Задание на первую неделю.

1. Пусть A_n — число натуральных решений уравнения $2x + 3y = n$, т. е. $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$, $A_5 = 1$ $(x = 1, y = 1), \ldots$.

(i) Найдите производящую функцию последовательности A_n, $n = 1, 2, \ldots$.

(ii) Найдите θ-асимптотику A_n.

(iii) Найдите явное аналитическое выражение для A_n.

2. Пожалуй, самый известный алгоритм, о котором все слышали,— это *алгоритм Евклида* для подсчета наибольшего общего делителя $\gcd(x, y)$ двух натуральных чисел $(x > y)$. Вычисление ведется рекурсивно: если $y = 0$, то возвращается x, если $y = 1$, то возвращается 1, а иначе вызывается $\gcd(y, x \mod y)$.

На каждой итерации по крайней мере одно число уменьшается, поэтому процедура конечна. Более того, понадобится не более $O(|x|_{unary})$ итераций. В частности, если $x = 2^{200}$, то оценка превышает число протонов во вселенной, т. е. практически бессмысленна. Если бы удалось получить оценку вида $O([|x|_{binary}]^{O(1)})$ (как говорят, “полиномиальную” по длине [*двоичной*] записи), то это было бы гораздо более убедительным свидетельством эффективности алгоритма.

Попробуем получить более точную оценку трудоемкости. Пусть для $1 \le i \le m$ x_i и, соответственно, y_i обозначают значения параметров x и y на i-й итерации алгоритма (например, $x_1 = x$, $y_1 = y$). Также положим $s_i = x_i + y_i$.

(i) Покажите, что $s_i \le 2/3 \cdot s_{i-1}$.

(ii) Вычислите $\gcd(F_{m+2}, F_{m+1})$, где F_n — это n-е число Фибоначчи.

3. Найдите Θ-асимптотику рекуррентности, которая определяется в следующем тексте.

Colour the edges of a complete graph of n vertices by three colours so that the number of triangles all whose edges get a different colour is maximal. Denote this maximum by $G_3(k)$. They conjectured that $G_3(k)$ is obtained as follows: clearly $G_3(1) = G_3(2) = 0, G_3(3) = 1, G_3(4) = 4$.

Suppose $G_3(k_1)$ has already been determined for every $k_1 < k$. Then

$$G_3(k) = G_3(u_1) + G_3(u_2) + G_3(u_3) + G_3(u_4) + \\ + u_1u_2u_3 + u_1u_2u_4 + u_1u_3u_4 + u_2u_3u_4,$$

where $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = k$ and the u's are as nearly equal as possible.

4. (i) Вычислите число правильно составленных скобочных выражений, содержащих n скобок, в которых в любом непустом префиксе число открывающих скобок больше числа закрывающих.

(ii) Найдите явное аналитическое выражение для производящей функции чисел BR_{4n+2} правильных скобочных последовательностей длины $4n+2$ (ответ в виде суммы ряда не принимается).

5. Оцените трудоемкость рекурсивного алгоритма, разбивающего исходную задачу размера n на три задачи размером $\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil - 5$, используя для этого $10\frac{n^3}{\log n}$ операций.

6. Рассмотрим детерминированный алгоритм поиска медианы по кальке известного линейного алгоритма, где используется разбиение массива на четвёрки элементов, в каждой из которых определяется *нижняя* медиана, т. е. из в каждой четверки выбирается второй по порядку элемент (элементы можно считать различными). Приведите рекуррентную оценку числа сравнений в этой процедуре и оцените сложность такой модификации.

7. Функция натурального аргумента $S(n)$ задана рекурсией:

$$S(n) = \begin{cases} 100 & , n \le 100 \\ S(n-1) + S(n-3) & , n > 100 \end{cases}$$

Оцените число рекурсивных вызовов процедуры $S(\cdot)$ при вычислении $S(10^{12})$.

8 (Доп). Оцените как можно точнее высоту дерева рекурсии для рекуррентности $T(n) = T(n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor) + T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + \Theta(n)$.

9 (Доп). Оцените трудоемкость рекурсивного алгоритма, разбивающего исходную задачу размера n на n задач размеров $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ каждая, используя для этого $O(n)$ операций.