Домашнее задание по АМВ

771 группа, Христолюбов Максим

18 февраля 2019 г.

1 Задача 1

1.1 (iii)

$A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_6 = 0$, $A_5 = 1$ из решений соответствующих уравнений.

Покажем, что $A_n = A_{n-6} + 1$.

Как пример рассмотрим число 19. При разложении $19 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 3 = (2 \cdot 2 + 2 \cdot 6) + 1 \cdot 3 = 8 \cdot 2 + 1 \cdot 3$ кол-во двоек максимально. Уменьшим кол-во двоек в разложении, но чтобы их было как можно больше, тогда $19 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 3 = (2 \cdot 2 + 1 \cdot 6) + (1 \cdot 6 + 1 \cdot 3) = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3$. Следующее разложение можно получить отправив всю часть, кратную 6 к тройкам: $19 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 3 = 2 \cdot 2 + (2 \cdot 6 + 1 \cdot 3) = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 3$. Больше решений нет, так как нарушалось бы делимость 19. То же самое можно проделать с любым n — фактически, здесь n делилось на 6 с остатком и раскладывалось в сумму двоек и троек, но так чтобы в разложении всегда присутствовали и 2, и 3, а всевозможные решения получались в зависимости от того сколько шестерок сгруппировать с 2, а сколько с 3.

Пусть $n = a \cdot 2 + k \cdot 6 + b \cdot 3$, причем, a и b - минимальные натуральные из всех возможных. Тогда $n + 6 = a \cdot 2 + (k + 1) \cdot 6 + b \cdot 3$. В случае с n существовало k вариантов как распределить $6k$ по двойкам и тройкам, в случае же $n + 6$ — $k + 1$ вариант, значит $A_{n+6} = A_n + 1$.

Из начальных условий $A_{6n+1} = A_{6n+2} = A_{6n+3} = A_{6n+4} = A_{6n+5} - 1 = A_{6n+6} = n$.

1.2 (ii)

$A_n = A_{n-6} + 1 = A_{n-12} + 2 = \ldots = A_{n-6k} + k = \Theta(k)$, где $k = [\frac{n}{6}]$

$A_n = \Theta(n)$

1.3 (i)

$F(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 + x^5 + 0x^6 + x^7 + x^8 + \ldots + A_k x^k + \ldots = 0 + \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{6k+1}x^{6k+1} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{6k+2}x^{6k+2} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{6k+3}x^{6k+3} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{6k+4}x^{6k+4} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{6k+5}x^{6k+5} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{6k+6}x^{6k+6} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{6k+1}x^{6k+1} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{6k+1}x^{6k+2} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{6k+1}x^{6k+3} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{6k+1}x^{6k+4} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} (A_{6k+1}+1)x^{6k+5} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_{6k+1}x^{6k+6} = (x+x^2 \ldots + x^6) \sum\limits_{k=0}^{\infty} kx^{6k} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{6k+5}$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{6k} = \frac{1}{1-x^6}$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} 6kx^{6k-1} = \frac{6x^5}{(1-x^6)^2}$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} kx^{6k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^{6k} = \frac{x^6}{(1-x^6)^2}$

$F(x) = \frac{x(1-x^6)}{1-x} \cdot \frac{x^6}{(1-x^6)^2} + \frac{x^5}{1-x^6} = \frac{x^7}{(1-x)(1-x^6)} + \frac{x^5}{1-x^6} = \frac{x^7 - x^6 + x^5}{(1-x)(1-x^6)}$

2 Задача 2

2.1 (i)

Пусть для определенности $y_{i-1} \geq x_{i-1}$, тогда $y_i = y_{i-1} \mod x_{i-1} < x_{i-1} = x_i$.

Рассмотрим случай, когда $x_{i-1} \leq \frac{y_{i-1}}{2}$. Значит,
$s_{i-1} = x_{i-1} + y_{i-1} \geq x_{i-1} + 2x_{i-1} = 3x_{i-1}$
$s_i = x_i + y_i \leq x_i + x_i = 2x_{i-1} \leq \frac{2}{3}s_{i-1}$
Если же $\frac{y_{i-1}}{2} \leq x_{i-1}$, то $y_i = y_{i-1} - x_{i-1}$
$s_{i-1} = x_{i-1} + y_{i-1} \geq \frac{y_{i-1}}{2} + y_{i-1} = \frac{3}{2}y_{i-1}$
$s_i = x_i + y_i = x_{i-1} + (y_{i-1} - x_{i-1}) = y_{i-1} \leq \frac{2}{3}s_{i-1}$
В любом случае неравенство выполняется

2.2 (ii)

$\gcd(F_{m+2}, F_{m+1}) = \gcd(F_{m+1} + F_m, F_{m+1}) = \gcd(F_m, F_{m+1}) = \ldots = \gcd(F_2, F_1) = \gcd(1,1) = 1$

3 Задача 3

$G_3(k) \le 4G_3(\lceil \frac{k}{4} \rceil) + 4\lceil \frac{k}{4} \rceil^3$ $(u_i = \lceil \frac{k}{4} \rceil)$
$G_3(k) \ge 4G_3(\lfloor \frac{k}{4} \rfloor) + 4\lfloor \frac{k}{4} \rfloor^3$ $(u_i = \lfloor \frac{k}{4} \rfloor)$
$G_3(k) = \Theta(F)$, $F(k) = 4F(\frac{k}{4}) + 4(\frac{k}{4})^3$
По основное теореме $F(k) = \Theta(k^3)$. Значит $G_3(k) = \Theta(k^3)$.

