^\beta D^\gamma (x^\alpha f(x))| \le \sum_{\delta \le \gamma} |K_\gamma^\delta| \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^{\alpha+\beta-\delta} (D^{\gamma-\delta} f(x))| < +\infty,$$

поскольку каждое слагаемое в последней сумме конечно ввиду того, что f — быстро убывает, а число слагаемых конечно.

4) *Произведение быстро убывающей функции на многочлен есть функция быстро убывающая.*

Доказательство непосредственно следует из свойств 1) и 3).

Заметим, что, согласно свойству 1), совокупность всех быстро убывающих функций, заданных в пространстве $\mathbb{R}^n$, образует векторное пространство относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на число. Это пространство обозначают через $S(\mathbb{R}^n)$ или $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Задачи

Считая α и β мультииндексами, докажите следующие «многомерные варианты» известных вам формул.

57. Бином Ньютона:

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta\le\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} x^\beta y^{\alpha-\beta},$$

где $x, y \in \mathbb{R}^n$.

58.

$$\sum_{\beta\le\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = 2^{|\alpha|}.$$

59. Формула Лейбница:

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta\le\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} (D^\beta f)(D^{\alpha-\beta} g),$$

где f и g — достаточно гладкие функции в $\mathbb{R}^n$.

60. Формула Тейлора:

$$f(x+y) = \sum_{|\alpha|\le m} [D^\alpha f(x)] \frac{y^\alpha}{\alpha!} + r(y)|y|^m,$$

где $x, y \in \mathbb{R}^n$, а f и r — функции в $\mathbb{R}^n$, причём $r \to 0$ при $y \to 0$.

61. Проверьте, что функция $e^{-a|x|}$ $(a > 0)$, как и все её производные, определённые при $x \ne 0$, убывает на бесконечности быстрее любой степени переменной x и, тем не менее, эта функция не является быстро убывающей.

§ 8. Преобразование Фурье быстро убывающих функций

Определение. Быстро убывающей функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ сопоставим две новые функции

$$\widehat{f}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x,y)}\, dx$$

и

$$\check{f}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{+i(x,y)}\, dx,$$

где $(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, а i — мнимая единица.

Преобразование, переводящее функцию f в функцию $\widehat{f}$, называется *прямым преобразованием Фурье* и обозначается через F_+. При этом саму функцию $\widehat{f} = F_+[f]$ называют *прямым преобразованием Фурье* функции f.

Аналогично, преобразование, переводящее f в $\check{f}$, называется *обратным преобразованием Фурье* и обозначается через F_-. При этом функцию $\check{f} = F_-[f]$ называют *обратным преобразованием Фурье* функции f.

Отметим, что интегралы, задающие прямое и обратное преобразования Фурье, являются сходящимися, поскольку модуль экспоненты с чисто мнимым показателем равен единице, и, для любого $p > 0$, быстро убывающая функция f допускает оценку

$$|f(x)| \leq \frac{C}{1 + |x|^p},$$

справедливую с некоторой постоянной $C < +\infty$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Значит,

$$|f(x)e^{\mp i(x,y)}| = |f(x)| \leq \frac{C}{1 + |x|^p},$$

а, как известно из курса математического анализа, последняя функция интегрируема по всему пространству $\mathbb{R}^n$, если только $p > n$.

Отметим также, что при $n = 1$ определение преобразования Фурье, данное в настоящем параграфе, совпадает с определением, данным ранее в § 5.

Рассмотрим наиболее употребительные свойства преобразования Фурье быстро убывающих функций.

1) (Линейность). *Для любых $a, b \in \mathbb{C}$ и любых $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$ справедливы равенства $F_\pm[af + bg] = aF_\pm[f] + bF_\pm[g]$.*

Доказательство немедленно следует из линейности интеграла

$$F_\pm[af + bg](y) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} [af(x) + bg(x)]e^{\mp i(x,y)}\, dx =$$

$$= a(2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{\mp i(x,y)}\, dx + b(2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)e^{\mp i(x,y)}\, dx = aF_\pm[f](y) + bF_\pm[g](y).$$

2) *Для любого мультииндекса α и любой быстро убывающей функции f справедливы равенства*

$$F_\pm[x^\alpha f(x)] = (\pm i)^{|\alpha|} D^\alpha (F_\pm[f]).$$

Доказательство вытекает из следующего вычисления

$$D^\alpha\Big(F_\pm[f](y)\Big) = D^\alpha\Big[(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{\mp i(x,y)}\,dx\Big] =$$

$=$ (дифференцируем под знаком интеграла) $=$

$$= (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\ldots,x_n)\cdot\frac{\partial^{|\alpha|}e^{\mp i(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)}}{\partial y_1^{\alpha_1}\ldots\partial y_n^{\alpha_n}}\,dx_1\ldots dx_n =$$

$$= (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\mp ix_1)^{\alpha_1}\ldots(\mp ix_n)^{\alpha_n}f(x_1,\ldots,x_n)e^{\mp i(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)}\,dx_1\ldots dx_n =$$

$$= (\mp i)^{|\alpha|}(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x)e^{\mp i(x,y)}\,dx = (\mp i)^{|\alpha|}F_\pm[x^\alpha f(x)](y).$$

Для завершения доказательства нам осталось обосновать законность дифференцирования под знаком интеграла. Для этого, как известно, достаточно убедиться в равномерной сходимости интеграла от производной по параметру, в нашем случае — интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x^\alpha f(x)e^{\mp i(x,y)}\,dx.$$

На основании теоремы Вейерштрасса, мы можем быть уверены, что последний интеграл сходится равномерно, если только мы сможем найти интегрируемую мажоранту для его подынтегральной функции. Такая мажоранта действительно без труда может быть указана, надо лишь принять во внимание, что функция $x \mapsto x^\alpha f(x)$ является быстро убывающей, а модуль экспоненты с чисто мнимым показателем равен единице:

$$|x^\alpha f(x)e^{\mp i(x,y)} = |x^\alpha f(x)| \le \frac{C}{1+|x|^p},$$

где в качестве p следует взять любой число бо́льшее n.

В дальнейшем мы не будем детально обосновывать законность операций, которые нам придётся производить под знаком интеграла, оставляя соответствующие вопросы читателю. Причина кроется в единообразии подобных рассуждений: каждый раз решающую роль играет наличие интегрируемой мажоранты у некоторого выражения; сама же мажоранта каждый раз строится без проблем, поскольку мы работаем с быстро убывающими функциями.

3) *Для любого мультииндекса α и любой быстро убывающей функции f справедливы равенства*

$$F_\pm[D^\alpha f(x)](y) = (\pm iy)^\alpha (F_\pm f)(y).$$

Доказательство вытекает из следующих вычислений

$$F_\pm[D^\alpha f(x)](y) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f(x) e^{\mp i(x,y)}\, dx =$$

=(превращаем кратный интеграл в повторный, выделяя в качестве внутреннего одномерный интеграл по переменной x_1)=

$$= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial^{|\alpha|-1} f}{\partial x_1^{\alpha_1-1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\right] e^{\mp i x_1 y_1}\, dx_1 \right\} e^{\mp i(x_2y_2+\dots+x_ny_n)}\, dx_2\dots dx_n. \tag{25}$$

Интегрируя внутренний интеграл по частям, получаем для него следующее выражение

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}} e^{\mp i x_1 y_1}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\mp i y_1) \frac{\partial^{|\alpha|-1} f}{\partial x_1^{\alpha_1-1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}} e^{\mp i x_1 y_1}\, dx_1.$$

Поскольку функция f — быстро убывающая, то внеинтегральные слагаемые зануляются. Поэтому мы можем продолжить равенство (25) следующим образом:

$$F_\pm[D^\alpha f(x)](y) = (\pm i y_1)(2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^{|\alpha|-1} f}{\partial x_1^{\alpha_1-1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}} e^{\mp i(x,y)}\, dx.$$

Таким образом нам удалось понизить порядок дифференцирования по переменной x_1 на единицу, но при этом из-под знака интеграла «выскочил» дополнительный множитель $\pm iy_1$. Применяя подобные рассуждения многократно к каждой из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, мы можем полностью избавиться от производных функции f. При этом мы получим

$$F_\pm[D^\alpha f(x)](y) = (\pm iy_1)^{\alpha_1}(\pm iy_2)^{\alpha_2}\dots(\pm iy_n)^{\alpha_n}(2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mp i(x,y)}\, dx = (\pm iy)^\alpha F_\pm[f](y).$$

Свойства 2) и 3) иногда выражают словами, говоря, что преобразование Фурье переводит, с точностью до постоянного множителя, операцию умножения на независимую переменную в операцию дифференцирования и наоборот.

