

Содержание

I	Интегрирование на многообразиях	2
1	Кривые в R^n	2
2	Криволинейные интегралы I рода	4
3	Криволинейные интегралы II рода	8
4	Поверхности в R^n	21
5	Полезности	30

Часть I

Интегрирование на многообразиях

1 Кривые в R^n

Мы будем рассматривать наши кривые в пространстве R^n . Иногда в формулировке теоремы или утверждения нет условия на непрерывность кривой. Это не означает, что его нет, возможно оно и так подразумевается и без него утверждение становится интуитивно некорректным.

Определение 1.1:

Непрерывная кривая — множество точек $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), t \in [a, b]$

$$A = \varphi_1(a), \dots, \varphi_n(a)$$

$$B = \varphi_1(b), \dots, \varphi_n(b)$$

Если $A = B$, то кривая замкнута.

Определение 1.2:

$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ — параметризация кривой

Важный факт: существует бесконечное кол-во способов параметризовать кривую

Определение 1.3:

Если для кривой выполняются: $\exists \varphi'_1(t), \dots, \varphi'_n(t)$ такие, что

$\varphi'^2_1(t) + \dots + \varphi'^2_n(t) > 0, t \in [a, b]$, то такую кривую называем **гладкой**

Если $\varphi'^2_1(t) + \dots + \varphi'^2_n(t) = 0$, при $t = m$, то такая точка **особенная**

Определение 1.4:

Кусочно-гладкая кривая — **непрерывная** гладкая кривая, состоящая из **конечного** числа гладких кривых.

Важный факт: не каждая кривая является спрямляемой

Определение 1.5:

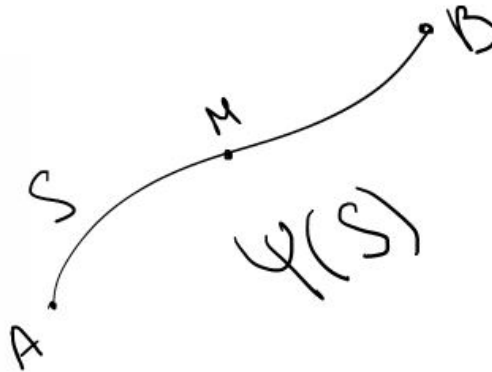
Спрямяемая кривая — кривая, имеющая конечную длину.

Важный факт: гладкая кривая всегда спрямяема

Определение 1.6:

Натуральная параметризация — параметризация, параметром которой выступает длина **дуги** от начала до точки на кривой.

Обозначаем ее как $\Psi(s)$, где s — длина дуги



Теорема 1.1:

Для любой гладкой кривой существует натуральная параметризация.

Без доказательства.

Любопытное утверждение:

Если кривая гладкая и без особых точек с гладкой параметризацией $\Phi(t)$ и натуральной параметризацией $\Psi(s)$ справедливо:

$$\frac{ds}{dt} = |\Phi'(t)|$$

Некоторые факты:

Задание параметризации $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ определяет движение на кривой Γ от ее начальной точки к конечной, или, другими словами, определяет ориентацию кривой, называемую положительной. Если при переходе от исходной параметризации начальная и конечная точки меняются местами (в случае замкнутой кривой — меняется направление движения), то происходит смена ориентации от положительной к отрицательной. Кривую Γ с положительной по отношению к исходной параметризации ориентацией обозначают Γ^+ , с отрицательной — Γ^- .

2 Криволинейные интегралы I рода

Определение 1.7:

Пусть задана гладкая, спрямляемая кривая с параметризацией $\Phi(t)$

$$\Gamma : \Phi(t), t \in [a, b]$$

Также есть натуральная параметризация:

$$\Gamma : \Psi(s), s \in [0, S_\Gamma], \text{ в силу спрямляемости}$$

И пусть задана функция $F(x), x \in \Gamma$

Тогда **криволинейным интегралом I рода от F по Γ** назовем интеграл Римана:

$$I = \int_0^{S_\Gamma} F(\Psi(s)) ds = \int_0^{S_\Gamma} F(s) ds$$

И будем обозначать его, как

$$I = \int_\Gamma F_0(x) ds$$

Свойства криволинейных интегралов I рода

Свойство 1: $F(s) = 1 \Rightarrow I = S_\Gamma$

Док-во:

$$F(s) = 1 \Rightarrow I = \int_0^{S_\Gamma} 1 ds \Rightarrow I = S_\Gamma - 0 = S_\Gamma$$

читд

Свойство 2: Криволинейный интеграл I рода не зависит от ориентации кривой, те

$$\int_{\Gamma^+} F_0(x) ds = \int_{\Gamma^-} F_0(x) ds$$

Док-во:

Пусть дана кривая с натуральной параметризацией $\Psi(s), s \in [0, S_\Gamma]$:

$\Gamma^+ : A = \Psi(0), B = \Psi(S_\Gamma)$

Возьмем точку $M \in [A, B]$ на кривой, тогда $M = \Psi(s)$

Определим параметр $\sigma = S_\Gamma - s$, те σ — расстояние от B до M . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+} F_0(x) ds &= \int_0^{S_\Gamma} F(\Psi(s)) ds \stackrel{\sigma=S_\Gamma-s}{=} - \int_{S_\Gamma}^0 F(\Psi(\sigma - S_\Gamma)) d\sigma = \\ &= \int_0^{S_\Gamma} F(\Psi(\sigma - S_\Gamma)) d\sigma = \int_{\Gamma^-} F_0(x) d\sigma \end{aligned}$$

Тк криволинейный интеграл I рода не зависит от выбранной параметризации, то свойство 2 доказано. читд

Свойство 3: Пусть Γ есть кривая в R^n с непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ параметризацией $\Phi(t)$ без особых точек, тогда справедливо равенство

$$\int_{\Gamma} F_0(x) ds = \int_a^b F(\Phi(t)) [\varphi_1'^2(t) + \dots + \varphi_n'^2(t)]^{\frac{1}{2}} dt$$

Без доказательства

Свойство 4: Пусть $\tau = \{s_i\}_{i=0}^m$ есть разбиение отрезка $[0, S_\Gamma]$, ξ_i есть точки из отрезков $[s_{i-1}, s_i]$, $i = 1, \dots, m$, $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ длина дуги кривой Γ от точки $\Psi_0(s_{i-1})$ до точки $\Psi_0(s_i)$, σ_τ — интегральная сумма функции $F_0(s)$ по отрезку $[0, S_\Gamma]$

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^m F_0(\Psi_0(\xi_i)) \Delta s_i$$

Тогда, если криволинейный интеграл I первого рода существует, то

$$\lim_{\max(\Delta s_i) \rightarrow 0} \sigma_\tau = I$$

Док-во:

Вспомним, как мы определяли интеграл Римана. Мы составляли интегральные суммы, потом устремляли разбиение к нулю и говорили, если вот существует такой предел, то назовем его интегралом Римана. Тут у нас условие, что криволинейный интеграл I первого рода существует, значит существует интеграл Римана, значит и предел сумм есть, который как раз и равен нашему интегралу Римана.

