Домашнее задание по АМВ

771 группа, Христолюбов Максим

11 апреля 2019 г.

1 Задача 1

$(M_n(\omega))^{-1}M_n(\omega) = E$

Убедимся, что элемент с индексами (j,k) $(M_n(\omega))^{-1}$ есть $\frac{\omega_n^{-kj}}{n}$, и этим покажем, что $(M_n(\omega))^{-1} = \dfrac{1}{n}M_n(\omega^{-1})$. Элемент (i,j) матрицы $(M_n(\omega))^{-1}M_n(\omega)$ равен

$\sum\limits_{k=o}^{n-1}(\frac{\omega_n^{-ik}}{n})(\omega_n^{kj}) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=o}^{n-1}\omega_n^{k(j-i)}$.

Если $i = j$, то все слагаемые равны 1 и значение выражения тоже 1. Если $i \neq j$, то при сложении слагаемых, которые являются комплексными числами, по правилу треугольника, получается правильный многоугольник (точнее $|i-j|$ многоугольников), и сумма соответственно равна 0. Значит, элементы $(M_n(\omega))^{-1}$ действительно имеют такой вид.

Найдем элемент (i,j) матрицы $(M_n(\omega))^2$:

$\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_n^{ik}\omega_n^{kj} = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_n^{k(i+j)}$

Если $i + j = n$ или $i = j = 0$, то сумма равна n, так как все слагаемые 1. В остальных случаях сумма обратится в 0. Возведем эту матрицу еще раз в квадрат. Так как только произведение i-ого вектор-столбцы на i-ый вектор-строку будет не 0, то все элементы будут равны 0, кроме диагональных, которые будут равны n^3. Значит, $(M_n(\omega))^4 = n^3E$

2 Задача 2

Сначала посчитаем матрицы второго порядка, на их основе четвертого, потом восьмого

$M\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$M\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix},\ M\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3+\omega_4\\2\\3-\omega_4\end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\3\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2+3\omega_8+\omega_8^3\\2+2\omega_8^2\\2+\omega_8+3\omega_8^3\\-2\\2-3\omega_8-\omega_8^3\\2-2\omega_8^2\\2-\omega_8-\omega_8^3\end{pmatrix}, \text{ аналогично } M\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\3\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2+3\omega_8+\omega_8^3\\-1-3\omega_8^2\\2+3\omega_8-3\omega_8^3\\2\\2+3\omega_8-3\omega_8^3\\-1+3\omega_8^2\\2-3\omega_8-3\omega_8^3\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}48\\(2+3\omega_8+\omega_8^3)(2+3\omega_8+\omega_8^3)\\(2+2\omega_8^2)(-1-3\omega_8^2)\\(2+\omega_8+3\omega_8^3)(2+3\omega_8-3\omega_8^3)\\-4\\(2-3\omega_8-\omega_8^3)(2+3\omega_8-3\omega_8^3)\\(2-2\omega_8^2)(-1+3\omega_8^2)\\(2-\omega_8-\omega_8^3)(2-3\omega_8-3\omega_8^3)\end{pmatrix}$$

Выполняя сначала такие же действия для подвекторов размера 2 и 4, вычислим $\begin{pmatrix}4\\6\\6\\17\\9\\3\\3\\0\end{pmatrix}$

3 Задача 3

Для перемножения произведения этих n многочленов разобъем его на 2 произведения по $\frac{n}{2}$ многочленов и найдем рекурсивно с помощью этого алгоритма их коэффициенты. После этого перемножим эти 2 многочлена с помощью БПФ за $O(n\log_2 n)$. Реккурента для этого алгоритма $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(n\log_2 n)$, значит, $T(n) = O(n\log_2^2 n)$.

4 Задача 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Разложим циклическую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = C = \frac{1}{n} V^* \Lambda V$$

$\Lambda = diag(1+2+4+8{,}1+2i-4-8i{,}1-2+4-8{,}1-2i-4+8i) = diag(15,-3-6i,-5,-3+6i)$

$\Lambda^{-1} = diag(\frac{1}{15}, -\frac{1}{3(1+2i)}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3(1-2i)})$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}, V^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}$$