4 Задача 4

4.1 (i)

Условие задачи — на каждом k-ом шагу записи правильной скобочной последовательности $L(k) > R(k)$. Это значит, что первая скобка — обязательно открывающаяся, а последняя зарывающаяся, а все то что между ними представляет из себя произвольную правильную скобочную последовательность. Значит нужно посчитать кол-во правильных скобочных последовательностей из $n-2$ скобок и является частным случаем задачи о путях Дика (из курса АЛКТГ). Всего их $C_{n-2}^{\frac{n-2}{2}} - C_{n-2}^{\frac{n-2}{2}+1} = C_{n-2}^{\frac{n-2}{2}} - C_{n-2}^{\frac{n}{2}}$

4.2 (ii)

Кол-во скобочных последовательностей длины $4n+2$ - это $2n+1$-ое число Каталана.
$Cat(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$
Нужно найти сумму ряда
$S = BR_2 + BR_6 x + \ldots + BR_{4k+2} x^k + \ldots = c_1 + c_3 x + \ldots + c_{2k+1} x^k + \ldots$
$Cat(x) - Cat(-x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots - c_0 + c_1 x - c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots = 2c_1 x + 2c_3 x^3 + \ldots = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} - \frac{1-\sqrt{1+4x}}{-2x} = \frac{2-\sqrt{1-4x}-\sqrt{1+4x}}{2x}$
$F(x) = \frac{Cat(x)-Cat(-x)}{2x} = c_1 + c_3 x^2 + \ldots = \frac{2-\sqrt{1-4x}-\sqrt{1+4x}}{4x^2}$
$S = c_1 + c_3 x + \ldots = F(\sqrt{x}) = \frac{2-\sqrt{1-4\sqrt{x}}-\sqrt{1+4\sqrt{x}}}{4x}$

5 Задача 5

$\sim$ — эквивалентность при $n \to \infty$, то есть предел отношения функций слева и справа стремится к константе. -5 и $-\log\frac{3}{2}$ из знаменателя можно выбросить, так как они не влияют на асимптотику при $n \to \infty$. Здесь имеет смысл рассматривать данные соотношения при $n \to \infty$, так как из определения предела следует, выполнение соотношений, начиная с некоторого N, а остальных n конечное число, а значит взяв достаточную константу C, можно добится выполнения определения Θ ($cn \le T(n) \le Cn$).

$T(n) = 3T(\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil - 5) + \frac{n^3}{\log n} \sim 3T(\frac{n}{\sqrt{3}}) + \frac{n^3}{\log n} \sim 3(3T(\frac{n}{3}) + \frac{n^3}{3^{\frac{3}{2}}(\log n - \log 3/2)}) + \frac{n^3}{\log n} \sim 9T(\frac{n}{3}) + (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}\frac{n^3}{\log n} + \frac{n^3}{\log n}) \sim \ldots \sim (3^k T(\frac{n}{3^k}) + \frac{n^3}{\log n} \cdot (1 + (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}} + \ldots + (\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}k}) \sim (3^k T(1) + \frac{n^3}{\log n} \cdot \Theta((\frac{1}{\sqrt{3}})^k)$, где $k = log_{\sqrt{3}} n$.

$T(n) = \Theta(3^{log_{\sqrt{3}} n} + \frac{n^3}{\log n} \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}})^{log_{\sqrt{3}} n}) = \Theta(n^2 + \frac{n^3}{n \log n}) = \Theta(\frac{n^2}{\log n})$

6 Задача 6

Запишем рекурентную формулу для сложности алгоритма. Поскольку на каждом шаге нужно проходится по всему массиву за $\Theta(n)$, искать медиану медиан этим же алгоритмом за $T(\frac{n}{4})$ и рекурсивно рассматривать подмассив, в котором находится медиана, размером $n - \frac{3}{8}n = \frac{5}{8}n$ в лучшем и размером $n - \frac{2}{8}n = \frac{3}{4}n$ в худшем случае, то в худшем случае

$T(n) = T(\frac{n}{4}) + T(\frac{3n}{4}) + \Theta(n) = \Theta(n \log n)$, т. к. $\frac{n}{4} + \frac{3n}{4} = n$ по теореме из курса Алгоритмов, которая гласит, что если $T(n) = \sum\limits_{i=1}^{r} T(\frac{n}{b_i}) + \Theta(n)$, где $\sum\limits_{i=1}^{r} \frac{n}{b_i} = n$, то $T(n) = \Theta(n \log n)$, а если $\sum\limits_{i=1}^{r} \frac{n}{b_i} < n$, то $T(n) = \Theta(n)$.

