Домашнее задание по АМВ

771 группа, Христолюбов Максим

16 марта 2019 г.

1 Задача 1

У полоски $2 \times n$ n-ые 2 клетки могут покрываться либо черным квадратом, либо белым квадратом, либо серым прямоугольником, занимающим эти 2 n-ые клетки, либо двумя серыми прямоугольниками, каждый покрывающий одну из этих клеток. В 1, 2 и 4 случает способов дозамостить полоску A_{n-2}, а в 3 A_{n-1} способов. Значит, $A_n = A_{n-1} + 3A_{n-2}$. Характеристическое уравнение:

$\lambda^2 - \lambda - 3 = 0$

$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$A_n = C_1(\frac{1+\sqrt{13}}{2})^n + C_2(\frac{1-\sqrt{13}}{2})^n$

$A_1 = 1$, $A_2 = 4$.

$C_1\frac{1+\sqrt{13}}{2} + C_2\frac{1-\sqrt{13}}{2} = 1$, $C_1(\frac{1+\sqrt{13}}{2})^2 + C_2(\frac{1-\sqrt{13}}{2})^2 = 4$

$C_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{13}}$

$C_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{13}}$

$A_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{13}})(\frac{1+\sqrt{13}}{2})^n + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{13}})(\frac{1-\sqrt{13}}{2})^n = \frac{1}{2}((\frac{1+\sqrt{13}}{2})^n + (\frac{1-\sqrt{13}}{2})^n) + \frac{1}{2\sqrt{13}}((\frac{1+\sqrt{13}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{13}}{2})^n)$

$13^{\frac{31-1}{2}} = 13^{15} = 13 \cdot 169^7 = 13 \cdot 14 \cdot 196^2 = 182 \cdot 10^3 = -40 \cdot 100 = -9 \cdot 7 = -63 = -1$, то есть это квадратичный невычет.

$\sqrt{13} = x$, $\frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{1}{x} = \frac{x}{13}$.

$2^{-1} = 16 \mod 31$, поскольку $2 \cdot 16 = 32 = 1 \mod 31$.

$A_n = 16^{n+1}((1+x)^n + (1-x)^n) = 16^{n+1}x((1+x)^n - (1-x)^n)$

$A_{30000} = 16^{30000+1}((1+x)^{30000} + (1-x)^{30000}) = 16^{30000+1}x((1+x)^{30000} - (1-x)^{30000}) = 16 \cdot 2^{120000}((1+x)^{30000} + (1-x)^{30000}) + x((1+x)^{30000} - (1-x)^{30000})$

$2^{120000} = 32^{24000} = 1^{24000} = 1 \mod 31$

$(x \pm 1)^8 = (14 \pm 2x)^4 = 2^4(7 \pm x)^4 = 2^4(62 \pm 14x)^2 = 2^4 \cdot 14^2 x^2 = 2^5 \cdot 2 \cdot 49 \cdot 13 = 98 \cdot 13 = 5 \cdot 13 = 65 = 3$

$(x \pm 1)^{30000} = 3^{3750} = 27^{1250} = (-5)^{1250} = 5^{1248} \cdot 5^2 = 125^{416} \cdot 25 = 1^{416} \cdot 25 = 25 \mod 31$

$A_{30000} = 16(25 + 25) + x(25 - 25) = 16 \cdot 50 = 25$

2 Задача 4

Да, так как это означала, что существует такой язык $V \in \mathcal{NPC} \cap co - \mathcal{NP}$.

Тогда $\forall X \in co - \mathcal{NP}, \overline{X} \in \mathcal{NP}$, значит $\overline{X}$ может быть сведено к $V \in co - \mathcal{NP}$, т. е. $\forall x \in \overline{X} \Leftrightarrow f(x) \in V$ или $\forall x \in X \Leftrightarrow f(x) \in \overline{V}$. Поскольку $V \in co - \mathcal{NP}$, то $\overline{V} \in \mathcal{NP}$. Получается каждый язык из $co - \mathcal{NP}$ сводится полиномиально к языку из $\mathcal{NP}$, значит, все языки из $co - \mathcal{NP}$ лежат в $\mathcal{NP}$.

С другой стороны тогда для каждого $Y \in \mathcal{NP} \to \overline{Y} \in co - \mathcal{NP}$ и $\overline{Y} \in \mathcal{NP}$, то есть $Y = \overline{\overline{Y}} \in co - \mathcal{NP}$. Следовательно классы совпадают.