Свойство 5: Если функция $F(x)$ представляет собой комбинацию $\alpha F_1(x) + \beta F_2(x)$, α, β — фиксированные числа, криволинейные интегралы по кривой Γ от функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ существуют, то выполняется равенство.

$$\int_{\Gamma} F_0(x) ds = \alpha \int_{\Gamma} F_1(x) ds + \beta \int_{\Gamma} F_2(x) ds$$

Док-во:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F_0(x) ds &= \int_0^{S_\Gamma} F(\Psi(s)) ds = \int_0^{S_\Gamma} \alpha F_1(\Psi(s)) + \beta F_2(\Psi(s)) ds = \\ &= \int_0^{S_\Gamma} \alpha F_1(\Psi(s)) ds + \int_0^{S_\Gamma} \beta F_2(\Psi(s)) ds = \alpha \int_0^{S_\Gamma} F_1(\Psi(s)) ds + \beta \int_0^{S_\Gamma} F_2(\Psi(s)) ds = \\ &= \alpha \int_{\Gamma} F_1(x) ds + \beta \int_{\Gamma} F_2(x) ds \end{aligned}$$

читд

Вообщем сводим криволинейный интеграл к интегралу Римана, а там эти свойства уже доказаны в прошлом семестре.

Определение 1.8:

Криволинейным интегралом по кусочно-гладкой кривой Γ называется число

$$\int_{\Gamma_1} F_0(x) ds + \int_{\Gamma_2} F_0(x) ds \quad (1)$$

если каждый из криволинейных интегралов по Γ_1 и Γ_2 существуют.

Замечание Поскольку понятие определенного интеграла

$$\int_a^b F(x) dx$$

по отрезку можно расширить — например, до несобственного интеграла от неограниченных функций или по неограниченному промежутку — то и понятие криволинейного интеграла первого рода можно расширить, определив несобственный криволинейный интеграл первого рода, или же перейти к какой-либо иной конструкции, расширяющей понятие обычного определенного интеграла.

3 Криволинейные интегралы II рода

Пусть Γ есть кривая, параметризованная непрерывно-дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ вектор-функцией $\Phi(t)$, и пусть эта кривая не имеет особых точек. Тогда, во-первых, в каждой точке $\Phi(t)$ определена касательная к Γ , и, во-вторых, от параметризации $\Phi(t)$ можно перейти к эквивалентной ей натуральной параметризации $\Psi(s)$. Обозначим через $\cos\alpha_k, k = 1, \dots, n$, направляющие косинусы единичного вектора $\vec{l} = \vec{l}(t)$ касательной к Γ в текущей точке (другими словами, искомый вектор \vec{l} задается равенством $\vec{l} = (\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n)$ и $\alpha_k, k = 1, \dots, n$, есть углы между вектором \vec{l} и положительным направлением соответствующей оси Ox_k).

Определение 1.9:

Пусть задана функция $F_0(x)$, определенная при $x \in \Gamma$,

и пусть $F_0(s) = F(\Psi(s))$. (Я тут переобозначил F и F_0 , так как это было в интегралах I рода, ибо можно запутаться, когда F и F_0 меняются местами просто так)

Тогда **криволинейным интегралом второго рода по кривой Γ от функции $F(x)$ по координате $x_k, k = 1, \dots, n$, называется интеграл:**

$$I = \int_{\Gamma} F_0 * \cos\alpha_k ds,$$

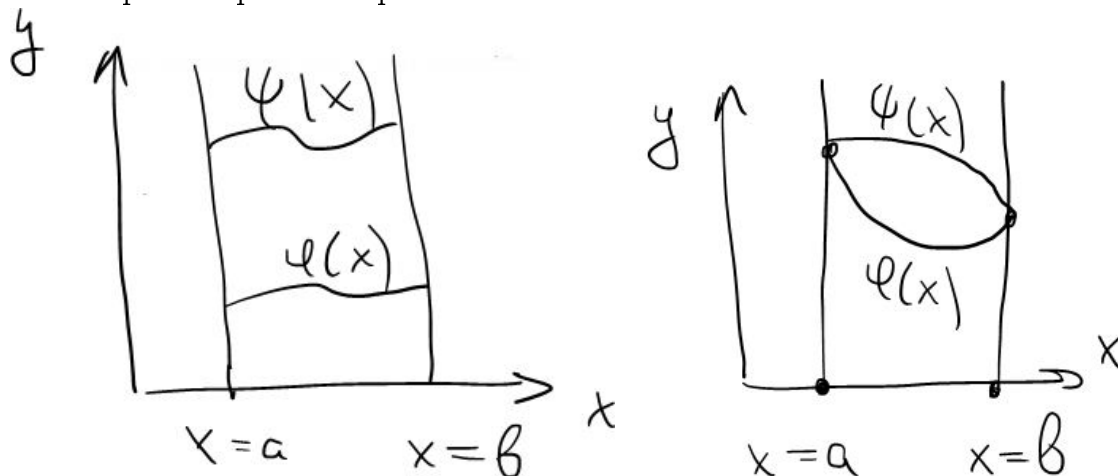
если последний существует

Обозначают как:

$$I = \int_{\Gamma} F_0 dx_k,$$

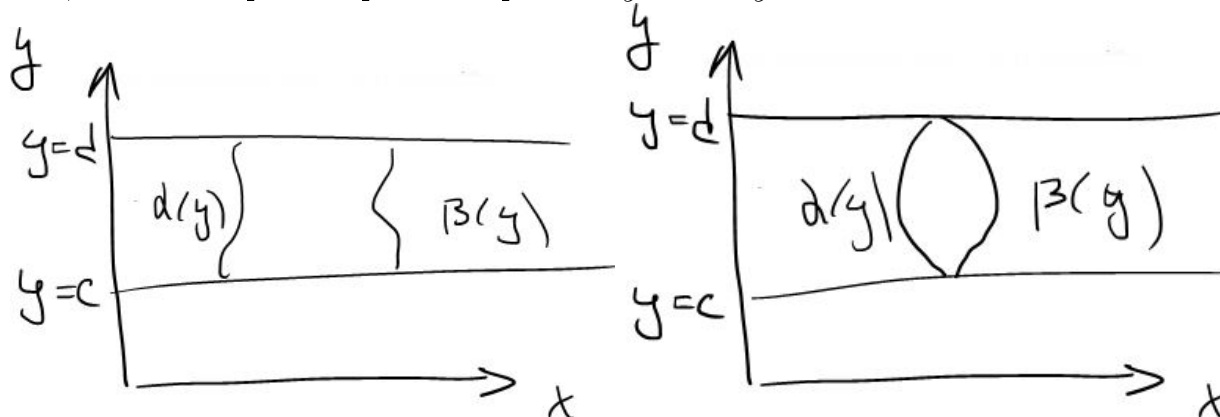
Определение 1.10:

Область G из пространства R^2 называется **элементарной относительно оси Oy** , если ее граница состоит из графиков двух непрерывных функций $\phi(x)$ и $\psi(x)$, определенных при $x \in [a, b]$ и таких, что $\phi(x) \leq \psi(x)$ для всех x , а также, быть может, из некоторых отрезков прямых $x = a$ и $x = b$.



Определение 1.11:

Область G из пространства R^2 называется **элементарной относительно оси Ox** областью, если ее граница состоит из графиков двух непрерывных функций $\alpha(y)$ и $\beta(y)$, определенных при $y \in [c, d]$ и таких, что $\alpha(y) \leq \beta(y)$ для всех y , а также, быть может, из некоторых отрезков прямых $y = c$ и $y = d$.

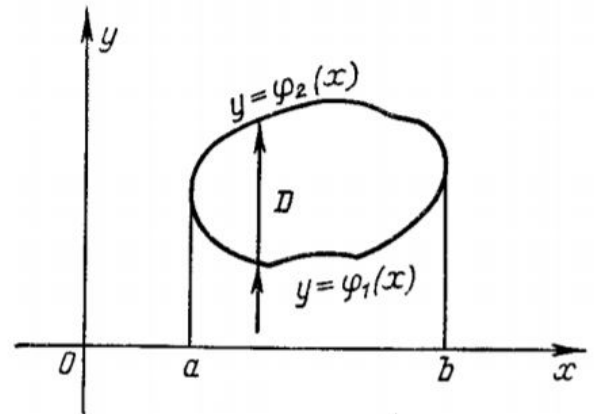
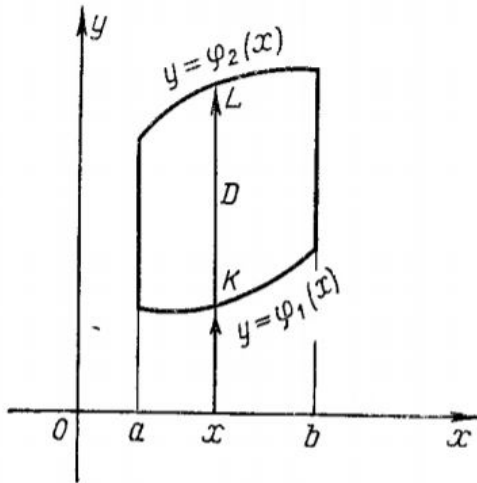


Замечание:

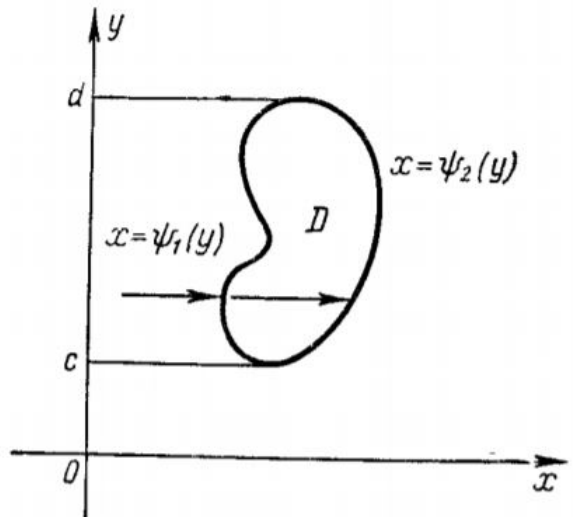
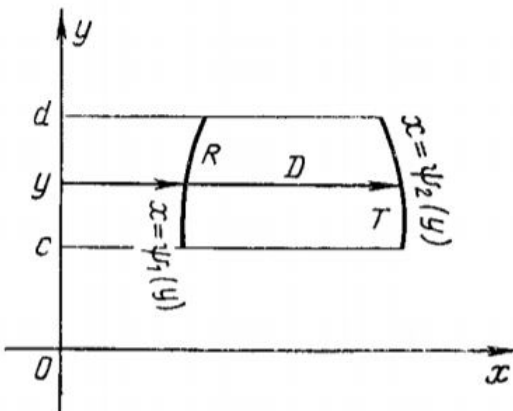
Группы Шваб идут по Крючковичу, у которого такие области называются **простыми** и, к тому же, оси меняются местами.

D

Область D на плоскости xOy назовем *простой областью*: 1) (относительно оси Ox) если она ограничена сверху линией $y=\varphi_2(x)$, снизу $y=\varphi_1(x)$ [функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны] и с боков отрезками прямых $x=a$ и $x=b$ (рис. 175); в частных случаях один из этих отрезков (или оба вместе) могут превратиться в точку (рис. 176);



2) (относительно оси Oy), если она ограничена слева линией $x=\psi_1(y)$, справа $x=\psi_2(y)$ [функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны] и сверху и снизу отрезками прямых $y=d$ и $y=c$ (рис. 177, 178).



