Разминка

1. Найдите число рёбер в полном графе K_n.

2. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны $4, 4, 4, 4, 2$.

3. В графе 100 вершин и 800 рёбер.
   Докажите, что в этом графе есть хотя бы одна вершина степени не меньше 16.

4. Докажите, что граф содержит клику на n вершинах тогда и только тогда, когда его дополнение содержит независимое множество на n вершинах.

5. Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).

6. Про граф известно, что в нём 1000 вершин и 2020 рёбер. Верно ли, что в таком графе может не оказаться ни одного пути длины 64?

7. Дерево имеет 2020 вершин. Верно ли, что в нём найдется путь длины 3?

8. Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 вершины имеют степень 5?

9. В дереве нет вершин степени 2. Докажите, что количество висячих вершин (т. е. вершин степени 1) больше половины общего количества вершин.

10. Докажите, что любой связный граф имеет остовное дерево.

11. Про граф известно, что в нём 1000 вершин и 2020 рёбер. Верно ли, что

    - в таком графе обязательно есть маршрут длины 3000;

- в таком графе может не оказаться ни одного пути длины 64?

12. Докажите или опровергните следующие утверждения:

    - если в графе есть замкнутый маршрут чётной длины, то в графе есть цикл чётной длины.
    - если в графе есть замкнутый маршрут нечётной длины, то в графе есть цикл нечётной длины.

13. О дереве:

    - Докажите, что любое дерево 2-раскрашиваемо (существует правильная раскраска в 2 цвета).
    - Сколько есть правильных 2-раскрасок у дерева?

14. Докажите, что если G содержит клику размера n, то его вершины нельзя раскрасить правильно в $n - 1$ цветов.

15. Имеется связный граф. Докажите, что в нём можно выбрать одну из вершин так, чтобы после её удаления вместе со всеми ведущими из неё рёбрами останется связный граф.

16. Вершины ориентированного графа — целые числа от 0 до 9. Ребро идет из вершины x в вершину y, если $y - x = 3$ или $x - y = 5$. Найдите количество компонент сильной связности в этом графе.

17. 50 команд сыграли турнир по волейболу в один круг (каждая команда сыграла с каждой ровно один раз, ничьих не бывает). Говорят, что команда A сильнее B, если A выиграла у B или есть команда C, такая, что A выиграла у C, а C выиграла у B. Доказать, что команда, одержавшая наибольшее число побед, сильнее любой другой.

Что-то посложнее

1. Докажите, что если H_1 и H_2 — связные подграфы графа G, такие, что $H_1 \cap H_2 \neq \varnothing$, то подграф $H_1 \cup H_2$ связен.

2. В графе 100 вершин и 800 рёбер. Может ли так случиться, что все вершины этого графа имеют степень 16?

3. Какое максимальное число рёбер может быть в несвязном графе с n вершинами?

4. Каждая вершина графа G имеет степень 2. Докажите, что $G = \bigcup_{i=1}^{m} H_i$, где H_i — граф-цикл, $H_i \cap H_j = \varnothing$.

5. Докажите, что вершины связного графа G можно упорядочить так, что для каждого i, $1 \le i \le |V(G)|$, индуцированный подграф $G[\{v_1, \dots, v_i\}]$ будет связным.

6. Найдите максимальное количество простых путей с заданными концами в ориентированном ациклическом графе на n вершинах.

7. Вершинами графа, который называется булев куб размерности n и обозначается B_n, являются двоичные слова длины n, а соседями (вершинами, соединёнными ребром) являются пары слов, отличающихся в одной позиции.

   - Сколько вершин в булевом кубе B_n?
   - Сколько рёбер в булевом кубе B_n?
   - Сколько в булевом кубе B_n путей длины 2?
   - Верно ли, что в графе B_3 есть маршрут длины 3000?
   - Верно ли, что в графе B_3 есть путь длины 8? длины 7?

8. О радиусе:

   - Докажите, что $\mathrm{rad}(G) \le \mathrm{diam}(G) \le 2\mathrm{rad}(G)$.
   - Приведите пример графа G, для которого $\mathrm{rad}(G) = \mathrm{diam}(G)$.

9. Граф $S_n = \langle V, E\rangle$ имеет множество вершин $V = 2^{\{1,2,\dots,n\}}$ (вершина $v \in V$ — подмножество множества $\{1, 2, 3, \dots, n\}$); вершины v и u соединены ребром тогда и только тогда, когда $|u \triangle v| = 1$.

   - Докажите, что граф S_n изоморфен булеву кубу B_n.
   - Сколько существует различных наборов (попарно различных) подмножеств $A_1, A_2, A_3 \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, для которых выполняется условие $|A_1 \triangle A_2| = |A_2 \triangle A_3| = 1$?

10. Известно, что в ориентированном графе на > 2 вершинах из любой вершины в любую другую идёт ровно один путь. Верно ли, что выходные (они же исходящие) степени вершин в этом графе равны 1?

11. Предположим, что последовательность чисел задана соотношением $a_{n+1} = f(a_n)$, где f — некоторая функция (определённая на всех числах).

    - Покажите, что либо все члены последовательности различны, либо она периодична: после некоторого начала (предпериода) числа начинают повторяться (период).
    - Покажите, что второй случай имеет место тогда и только тогда, когда $a_{2n} = a_n$ при некотором n.

Олимпиады

1. Какое наименьшее число листьев может иметь дерево на 15 вершинах, если максимальная степень вершины этого дерева равна 6?

2. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причём между каждыми двумя городами существует единственный несамопересекающийся путь по дорогам. Известно, что в стране ровно 100 городов, из которых выходит по одной дороге. Докажите, что можно построить 50 новых дорог так, что после этого даже при закрытии любой дороги можно будет из каждого города попасть в любой другой.

3. Каждый член партии доверяет пяти однопартийцам, ноникакие двое не доверяют друг другу. При каком минимальном размере партии такое возможно?

4. В компании из 6 человек некоторые компаниями по трое ходили вместе в походы. Верно ли, что среди них найдутся четверо, среди которых каждые трое ходили вместе в поход, либо четверо, где никакие трое не ходили вместе в поход?

5. В стране некоторые пары городов соединены односторонними прямыми авиарейсами (между любыми двумя городами есть не более одного рейса). Скажем,что город A доступен для города B, если

из B можно долететь в A, возможно, с пересадками. Известно, что для любых двух городов P и Q существует город R, для которого и P, и Q доступны. Докажите, что существует город, для которого доступны все города страны. (Считается, что из города можно долететь до него самого.)