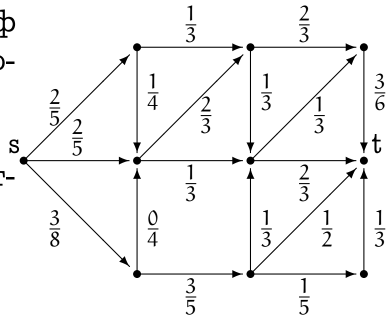
Задание на десятую неделю.

1. На рисунке изображен потоковый граф (метка $\frac{f}{u}$ на ребре означает поток и пропускную способность, соответственно).



(i) Чему равен поток f?
(ii) Изобразите остаточный граф, соответствующий потоку f.
(iii) Максимален ли поток f?
(iv) С помощью алгоритма Форда-Фалкерсона найдите максимальный поток. На каждом шаге должен быть построен остаточный граф и указан увеличивающий путь.

(v) Укажите модификацию алгоритма Форда-Фалкерсона для нахождения минимального разреза. По шагам постройте минимальный разрез между s и t. Найдите его пропускную способность.

2. В больнице каждому из 169 пациентов нужно перелить по одной дозе крови. В наличии имеется 170 доз. Распределение по группам таково.

Группа	I	II	III	IV
В наличии	45	32	38	55
Запрос	42	39	38	50

При этом пациенты, имеющие кровь группы I, могут получать только кровь группы I. Пациенты, имеющие кровь группы II (группы III), могут получать только кровь групп I и II (групп I и III, соответственно). Наконец, пациенты с IV группой могут получать кровь любой группы.

(*i*) Распределите дозы, чтобы обслужить максимальное число пациентов с помощью решения подходящей задачи о максимальном потоке. Решение нужно аккуратно оформить: должна быть нарисована потоковая сеть и показаны все шаги алгоритма ФФ, начиная с нулевого потока, т. е. должны быть построены остаточные графы и показаны увеличивающие пути.

(*ii*) Если всех пациентов обслужить нельзя, то приведите простое объяснение этому, доступное администрации больницы.

3. Граф называется рёберно k-связным, если минимальное число рёбер, которое нужно удалить для того, чтобы он стал несвязным, равно k. Аналогично определяется вершинная k-связность (удалять нужно вершины).

Постройте полиномиальный алгоритм или докажите $\mathcal{NP}$-полноту проверки: (i) рёберной k-связности; (ii) вершинной k-связности.

4. Покажите на примере конкретной потоковой сети, что алгоритм Форда-Фалкерсона не является полиномиальным.

5. Рассмотрим следующую задачу. В потоковой сети нет ограничений пропускной способности на дугах, но есть ограничения пропускной способности вершин. Формально, для каждой вершины v, отличной от истока и стока, задано целое неотрицательное число $c(v)$, и для потока в сети должно выполняться $\sum_u f(u,v) = \sum_u f(v,u) \leq c(v)$. Опишите алгоритм нахождения максимального потока в такой сети.

6. Задан двудольный неориентированный граф, в котором обе доли имеют n вершин, а степени (количество инцидентных рёбер) всех вершин равны d, т. е. однородный двудольный граф степени d. Приведите полиномиальный алгоритм, который раскрасит рёбра в d цветов так, чтобы из каждой вершины исходили рёбра разных цветов. Оцените сложность предложенного алгоритма.

Указание: можно использовать задачу о поиске паросочетания. Для этого используется лемма Холла, находится совершенное паросочетание, окрашивается в один цвет, и отбрасывается. Затем процедура повторяется.

7. Задача 79 из канонического задания.

8 (Доп). На вход задачи подаётся ориентированный граф $G = \langle V, E \rangle$ без контуров (ориентированных циклов). Необходимо покрыть его наименьшим числом простых путей, т. е. найти наименьшее количество не пересекающихся по вершинам простых путей, чтобы каждая вершина принадлежала одному из них. Допускаются пути нулевой длины (состоящие из одной вершины). Предложите полиномиальный алгоритм.