4) *Пусть A — невырожденная $n \times n$-матрица, b — n-мерный вектор и $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — быстро убывающая функция. Тогда*

$$F_\pm[f(Ax+b)](y) = |\det A|^{-1} e^{\pm i(y, A^{-1}b)} F_\pm[f(x)]((A^{-1})^* y).$$

Здесь A^{-1} обозначает матрицу, обратную к A, а $(A^{-1})^*$ обозначает матрицу, сопряжённую к A^{-1}, т. е. такую (единственным образом определённую) матрицу, что для любых векторов $u, v \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство $(A^{-1}u, v) = (u, (A^{-1})^* v)$.

Доказательство непосредственно следует из формулы замены переменной в кратном интеграле:

$$F_\pm[f(Ax+b)](y) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(Ax+b) e^{\mp(x,y)}\, dx =$$

=(делаем замену переменных $Ax + b = z$)=

$$= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{\mp(A^{-1}z - A^{-1}b, y)} |\det A|^{-1}\, dx =$$

$$= |\det A|^{-1} e^{\pm(y, A^{-1}b)} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{\mp(z, (A^{-1})^* y)}\, dz =$$

$$= |\det A|^{-1} e^{\pm(y, A^{-1}b)} F_\pm[f(x)((A^{-1})^* y).$$

Свойство 4) показывает, как меняется преобразование Фурье, когда в исходной функции делается линейная невырожденная замена переменных. Ниже мы приводим два наиболее часто используемых следствия свойства 4).

5) (**Теорема о сдвиге.**) *Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — быстро убывающая функция, а $x_0 \in \mathbb{R}^n$, то*

$$F_\pm[f(x - x_0)](y) = e^{\mp i(y, x_0)} F_\pm[f](y).$$

Доказательство может быть получено непосредственным применением свойства 4) для случая, когда A — единичная матрица, а $b = -x_0$. Отметим только, что при этом $A^{-1} = (A^{-1})^*$ также является единичной матрицей.

Словами теорему о сдвиге формулируют так: преобразование Фурье переводит сдвиг по аргументу в сдвиг по фазе.

6) (**Правило изменения масштаба.**) *Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ — быстро убывающая функция, а a — отличное от нуля вещественное число, то*

$$F_\pm[f(ax)](y) = \frac{1}{|a|^n} F_\pm[f(x)](\frac{y}{a}).$$

Доказательство опять может быть получено непосредственным применением свойства 4). На этот раз вектор b надо считать равным нулю, а матрицу A — диагональной, у которой на главной диагонали стоит число a:

$$A = \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}.$$

При этом $\det A = a^n$ и

$$A^{-1} = (A^{-1})^* = \begin{vmatrix} a^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a^{-1} \end{vmatrix},$$

а значит $(A^{-1})^* y = y/a$.

7) *Как прямое, так и обратное преобразование Фурье переводит пространство быстро убывающих функций в себя.* Другими словами, какова бы ни была функция $f \in S(\mathbb{R}^n)$, обе функции $F_\pm[f]$ принадлежат $S(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Существование всех производных у функций $F_\pm[f]$ уже установлено в свойстве 2). Поэтому достаточно убедиться лишь в том, что для любых мультииндексов α и β функция $y \mapsto |y^\alpha D^\beta F_\pm[f(x)](y)|$ ограничена в $\mathbb{R}^n$. Для этого, в свою очередь, достаточно убедиться, что эта функция стремится к нулю при y стремящемся к бесконечности. Но если $y = (y_1, \dots, y_n)$ стремится к бесконечности, то хотя бы одна из его компонент стремится к бесконечности. Не ограничивая общности, можем считать, что именно $y_n \to +\infty$.

Согласно свойствам 2) и 3) быстро убывающих функций, функция $x \mapsto D^\alpha(x^\beta f(x))$ является быстро убывающей. Обозначим её через g. Тогда можем написать

$$|y^\alpha D^\beta F_\pm[f(x)](y)| = |F_\pm[g(x)](y)| = (2\pi)^{-n/2} \Bigl| \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{\mp i(x,y)}\, dx \Bigr| =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \Bigl| \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{\mp i(x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1})} \Bigl[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \dots, x_n) e^{\mp i x_n y_n}\, dx_n \Bigr] dx_1 \dots dx_{n-1} \Bigr|. \tag{26}$$

При фиксированных значениях переменных $x_1, \dots, x_{n-1}$, функция $x_n \mapsto g(x_1, \dots, x_n)$ одного вещественного переменного x_n является быстро убывающей. В частности, она интегрируема на всей числовой прямой. Следовательно, условия леммы Римана—Лебега для бесконечного промежутка выполнены для интеграла, стоящего в (26) в квадратных скобках. Значит, сам этот интеграл стремится к нулю при $y_n \to +\infty$. Переходя в формуле (26) к пределу при $y_n \to +\infty$ под знаком $(n-1)$-мерного интеграла, видим, что всё выражение (26) стремится к нулю при $y_n \to +\infty$.

8) (**Формула обращения.**) *Для любой быстро убывающей функции* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *справедливы равенства* $F_+[F_-[f]] = f$ *и* $F_-[F_+[f]] = f$. Другими словами, последовательное применение прямого и обратного преобразований Фурье не изменяет функции.

Доказательство. Для $n = 1$ формула обращения уже установлена нами в § 5.

Докажем формулу $F_+[F_-[f]] = f$ для $n = 2$:

$$F_+[F_-[f]](x) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} F_-[f](y_1, y_2) e^{-i(x_1y_1 + x_2y_2)}\, dy_1 dy_2 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left[\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(t_1, t_2) e^{+i(t_1y_1 + t_2y_2)}\, dt_1 dt_2 \right] e^{-i(x_1y_1 + x_2y_2)}\, dy_1 dy_2.$$

Пользуясь тем, что функция f — быстро убывающая функция, изменим порядок интегрирования:

$$F_+[F_-[f]](x) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{+i(t_2y_2 - x_2y_2)} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, t_2) e^{it_1y_1}\, dt_1 \right\} e^{-ix_1y_1}\, dy_1 \right] dt_2 dy_2.$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, представляет собой одномерное (поскольку t_2 не участвует в интегрировании и выполняет роль параметра) обратное преобразование Фурье функции $t_1 \mapsto f(t_1, t_2)$ одного переменного t_1. Кроме того, выражение, стоящее в квадратных скобках, представляет собой одномерное прямое преобразование Фурье от функции, записанной в фигурных скобках. Поэтому, на основании одномерной формулы обращения, заключаем, что выражение в квадратных скобках равно $f(x_1, t_2)$. Следовательно,

$$F_+[F_-[f]](x) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{+i(t_2y_2 - x_2y_2)} f(x_1, t_2)\, dt_2 dy_2.$$

Последний интеграл преобразуем подобно тому, как мы поступали раньше, т. е. превратим кратный интеграл в повторный, разглядим там одномерные прямое и обратное преобразования Фурье и воспользуемся одномерной формулой обращения:

$$F_+[F_-[f]](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, t_2) e^{+it_2 y_2}\, dt_2 \right\} e^{-ix_2 y_2}\, dy_2 = f(x).$$

Тем самым равенство $F_+[F_-[f]] = f$ доказано при $n = 2$. Его доказательство в общем случае, равно как и доказательство второго равенства $F_-[F_+[f]] = f$, проводится совершенно аналогично. Поэтому мы их опускаем.

Задачи

62. Докажите, что преобразование Фурье функции $x \mapsto e^{a|x|}$ $(a > 0)$ бесконечно дифференцируемо на всей числовой прямой, но не является быстро убывающей функцией.

§ 9. Равенство Парсеваля

Теорема(равенство Парсеваля). *Для любых быстро убывающих функций $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\overline{\widehat{g}(x)}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x)\overline{\check{g}(x)}\, dx,$$

где черта, как обычно, означает комплексное сопряжение.

Доказательство разобъём на три этапа.

На первом этапе установим равенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) g(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\, dx \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x) g(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\check{g}(x)\, dx,$$

то есть покажем, что символы прямого и обратного преобразования Фурье можно переносить с одного сомножителя на другой под знаком интеграла.

