Домашнее задание 2

Христолюбов Максим, 771

Задание 1

$\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{i^3+2i+5} > \sum\limits_{i=1}^{n} i^{\frac{3}{2}} > \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} n^{\frac{5}{2}}$

$\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{i^3+2i+5} < \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{8i^3} < n \cdot 2\sqrt{2} \cdot n^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2} n^{\frac{5}{2}}$

Значит, $\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{i^3+2i+5} = \Theta(n^{\frac{5}{2}})$

Задание 2

Т. к. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{100}}{3^n} = 0$, то

$f(n) = (3+o(1))^n + \Theta(n^{100}) = 3^n + n \cdot 3^{n-1} \cdot o(1) + \ldots + (o(1))^n + o(3^n) = 3^n + o(3^n)$

$\log f(n) = \log(3^n + o(3^n)) = \log(3^n \cdot (1 + \frac{(o(1))^n}{3^n})) = n \cdot \log 3 + \log(1 + \frac{(o(1))^n}{3^n}) = n \cdot \log 3 + o(1) = \Theta(n)$

Задание 3

$$\sum_{\substack{b=1\\b=b+1}}^{b^2<n} \sum_{\substack{i=0\\i=i+1}}^{i<b} \left(\sum_{\substack{j=0\\j=j+1}}^{j<i} j + \sum_{\substack{j=1\\j=2\cdot j}}^{j<n} j \right)$$ - кол-во раз печати слова "алгоритм"

$$\sum_{\substack{b=1\\b=b+1}}^{b^2<n} \sum_{\substack{i=0\\i=i+1}}^{i<b} \left(\sum_{\substack{j=0\\j=j+1}}^{j<i} 1 + \sum_{\substack{j=1\\j=2\cdot j}}^{j<n} 1 \right) < \sum_{\substack{b=1\\b=b+1}}^{b^2<n} \sum_{\substack{i=0\\i=i+1}}^{i<b} (i + 2\log_2 n) < \sum_{\substack{b=1\\b=b+1}}^{b^2<n} (b \cdot (b + 2\log_2 n)) < \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n} \cdot (\sqrt{n} + 2\log_2 n)) < 3 \cdot n^{\frac{3}{2}}$$

$$\sum_{\substack{b=1\\b=b+1}}^{b^2<n} \sum_{\substack{i=0\\i=i+1}}^{i<b} \left(\sum_{\substack{j=0\\j=j+1}}^{j<i} 1 + \sum_{\substack{j=1\\j=2\cdot j}}^{j<n} 1 \right) > \sum_{\substack{b=1\\b=b+1}}^{b^2<n} \sum_{\substack{i=0\\i=i+1}}^{i<b} \left(i - 1 + \frac{\log_2 n}{2} - 1 \right) > \sum_{\substack{b=1\\b=b+1}}^{b^2<n} \left(\frac{b}{2} \cdot \left(\frac{b}{2} + \frac{n}{2} - 2 \right) \right) >$$
$$\frac{\sqrt{n}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{n}}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{n}}{4} + \frac{\log_2 n}{2} - 2 \right) \right) > \frac{n}{8} \cdot (\sqrt{n} - 2) = \frac{1}{8} n^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} n = \Theta(n^{\frac{3}{2}})$$

Значит, $g(n) = \Theta(n^{\frac{3}{2}})$

Задание 4

а)

$238x + 385y = 133$

$34x + 55y = 19$

$55 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 34 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$21 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 13 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$8 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad 5 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

$3 \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix} \quad 2 \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \end{pmatrix}$

$1 \begin{pmatrix} -21 \\ 13 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \cdot 19 \\ 13 \cdot 19 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 34 \\ -55 \end{pmatrix} \cdot t$

б)

$143x + 121y = 52$

НОД(143,121) = 11, но 52 не делиться на 11, значит решений нет.

Задание 5

Корректность алгоритма следует из корректности умножения столбиком двоичных записей чисел. Если в двоичной записи числа в разряде 0, то умножение этого разряда на число не влияет на результат и опускается. Если при делении на 2 числа x получается четное число, это значит что в соответствующем разряде двоичной записи стоит 0. Для получения результата умножения нужно сложить произведения 2^i и числа (сдвиг числа в двоичном виде влево), где i-разряд двоичной записи с 1. Именно это и делает алгоритм, значит, он корректен.

На каждом шаге длина y в двоичной записи уменьшается на 1, т. к. оно делится на 2, значит кол-во шагов $O(n)$, на каждом шаге выполняется сдвиг, проверка на четность чтением последнего бита и сложение чисел длины n, значит, сложность алгоритма $O(n^2)$

Задание 5 из семинара

$11_{10} = 1011_2$

$3^{11} \mod 107 = \left((3^2)^2 \cdot 3\right)^2 \cdot 3 \mod 107 = 243^2 \cdot 3 \mod 107$

$243 \mod 107 = 29 \mod 107$, значит, $243^2 \mod 107 = 29^2 \mod 107 = 841 \mod 107 = 92 \mod 107$

$3^{11} \mod 107 = 92 \cdot 3 \mod 107 = 62 \mod 107$