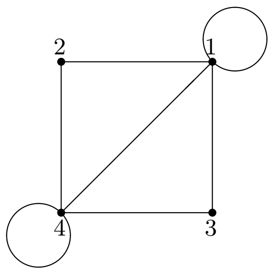
Задача 1. (4×0.02) Ср. **[Кормен 1, задача 33.3]**. Диаграмма графа G изображена на рисунке.



Путь в графе — это произвольная последовательность смежных вершин (возможны возвраты): $c=\{v_1,\ldots,v_l\}$. По определению, длина пути c равна $l-1$.

Пусть g_n — это число путей в G длины n, которые начинаются в вершине 1. Из определения следует, что $g(0)=1$ (единственный путь: $0\to 0$), а $g(1)=4$ (пути: $1\to 1$, $1\to 2$, $1\to 4$, $1\to 3$).

Пусть A — это матрица инциденций графа G:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

(i) Вычислите число $g(2)$ путей в G длины 2 и проверьте, что оно равно сумме элементов первой строки матрицы A^2. Объясните это совпадение и докажите общую формулу для $g(n)$.

(ii) Найдите рекуррентное соотношение, которому удовлетворяет последовательность $\{g_n,\, n=0,1,\ldots\}$.

Подсказка. В ответе должна получиться рекуррентность с целыми коэффициентами типа рекуррентности Фибоначчи: $g_{n+2}=Pg_{n+1}+Qg_n$. *Можно просто подобрать коэффициенты и* **доказать**, *что они искомые. При этом необходимо вычислить хотя бы еще одно значение* $g(n)$.

Рассмотрим два способа вычисления $\{g_n,\, n=0,1,\ldots\}$.

Первый, основан на том, что последовательность $\{g_n\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению, т. е. разностному уравнению, и это подсказывает следующий *матричный* способ ее вычисления. Имеет место матричная формула[1] $\left(\begin{smallmatrix}g_n\\g_{n+1}\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\Q&P\end{smallmatrix}\right)^{n-1}\left(\begin{smallmatrix}g_1\\g_2\end{smallmatrix}\right)$

При вычислении $\{g_n\}$ этим способом можно использовать быстрое, например, “индийское возведение в степень” n за $O(\log n)$ тактов[2].

Второй способ вычислений основан на явном аналитическом решении линейной рекуррентности, которое можно получить самостоятельно или воспользоваться алгоритмом из текста на сайте. Например, для чисел Фибоначчи ($F_1=1, F_2=1,\ldots F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$)) этот способ приводит к известной формуле Бине: $F_n=\frac{(\frac{1+\sqrt5}{2})^n-(\frac{1-\sqrt5}{2})^n}{\sqrt5}$. У вас должна получится похожая формула, также содержащая квадратичную иррациональность $\sqrt d=\sqrt{P^2+4Q}$. Вычисление по аналитической формуле реализуется чуть хитрее, чем по матричной. Для каждого значения n нужно специфицировать операции и указать с какой точностью их нужно проводить (например, для вычисления $\sqrt d$ нужно указать процедуру вычисления, задать точность вычисления и оценить битовую трудоемкость процедуры).

На самом деле, переход к собственным векторам матрицы $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\Q&P\end{smallmatrix}\right)$ *показывает, что оба алгоритмы тесно связаны, и матричный алгоритм можно рассматривать как корректный способ округления ответа, полученного по аналитической формуле.*

Оценим трудоемкость нескольких алгоритмов вычисления g_n по простому модулю p.

[1] Поскольку для $\{g_n\}$ коэффициенты P и Q — целые, то при вычислениях можно использовать только целую арифметику.

[2] Мы разбирали этот алгоритм в первом задании, и он с необходимыми изменениями переносится на матрицы.

(iii) Непосредственное вычисление по рекуррентной формуле. Оцените его трудоемкость при вычислении $A=g_{20000} \pmod{29}$.

(iv) Докажите, что последовательность $\{g_n\}$ периодична по любому модулю. Оцените ее период для $\pmod{29}$ и найдите трудоемкость вычисления (сложность нахождения периода + сложность вычисления A) этим способом.

