Инварианты

14.08.2021

Задачи на занятие

1♢1. На чудо-яблоне растут бананы и ананасы. За один раз разрешается сорвать с неё два плода. Если сорвать два банана или два ананаса, то вырастет ещё один ананас, а если сорвать один банан и один ананас, то вырастет один банан. В итоге остался один плод. Какой это плод, если известно, сколько бананов и ананасов росло вначале?

1♢2. С тройкой чисел (a, b, c) разрешается проделать следующую операцию: одно число увеличить на 2, а два других одновременно с этим уменьшить на 1. Можно ли с помощью таких операций из тройки $(13, 15, 17)$ получить тройку с двумя нулями?

1♢3. В одной клетке квадратной таблицы 4×4 стоит знак минус, а в остальных стоят плюсы. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке или в одном столбце. Докажите, что, сколько бы мы ни проводили таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

1♢4. На доске записаны числа $1, 2, \ldots, 20$. За ход стирают числа a и b, и вместо них записывают число а) $a + b - ab$; б) $a + b + ab$. Какое число останется в конце?

1♢5. По кругу написаны 6 чисел следующим образом: 0, 1, 0, 1, 0, 0. Можно прибавлять по единице к двум идущим подряд числам. Можно ли сделать все числа равными?

1♢6. Игра начинается с числа 0. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число от 1 до 9. Выигрывает тот, кто получит число 100. Кто выиграет при правильной игре?

1♢7. Если на доске написана пара чисел a и b, всегда разрешается дописывать пару $a+1$, $b+1$, а sесли числа четные, то $a/2$, $b/2$. Также имея пары a, b и b, c можно дописать пару a, c. Можно ли такими операциями, имея изначально на доске $(2, 23)$ получить $(1, 2019)$?

1♢8*. На 44 деревьях, посаженных по окружности, сидели 44 чижа (на каждом дереве по одному). Время от времени какие-то два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против). Смогут ли чижи когда-нибудь собраться на одном дереве?

1♢9*. В 50 коробках лежат 100 конфет. Девочка и мальчик поочередно берут по конфете. Первый конфету берет девочка. Может ли мальчик добиться того, чтобы последние две конфеты лежали в одной коробке?

1♢10*. Игра «15» заключается в следующем. В квадрате со стороной 4 расположено 15 фишек — квадратов со стороной 1. На фишках написаны числа от 1 до 15:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Любую фишку, граничащую (по стороне) со свободной клеткой, разрешается переместить на свободную клетку (освободив тем самым другую клетку). Можно ли поменять местами фишки 14 и 15, причём так, чтобы свободная клетка осталась на прежнем месте?

Домашние задачи

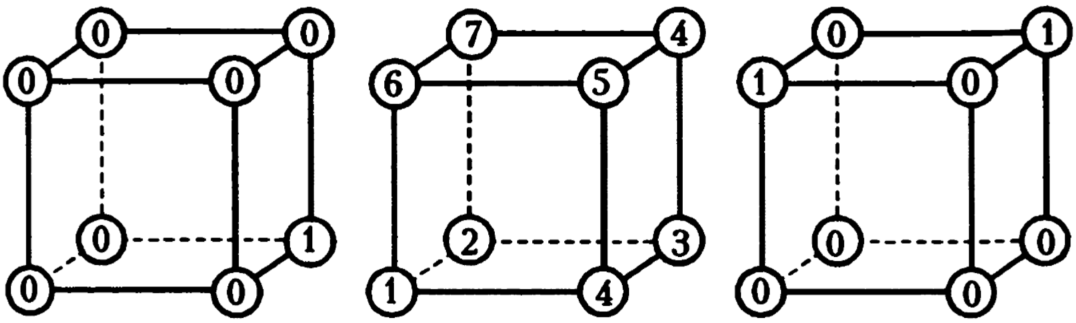
1◇1. На прямой стоят две фишки: слева красная, справа синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд (между фишками или с краю) и удаление пары соседних одноцветных фишек (между которыми нет других фишек). Можно ли с помощью таких операций оставить на прямой ровно две фишки: слева синюю, а справа красную?

1◇2. На острове Серобуромалин живут хамелеоны: 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых. Если два хамелеона разных цветов встречаются, то они оба меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что в некоторый момент все хамелеоны на острове станут одного цвета?

1◇3. В вершинах 12-угольника расставлены 1 и -1, причем -1 только одна. Можно поменять знак в любых k подряд идущих вершинах. Можно ли сдвинуть -1 в соседнюю вершину, если а) $k = 3$? б) $k = 6$?

1◇4. По окружности выписаны n натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами вписывается их наибольший общий делитель. После этого прежние числа стирают, а с оставшимися проделывают ту же операцию. Докажите, что через несколько шагов все числа на окружности будут равны.

1◇5. В каждой вершине куба записано число. За один шаг к двум числам, расположенным на одном (любом ребре), прибавляется по единице. Можно ли так уравнять все числа, если в начале они таковы, как показано на рисунке ниже?



1◇6. Можно ли разрезать правильный треугольник на части и сложить квадрат, если части можно параллельно переносить, но не поворачивать?

1◇7*. В вершинах правильного n-угольника с центром в точке O расставлены числа $+1$ и -1. За один шаг разрешается изменить знак у всех чисел, стоящих в вершинах какого-либо правильного k-угольника с центром O (при этом мы допускаем и 2-угольники, понимая под 2-угольником отрезок с серединой в точке O). Докажите, что в случаях а), б), в) существует такое первоначальное расположение $+1$ и -1, что из него ни за какое числе шагов нельзя получить набор из одних $+1$:

1. $n = 15$;
2. $n = 30$;
3. n — любое число, большее 2.
4. Попробуйте пояснить для проивзольного n, чему равно наибольшее число $K(n)$ различных расстановок $+1$ и -1, среди которых ни одну нельзя получить из другой за несколько шагов. Докажите, например, что $K(200) = 2^{80}$.

1♢8*. Дана пустая таблица размера $(2n+1)\times(2n+1)$. Двое по очереди ставят в нее фишки: первый может поставить фишку в клетку (x, y) , если в столбце с номером x и в строке с номером y до его хода поставлено в сумме четное число фишек, второй — если нечетное. В каждую клетку можно поставить не более одной фишки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что один из игроков, как бы он сам не играл, выигрывает.

1♢9*. Ладья, делая ходы по вертикали или горизонтали на соседнее поле, за 64 хода обошла все поля шахматной доски и вернулась на исходное поле. Докажите, что число ходов по вертикали не равно числу ходов по горизонтали

Литература

- Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. — Ленинградские математические кружки — 1994.
- Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. — Как решают нестандартные задачи — 2008.
- Спивак А. В. — Математический праздник — 2004.
- Прасолов В. В. — Задачи по алгебре, арифметике и анализу — 2007.
- Заславский А. А. — Математика в задачах — 2009.
- Васильев Н. Б., Егоров А. А. - Задачи всесоюзных математических олимпиад - 1988.

Преподаватель — Дима Гущин (Vk, Tg)