Чтобы убедиться в этом, достаточно, пользуясь тем, что функции f и g — быстро убывающие, изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) g(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i(x,y)}\, dy \right] g(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-i(x,y)}\, dx \right] f(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) \widehat{g}(y)\, dy.$$

Второе равенство, составляющее первый этап, доказывается аналогично.

На втором этапе установим равенства

$$\overline{\widehat{f}} = \check{\overline{f}} \qquad \text{и} \qquad \overline{\check{f}} = \widehat{\overline{f}},$$

то есть покажем, что при «опускании» комплексного сопряжения прямое и обратное преобразования Фурье меняются ролями.

В самом деле, пользуясь тем, что комплексное сопряжение от произведения комплексных чисел равно произведению их комплексных сопряжений, имеем

$$\overline{\widehat{f}}(y) = \overline{(2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x,y)}\, dx} = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} e^{+i(x,y)}\, dx = \check{\overline{f}}(y).$$

Второе равенство, составляющее второй этап, доказывается аналогично.

Наконец, на третьем этапе докажем собственно равенство Парсеваля. Для этого последовательно воспользуемся формулой обращения и результатами первых двух этапов доказательства:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \check{\widehat{f}}(x) \overline{g(x)}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) \check{\overline{g}}(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) \overline{\widehat{g}(x)}\, dx.$$

Второе равенство Парсеваля доказывается аналогично.

Задачи

63. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(p)$ — быстро убывающие функции вещественных переменных x и p соответственно, причём пусть ψ является преобразованием Фурье от φ (т. е. $\psi = \widehat{\varphi}$) и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi(p)|^2\, dp = 1$. В таком случае функции $|\varphi|^2$ и $|\psi|^2$ можно рассматривать как плотности распределения вероятностей случайных величин x и p. В квантовой механике показывается, что соотношение $\psi = \widehat{\varphi}$ позволяет интерпретировать случайные величины x и p как координату и импульс квантовой частицы.

а) Покажите, что сдвигом по аргументу (специальным выбором начала отсчёта аргумента) функции $\varphi(x)$ можно, не изменяя величины $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\, dx$, получить новую функцию $\varphi(x)$ такую, что $M_1(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x|\varphi(x)|^2\, dx = 0$, т.е. такую, что её математическое ожидание равно нулю.

б) Покажите, что аналогичным сдвигом по аргументу функции ψ можно, не нарушая равенств $M_1(\varphi) = 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi(p)|^2\,dp = 1$, добиться того, что $M_1(\psi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p|\psi(p)|^2\,dp = 0$.

в) Убедитесь, что дисперсия (среднеквадратичное уклонение) $\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^2|\varphi(x)|^2\,dx$ случайной величины x с плотностью распределения $|\varphi(x)|^2$ и математическим ожиданием $x_0 = M_1(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x|\varphi(x)|^2\,dx$ представляется в виде $\sigma^2 = M_2(\varphi) - M_1^2(\varphi)$, где $M_2(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2|\varphi(x)|^2\,dx$.

г) Рассмотрите величину $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\alpha x\varphi(x) + \varphi'(x)|^2\,dx$, которая, очевидно, неотрицательна при любом значении вещественного параметра α . Опираясь на равенство Парсеваля и формулу для нахождения преобразования Фурье от производной, выведите отсюда, что $\alpha^2 M_2(\varphi) - \alpha + M_2(\psi) \geq 0$.

д) Получите из г) соотношение $M_2(\varphi) \cdot M_2(\psi) \geq 1/4$.

Это соотношение показывает, что чем более «сосредоточена» сама функция, тем «размытее» её преобразование Фурье и обратно. В квантовой механике это соотношение называют принципом неопределённости Гейзенберга и интерпретируют в том смысле, что нельзя одновременно точно измерить и координату квантовой частицы и её импульс.

§ 10. Свёртка быстро убывающих функций

Каждым двум быстро убывающим функциям $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ сопоставим новую функцию $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, называемую *свёрткой* функций f и g и задаваемую формулой

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)\,dy. \tag{27}$$

Поскольку функции f и g — быстро убывающие, то сходимость этого интеграла очевидна. Иногда говорят, что (27) задаёт свёртку любых (не обязательно быстро убывающих) функций, для которых интеграл, стоящий в правой части, сходится.

Рассмотрим наиболее важные свойства свёртки быстро убывающих функций.

1) (**Коммутативность:**) $f * g = g * f$.

Доказательство немедленно вытекает из формулы замены переменной в кратном интеграле:

$$(f*g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy =$$

=(сделаем замену $x-y=z$)=

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x-z)\,dz = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x-z)f(z)\,dz = (g*f)(x).$$

2) (**Ассоциативность:**) $(f*g)*h = f*(g*h)$.

3) (**Дистрибутивность.**) *Для любых комплексных чисел* $a, b \in \mathbb{C}$ *и любых быстро убывающих функций* f, g, h *справедливо равенство* $(af+bg)*h = a(f*g)+b(g*h)$.

Доказательства свойств 2) и 3) столь же прямолинейны, как и приведённое выше доказательство свойства 1). Поэтому мы оставляем их читателю в качестве упражнений.

4) *Для любого мультииндекса* α *и любых быстро убывающих функций* f, g, h *справедливы равенства* $D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f)*g = f*(D^\alpha g)$. Другими словами, чтобы продифференцировать свёртку, можно сначала продифференцировать любую из функций, а затем свернуть результат с другой функцией.

Доказательство опирается на возможность дифференцирования по параметру интеграла от быстро убывающей функции:

$$D^\alpha(f*g)(x) = D^\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)(x-y)g(y)\,dy = ((D^\alpha f)*g)(x).$$

Второе соотношение из свойства 4) вытекает из уже доказанного ввиду коммутативности свёртки: $D^\alpha(f*g) = D^\alpha(g*f) = (D^\alpha g)*f = f*D^\alpha g$.

5) $F_\pm[f*g] = (2\pi)^{n/2} F_\pm[f]\cdot F_\pm[g]$.

Доказательство.

$$F_\pm[f*g] = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f*g)(y) e^{\mp i(x,y)}\,dy =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y-z)g(z)\,dz\Bigg] e^{\mp i(x,y)}\,dy =$$

=(изменим порядок интегрирования)=

$$= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y-z) e^{\mp i(x,y)}\,dy\Bigg] g(z)\,dz =$$

=(во внутреннем интеграле сделаем замену переменной $y-z=t$)=

$$= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{\mp i(x,t)}\, dt \right] g(z) e^{\mp i(x,z)}\, dz =$$

=(внутренний интеграл не зависит от переменной z; вынесем его из-под знака внешнего интеграла)=

$$= (2\pi)^{n/2} \left[(2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{\mp i(x,t)}\, dt \right] \cdot \left[(2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(z) e^{\mp i(x,z)}\, dz \right] =$$

$$= (2\pi)^{n/2} F_{\pm}[f](x) \cdot F_{\pm}[g](x).$$

6) $F_{\pm}[f \cdot g] = (2\pi)^{-n/2} F_{\pm}[f] * F_{\pm}[g]$.

Доказательство. Выведем свойство 6), соответствующее выбору верхних знаков, из свойства 5) и формулы обращения: подставив в 5) $\check{f}$ вместо f и $\check{g}$ вместо g, будем иметь

$$F_{+}[\check{f} * \check{g}] = (2\pi)^{-n/2} F_{+}[\check{f}] \cdot F_{+}[\check{g}] = (2\pi)^{-n/2} f \cdot g.$$

Применив к обеим частям последней формулы обратное преобразование Фурье, получим

$$\check{f} * \check{g} = F_{-}[F_{+}[f * g]] = (2\pi)^{-n/2} F_{-}[f \cdot g]$$

или

$$F_{-}[f \cdot g] = (2\pi)^{n/2} F_{-}[f] * F_{-}[g].$$

Формула, соответствующая выбору нижних знаков, доказывается аналогично.

Свойства 5) и 6) означают, что преобразование Фурье переводит (с точностью до постоянного множителя) свёртку в произведение и наоборот. Наличие такой двойственности объясняет важность операции свёртки: с точностью до преобразования Фурье, нам безразлично перемножать функции или сворачивать их.

Задачи

64. Пусть x_0 — вектор из $\mathbb{R}^n$. Оператором сдвига в $S(\mathbb{R}^n)$ назовём отображение, сопоставляющее каждой быстро убывающей функции f новую функцию $T_{x_0} f$, определяемую формулой $(T_{x_0} f)(x) = f(x - x_0)$. Докажите, что для любых быстро убывающих функций справедливы равенства $T_{x_0}(f * g) = (T_{x_0} f) * g = f * (T_{x_0} g)$.