$x = \frac{1}{4} V(\Lambda^{-1}(V^* b))$

$$V^* b = \begin{pmatrix} 30 \\ 12-6i \\ 10 \\ 12+6i \end{pmatrix},$$

$$\Lambda^{-1}(V^* b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{15}30 \\ -\frac{1}{3(1+2i)}(12-6i) \\ -\frac{1}{5}10 \\ -\frac{1}{3(1-2i)}(12+6i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1{,}6+1{,}2i \\ -2 \\ -1{,}6-1{,}2i \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1}{4} V \begin{pmatrix} 2 \\ -1{,}6+1{,}2i \\ -2 \\ -1{,}6-1{,}2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

5 Задача 5

Циркулянтная матрица раскладывается в $circ(x) = M^{-1} diag(FFT(x))M$, поэтому $FFT(x*y) = FFT(circ(x)y) = Mcirc(x)y = M(M^{-1}diag(FFT(x))M)y = diag(FFT(x))My = diag(FFT(x))FFT(y) = FFT(x) \times FFT(y)$ по Адамару.

6 Задача 6

*Решение взято у Михаила Сысака.

Собственными векторами циркулянтной матрицы являются векторы $v_k = (1,\omega_{n+1}^k \ldots \omega_{n+1}^{kn})^T \ \forall k = 0..n$. При умножении собственного вектора на циркулянтную матрицу из всех строк получившегося вектора можно вынести число $c_0 + c_n\omega_{n+1}^k + \ldots + c_1\omega_{n+1}^{kn}$ и получить в векторе v_k, значит, $\lambda_k = c_0 + c_n\omega_{n+1}^k + \ldots + c_1\omega_{n+1}^{kn}$, в это ни что иное, как произведение $(c_0, \ldots, c_n)$ на k-ую строчку в матрице Фурье. Значит, все λ_k можно найти как значения $f(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n$ в точках корнях из 1 степени $n+1$ (которая степень 2, а если нет добавить фиктивных точек до степени 2) умножением матрицы Фурье на этот вектор коэффициентов.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -3+4i \\ -3 \\ -3-4i \end{pmatrix}$$

7 Задача 7

Построим эту процедуру. Составим и перемножим с самим собой с помощью БПФ многочлен $\sum\limits_{k \in A} x^k$. Степени x, при которых коэффициенты получившегося многочлена будут не 0, и только они будут лежать во множестве $A + A$. Действительно, если такая степень n получилась, то существуют n_1 и n_2 из A, что $n_1 + n_2 = n$, и для всех n_1 и n_2 из A существует n — степень x в получившемся полиноме, что $n_1 + n_2 = n$.

8 Задача 8

*Решение взято у Михаила Сысака.

9 (i)

Если вычислить массив $B_i = \sum\limits_{j=0}^{m-1}(p_j - t_{i+j})^2 = \sum\limits_{j=0}^{m-1} p_j - 2\sum\limits_{j=0}^{m-1} p_j t_{i+j} + \sum\limits_{j=0}^{m-1} t_{i+j}^2$. Перемножив за $O(n \log n)$ многочлены $1 + \ldots + x^{m-1}$ с $p_{m-1}^2 + \ldots + p_0^2x^{m-1}$, $1 + \ldots + x^{n-1}$ с $t_0^2 + \ldots + t_{n-1}^2x^{n-1}$ и $t_0 + \ldots + t_{n-1}x^{n-1}$ с $p_{m-1} + \ldots + p_0x^{m-1}$ можно найти значения сумм — коэффициент при

x^{m-1+i} в последнем произведении будет равен искомой средней сумме, то есть найдеными оказались все элементы B.

10 (ii)

Можно заменить всех джокеров на 0, и при вычислении суммы каждый элемент домножать произведение 2 рассматриваемых символов. Тогда слагаемое будет равно 0 либо когда символы равны, либо когда один из них джокер. Теперь нужно вычислить значения трех сумм, каждое слагаемое которых состоит из 4 множителей. Это можно сделать найдя произведение 4 правильно подобранных многочленов за $)(n \log n)$.

11 (iii)

Можно покрыть текст подстроками длины $2m$, чтобы соседние из них пересекались по m символам. На каждой из подстрок запустим описанные алгоритмы за $O(m \log m)$, всего $\frac{n}{m}$ запусков. Тогда асимптотика будет $\frac{n}{m} O(m \log m = O(n \log m))$.

12 Задача 9

Вычислить $\{y_k\}_{k=0}^{n-1}$ можно за $O(n \log n)$, после этого найдем суммированием за $O(n)$ $\sum\limits_{i=0}^{n-1} y_i$ и после сложим мнимую и действительную часть результата. Алгоритм работает за $O(n \log n) = o(n^2)$.