



Производящие функции

17.08.2021

Задачи на занятие

2♦1. Вычислите

а) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$;

б) $1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \dots + n \cdot C_n^n$;

в) $(C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2$.

2♦2. Найдите производящую функцию последовательностей а) $\{1\}_{k=0}^\infty$; б) $\{C_\alpha^k\}_{k=0}^\infty$; в) $\{F_k\}_{k=0}^\infty$.

2♦3. Найдите производящую функцию для последовательности $G_n = \sum_{k=0}^n (n-k)F_k$, где F_k — k -ое число Фибоначчи.

2♦4. Найдите производящую функцию и аналитическую формулу для последовательности

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{при } n = 0; \\ 1, & \text{при } n = 1; \\ 2F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{при } n \geq 2. \end{cases}$$

2♦5. Какова вероятность при бросании четырех игральных костей выбросить 14 очков?

2♦6. Сколько последовательностей цифр длины 6, начиная с 000000 и до 999999, у которых сумма первых трех цифр равна сумме трех последних?

2♦7. Пусть C_n обозначает n -е число Каталана, C_0 по определению равно 1. Докажите, что

$$C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + \dots + C_{n-1} \cdot C_0.$$

2♦8. Докажите $C_n = \frac{1}{n+1} \cdot C_{2n}^n$ двумя способами: через производящие функции и через пути Дика.

Домашние задачи

2♦1. Вычислите $1^2 \cdot C_n^1 + 2^2 \cdot C_n^2 + \dots + n^2 \cdot C_n^n$.

2♦2*. Докажите, что

$$1 \cdot (C_n^1)^2 + 2 \cdot (C_n^2)^2 + \dots + n \cdot (C_n^n)^2 = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n-1)!}.$$

2♦3. Найдите производящую функцию последовательностей а) $\{k^2\}_{k=0}^\infty$; б) $\{k \cdot F_k\}_{k=0}^\infty$.

2♦4. Найдите производящую функцию и аналитическую формулу для последовательности

$$F_n = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0; \\ 3, & \text{при } n = 1; \\ 4F_{n-1} - 4F_{n-2}, & \text{при } n \geq 2. \end{cases}$$

2♦5. Найдите производящую функцию $f(x)$ для последовательности a_n , состоящей из числа способов набрать n рублей, имея монеты в 1, 2 и 5 рублей. Представьте $f(x)$ аналитически.

2♦6. Найдите число решений системы в неотрицательных целых числах

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30, \\ x_1 \leq 12, x_2 \leq 12, x_3 \leq 12. \end{cases}$$

2♦7. Сколькими способами разбивается выпуклый $(n+2)$ -угольник диагоналями на треугольники?

2♦8. На окружности расположены 20 точек. Эти 20 точек попарно соединяются 10 хордами, не имеющими общих концов и непересекающихся. Сколькими способами это можно сделать?

Литература

- Виленкин Н. Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. — Комбинаторика — 2019.
- Н. Б.Алфутова, А.В.Устинов — Алгебра и теория чисел для математических школ — 2003.
- Прасолов В. В. — Задачи по алгебре, арифметике и анализу — 2007.
- Яковлев И. В. — Комбинаторика для олимпиадников — 2019.
- Холл М. — Комбинаторика — 1970.
- Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, O. Patashnik — Concrete Mathematics — 1994.
- J. Morris — Combinatorics — 2017.
- Martin J. Erickson — Introduction to Combinatorics — 2013.
- Воробьева Н. Н. — Числа Фибоначчи — 1978.
- Бронштейн Е. М. — Производящие функции — 2001.
- Ландо С. А. — Лекции о производящих функциях — 2007.
- Андерсон Д. — Дискретная математика и комбинаторика — 2004.
- Herbert S. Wilf — Generatingfunctionology — 1994.