3 Задача 6

3.1 (i)

То есть выпало 5 орлов и 5 решек, всего $P(5{,}5) = \frac{10!}{5!5!}$ случаев, чтобы это произошло, все случаев 2^{10}. Ответ — $\frac{10!}{(5!)^2 \cdot 2^{10}} = 0{,}2461$

3.2 (ii)

То есть могло выпать либо 4 решки, либо 3, либо 2, либо 1, либо 0. Значит всего подходящих случаев $|\Omega_\phi| = C_{10}^4 + C_{10}^3 + C_{10}^2 + C_{10}^1 + C_{10}^0 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} + \frac{10 \cdot 9}{2!} + \frac{10}{1!} + 1$

$P(\phi) = \frac{|\Omega_\phi|}{|\Omega|} = 0{,}3760$

3.3 (iii)

Значит, первые 5 бросаний определяют всю серию бросаний, всего способов бросить 5 раз 2^5. Ответ — $\frac{2^5}{2^{10}} = \frac{1}{32}$.

3.4 (iv)

4 Задача 7

4.1 (i)

Тому что сумма выпавших костей оказалась 7 способствуют элементарных 6 событий: могли выпасть (1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1). И только в одном случае на первой выпало 6. Значит, вероятность $\frac{1}{6}$.

4.2 (ii)

$\mathbb{E}(\max(X_1,X_2)) + \mathbb{E}(\min(X_1,X_2)) = \mathbb{E}(\min(X_1,X_2) + \max(X_1,X_2)) = \mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = 2\mathbb{E}(X) = 2 \cdot \frac{6+5+4+3+2+1}{6} = 2 \cdot \frac{21}{6} = \frac{21}{3} = 7.$

4.3 (iv)

Проверим равенство $P(2k) \cdot P(3k) = P(6k)$: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, значит, это действительно независимые события по определению.

4.4 (v)

Если есть n вершин, то на них можно построить простой цикл $\frac{(n-1)!}{2}$ способами (произвольно выбранная вершина может вести в любую другую из $n-1$ вершин, ты в любую из оставшихся $n-2$ и т. д. Остается только учесть, что каждый цикл был посчитан 2 раза, когда его обходили в одну сторону и в другую). Всего графов на n вершинах $2^{\frac{n^2-n}{2}}$, неориентированный граф взаимно однозначно задается симметричной относительно диагонали матрицей смежности, в которой на диагонали 0, то есть необходимо заполнить $\frac{n^2-n}{2}$ клеток нулями и единицами. Значит вероятность равна $\frac{(n-1)!}{2^{\frac{n^2-n+2}{2}}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{2^{\frac{n^2-n+2}{2}}} = \lim_{n\to\infty} 2^{\log\left(\frac{(n-1)!}{2^{\frac{n^2-n+2}{2}}}\right)} \leq \lim_{n\to\infty} 2^{\log\left(\frac{(n-1)^{n-1}}{2^{\frac{n^2-n+2}{2}}}\right)} = \lim_{n\to\infty} 2^{(n-1)log(n-1)-\frac{n^2-n+2}{2}} = \\ = 0$$

5 Задача 8

Пусть в урнах по N шаров, в первой n_1 белых, а во второй n_2 белых шаров. Тогда вероятность, что все шары из первой урны будут белыми равна $(\frac{n_1}{N})^n$, вероятность, что все шары из второй урны будут белыми

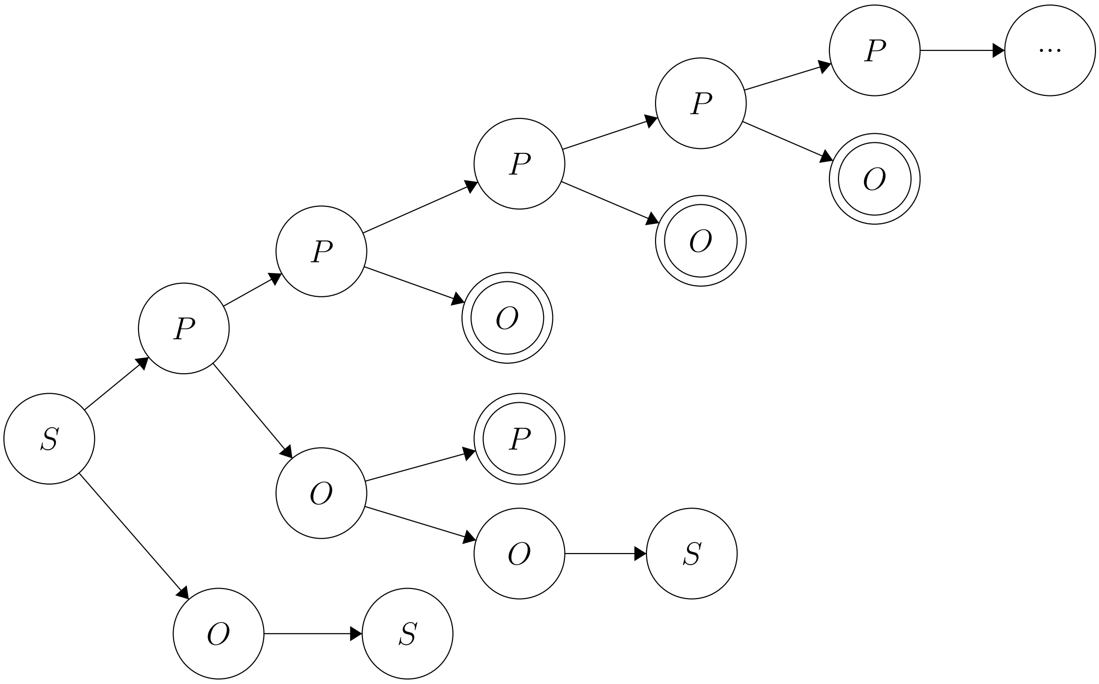
$(\frac{n_2}{N})^n$, а что все шары из второй урны будут черными $(\frac{N-n_2}{N})^n$. Значит, $(\frac{n_1}{N})^n = (\frac{n_2}{N})^n + (\frac{N-n_2}{N})^n$, $n > 2$.