Формула Грина:

Пусть D есть ограниченная область из пространства R^2 с кусочно-гладкой границей Γ , ориентированной положительно, и пусть эту область можно разбить на конечное число непересекающихся элементарных областей с кусочно-гладкими положительно-ориентированными границами. Далее, пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ есть заданные функции такие, что

- 1) P и Q непрерывны в замкнутой области D
 - 2) P и Q имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутой D
- тогда верна формула Грина:

$$\int_D \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} (P dx + Q dy) \quad (2)$$

Док-во для элементарной (и по Ox , и по Oy) D :

Сведем двойной интеграл к повторному и применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\begin{aligned} \int_D \int \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d (Q(x, \beta(y)) - Q(x, \alpha(y))) dy = \\ &= \int_c^d Q(x, \beta(y)) dy - \int_c^d Q(x, \alpha(y)) dy \end{aligned}$$

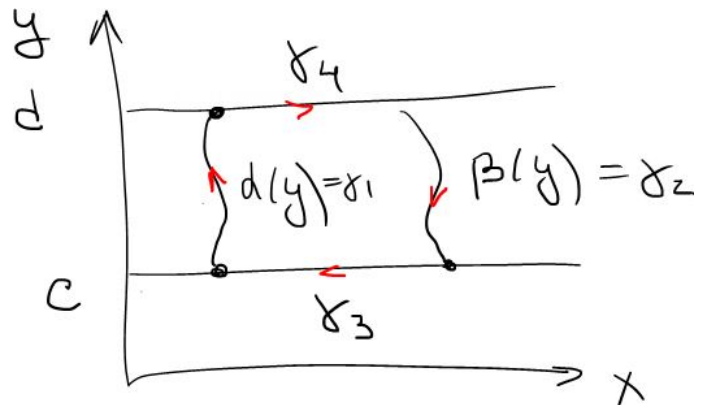
Мы можем параметризовать наши кривые

$$\gamma_1 : \alpha(t), t \in [c, d].$$

$$\gamma_2 : \beta(t), t \in [c, d].$$

$$\gamma_3 : y = c, x = t, t \in [\alpha(c), \beta(c)].$$

$$\gamma_4 : y = d, x = t, t \in [\alpha(d), \beta(d)].$$



Перепишем наши интегралы как криволинейные. Не забываем, что есть разница в направлении кривой!!!

$$\int_{\gamma_1} Q(x, y)dy - \int_{\gamma_2^-} Q(x, y)dy = \int_{\gamma_1} Q(x, y)dy + \int_{\gamma_2} Q(x, y)dy$$

Заметим, что

$$\int_{\gamma_3} Q(x, y)dy = \int_{\gamma_4} Q(x, y)dy = 0$$

У нас получился интеграл по замкнутому контуру

$$\int_{\gamma_1} Q(x, y)dy + \int_{\gamma_2} Q(x, y)dy + \int_{\gamma_3} Q(x, y)dy = \int_{\gamma_4} Q(x, y)dy = \oint_{\Gamma} Qdy$$

$$\int_D \int \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{\Gamma} Qdy$$

Аналогично:

$$\int_D \int \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_{\Gamma} Pdx$$

Складывая, получаем:

$$\int_D \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} (Pdx + Qdy)$$

читд

Док-во, если D состоит из мн-ва непересекающихся, ненулевых элементарных областей:

$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_m$ при $D_i \cap D_j \neq \emptyset, i \neq j$ В силу свойства аддитивности двойного интеграла и факта, что граница области имеет нулевую меру:

$$\int_D \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^m \int_{D_i} \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Применяя теперь для каждого слагаемого в правой части данного равенства доказанную выше формулу, получим

$$\int_D \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^m \oint_{D_i} (P dx + Q dy)$$

В сумме, стоящей справа, содержатся интегралы по положительно ориентированным частям границ областей D_i , составляющим в целом границу D , а также содержатся интегралы по тем частям границ областей D_i , которые лежат внутри D , причем эти интегралы берутся дважды по одинаковым кривым, но с противоположной ориентацией — в силу свойств криволинейных интегралов второго рода они взаимно уничтожаются. В результате суммирования как раз и получится требуемое равенство.

читд

Замечание:

Может возникнуть вопрос, что это за странная запись такая?

$$\oint_{\Gamma} (P dx + Q dy)$$

Ведь у нас никогда не было, что разные функции интегрируются по разным переменным в одном интеграле. Можно это понимать так: Мы хотим вычислить силу, поэтому интегрируем работу по составляющим, где P x -составляющая, Q y -составляющая.

Или просто воспринимайте его как сумму:

$$\oint_{\Gamma} (P dx + Q dy) = \oint_{\Gamma} P dx + \oint_{\Gamma} Q dy$$

Замечание:

Не обязательно писать именно интеграл по замкнутой кривой, можно просто интеграл. Просто два нулевых интеграла нам дают такую возможность.

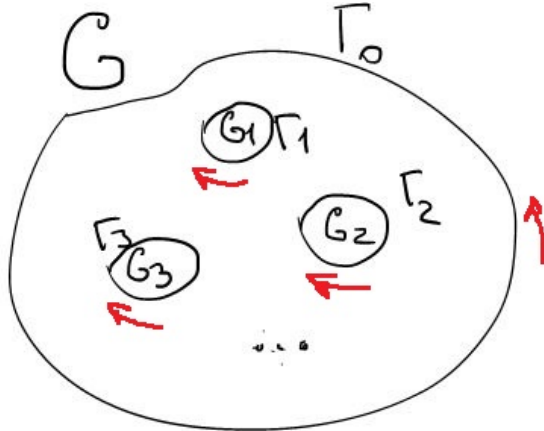
Определение 1.12:

Зададим $(m + 1)$ гладкие, замкнутые кривые $\Gamma_0, \Gamma_1 \dots \Gamma_m$

Пусть Γ_0 - граница области G и $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ при $i \neq j$

Γ_i - граница области G_i , $\Gamma_i \in G$, $i = 1 \dots m$

Тогда $G \setminus (G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_m)$ - $(m + 1)$ -связная область



Заметим, что при таком задании ориентации границы $(m + 1)$ -связной области кривые Γ_i , $i = 1, \dots, m$, будут ориентированы отрицательно по отношению к ограниченным областям G_i , кривые же Γ_i^- , наоборот, будут положительно ориентированы по отношению к G_i .