7 Задача 7

Если вместо каждого вызова функции расписывать соответствующий S в формуле и расписывать до $n = 100$, то в итоге получится $S(n) = X(n) \cdot S(100)$, где $X(n)$ — кол-во вызовов функции. По скорости возрастания $X(n)$ и $S(n)$ эквивалентны. Для того чтобы оценить $X(n)$ можно решить характеристическое уравнение и общую формулу для $S(n)$ и через нее оценить $X(n)$.

$\lambda^3 - \lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda = 1{,}47$ приблизительно.

Так как остальные корни комплексные и проявляются в формуле общего члена как синус и косинус, умноженные на константы, то при больших n не вносят вклад в значение и $S(n)$ $C \cdot 1{,}47^n$.

Можно оценить и подругому: у функции $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ будет больше вызовов, а это рекурента чисел Фибоначчи,причем $F(100) > 100$. Значит, $X(10^{12}) < F(10^{12}) < 1{,}62^{10^{12}} (\phi = 1{,}62)$. Если же рассмотреть $B(n) = B(n-2) + B(n-3)$, то расписываться она будет так же как и числа Фибоначчи:

$F(n) = 2F(n-2) + F(n-3)$, $B(n) = 2B(n-3) + B(n-4)$ и т. п.

Отличие только в том, что формула чисел Фибоначчи Находится в таком виде при расписывании до $n \to n-2$, а B - до $n \to n-3$. Значит, итераций во втором случае будет в 1,5 раза меньше, значит $X(10^{12}) > 1{,}62^{\frac{2}{3}10^{12}} = 1{,}38^{10^{12}}$

Итак, $1{,}38^{10^{12}} < X(10^{12}) < 1{,}62^{10^{12}}$.

8 Задача 8

$n - \sqrt{n} > \sqrt{n}$ для всех больших n, значит самая длинная ветвь дерева рекурсии будет та в которой на каждом шаге будет расписываться $T(n - \sqrt{n})$. По асимптотике дерева рекурсии $T(n) \sim S(n), S(n) = S(n - \sqrt{n})$, т. к. с каждой итерацией из некого текущего n будет вычитаться $\sqrt{n} < \sqrt{n_0}$, где n_0 — начальное n, по которому оценивается асимптотика. Если бы на каждой итерации вычиталось $\sqrt{n_0}$, то дерево было высотой $\frac{n_0}{\sqrt{n_0}} = \sqrt{n_0}$, высота дерева рекурсии $O(\sqrt{n})$

$S(2^k) = S(2^k - 2^{\frac{k}{2}}) = S(2^k - 2^{\frac{k}{2}} - \sqrt{2^k - 2^{\frac{k}{2}}}) = S(2^k - 2^{\frac{k}{2}} - 2^{\frac{k}{2}}\sqrt{1 - 2^{\frac{-k}{2}}}) = S(2^k - 2 \cdot 2^{\frac{k}{2}} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{\frac{k}{2}} - \ldots)$

Значит, высота дерева будет больше, чем, если бы $S(2^k) = S(2^k - 2 \cdot 2^{\frac{k}{2}} = \ldots = S(2^k - p \cdot 2^{\frac{k}{2}})$, чья высота

$2^k - p \cdot 2^{\frac{k}{2}} = 0$, $p = \frac{2^k}{2^{\frac{k}{2}}} = 2^{\frac{k}{2}}$, $\Theta(2^{\frac{k}{2}})$

То есть $S(2^k) = \Omega(2^{\frac{k}{2}})$, $S(n) = \Omega(\sqrt{n}) = O(\sqrt{n}) = \Theta(\sqrt{n})$ и $T(n) = \Theta(\sqrt{n})$

9 Задача 9

$T(n) = nT(\frac{n}{2}) + O(n) = n(\frac{n}{2}T(\frac{n}{4}) + O(\frac{n}{2})) + O(n) = \ldots = n \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{4} \cdots \frac{n}{2^{k-1}}T(1) + O(n) + \ldots + O(n^k) = \frac{n^{\log_2 n}}{2^{1+\ldots+\log_2 n - 1}}T(1) + O(n^{\log_2 n}) = \frac{n^{\log_2 n}}{2^{\frac{1}{2}\log_2 n(\log_2 n - 1)}}T(1) + O(n^{\log_2 n}) = \frac{n^{\log_2 n}}{2^{\frac{1}{2}\log_2^2 n}} \cdot 2^{\frac{\log_2 n}{2}} + O(n^{\log_2 n}) = n^{\log_2 n} \cdot 2^{-\log_2^2 n^{\frac{1}{\sqrt{2}}}} \cdot \sqrt{n} + O(n^{\log_2 n}) = n^{\log_2 n} \cdot (n^{\frac{1}{\sqrt{2}}})^{-\log_2 n^{\frac{1}{\sqrt{2}}}} \cdot \sqrt{n} + O(n^{\log_2 n}) = n^{\log_2 n} \cdot n^{-\frac{1}{2}\log_2 n} \cdot \sqrt{n} + O(n^{\log_2 n}) = \Theta(\sqrt{n}^{\log_2 n}\sqrt{n}) = \Theta(n^{\frac{1}{2}\log_2 2n})$