Задача Д–1. (3×0.02) (i) Пусть известно, что 5 *является квадратичным вычетом* по $\pmod p$, например, $p=29$, т. е. разрешимо уравнение $x^2=5 \pmod p$. Обоснуйте алгоритм непосредственного вычисления A по аналитической формуле, т. е. прямо извлекая квадратный корень в конечном поле $\pmod p$ и проводя дальнейшие арифметические вычисления. Вычислите A этим способом. Оцените трудоемкость вычисления $g_n \pmod p$ для этого случая.

(ii) Пусть теперь 5 *НЕ является квадратичным вычетом* по $\pmod p$, например, $p=23$. Придумайте и обоснуйте использующий аналитическую формулу алгоритм вычисления чисел $\{g_n\}$ по такому модулю. Проведите вычисления $A=g_{10000} \pmod{23}$. Оцените трудоемкость вычисления $g_n \pmod p$ для этого случая.

В этой задаче вам предстоит разобраться, как использовать матричный алгоритм для вычислении реккурентности по простому модулю. Мы уже знаем, что эффективность процедуры сильно (или даже критически) зависит от вычисления периода $\{g_n\} \pmod p$. И, собственно, основной вопрос, на который хочется найти ответ, как найти период в матричном представлении $\{g_n\}$. Предлагается придумать алгоритм самостоятельно и/или проанализировать следующий способ. Заметим, что нам повезло, и матрицу $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\Q&P\end{smallmatrix}\right)$ можно диагонализировать, т. е. привести ее к виду $S\left(\begin{smallmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{smallmatrix}\right)S^{-1}$, где λ_1,λ_2 — это собственные числа, а S — невырожденная матрица. Возводя в n-ю степень, получим $S\left(\begin{smallmatrix}\lambda_1^n&0\\0&\lambda_2^n\end{smallmatrix}\right)S^{-1}$.

(iii) Наша задача состоит в том, чтобы обосновать эти манипуляции при вычислениях $\pmod p$ и понять, в какую степень нужно возвести матрицу, чтобы получилась единичная матрица, т. е. получить аналог малой теоремы Ферма для матриц указанного вида[3]

Оцените сложность вычисления периода и вычисления $\{g_n\} \pmod p$ матричным способом и сравните его с алгоритмами из пунктов (i)–(ii).

Комментарий. В последней задаче в пунктах (i)–(ii) речь идет о т.н. *квадратичных вычетах* и возникает естественный вопрос, как по данному числу a проверить разрешимость уравнения $x^2=a \pmod p$ (в задаче $a=5$, $n=29,23$). Можно, конечно, перебрать все вычеты, используя $O(p)$ операций, но есть и более интеллигентный полиномиальный по **длине записи** $\log p$ алгоритм, Он основан на знаменитом *квадратичном законе взаимности*, о котором можно прочитать в книге **[Виноградов, гл. 2]** (и придумать алгоритм самостоятельно). Но есть и еще более простой способ, основанной на обобщении малой теоремы Ферма. Если определить (см. , **[Виноградов, гл. 2]**) т. н. *символ Лежандра*: $\left(\frac{a}{p}\right)$, равный $+1$, если число $a\neq 0 \pmod p$ является квадратичным вычетом

[3] Обратите внимания, что прямого аналога малой теоремы Ферма для матриц быть не может, поскольку, например, существуют т.н. нильпотентные матрицы (какая-то их степень равна нулевой матрице). Удивительно, но тексты, посвященные аналогам теоремы Ферма для матриц, появились только в этом тысячелетии (см., www.mathnet.ru/mp238). В принципе, их мог написать сильный студент.

$\pmod p$), и, равный -1, в противном случае, то имеет место равенство $a^{\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{a}{p}\right) \pmod p$. Таким образом, можно эффективно проверить, является ли a квадратичным вычетом, используя быстрое возведение в степень. Кроме того, можно построить быстрый вероятностный алгоритм поиска квадратичного вычета или невычета. Что понимается по этим, поясняет следующая задача.

Задача 2. (i) Пусть НОД$(a, N) = 1$ и $a^{N-1} \neq 1 \pmod N$. Тогда по крайней мере для половины чисел из промежутка $1 \leq b < N$ выполнено $b^{N-1} \neq 1 \pmod N$.