Формула Грина для многосвязных областей:

Пусть область G $(m+1)$ -связна, ее внешний и внутренние контуры $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ являются замкнутыми кусочно-гладкими кривыми без самопересечений, и пусть граница области G положительно ориентирована. Далее, пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ есть заданные функции такие, что

- 1) P и Q непрерывны в замкнутой области G
- 2) P и Q имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутой G

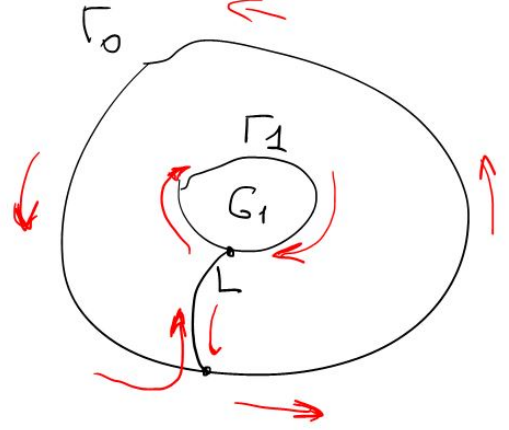
Тогда имеет место равенство

$$\int_G \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma_0} (P dx + Q dy) - \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i^-} (P dx + Q dy) \quad (3)$$

Док-во для двусвязной области G :

Соединим область G_1 с кривой Γ_0 разрезом, который представляет собой кусочно-гладкую кривую без самопересечений. Обозначим разрез как L

Обозначим через G^* область, полученную из G удалением данного разреза, предполагая, что граница области G^* состоит из границы G (с сохранением ориентации) и разреза, проходящего дважды. Граница G^* представляет собой кусочно-гладкую кривую, а значит по Формуле Грина для односвязной области имеем:



$$\int_{G^*} \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\delta G^*} (P dx + Q dy)$$

Далее, поскольку двойной интеграл не меняется при присоединении к множеству интегрирования множества нулевой двумерной меры, то имеет место равенство

$$\int_{G^*} \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\delta G} (P dx + Q dy) = \int_G \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Заметим, что $\delta G = \Gamma_0 \cup L \cup \Gamma_1$, вспоминая определение (1) интеграла по кусочно-гладкой кривой:

$$\int_{\delta G} (P dx + Q dy) = \int_{\Gamma_0} (P dx + Q dy) + \int_{L^+} (P dx + Q dy) + \int_{L^-} (P dx + Q dy) + \int_{\Gamma_1} (P dx + Q dy)$$

Учитывая, что направление движения по кривой имеет значение:

$$\int_G \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\delta G} (P dx + Q dy) = \int_{\Gamma_0} (P dx + Q dy) - \int_{\Gamma_1^-} (P dx + Q dy)$$

Таким образом, мы получили формулу (3) для случая двусвязной области G

Что будет в случае, если G - $(m + 1)$ -связная область? Да то же самое, только $\delta G = \Gamma_0 \cup (L_1 \cup \dots \cup L_m) \cup (\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m)$

$$\int_{\delta G} (Pdx + Qdy) = \int_{\Gamma_0} (Pdx + Qdy) + \sum_{i=1}^m \left(\int_{L_i^+} (Pdx + Qdy) - \int_{L_i^-} (Pdx + Qdy) \right) - \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i^-} (Pdx + Qdy)$$

Отсюда немедленно получаем

$$\int_{\delta G} (Pdx + Qdy) = \int_{\Gamma_0} (Pdx + Qdy) - \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_i^-} (Pdx + Qdy)$$

читд

Теорема 1.2

Пусть

- 1) P и Q непрерывны в замкнутой, связной области G
 - 2) P и Q имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутой G
- тогда 4 свойства эквивалентны:

- 1) Независимость $P(x, y), Q(x, y)$ от пути интегрирования в G
- 2) Для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ , целиком лежащей в G , выполняется

полняется

$$\int_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = 0$$

- 3) Существует функция $u(x, y)$ такая, что для любых точек (x, y) из G выполняется

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy;$$

- 4) Для любых точек (x, y) из G выполняется

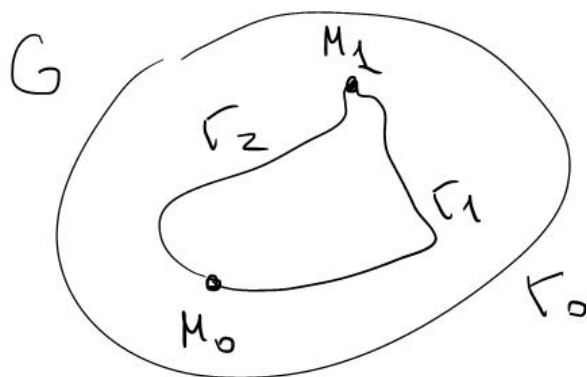
$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$$

Док-во: $(1 \Rightarrow 2)$

$$\int_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) = \int_{\Gamma_2} (Pdx + Qdy)$$

$$\int_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) - \int_{\Gamma_2} (Pdx + Qdy) = 0$$

$$\int_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) + \int_{\Gamma_2^-} (Pdx + Qdy) = 0$$



В силу того, что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2^-$ (с учетом направления):

$$\int_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \int_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) + \int_{\Gamma_2^-} (Pdx + Qdy) = 0$$

В силу произвольности выбора Γ_1 и Γ_2 получаем, что Γ - тоже произвольная кривая.

$(2 \Rightarrow 1)$

Пусть Γ - замкнутая кусочно-гладкая кривая и выполняется $\int_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = 0$

Разобьем (с учетом направления) $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 - кусочно-гладкие или просто гладкие кривые. Тогда:

$$\int_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \int_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) + \int_{\Gamma_2} (Pdx + Qdy) = 0$$

Отсюда:

$$\int_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) = \int_{\Gamma_2^-} (Pdx + Qdy)$$

(1 \Rightarrow 3) **Надо еще исправлять** Пусть $M_0 = (x_0, y_0)$ есть фиксированная точка G , $M = (x^*, y^*)$ есть текущая точка G , $\Gamma : M_0 M$ есть кусочно-гладкая кривая без самопересечений, целиком лежащая в G и соединяющая точки M_0 и M . Пусть

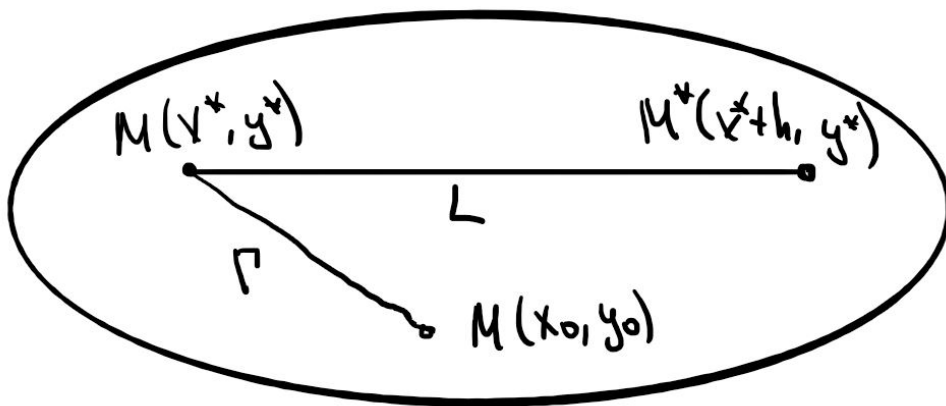
$$u(x, y) = \int_{M_0 M} (Pdx + Qdy) = \int_{\Gamma} (Pdx + Qdy)$$

