Планиметрия.

Вписанный угол, угол между хордой и касательной, угол между хордами.

1. Точка K – центр окружности ω, вписанной в треугольник ABC (причём $AB < BC$). Прямая BK пересекает сторону AC в точке L. Через точку K проведена прямая ℓ, касающаяся окружности, описанной около треугольника ACK. Прямая ℓ пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, причём $MN = 10$.

   (a) Найдите произведение длин отрезков AM и CN.

   (b) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности ω равен 4, а $KL = 5$. Найдите длину отрезка AM.

   Ответ: $AM \cdot CN = MN^2/4 = 25$, $AM = 1$.

2. Треугольник ABC вписан в окружность. Биссектриса угла A пересекает описанную окружность в точке D. O – точка пересечения биссектрис треугольника ABC, K – середина отрезка BO, M – точка пересечения прямых DK и AB. Докажите, что MO и BC параллельны.

Лемма о трилистнике, биссектриса делит дугу пополам.

1. Восстановите треугольник ABC по его инцентру (центру вписанной окружности), середине стороны BC и основанию биссектрисы, проведённой из вершины угла A.

2. Точка I – центр окружности S_1, вписанной в треугольник ABC, точка O – центр окружности S_2, описанной около треугольника BIC.

   (a) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

   (b) Найдите косинус угла BAC, если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как $3:4$.

   Ответ: $\frac{1}{9}$.

3. O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Прямая BO пересекает описанную около треугольника окружность второй раз в точке P.

   (a) Докажите, что $PO = PC$.

   (b) Найдите радиус описанной окружности, если $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, а расстояние от точки P до прямой $AC = 24$.

   Ответ: 16.

4. Восстановите треугольник по точкам пересечения описанной около этого треугольника окружности с продолжениями медианы, биссектрисы и высоты, проведёнными из одной вершины.

5. Объясните, как построить треугольник, если даны три отрезка, равные медиане, биссектрисе и высоте, проведённым из одной вершины.

6. В треугольнике ABC высота CH, биссектриса CL и медиана CM делят угол ACB на четыре равных угла.

   (a) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

   (b) Найдите длины высоты CH, биссектрисы CL и медианы CM, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен R.

   Ответ: $\frac{R}{\sqrt{2}}, (2-\sqrt{2})R, R$.

7. Хорды AB и CD окружности Γ с центром O имеют длину 4. Продолжения отрезков BA и CD соответственно за точки A и D пересекаются в точке P. Прямая PO пересекает отрезок AC в точке L, причём $AL : LC = 2 : 3$.

   (a) Найдите AP.

   (b) Пусть дополнительно известно, что радиус окружности Γ равен 2,5, а точка T – центр окружности, вписанной в треугольник ACP. Найдите длину отрезка PT и площадь треугольника ACP.

   Ответ: $AP = 8$, $PT = \frac{\sqrt{409}-5}{2}$, $S_{\triangle APC} = \frac{5760}{409}$.

Две касающиеся окружности.

1. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Найдите площадь трапеции, образованной внешними касательными к этим окружностям и хордами, соединяющими точки касания.

   Ответ: $\frac{8(Rr)^{\frac{3}{2}}}{R+r}$.

2. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные AC и BD. Их точки касания с меньшей окружностью – A и B , с большей окружностью – C и D. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AB = \frac{24}{5}$, $AC = 12$.

   Ответ: $r = 3, R = 12$.

3. Окружности Ω и ω касаются внешним образом в точке F, а их общая внешняя касательная касается окружностей Ω и ω соответственно в точках A и B. Прямая ℓ проходит через точку B, вторично пересекает окружность ω в точке C, а также пересекает Ω в точках D и E (точка D расположена между C и E). Общая касательная окружностей, проходящая через точку F, пересекает прямые AB и BE в точках P и H соответственно (точка F лежит между точками P и H). Известно, что $BC = 42$, $DH = HC = 4$. Найдите длину отрезка HP и радиусы обеих окружностей.

   Ответ: $HP = 2\sqrt{46}$, $r = 5\sqrt{\frac{138}{7}}$, $R = 5\sqrt{\frac{322}{3}}$.

4. Две окружности касаются внешним образом в точке C. Прямая касается меньшей окружности в точке A, а большей – в точке B, отличной от A. Прямая AC вторично пересекает большую окружность в точке D, прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке E.

   (a) Докажите, что прямая AE параллельна прямой BD.

   (b) Пусть L – отличная от D точка пересечения отрезка DE с большей окружностью. Найдите EL, если радиусы окружностей равны 2 и 5.

   Ответ: $\frac{8\sqrt{19}}{19}$.

5. Окружности C_1 и C_2, радиусы которых равны соответственно 5 и 3, внутренне касаются. Хорда окружности C_1 касается окружности C_2 и делится точкой касания в отношении $3:1$. Найдите длину этой хорды.

   Ответ: 8.