Задание на вторую неделю.

1. Докажите следующие свойства полиномиальной сводимости:

(i) Рефлексивность: $A \leq_p A$; транзитивность: если $A \leq_p B$ и $B \leq_p C$, то $A \leq_p C$;

(ii) Если $B \in \mathcal{P}$ и $A \leq_p B$, то $A \in \mathcal{P}$;

(iii) Если $B \in \mathcal{NP}$ и $A \leq_p B$, то $A \in \mathcal{NP}$.

2. Докажите, что следующие языки принадлежат классу $\mathcal{P}$. Считайте, что графы заданы матрицами смежности.

(i) Язык двудольных графов, содержащих не менее 2018 треугольников (троек попарно смежных вершин);

(ii) Язык несвязных графов без циклов;

(iii) Язык квадратных $\{0;1\}$-матриц порядка $n \geq 3000$, в которых есть квадратная подматрица порядка $n - 2018$, заполненная одними единицами.

3. *(оба пункта по 1 баллу)* Рассмотрим СЛУ $Ax = b$ с целыми коэффициентами. Пусть в этой системе m уравнений и n неизвестных, причем максимальный модуль элемента в матрице A и столбце b равен h.

(i) Оцените сверху числители и знаменатели чисел, которые могут возникнуть при непосредственном применении метода Гаусса. Приведите пример, в котором в процессе вычислений в промежуточных результатах длина возникающих чисел растёт быстрее, чем любой полином от длины записи системы в битовой арифметике.

(ii) Оказывается, что если на каждом шаге эмулировать рациональную арифметику и сокращать дроби с помощью алгоритма Евклида, модифицированный таким образом метод Гаусса окажется полиномиальным по входу (по поводу этого факта будет выложен доп. файл). Оцените трудоемкость такого модифицированного метода по параметрам m, n и $\log h$.

4. Докажите, что классы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{NP}$ замкнуты относительно операции $*$ — звезды Клини (была в ТРЯПе). Для языка NP приведите также и сертификат принадлежности слова из Σ^* языку L^*, где $L \in \mathcal{NP}$.

5. Покажите, что классу NP принадлежит язык несовместных систем линейных уравнений с целыми коэффициентами от 2018 неизвестных, и постройте соответствующий сертификат y и проверочный предикат $R(x, y)$.

6. Покажите, что язык разложения на множители

$$L_{\text{factor}} = \{(N, M) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 < M < N \text{ и } N \text{ имеет делитель } d, 1 < d \leq M\}$$

лежит в пересечении $\mathcal{NP} \cap \text{co} - \mathcal{NP}$.

7. Язык ГП состоит из описаний графов, имеющих гамильтонов путь. Язык ГЦ состоит из описаний графов, имеющих гамильтонов цикл (проходящий через все вершины, причем все вершины в этом цикле, кроме первой и последней, попарно различны). Постройте явные полиномиальные сводимости ГЦ к ГП и ГП к ГЦ.

8. Регулярный язык L задан регулярным выражением. Постройте полиномиальный алгоритм проверки непринадлежности $w \notin L$. Вы должны определить, что вы понимаете под длиной входа, и выписать явную оценку трудоёмкости алгоритма.

9. (i) Языки $L_1, L_2, \ldots, L_{2019}$ заданы регулярными выражениями. Постройте полиномиальный алгоритм, проверяющий, что их пересечение не пусто, т. е. $\bigcap_{i=1}^{2019} L_i \not\equiv \emptyset$.

(ii) Следует ли из решения предыдущей задачи, что проверка непустоты пересечения конечного семейства ДКА (в фиксированным алфавите, например, унарном) принадлежит классу $\mathcal{P}$?

Является ли эта задача разрешимой?

10 (Доп). Пусть $A \in \mathcal{NP} - \text{complete}$. Пусть машина имеет дополнительную функцию (оракул) за 1 такт получать ответ, лежит ли слово x в языке A. Тогда существует полиномиальный алгоритм, решающий задачу поиска для A. Докажите это утверждение.