В следующих задачах вычислите свёртку, считая, что H — функция Хевисайда, т. е. что $H(x) = 0$ для $x < 0$ и $H(x) = 1$ для $x > 0$.

65. $H(x) * H(x)$.

66. $H(x) * H(1+x)$.

67. $H(1-x^2) * H(1-x^2)$.

68. $x * (x^2 H(x))$.

69. $H(x) * (H(x)\sin x)$.

70. $(x^2 H(x)) * (H(x)\sin x)$.

71. $(x^3 H(x)) * (H(x)\cos x)$.

72. $(H(x)\sin x) * (H(x)\text{sh }x)$.

73. $e^{-|x|} * e^{-|x|}$.

74. $e^{-ax^2} * (xe^{-ax^2})$, $a > 0$.

В следующих задачах докажите равенства, считая параметры a и b положительными

75. $f_a * f_b = f_{\sqrt{a^2+b^2}}$, если $f_a(x) = a^{-1}(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2a^2}$.

76. $f_a * f_b = f_{a+b}$, если $f_a(x) = a\pi^{-1}(a^2+x^2)^{-1}$.

77. $f_a * f_b = f_{a+b}$, если $f_a(x) = x^{a-1}e^{-ax}H(x)/\Gamma(a)$.

§ 11. Формула Пуассона

Теорема(формула Пуассона) *Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — быстро убывающая функция, то*

$$\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n).$$

Доказательство. Мы докажем, что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\sqrt{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}, \tag{28}$$

подставив в которое $x = 0$, очевидно, получим формулу Пуассона.

Левую часть формулы (28) обозначим через $F(x)$ и установим необходимые для дальнейшего свойства функции F.

1) *Функция F является 2π-периодической.* Это вытекает из следующих вычислений:

$$F(x+2\pi) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi+2\pi n) =$$

$=$(делаем замену индекса суммирования $k = n+1$)$=$

$$= \sqrt{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi k) = F(x).$$

2) *Функция F непрерывно дифференцируема.* Чтобы убедиться в этом, можно использовать теорему Вейерштрасса о почленном дифференцировании функционального ряда. В нашем случае неочевидно выполнение только одного условия теоремы Вейерштрасса: нам надо убедиться, что функциональный ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{df}{dx}(x+2\pi n) \tag{29}$$

сходится равномерно на всей числовой прямой. С учётом периодичности F, для этого достаточно убедиться, что ряд (29) сходится равномерно на любом промежутке, длина которого больше периода функции F, например, на $[-2\pi, 2\pi]$. Из определения быстро убывающей функции следует, что для любого p найдётся постоянная C_p такая, что неравенство

$$\left| \frac{df}{dx}(x+2\pi n) \right| \leq \frac{C_p}{1+|x+2\pi n|^p}$$

справедливо для всех $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, для всех $x \in [-2\pi, 2\pi]$ имеем

$$\left| \frac{df}{dx}(x+2\pi n) \right| \leq \frac{C_p}{1+(2\pi)^p|n-1|^p}$$

причём, как известно, ряд

$$\sum_{\substack{n = -\infty \\ n \neq 1}}^{+\infty} \frac{1}{1+(2\pi)^p|n-1|^p}$$

сходится если только $p > 1$. Таким образом, мы нашли суммируемую мажоранту для общего члена ряда (29) и, на основании теоремы Вейерштрасса о мажорированной сходимости, можем заключить, что ряд (29) сходится равномерно на $[-2\pi, 2\pi]$. Что и завершает доказательство свойства 2).

Приступим теперь собственно к доказательству формулы Пуассона.

Как всякая 2π-периодическая непрерывно дифференцируемая функция, F разлагается в сходящийся к ней ряд Фурье

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

Для доказательства формулы (28) нам нужно только убедиться, что $c_n = \widehat{f}(n)$. А это вытекает из прямого вычисления:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi n) e^{-inx}\, dx =$$

=(интегрируем ряд почленно)=

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+2\pi n) e^{-inx}\, dx =$$

=(делаем замену переменной $y = x + 2\pi n$ и пользуемся тем, что экспонента $2\pi i$-периодична)=

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{2\pi n-\pi}^{2\pi n+\pi} f(y) e^{-iny}\, dy =$$

=(замечаем, что интервалы $[2\pi n - \pi, 2\pi n + \pi]$ покрывают всю числовую прямую и пользуемся аддитивностью интеграла)=

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iny}\, dy = \widehat{f}(n).$$

Что и требовалось доказать.

Задачи

78. Обоснуйте законность почленного интегрирования ряда в приведённом выше доказательстве формулы Пуассона.

79. Докажите, что если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — быстро убывающая функция, то сумма ряда

$$\sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi n)$$

является беконечно дифференцируемой функцией (а не только непрерывно дифференцируемой, как было показано в приведённом выше доказательстве формулы Пуассона).

80. Докажите следующее соотношение, называемое *θ-формулой* и играющее важную роль в теории эллиптических функций и теории теплопроводности

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-tn^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2}{t}n^2} \qquad (t>0).$$

81. С помощью формулы Пуассона вычислите сумму ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}.$$

Обратите внимание, что участвующие в вычислениях функции не являются быстро убывающими. Обоснуйте для них законность применения формулы Пуассона.

§ 12. Теорема Котельникова—Шеннона

Теорема(Котельникова—Шеннона). *Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ — быстро убывающая функция и пусть существует положительное число a такое, что $\widehat{f}(x)=0$ для всех вещественных x таких, что $|x|>a$. Тогда для всех $x\in\mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{\pi n}{a}\right)\operatorname{sinc}\left[a\left(x-\frac{\pi n}{a}\right)\right], \tag{30}$$

где функция $t\mapsto$ sinc t определяется равенством $\operatorname{sinc} t = (\sin t)/t$ *и называется функцией отсчётов.*

Доказательство. Используя формулу обращения для преобразования Фурье и пользуясь тем, что $\widehat{f}$ зануляется вне интервала $[-a,a]$, можем написать

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(y)e^{+ixy}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}\widehat{f}(y)e^{ixy}\,dy. \tag{31}$$

Разложим функцию $\widehat{f}$ в ряд Фурье в комплексной форме в интервале $[-a,a]$:

$$\widehat{f}(y)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{i\pi n}{a}y}, \quad \text{где} \quad c_n=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}\widehat{f}(y)e^{-\frac{i\pi n}{a}y}\,dy.$$

Подставим этот ряд в формулу (31) и, пользуясь тем, что ряд Фурье непрерывно дифференцируемой функции сходится равномерно, проинтегрируем его почленно:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-a}^{a}\Big(\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n e^{i\frac{\pi n}{a}y}\Big)e^{ixy}\,dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n\int\limits_{-a}^{a}e^{i\left(\frac{\pi n}{a}+x\right)y}\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n\frac{e^{i\left(\frac{\pi n}{a}+x\right)y}}{i\left(\frac{\pi n}{a}+x\right)}\Bigg|_{-a}^{a}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n\frac{2a\sin\left[\left(\frac{\pi n}{a}+x\right)a\right]}{a\left(\frac{\pi n}{a}+x\right)}=\frac{2a}{\sqrt{2\pi}}\sum_{-\infty}^{+\infty}c_n\mathrm{sinc}\,\left[a\left(\frac{\pi n}{a}+x\right)\right].\qquad(32)$$

Теперь обратимся к вычислению коэффициентов c_n. При этом ещё раз используем условие теоремы о том, что $\widehat{f}$ зануляется вне интервала $[-a,a]$:

$$c_n=\frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a}\widehat{f}(y)e^{-i\frac{\pi n}{a}y}\,dy=\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(y)e^{-i\frac{\pi n}{a}y}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2a}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(y)e^{i\left(-\frac{\pi n}{a}\right)y}\,dy=\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}f\left(-\frac{\pi n}{a}\right).\qquad(33)$$

Последнее равенство здесь написано на основании формулы обращения.

Подставив выражение (33) в формулу (32) и поменяв индекс суммирования n на $-n$, получим

$$f(x)=\frac{2a}{\sqrt{2\pi}}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}f\left(-\frac{\pi n}{a}\right)\mathrm{sinc}\,\left[a\left(x+\frac{\pi n}{a}\right)\right]=$$

$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{\pi n}{a}\right)\mathrm{sinc}\,\left[a\left(x-\frac{\pi n}{a}\right)\right],$$

что и требовалось доказать.