В силу условия **связности** G : $\exists h : (x^* + h, y^*) \in G$

Пусть прямая L , прямая соединяющая $M(x^*, y^*)$ и $M^*(x^* + h, y^*)$

Покажем, что

$$u_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x^* + h, y^*) - u(x^*, y^*)}{h} = P(x^*, y^*)$$



Имеем

$$\begin{aligned} \frac{u(x^* + h, y^*) - u(x^*, y^*)}{h} &= \frac{1}{h} (u(x^* + h, y^*) - u(x^*, y^*)) \\ &= \frac{1}{h} \int_{M}^{M^*} (Pdx + Qdy) = \frac{1}{h} \int_L (Pdx + Qdy) \end{aligned}$$

Параметризуем отрезок L :

$$x = x^* + th, t \in [0, 1] \Rightarrow dt = dx$$

$$y = y^* \Rightarrow dy = 0$$

$$\int_L (P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = \int_0^1 P(x^* + th, y^*)dt = P(x^* + h, y^*) - P(x^*, y^*)$$

Применим формулу **конечных приращений Лагранжа**

$$P(x^* + h, y^*) - P(x^*, y^*) \stackrel{18}{=} P(x^* + \theta h, y^*)h, \theta \in (0, 1)$$

Отсюда:

$$P(x^* + \theta h, y^*) = \frac{u(x^* + h, y^*) - u(x^*, y^*)}{h}$$

Теперь при $h \rightarrow 0$ получаем:

$$P(x^*, y^*) = u_x$$

Аналогично доказываем, что $Q(x^*, y^*) = u_y$

$$du(x^*, y^*) = u_x dx + u_y dy = P(x^*, y^*) dx + Q(x^*, y^*) dy$$

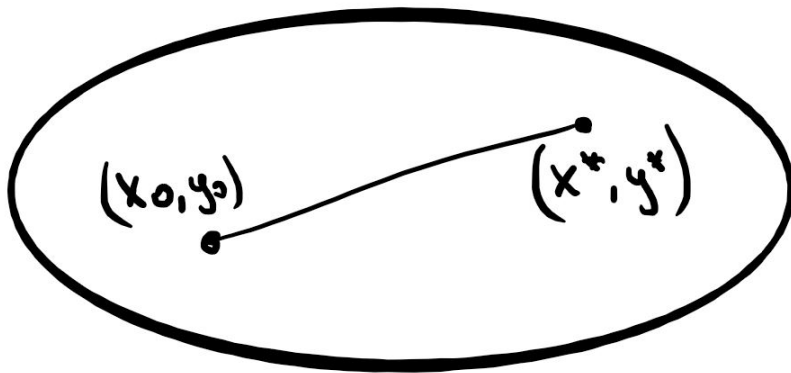
Но нам нужно еще доказать дифференцируемость $u(x, y)$ в G

$$u_x = P(x, y) \quad u_y = Q(x, y)$$

Тк по условию у нас P и Q имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутой G , то существуют вторые производные для $u(x, y)$, отсюда немедленно следует дифференцируемость $u(x, y)$ читд

(3 \Rightarrow 1)

Одно звено : $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x^*, y^*)$



$$\int_{\Gamma} (P dx + Q dy) = \int_{\Gamma} (u_x dx + u_y dy)$$

Параметризуем Γ :

$$x = \varphi(t)$$

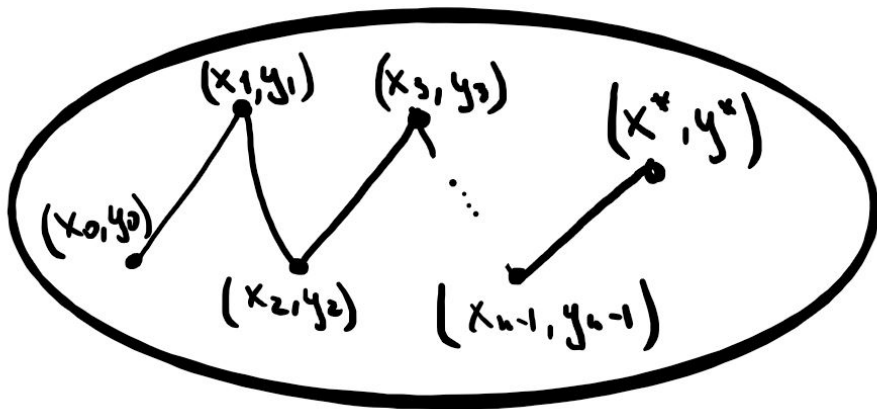
$$y = \psi(t), \text{ где } t \in [\alpha, \beta]$$

$$\int_{\Gamma} (P dx + Q dy) = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi'(t), \psi'(t)) * \varphi'(t) dt + Q(\varphi'(t), \psi'(t)) * \psi'(t) dt =$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}(u(\varphi(t), \psi(t))) dt = u(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - u(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$$

Получается, что интеграл зависит лишь от начальных точек, а значит не зависит от пути интегрирования

Если n звеньев:



$$\begin{aligned} u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0) + u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1) + u(x_3, y_3) - u(x_2, y_2) + \dots + u(x^*, y^*) - u(x_{n-1}, y_{n-1}) = \\ = u(x^*, y^*) - u(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Получается, что и от количества звеньев не зависит

читд

(3 \Rightarrow 4)

$$u_{xy}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y} = P_y$$

$$u_{yx}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x} = Q_x$$

В силу непрерывности P_y, Q_y , получается, что и $u_{xy}(x, y), u_{yx}(x, y)$ непрерывны в G .

А если существуют смешанные непрерывные производные, то они равны.

