



## Уравнения, неравенства

8-1, 24.08.2021

### Уравнения на замену переменной

Если не написано иного, то надо решить уравнение.

4◇1.  $(x^2 - x - 1)^3 + (x^2 - 3x + 2)^3 = (2x^2 - 4x + 1)^3$ .

4◇2.  $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ .

4◇3.  $x^4 + ax^3 + bx^2 - ax + 1 = 0$ .

4◇4.  $x^4 + ax^3 + (a + b)x^2 + abx + b = 0$ .

4◇5.  $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(1+x)^2} = 0$ .

### Простые неравенства

Если не написано иного, то необходимо доказать неравенство. По умолчанию все величины положительны.

4◇6.  $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq abc(a + b + c)$ .

4◇7.  $(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc$ .

4◇8.  $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ .

4◇9. Докажите неравенство для любого натурального  $n$ :

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

4◇10. Докажите неравенство для любого натурального  $n$ :

$$\frac{n}{2} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} \leq n.$$

### Неравенства на минимум

4◇11. Докажите неравенство

$$\frac{b_1^2}{a_1} + \dots + \frac{b_n^2}{a_n} \geq \frac{(b_1 + \dots + b_n)^2}{a_1 + \dots + a_n}.$$

4◇12. (неравенство Коши-Буняковского) Докажите, что

$$(c_1d_1 + \dots + c_nd_n)^2 \leq (c_1^2 + \dots + c_n^2)(d_1^2 + \dots + d_n^2).$$

4♦13. Докажите неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим:

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}.$$

4♦14. Докажите неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим:

$$\frac{n}{1/b_1 + \dots + 1/b_n} \leq \frac{b_1 + \dots + b_n}{n}.$$