Теорема Котельникова—Шеннона примечательна не только элегантностью комбинирования ряда и преобразования Фурье, но и тем, что она является краеугольным камнем теории цифровой передачи информации. Чтобы пояснить это, предположим, что мы намерены передать по цифровому каналу связи непрерывный (точнее было бы сказать — - аналоговый) сигнал φ. Мы не можем «просто» передавать значение функции φ в каждой точке, поскольку вещественных чисел слишком много: как вы знаете из курса математического анализа, множество вещественных чисел несчётно. Поэтому приходится применять интеллект. Согласно формуле обращения, по большому счёту нам безразлично что передавать: сам сигнал φ или его преобразование Фурье, например, — его обратное преобразование Фурье $f = \check{\varphi}$. Теперь примем во внимание, что и человеческий глаз, и человеческое ухо воспринимают сигналы лишь в ограниченной области частот (например, ухо воспринимает звуки только в диапазоне от 20 Гц до 20 кГц). Пренебрегая невоспринимаемой частью спектра, мы можем считать выполненным условие теоремы Котельникова—Шеннона о том, что $\widehat{f} = \varphi$ зануляется вне некоторого конечного интервала $[-a, a]$.

Теперь мы видим, что передача непрерывного сигнала по цифровому каналу связи может быть организована так: передатчик находит обратное преобразование Фурье $f = \check{\varphi}$ исходного сигнала φ и передаёт его значения в так называемых точках отсчёта $\pi n/a$ $(-\infty < n < +\infty)$. Получив значения $f(\pi n/a)$, приёмник использует формулу (30) для восстановления значения функции f в произвольной точке и, совершив прямое преобразование Фурье, выдаёт исходный сигнал $\varphi = \widehat{f}$.

Тем самым, нисколько не утратив качества передаваемого сигнала, мы существенно уменьшили объём передаваемой информации: точек отсчёта хотя и бесконечно много, но гораздо меньше, чем вещественных чисел.

Следующий шаг, естественно состоит в применении известного нам свойства: $f(\pi n/a) = \check{\varphi}(\pi n/a) \to 0$ при $n \to \pm\infty$. Используя его можно, допуская контролируемую погрешность, оставить в формуле (30) лишь конечное число слагаемых и, соответственно, передавать только конечное количество значений f — именно в этих точках. Вопросу о том, какие именно слагаемые оставить, чтобы, минимизируя объём передаваемой информации, не выходить за рамки допустимых погрешностей, посвящено большое количество работ, относящихся собственно к теории цифровой передачи информации.

§ 13. Применение преобразования Фурье к решению уравнения теплопроводности

Допустим, что n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ заполнено средой с постоянным коэффициентом теплопроводности. Предположим, что в пространстве отсутствуют источники и стоки тепла и обозначим через $u(t, x)$ температуру, которую имеет точка $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ в момент времени $t \geq 0$. Как известно, при таких предположениях температура перераспределяется со временем так, что соблюдается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right), \tag{34}$$

называемое *уравнением теплопроводности*. Фигурирующая здесь постоянная $a > 0$ выражается некоторым образом через коэффициент теплопроводности среды. Аккуратный вывод уравнения теплопроводности из физических предпосылок можно найти, например, в учебнике С. К. Годунова «Уравнения математической физики» М.: Наука, 1979.

Естественно ожидать, что, зная распределение температуры в некоторый момент времени, например, при $t = 0$, можно восстановить распределение температуры в любой последующий момент времени $t > 0$. Чтобы сделать это, надо решить уравнение (34) при начальных условиях $u(0, x) = \varphi(x)$, где $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — некоторая заданная функция. Поскольку мы собираемся использовать преобразование Фурье, будем предполагать, что и функция φ и функция u (взятая при фиксированном значении t) являются быстро убывающими в $\mathbb{R}^n$.

Фиксировав $t \geq 0$, введём в рассмотрение новую функцию $y \mapsto v(t, y)$, которая является (прямым) преобразованием Фурье функции u по переменной x:

$$v(t, y) = \widehat{u(t,x)}(y) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(t, x) e^{-i(x,y)}\, dx.$$

Выясним, какому дифференциальному уравнению удовлетворяет функция v. Для этого проделаем следующие вычисления:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = (2\pi)^{-n/2} \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(t, x) e^{-i(x,y)}\, dx =$$

=(дифференцируем под знаком интеграла, как обычно, опуская обоснования, когда речь идёт о быстро убывающих функциях)=

$$= (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) e^{-i(x,y)}\, dx =$$

=(используем (34))=

$$= a^2 (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) e^{-i(x,y)}\, dx = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) =$$

=(к каждому слагаемому применяем свойство 3) преобразования Фурье: $F_\pm[D^\alpha f] = (\pm iy)^\alpha F_\pm[f]$)=

$$= a^2\big((iy_1)^2\widehat{u} + \dots + (iy_n)^2\widehat{u}\big) = -a^2(y_1^2 + \dots + y_n^2)\widehat{u} = -a^2|y|^2 v(t,y).$$

Таким образом, функция v удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -a^2|y|^2 v, \tag{35}$$

в котором y играет роль параметра. При каждом фиксированном y решение этого уравнения, очевидно, имеет вид $v(t,y) = Ce^{-a^2|y|^2 t}$, где C — некоторая постоянная, не зависящая от t. Но для другого значения y постоянная C может принимать другое значение. Поэтому мы запишем решение уравнения (35) в виде

$$v(t,y) = C(y)e^{-a^2|y|^2 t}.$$

Подставив сюда $t = 0$ и использовав начальные условия $u(0,x) = \varphi(x)$, получим

$$C(y) = v(0,y) = \widehat{u(0,x)}(y) = \widehat{\varphi(x)}(y).$$

В результате мы нашли не само решение u уравнения (34), удовлетворяющее начальным условиям $u(0,x) = \varphi(x)$, а преобразование Фурье от него:

$$v(t,y) = \widehat{\varphi}(y)e^{-a^2|y|^2 t}.$$

Чтобы найти отсюда u, естественно использовать формулу обращения. Нахождение же обратного преобразования Фурье от произведения двух функций нам облегчит свойство 6) свёртки быстро убывающих функций ($F_\pm[f{\cdot}]g] = (2\pi)^{-n/2}F_\pm[f] * F_\pm[g]$):

$$u(t,x) = F_-[v(t,y)](x) = F_-\left[\widehat{\varphi}(y)e^{-a^2|y|^2 t}\right](x) =$$

$$= (2\pi)^{-n/2}F_-[\widehat{\varphi}] * F_-\left[e^{-a^2|y|^2 t}\right] = (2\pi)^{-n/2}\varphi * F_-\left[e^{-a^2|y|^2 t}\right].$$

Второй сомножитель в свёртке вычислим отдельно:

$$F_-\left[e^{-a^2|y|^2 t}\right](z) = (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2(y_1^2+\dots+y_n^2)t}e^{+i(y_1z_1+\dots+y_nz_n)}\,dy_1\dots dy_n =$$

=(пользуясь тем, что подынтегральная функция является быстро убывающей, превращаем кратный интеграл в повторный)=

$$= (2\pi)^{-(n-1)/2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-a^2(y_1^2+\dots+y_{n-1}^2)t}e^{i(y_1z_1+\dots+y_{n-1}z_{n-1})}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2y_n^2t}e^{iy_nz_n}\,dy_n\right]dy_1\dots dy_{n-1}=$$

=(поскольку одномерный интеграл, стоящий в квадратных скобках, не зависит от переменных $y_1,\dots,y_n$, то можем вынести его как постоянную из-под знака $(n-1)$-мерного интеграла)=

$$=\left[(2\pi)^{-(n-1)/2}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-a^2(y_1^2+\dots+y_{n-1}^2)t}e^{i(y_1z_1+\dots+y_{n-1}z_{n-1})}\,dy_1\dots dy_{n-1}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2y_n^2t}e^{iy_nz_n}\,dy_n\right]=$$

=(как видим, нам удалось «отщепить» одномерный интеграл от кратного; повторим этот процесс многократно)=

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2y_1^2t}e^{iy_1z_1}\,dy_1\right)\dots\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2y_n^2t}e^{iy_nz_n}\,dy_n\right).$$