Теорема о смешанных производных

$$u_{xy} = u_{yx} \Rightarrow Q_x = P_y$$

читд

(4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3) Пусть $P_y = P_y$

Рассмотрим кусочно-гладкую замкнутую кривую в замкнутой G
Тогда справедлива формула Грина:

$$\int_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \int_G \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

Отсюда получаем свойство 2:

$$\int_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = 0$$

Ранее уже доказали, что $(2 \Rightarrow 3)$

читд

4 Поверхности в R^n

Определение 1.13

Пусть G есть ограниченная область из пространства R^2 , $f(u, v), g(u, v), h(u, v)$ — определенные при $(u, v) \in G$ и непрерывные на G функции. **Непрерывной поверхностью** S называется множество:

$$S = \{(x, y, z) : x = f(u, v), y = g(u, v), z = h(u, v), (u, v) \in G\}$$

Вектор-функция $\Phi(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v))$ называется представлением, или **параметризацией** поверхности.

Определение 1.14

Рассмотрим точку $(u_0, v_0) \in S$

$$(u_0, v_0) = \begin{cases} \text{не особая, если } \Phi_u(u_0, v_0), \Phi_v(u_0, v_0) - \text{ЛН;} \\ \text{особая, если } \Phi_u(u_0, v_0), \Phi_v(u_0, v_0) - \text{ЛЗ;} \end{cases}$$

Определение 1.15

Поверхность называется **гладкой**, если все ее точки не особые.

Определение 1.16

Совокупность касательных прямых к поверхности в точке **-касательная плоскость** к поверхности в этой точке.

Определение 1.17

Пусть задана поверхность S и $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, где

$$x_0 = f(u_0, v_0), y_0 = g(u_0, v_0), z_0 = h(u_0, v_0)$$

Тогда **касательная к плоскости S в (u_0, v_0)** определяется через определитель данной матрицы:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ f_u(u_0, v_0) & g_u(u_0, v_0) & h_u(u_0, v_0) \\ f_v(u_0, v_0) & g_v(u_0, v_0) & h_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

Определение 1.18

Прямая, проходящая через точку касания поверхности с касательной плоскостью и перпендикулярная этой плоскости, называется **нормальной прямой к поверхности в указанной точке**. Нормаль определяется матрицей:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_u(u_0, v_0) & g_u(u_0, v_0) & h_u(u_0, v_0) \\ f_v(u_0, v_0) & g_v(u_0, v_0) & h_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}; \quad (5)$$

Замечание

У плоскости в точке есть две нормали, верная из них та, которая задается матрицей из определения 1.17(5).

Важный факт В каждой точке гладкой поверхности S однозначно определена нормаль, вычисляемая по формуле (5).

Определение 1.19

Если на поверхности S эта нормаль меняется непрерывно, то поверхность S называется **ориентированной**. При задании ориентации поверхности считается, что поверхность S является **двусторонней**, и та сторона поверхности, которая прилегает к нормали (5), называется **положительной стороной** и обозначается S^+ , противоположная же сторона называется **отрицательной** и обозначается S^- .

Пример неориентированной поверхности: Лента Мебиуса

Определение 1.20

Две поверхности S_i и S_j называются **соседними**, если кривые Γ_i и Γ_j имеют одну или несколько общих дуг (общих участков, не вырождающихся в точку).

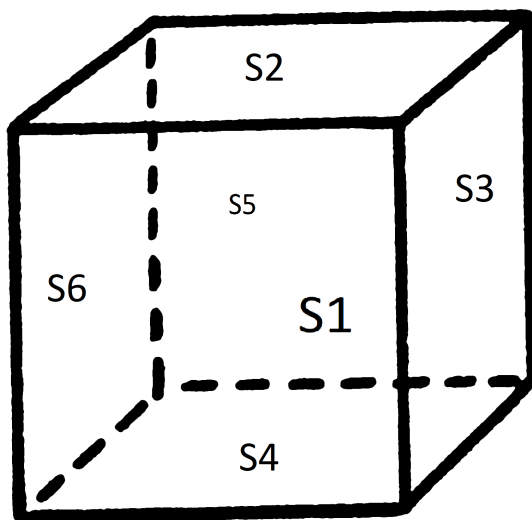
Определение 1.21

Поверхность называется **кусочно-гладкой**, если она состоит конечного числа гладких поверхностей, которые могут пересекаться лишь по своим граничным точкам.

Если S - кусочно-гладкая поверхность, то ее можно представить в виде:

$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_p$, где S_i и S_j или соседние или могут быть соединены некоторой последовательностью поверхностей.

Пример: Кубик



Определение 1.22

Кусочно-гладкая поверхность S , состоящая из m частей S_1, \dots, S_m , называется **ориентируемой**, если существует такая ориентация кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ (границ поверхностей S_1, \dots, S_m), что части (дуги) этих кривых, принадлежащие двум различным кривым Γ_i и Γ_j , получают от них противоположную ориентацию.

I квадратичная форма поверхности

Введем обозначения:

$E(u, v) = (\vec{\Phi}_u(u, v), \vec{\Phi}_u(u, v)) = |\vec{\Phi}_u^2(u, v)|$ - квадрат скалярного произведения.

$G(u, v) = (\vec{\Phi}_v(u, v), \vec{\Phi}_v(u, v)) = |\vec{\Phi}_v^2(u, v)|$ - квадрат скалярного произведения.

$F(u, v) = (\vec{\Phi}_u(u, v), \vec{\Phi}_v(u, v))$

Тогда:

$$(d\vec{\Phi})^2 = (\vec{\Phi}_u du + \vec{\Phi}_v dv)^2 = Edu^2 + 2F dudv + Gdv^2$$

I квадратичная форма имеет вид:

$$Edu^2 + 2F dudv + Gdv^2$$

Замечание: I квадратичная форма не отрицательна

Док-во: Как известно из курса Линала, квадрат скалярного произведения неотрицателен.

$$Edu^2 + 2F dudv + Gdv^2 = (d\vec{\Phi})^2 \geq 0$$

Поверхностный интеграл I рода

Пусть $S : \Phi(u, v)$ - Гладкая поверхность и задана функция $\psi(u, v)$, тогда **поверхностным интегралом I рода от $\psi(u, v)$** назовем:

$$\int_S \psi(u, v) ds = \int_{\Omega} \int \psi(u, v) \sqrt{EG - F^2} dudv$$

Также введем меру:

$$\int_S ds = mes S;$$

Свойства поверхностных интегралов I рода:

1) Линейность

$$\int_S (\alpha F_1 + \beta F_2) ds = \alpha \int_S F_1 ds + \beta \int_S F_2 ds$$