$n_1^n = n_2^n + (N - n_2)^n$, $n > 2$. Но по великой теореме Ферма уравнения такого вида не имеют решений в целых чисел, при котором хотя бы одно из слагаемых не равно 0. Значит, поскольку при $n_1 =$ уравнение не имеет решений, то есть только 2 варианта: $n_2 = 0$ или $n_2 = N$, а $n_1 = N$.

Итак, n может быть любым, в первой урне обязательно только белые шары, а во второй либо все шары белые, либо все шары черные.

6 Задача 9

Построим бинарное дерево S возможных событий. В узлах указывается какая сторона монеты выпала. Ветви, оканчивающиеся вершинам в двойных кружках не продолжаются, так как в них уже встретилось одно из слов. Вершинами S обозначены поддеревья "подобные"всему дереву в том смысле, что если во всем дереве POP встречается раньше PPO с вероятностью a, то в этом поддереве POP встречается раньше с той же вероятностью. Действительно, в нижнем поддереве слова POP и PPO будут возникать в тех же местах, что и в целом дереве (это происходит из-за того, что ни одно из наших слов не начинается на O). То есть для того чтобы понять, что встретится с большей вероятностью нужно исследовать верхнюю ветвь. Дерево, чьё основание начинается в конце ветви POO, так же является "подобным поскольку из-за предшествующих OO слова PPO и POP будет встречаться в тех же местах, что и во всем дереве. Ветви POP и PPO приводят к выпадению требуемых слов, поэтому остаются только верхняя ветвь, которая продолжается до бесконечности.



Пусть вероятность, что при подбрасывании монетка первым встретится POP a, а то, что встретится PPO b. Тогда

$a = \frac{1}{2}a + (\frac{1}{8}a + \frac{1}{8})$, а $b = \frac{1}{2}b + (\frac{1}{8}b + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots)$

$a = \frac{1}{3}$

$3b = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdot = 2$, $b = \frac{2}{3}$

Ответ: PPO встретится раньше с большей вероятностью.

7 Задача 10

7.1 (i)

Построим новый генератор: будем генерировать пары чисел двумя последовательными случайными генерациями изначального генератора. Если сгенерировалось 00, то генератор выдает 0, если 10 или 01, то 1. Если же 11, то генерация пары чисел повторяется. Так продолжается, пока не выпадет одно из чисел 00, 10, 01. Тогда вероятность сгенерировать 0 будет $P(0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 \cdot \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$, а $P(1) = \frac{2}{3}$ соответственно. В худшем случае генератор будет работать бесконечность, в среднем $E(t) = 2 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{3}{4} \cdot (\frac{1}{4})^2 + \dots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2k \cdot 3(\frac{1}{4})^k = \frac{6}{4} \sum\limits_{k=1}^{\infty} k(\frac{1}{4})^{k-1} =$

$\frac{3}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(x^k\right)'|_{x=\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k\right)'|_{x=\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)'|_{x=\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}\frac{1}{(1-x)^2}|_{x=\frac{1}{4}} = \frac{3\cdot16}{2\cdot9} = \frac{8}{3}$.
В среднем одна генерация этого генератора будет работать $2\frac{2}{3}$ от одной генерации исходного генератора.

7.2 (ii)

Будем так же генерировать пары битов исходным генератором. Если сгенерировалось 11 (с вероятностью $\frac{4}{9}$), то генератор выдает 1. Если сгенерировалось 10 или 01 (с вероятностью $\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$), то генератор выдает 0. Поэтому генератор будет генерировать 0 и 1 с равной вероятностью. Если сгенерировалось 00, то генерация пары битов повторяется, и так пока не выпадет 11, 01 или 10.