Командная устная олимпиада. Летняя школа «Phystech.International»

8-9 класс
Задачи по математике

М1. Найдите количество единиц в десятичной записи числа $9+99+999+\ldots+99\ldots9$ (в записи последнего числа 2021 девятка).

М2. Докажите, что при всяком натуральном n число $\sqrt[n]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[n]{3-2\sqrt{2}}$ является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами, а также укажите способ нахождения этого многочлена.
Подсказка. Вы можете попробовать доказать, что дробь q^n+q^{-n} можно представить многочленом от $q+q^{-1}$, но чем это поможет?

М3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB радиус вписанной окружности равен r. Пусть CH — высота этого треугольника. Найдите расстояние между центрами вписанных окружностей треугольников ACH и BCH.

М4. На доске выписано 250 делителей числа $10!$. Докажите, что среди них найдутся такие делители, что их произведение — полный куб некоторого натурального числа.

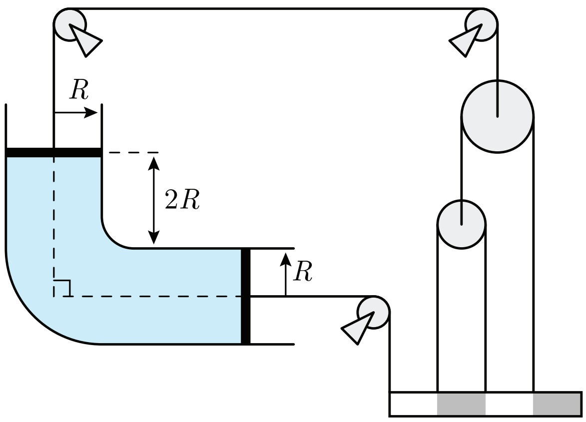
М5. На бильярдном столе в форме равностороннего треугольника запускают бесконечно кататься точечный шар. Оказалось, что в некоторой точке стола шар побывал 7 раз. Докажите, что он побывает в этой точке и восьмой раз.
Указание. Можно считать, что если шар попадает в вершину треугольника, то он попадает в лунку и движение заканчивается.

М6. В турнире по теннису участвовали $N>1$ теннисистов, N — нечетное число. После того, как они сыграли каждый с каждым, был составлен рейтинг, в котором лучший теннисист имел номер 0, худший — $(N-1)$, а за победу давалось одно очко (ничьих в теннисе не бывает). Теннисистов, число побед у которых оказалось одинаково, ранжировали внутри рейтинга произвольно. Верно ли, что найдется теннисист, чей номер совпадает с числом очков? Ответ дайте в зависимости от N.

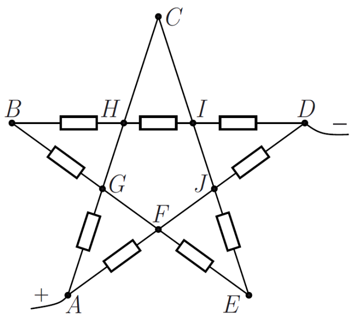
Командная устная олимпиада. Летняя школа «Phystech.International»

8-9 класс
Задачи по физике

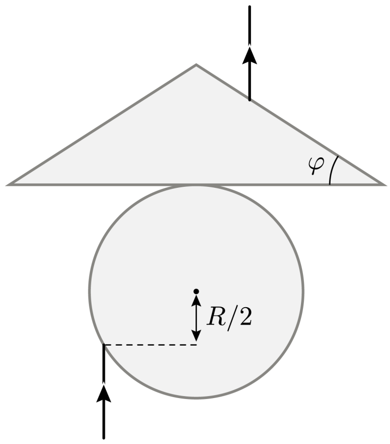
Ф1. Труба. Цилиндрическая труба постоянного внутреннего сечения радиуса R изогнута и закреплена как показано на рисунке. Оба колена получившейся трубы закрыты легкими поршнями, а пространство между поршнями заполнено водой плотностью ρ. К поршням через систему легких блоков (три неподвижных и два подвижных) с помощью легких нерастяжимых нитей привязан однородный горизонтальный стержень постоянного сечения (разделен штрихами на части равной длины). Определите массу m стержня, если система находится в равновесии. Трением между поршнями и трубой, а также в осях блоков можно пренебречь. Нити прикреплены к центрам поршней, а участки нитей, не касающиеся блоков, либо горизонтальны, либо вертикальны.