Каждый из фигурирующих в последней формуле одномерных интегралов представляет собой одномерное обратное преобразование Фурье от функции вида $y\mapsto e^{-by^2}$, $b>0$. Его мы уже считали в § 6 и знаем, что

$$\widehat{e^{-by^2}}(z)=\check{e^{-by^2}}(z)=\frac{1}{\sqrt{2b}}e^{-z^2/4b}.$$

Используя это соображение, мы можем закончить вычисление многомерного преобразования Фурье следующим образом:

$$F_-\left[e^{-a^2|y|^2t}\right](z)=\left(\frac{1}{\sqrt{2a^2t}}e^{-\frac{z_1^2}{4a^2t}}\right)\dots\left(\frac{1}{\sqrt{2a^2t}}e^{-\frac{z_n^2}{4a^2t}}\right)=\frac{1}{(2a^2t)^{n/2}}e^{-\frac{|z|^2}{4a^2t}},$$

что позволяет нам записать решение уравнения теплопроводности (34) с начальными условиями $u(0,x)=\varphi(x)$ в виде

$$u(t,x)=\frac{1}{(4\pi a^2t)^{n/2}}\left(\varphi(z)*e^{-\frac{|z|^2}{4a^2t}}\right)(x)=\frac{1}{(4\pi a^2t)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-z)e^{-\frac{|z|^2}{4a^2t}}\,dz.$$

Последний интеграл называется *интегралом Пуассона для для уравнения теплопроводности.*

Изложенный в этом параграфе метод решения уравнения теплопроводности основан на том, что преобразование Фурье заменяет операцию дифференцирования операцией умножения на независимую переменную. Этот метод применим и к другим дифференциальным уравнениям. Он называется *операторным методом* и вкратце может быть изложен так.

Пусть ищется функция $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$a_0 \frac{d^n u}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{du}{dx} + a_n u(x) = f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_0, \ldots, a_n$ и известной правой частью $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Пусть функции u и f таковы, что для каждой из них определено преобразование Фурье и выполнено свойство 3) преобразования Фурье: $F_+[d^k u/dx^k](y) = (iy)^k F_+[u](y)$ (мы знаем, что эти предположения заведомо выполнены для быстро убывающих функций, но полезно иметь ввиду, что они выполняются и для некоторых других функций). Применив к нашему дифференциальному уравнению прямое преобразование Фурье, получим следующее, что особенно важно — алгебраическое, уравнение для $\widehat{u}$

$$\big[a_0(iy)^n + a_1(iy)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(iy) + a_n\big]\widehat{u}(y) = \widehat{f}(y).$$

Применив теперь обратное преобразование Фурье к решению

$$\widehat{u}(y) = \frac{\widehat{f}(y)}{a_0(iy)^n + a_1(iy)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(iy) + a_n}$$

этого алгебраического уравнения, найдём решение u исходного дифференциального уравнения.

Задачи

82. Найдите функцию $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую одномерному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и начальным условиям

$$u(0,x) = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x).$$

83. Найдите решение двумерного уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

в полуплоскости $y \geq 0$, подчинённое условиям а) $f(0,x) = g(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$; б) функция $x \mapsto f(x,y)$ является быстро убывающей для каждого $y \geq 0$; в) $f(x,y) \to 0$ при $y \to +\infty$ для каждого $x \in \mathbb{R}$.

§ 14. Начальные сведения о дискретном преобразовании Фурье

Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — 2π-периодическая функция, которая может быть представлена своим рядом Фурье, т. е. такая, что для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \tag{36}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx.$$

Как известно из темы «Ряды Фурье», это разложение заведомо имеет место, если f — непрерывная кусочно-гладкая 2π-периодическая функция.

При численных расчётах f задают в конечном множестве точек интервала $[-\pi, \pi]$. Обычно — на равномерной сетке, состоящей из точек $x_k = \pi k/N$, называемых *узлами сетки*. Здесь целое число N задаётся произвольно и регулирует количество узлов сетки, а целое число k и, с учётом того, что $f(-\pi) = f(\pi)$, меняется от $-N+1$ до N. При этом задать функцию — значит задать её значения в узлах $f_k = F(x_k) = F(\pi k/N)$. Поэтому для функции, заданной на сетке, используют обозначение $\{f_k\}$.

Оказывается, что интересоваться только значениями исходной функции f в узлах сетки, то их можно найти с помощью формулы, удивительно похожей на (36), но суммирование в ней будет вестись лишь по конечному множеству индексов. Для этого нужно лишь представить произвольное целое число n в виде $n = m+@Nj$, где j и $-N+1 \leq m \leq N$ — целые числа и воспользоваться $2\pi i$-периодичностью экспоненты:

$$f_k = f\left(\frac{\pi k}{N}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\frac{\pi k}{N}} =$$

$$= \sum_{m=-N+1}^{N} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_{m+2Nj} e^{im\frac{\pi k}{N} + 2\pi ijk} = \sum_{m=-N+1}^{N} \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_{m+2Nj} \right) e^{im\frac{\pi k}{N}}$$

или
$$f_k = \sum_{m=-N+1}^{N} A_m e^{im\frac{\pi k}{N}} \tag{37}$$
где использовано обозначение
$$A_m = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_{m+2Nj}. \tag{38}$$

Набор чисел $A_{-N+1}, A_{-N+2}, \ldots, A_N$, найденных по формуле (38), называется *прямым дискретным преобразованием Фурье* функции $\{f_k\}$. Его также можно трактовать как функцию $\{A_m\}$, заданную на той же самой сетке $x_m = \pi m/N$ $(-N+1 \le m \le N)$. В частности, можно использовать формулу (37) для построения по функции $\{A_m\}$ новой функции $\{f_k\}$, называемой в этом случае *обратным дискретным преобразованием Фурье* функции $\{A_m\}$.

Из указанного выше рассуждения, приведшего нас к формуле (37), становится ясной такая её интерпретация: если к функции применить сначала прямое, а потом обратное дискретное преобразование Фурье, то придём к исходной функции. Другими словами, (37) является формулой обращения для дискретного преобразования Фурье.

Для прямого дискретного преобразования Фурье имеется более удобная формула, чем (38). Чтобы получить её, фиксируем целое число $-N+1 \le N \le N$, умножим каждую из формул (37) на $e^{-ilk\pi/N}$ и просуммируем все полученные равенства по параметру k от $-N+1$ до N:
$$\sum_{k=-N+1}^{N} f_k e^{-il\frac{k\pi}{N}} = \sum_{m=-N+1}^{N} A_m \left[\sum_{k=-N+1}^{N} e^{im\frac{k\pi}{N}} e^{-il\frac{k\pi}{N}} \right] \tag{39}$$
В квадратных скобках здесь стоит сумма конечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{i(m-l)\pi/N}$. Используем известную из средней школы формулу для её суммы
$$b + bq + \cdots + bq^M = b\frac{1-q^{M+1}}{1-q},$$
справедливую при $q \ne 1$; здесь $M+!$ — количество суммируемых членов прогрессии.

В формуле (39) мы суммируем $2N$ членов прогрессии, знаменатель которой отличен от 1 при $m \ne l$. Значит, при $m \ne l$ сумма, стоящая в (39) в квадратных скобках, равна произведению $1 - q^{M+1}$ на $b/(1-q)$, но
$$1 - q^{M+1} = 1 - e^{i(m-l)\frac{2\pi N}{N}} = 1 - e^{i(m-l)2\pi} = 0$$

ввиду $2\pi i$-периодичности экспоненты. Поэтому в сумме по m, стоящей в правой части (39), все слагаемые равны нулю, кроме, быть может, того единственного, для которого $m = l$. Но в этом случае в квадратных скобках мы суммируем $2N$ одинаковых слагаемых, каждое из которых равно 1.

Окончательно мы получаем из (39)

$$A_l = \frac{1}{2N} \sum_{k=-N+1}^{N} f_k e^{-il\frac{k\pi}{N}}, \qquad l = -N+1, \ldots, N. \tag{40}$$

Это и есть искомые формулы прямого дискретного преобразования Фурье, аналогичные формулам (37).

В качестве характерного примера использования дискретного преобразования Фурье обсудим его применение для сжатия цифровых изображений. Для определённости будем вести речь о фотографии, демонстрируемой на мониторе с разрешением 1200×1024 пикселей. В таком случае образ экрана трактуют как набор из 1024 векторов, каждый из которых имеет 1200 компонент, причём каждая компонента есть целое число, кодирующее номер цвета, которым окрашен данный пиксель. Сохранить или передать фотографию — значит сохранить или передать этот набор из 1024 целочисленных векторов. Основная идея уменьшения количества информации очень проста: давайте вычеркнем из каждого из векторов все компоненты с нечётными номерами и в таком виде сохраним или передадим информацию. Достигнутый коэффициент сжатия примерно равен 2. Чтобы восстановить фотографию, «раздуем» сжатую информацию, добавив между каждыми компонентами каждого вектора новую компоненту, численно равную, скажем, полусумме её соседей. Ясно, что в результате таких манипуляций мы получим не в точности исходную фотографию, а несколько искажённую.

Теперь слегка усложним процесс сжатия: сначала к каждому 1200-мерному вектору применим прямое дискретное преобразование Фурье, а затем результат «сожмём», вычеркнув, как и раньше, нечётные компоненты. При этом процесс восстановления, естественно, выглядит так: сначала «раздуем» сжатую информацию, вставив дополнительные компоненты, а затем сделаем обратное дискретное преобразование Фурье.

Как мы знаем, преобразование Фурье дискретной функции имеет столько же компонент, сколько исходная дискретная функция и, на первый взгляд, предложенное усложнение никакого выигрыша нам не даёт. Однако экспериментально установлено, что обсуждаемый усложнённый процесс сжатия приводит к меньшим искажениям изображения! Здесь мы не станем анализировать математическую суть этого факта, ограничившись лишь таким соображением: согласно (37), погрешности, возникшие в коэффициентах Фурье A_m «распределяются» по всем f_k и не так сильно «бросаются в глаза».

Отметим, что именно описанная выше идея использования преобразования Фурье для сжатия изображения лежит в основе алгоритмов сжатия JPEG, предложенных the Joint Photographic Experts Group (http://www.jpeg.org/public). Нужно только иметь ввиду, что к настоящему времени известна целая серия алгоритмов, некоторые из которых используют дискретный аналог преобразования Фурье в комплексной форме (как это сделано у нас), некоторые — дискретные аналоги синус- или косинус-преобразований Фурье, а некоторые — дискретный аналог двумерного преобразования Фурье. Подробнее об этом можно прочитать, например, в статье G. Strang "The discrete cosine transform", опубликованной в журнале SIAM Reviews **41**, no. 1 (1999) 135–147.

Во всяком случае, теперь вы знаете, что когда вы сохраняете файл в формате jpg, ваш компьютер делает прямое преобразование Фурье, а когда вы открываете файл *.jpg, он делает обратное преобразование Фурье. При этом важнейшим становится вопрос о количестве операций, необходимых для нахождения прямого или обратного преобразования Фурье. Не углубляясь в детали, отметим, что операции перемножения или сложения двух чисел с плавающей запятой занимают у процессора значительно больше времени, чем вызов числа из оперативной памяти или вычисление экспоненты от числа с плавающей запятой. Поэтому будем брать в расчёт только арифметические операции. Например, согласно формуле (37), для нахождения одного коэффициента f_k обратного дискретного преобразования Фурье нам необходимо сложить $2N$ чисел с плавающей запятой, каждое из которых является произведением двух чисел с плавающей запятой. То есть, для нахождения одного f_k нам необходимо выполнить $2N$ умножение и $2N-1$ сложение; всего — $4N-1$ арифметических операций. Для нахождения всех компонент $\{f_k\}$ обратного дискретного преобразования Фурье потребуется $2N(4N-1)$ арифметических операций. Чтобы упростить изложение и не следить за конкретными постоянными, мы будем говорить, что для этого потребуется $O(N^2)$ операций, подразумевая при этом, в соответствии с общей идеологией математического анализа, что найдётся некоторая постоянная C такая, что необходимое нам количество операций не превосходит $C \cdot N^2$.

Естественно возникает вопрос о том можно ли и насколько уменьшить число операций, необходимых для нахождения дискретного преобразования Фурье, за счёт рациональной организации вычислений? Об этом речь пойдёт в следующем параграфе.

§ 15. Первые сведения о быстром преобразовании Фурье

Быстрое преобразование Фурье есть способ организации вычислений, применяемый для нахождения дискретного преобразования Фурье. Его идея состоит в том, чтобы, например, в формулах (40) выделить группы слагаемых, которые входят в выражения для различных коэффициентов A_l. Экономия вычислений достигается за счёт того, что каждая группа вычисляется только один раз.

Для определённости предположим, что мы собираемся найти прямое дискретное преобразование Фурье по формулам (40), то есть для данной дискретной функции $\{f_k\}$ мы собираемся найти числа

$$A_n = \frac{1}{2N} \sum_{k=-N+1}^{N} f_k e^{-in\frac{k\pi}{N}}, \qquad -N+1 \le n \le N. \tag{41}$$

Допустим, что число N является составным и представлено в виде $N = p_1 \cdot p_2$. Применяя алгоритм деления с остатком, запишем произвольное целое число n, лежащее между $-N+1$ и N в виде $n = n_1 + p_1 n_2$, где остаток n_1 лежит в пределах от $-p_1$ до p_1, а частное n_2 — в пределах от $-p_2$ до p_2:

$$-p_1 < n_1 < p_1, \qquad -p_2 < n_2 < p_2. \tag{42}$$

При этом мы получаем новую возможность задавать число n из интервала от $-N+1$ до N: для этого достаточно задать числа n_1 и n_2, удовлетворяющие неравенствам (42). Пользуясь этим соображением, введём обозначение $A_n = A(n_1, n_2)$.

Обратите внимание, что, написав неравенства (42), мы излишне ограничили себя в выборе возможных частного и остатка, сделав, например, невозможным представление числа $n = N = p_1 p_2$ в виде $n = n_1 + p_1 n_2$. Но мы сознательно не углубляемся в обсуждение подобного рода «граничных эффектов» чтобы не загромождать изложение.

Подобным же образом всякое целое число k, лежащее между $-N+1$ и N представим в виде $k = k_2 + p_2 k_1$, где $-p_1 < k_1 < p_1$ и $-p_2 < k_2 < p_2$.

Теперь мы можем по-новому организовать суммирование в (41):

$$A_n = A(n_1, n_2) = \frac{1}{2N} \sum_{k=-N+1}^{N} f_k e^{-in\frac{k\pi}{N}} =$$

$$= \frac{1}{2N} \sum_{k_1=-p_1+1}^{p_1-1} \sum_{k_2=-p_2+1}^{p_2-1} f_{k_2+p_2k_1} e^{-i(n_1+p_1n_2)(k_2+p_2k_1)\frac{\pi}{p_1p_2}}. \qquad (43)$$

Преобразуем показатель экспоненты:

$$-i(n_1+p_1n_2)(k_2+p_2k_1)\frac{\pi}{p_1p_2} = -i\pi\frac{nk_2}{N} - i\pi\frac{n_1k_1}{p_1} - i\pi n_2k_1.$$

Поскольку число n_2k_1 — целое, то экспонента в степени $-i\pi n_2k_1$ равна плюс или минус единице. Поэтому, перегруппировав слагаемые, мы можем продолжить равенство (43) следующим образом

$$A_n = A(n_1, n_2) == \frac{1}{2N} \sum_{k_2=-p_2+1}^{p_2-1} A^{(1)}(n_1, k_2) e^{-i\pi\frac{nk_2}{N}}, \qquad (44)$$

где

$$A^{(1)}(n_1, k_2) = \sum_{k_1=-p_1+1}^{p_1-1} \left(\pm f_{k_2+p_2k_1}\right) e^{-i\pi\frac{n_1k_1}{p_1}}.$$

Вычисление одного выражения $A^{(1)}(n_1, k_2)$ требует от нас $O(p_1)$ арифметических операций с числами с плавающей запятой. Поскольку самих этих выражений $2p_1 \cdot 2p_2$ штук, то для вычисления их всех потребуется $O(p_1^2p_2)$ операций. После того, как все выражения $A^{(1)}(n_1, k_2)$ найдены, для вычисления одного выражения $A(n_1, n_2)$ требуется $O(p_2)$ операций. Самих же выражений $A(n_1, n_2)$ имеется $2p_1 \cdot p_2$ штук. Значит, для нахождения их всех потребуется $O(p_1p_2^2)$ операций.

Окончательно получаем, что для нахождения прямого дискретного преобразования Фурье по формулам (44) требуется $O(p_1^2p_2) + O(p_1p_2^2)$ операций. В частности, если сомножители p_1 и p_2 приблизительно равны между собой (а значит, приблизительно равны $\sqrt{N}$), то общее число операций составит $O(N^{3/2})$.