Ф2. Через тернии к звёздам! Цепь, состоящая из девяти одинаковых резисторов и шести одинаковых перемычек (см. рисунок), подключена к источнику с напряжением $U = 12$ В к контактам и D («плюсом» к A). Считая известными сопротивления резисторов $R = 1$ кОм, определите силы тока через все перемычки с указанием направления.

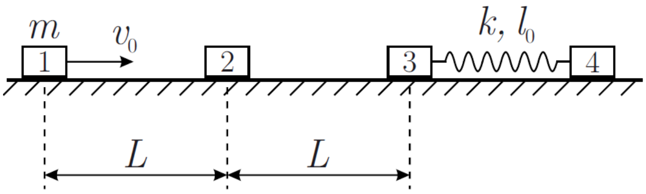


Ф3. Вьетнам. Вертикальный луч падает из воздуха на цилиндрическую шайбу из стекла с показателем преломления $n = 1{,}73$ (см. рисунок). Расстояние по вертикали от точки входа луча до горизонтального диаметра составило $R/2$. Найдите, чему равен угол φ при основании призмы, сделанной из того же стекла, если известно, что на выходе из системы луч снова вертикален.



Ф4. Включи воображение! Турист, путешествующий по долине объёмных фигур, подошел к подножию холма, по форме напоминающим усечённый наклонный конус с горизонтальными плоскими круглыми основаниями, центры которых лежат в одной вертикальной плоскости с местом подхода туриста к холму.
1) Определите, как туристу быстрее добраться до подножия противоположного склона: двигаясь через вершину холма или вдоль его подножия. Известно, что турист поднимается на холм со скоростью 3 км/ч, по горизонтальной поверхности идет со скоростью 5 км/ч, а спускается со скоростью 4 км/ч. Подъём занимает четверть всего пути и составляет угол 30° с горизонтом, а время движения на втором и третьем участках одинаково. Считайте, что при движении по холму турист всё время движется в одной вертикальной плоскости по прямолинейным участкам траектории. 2) Определите, во сколько раз отличаются времена движения туриста по холму и вдоль подножия.

Ф5. Вязкая задача. На горизонтальной поверхности стола на одной прямой находятся четыре небольших кубика одинаковой массой m. Расстояния между кубиками 1 и 2 и 2 и 3 одинаковы и равны L (см. рисунок). Кубики 3 и 4 скреплены пружиной жесткости k и длиной ℓ_0. Поверхность стола обработана специальной смазкой, так что при скольжении кубика по столу на него действует сила вязкого трения, пропорциональная его скорости ($F_{\text{тр}} = \alpha v$). Для рассматриваемых кубиков коэффициенты пропорциональности одинаковы ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha$). В начальный момент кубику 1 ударом сообщают скорость v_0 в направлении кубика 2. В представленной системе могут происходить только абсолютно неупругие центральные удары, в результате которых коэффициент α для каждого кубика не изменяется. Определите модули перемещения кубиков, когда движение в системе прекратится. Известно, что кубики 3 и 4 точно не соударялись.



Ф6. Невозможная модель. Déjà vu. Бесконечная система состоит из одинаковых теплопроводящих стержней, соединённых так, как показано на рисунке. Известно, что узел приведён в тепловой контакт с термостатом, имеющим температуру T_1, а узел B — с термостатом, имеющим температуру T_2. Найдите суммарную мощность, подводимую от термостата к узлу системы. Потерями тепла в узлах и через боковую поверхность стержней необходимо пренебречь. Считайте, что мощность теплопередачи через стержень пропорциональна разности температур на его концах, где коэффициент пропорциональности k — известный и одинаковый для всех стержней. Теплоёмкость стержней и узлов пренебрежимо мала.