Вот мы и проследили как за счёт рациональной организации вычислений уменьшить количество операций с $O(N^2)$ в формулах (41) до $O(N^{3/2})$ в формулах (44). Вместе с тем легко понять, что формулы (44) не являются предельно экономичными: при вычислении коэффициентов $A^{(1)}(n_1, k_2)$, в свою очередь, можно выделять некоторые выражения A^2 подобно описанному выше выделению выражений $A^{(1)}(n_1, k_2)$ из $A(n_1, n_2)$; из A^2 можно подобным образом выделять выражения A^3 и т.д. Усложнённые таким образом вычислительные формулы позволяют довести число операций, необходимых для вычисления дискретного преобразования Фурье, до $O(N \log_2 N)$. В этом и состоит *быстрое преобразование Фурье.*

Более детальное изложение быстрого преобразования Фурье читатель может найти в книге Н. С. Бахвалова, Н. П. Жидкова и Г. М. Кобелькова «Численные методы» М.: Наука, 1987. О других быстрых алгоритмах (например, — об алгоритмах быстрого умножения чисел) можно прочитать во втором томе книги Д. Кнутта «Искусство программирования для ЭВМ» М.: Мир, 1977.

Вернёмся к примеру сжатия цифровой фотографии, изображённой на мониторе с разрешением 1200×1024. В этом случае каждая из 1024 строк имеет длину $N = 1200$ и нахождение преобразования Фурье от неё по формулам (40) требует $C \cdot 1200^2$ операций, а по формулам быстрого преобразования Фурье — только $C \cdot 1200 \log_2 1200)$ операций, что примерно в 120 раз меньше. И это при каждом открытии или сохранении *.jpg файла! Не удивительно, что производители программного обеспечения с готовностью идут на усложнение вычислительных алгоритмов, обеспечивающих такой рост скорости обработки информации.

Ответы и указания

7. а) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1+\cos\pi y}{1-y^2}\cos xy\,dy$; б) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\pi y}{1-y^2}\sin xy\,dy$. **8.** а) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y\cos xy}{y}\,dy$; б) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos y}{y}\sin xy\,dy$. **9.** а) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{y\sin y+\cos y-1}{y^2}\cos xy\,dy$; б) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin y-y\cos y}{y^2}\sin xy\,dy$. **10.** а) $f(x)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{y\sin(2y/3)+3(\cos(2y/3)-1)}{y^2}\cos xy\,dy$; б) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{2y-3\sin(2y/3)}{y^2}\sin xy\,dy$. **11.** $f(y)=e^{-y}$, $y\ge 0$. **12.** $f(y)=e^{-y}$, $y\ge 0$. **13.** $f(y)=(2/\pi)\int_0^{+\infty}(\sin xy)/(1+x^2)\,dx$; этот интеграл не берётся в элементарных функциях, но его можно преобразовать к виду $f(y)=[e^{-y}\mathrm{Ei}\,(y)-e^{y}\mathrm{Ei}\,(-y)]/\pi$, где $\mathrm{Ei}\,(y)=-\int_{-y}^{+\infty}e^{-x}/x\,dx$. **14.** Нет решений. **15.** $f(y)=2\pi^{-1}y(1+y^2)^{-1}$. **16.** $f(y)=(\sin\pi y)(1-y^2)^{-1}$. **17.** $f(y)=(y\sin\pi y)(1-y^2)^{-1}$. **18.** $f(y)=2^{-1}\pi^{-1/2}ye^{-y^2/4}$. **19.** $2\pi^{-1}y^{-1}\sin ay$. **20.** $\pi^{-1}(1-y)^{-1}\sin a(1-y)+\pi^{-1}(1+y)^{-1}\sin a(1+y)$. **21.** $(2\pi)^{-1/2}e^{-y^2/4}$. **22.** $2^{1/2}\pi^{-1/2}\cos(y^2/4-\pi/4)$. **23.** $2^{1/2}\pi^{-1/2}\cos(\pi/4-y^2/4)$. **24.** $2\pi^{-1}y^{-1}(1-\cos ay)$. **25.** $2\pi^{-1}ye^{-y^2/2}$. **26.** $\pi^{-1}\ln|(1+y)/(1-y)|$. *Указание.* Используйте интегралы Фруллани $\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=f(0)\ln\frac{b}{a}$, где предполагается, что $a>0$, $b>0$, функция f непрерывна при $x\ge 0$ и интеграл $\int_A^{+\infty}x^{-1}f(x)\,dx$ сходится хотя бы для одного A. **30.** $F_-[e^{iax}f(x)](y)=F_-[f](y+a)$. **31.** $F_-[f(x-a)](y)=e^{iax}F_-[f](y)$. **32.** Формула не изменяется. **33.** $F_-[f(x)\sin ax](y)=[\check f(y+a)-\check f(y-a)]/(2i)$. **36.** $\widehat f(y)=\check f(y)=2^{1/2}\pi^{-1/2}y^{-1}\sin y$. **37.** $\widehat f(y)=-\check f(y)=i2^{1/2}\pi^{-1/2}y^{-2}(y\cos y-\sin y)$. **38.** $\widehat f(y)=\check f(y)=2^{1/2}\pi^{-1/2}y^{-2}(\cos y-1+y\sin y)$. **39.** $\widehat f(y)=\check f(y)=2^{1/2}\pi^{-1/2}y^{-3}(2y\cos y+(y^2-2)\sin y)$. **40.** $\widehat f(y)=\check f(y)=e^{-(y^2+a^2)/2}\mathrm{ch}\;ay$. **41.** $\widehat f(y)=-\check f(y)=-ie^{-(y^2+a^2)/2}\mathrm{sh}\;ay$. **42.** $\widehat f(y)=\check f(-y)=e^{-(y+a)^2/2}$. **43.** $\widehat f(y)=-\check f(y)=-i8^{1/2}\pi^{1/2}ay(y^2+a^2)^{-2}$. **44.** $\widehat f(y)=\check f(y)=8^{1/2}\pi^{1/2}y^2(y^2+1)^{-2}$. **45.** $\widehat f(y)=-\check f(y)=i8^{1/2}\pi^{1/2}y(1-3y^2)(y^2+1)^{-3}$. **46.** $\widehat f(y)=\check f(-y)=2^{1/2}\pi^{-1/2}(1-y)^{-1}\sin\pi y$. **47.** $\widehat f(y)=\check f(y)=2^{1/2}\pi^{-1/2}y(1-y^2)^{-1}\sin\pi y$. **48.** $\widehat f(y)=-\check f(y)=-i2^{1/2}\pi^{-1/2}(1-y^2)^{-1}\sin\pi y$. **49.** $\widehat f(y)=\check f(-y)=i(2\pi)^{-1/2}(1-y)^{-1}(1+e^{-i\pi y})$. **50.** $\widehat f(y)=\check f(y)=2^{1/2}\pi^{-1/2}y(\sin 2y-\sin y)$. **51.** $\widehat f(y)=\check f(y)=2^{-1/2}\pi^{1/2}e^{-|y|}$. **52.** $\widehat f(y)=-\check f(y)=-i2^{-1/2}\pi^{1/2}y^3e^{-|y|}$. **65.** $xH(x)$. **66.** $(x+1)H(x+1)$. **67.** $(2-|x|)H(2-|x|)$. **68.** $x^3H(x)/3$. **69.** $(1-\cos x)H(x)$. **70.** $(x^2-4\sin^2(x/2))H(x)$. **71.** $(3x^2+6\cos x-6)H(x)$. **72.** $(\mathrm{sh}\;x-\sin x)H(x)/2$. **73.** $(1+|x|)e^{-|x|}$. **74.** $-4^{-1}a^{-1/2}xe^{-ax^2/2}$. **81.** $\pi a^{-1}(e^{a/2}+e^{-a/2})(e^{a/2}-e^{-a/2})^{-1}=\pi a^{-1}\mathrm{cth}\;a/2$. **82.** $u(t,x)=[f(x-at)+f(x+at)]/2+2^{-1}\int_0^t[g(x-az)+g(x+az)]\,dz$. **83.** $f(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{(x-z)^2+y^2}g(z)\,dz$. *Указание.* Убедитесь, что прямое преобразование Фурье $\widehat{f}(z,y)$ функции f по переменной x имеет вид $\widehat{g}(z)e^{-y|z|}$.

Содержание