2) Аддитивность

$$\int_S F_2 ds + \int_S F_1 ds$$

Поверхностный интеграл II рода

Некоторые факты про нормаль

Пусть есть поверхность S с заданной параметризацией $\Phi(u, v)$, где (u, v) из замкнутой области Ω . Если \vec{n} - нормаль, вычисляемая по (5), то единичная нормаль будет вычисляться так:

$$\vec{V} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

Однако единичную нормаль можно задать по-другому:

Пусть $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$

Тогда

$$n_x = |\vec{n}| \cos \alpha;$$

$$n_y = |\vec{n}| \cos \beta;$$

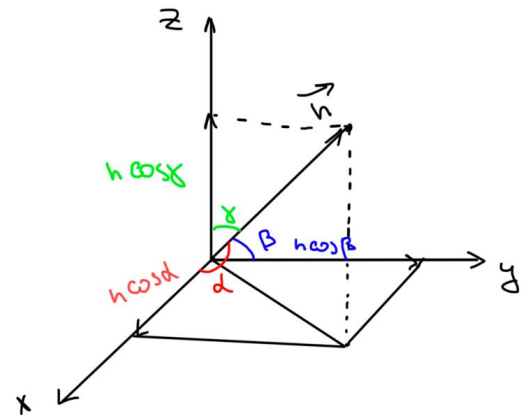
$$n_z = |\vec{n}| \cos \gamma;$$

...

Тогда вектор

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{n_x}{|\vec{n}|}, \frac{n_y}{|\vec{n}|}, \frac{n_z}{|\vec{n}|} \right)$$

А это не что иное как нормированный вектор \vec{n} , т.е. \vec{V}



Определение 1.23:

Поверхностным интегралом II рода по поверхности S по переменным x, y назовем

$$\int_S \int \Psi dx dy = \int_{S^+} \int \Psi dx dy = \int_S \Psi \cos \gamma ds$$

Соответственно, если интеграл по y, z будет такой же, но с $\cos \alpha$

Замечание:

$$\int_{S^+} \int \Psi dx dy = - \int_{S^-} \int \Psi dx dy$$

Свойства поверхностных интегралов II рода

- 1) Линейность
- 2) Аддитивность
- 3) Зависимость от стороны поверхности (замечание выше)

Определение 1.24

Пусть S есть кусочно-гладкая поверхность, состоящая из частей S_1, \dots, S_m , и пусть на S имеется согласованная ориентация S^+ . Далее, пусть на S задана функция $F(x, y, z)$. Поверхностным интегралом второго рода по поверхности S^+ по координатам x, y называется сумма:

$$I = \sum_{i=1}^m \int_{S_i^+} \int F dx dy$$

Для $dx dz, dy dz$ определяется аналогично.

Формула Гаусса-Остроградского:

Обозначаю: $R = R(x, y, z), Q = Q(x, y, z), P = P(x, y, z);$

Пусть V есть ограниченная поверхность Ω область из пространства R^3 , и V можно разбить кусочно-гладкими поверхностями на конечное число элементарных областей. Далее, пусть $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ есть заданные функции такие, что

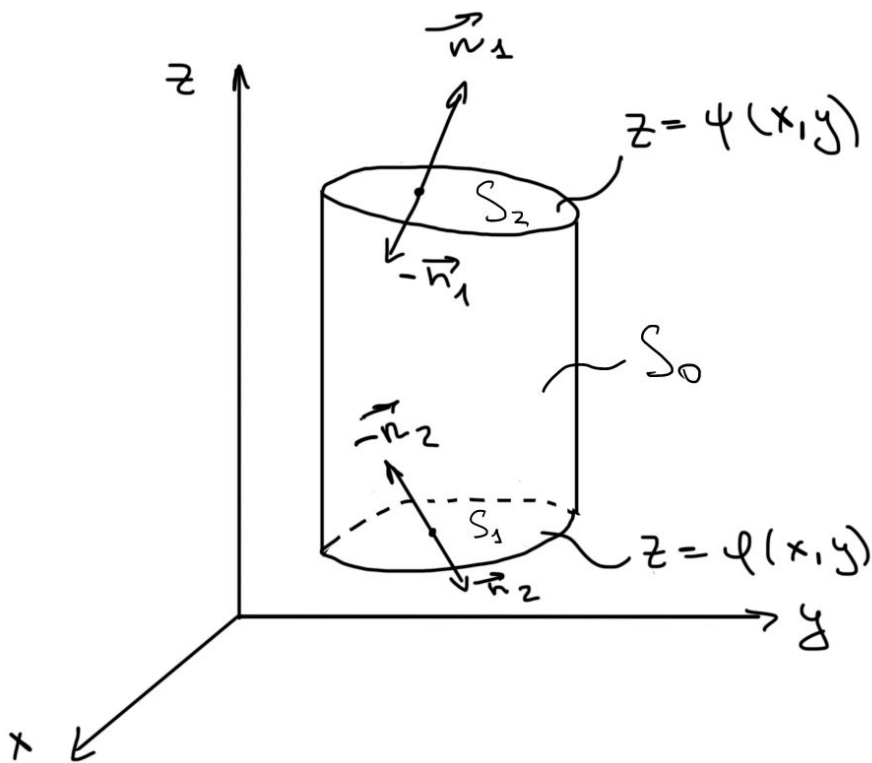
1) P, Q и R непрерывны в замкнутой области V

2) P, Q и R имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ в замкнутой V

Тогда верная формула Гаусса-Остроградского:

$$\int \int \int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \int \int_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

в которой $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ есть направляющие косинусы вектора **внешней** нормали к границе S области V



Док-во для элементарной V :

Поверхность S можно представить как: $S = S_0 \cup S_1^- \cup S_2^+$

Коль V элементарна, значит и по Oz элементарна, а значит $\varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)$

Рассмотрим

$$\int \int \int_V R_z(x, y, z)$$

Тк V элементарна по Oz :

$$\begin{aligned} \int \int \int_V R_z(x, y, z) dx dy dz &= \int \int_{\Omega} \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} R_z(x, y, z) dz \right) dx dy = \\ &= \int \int_{\Omega} (R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y))) dx dy \end{aligned}$$

Тк

1) $\varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)$

2) \vec{n}_1 - внешний к $z = \psi(x, y)$, но \vec{n}_2 - внутренний к $z = \varphi(x, y)$ (см. рис ниже)

3) Факт:

4) Почитайте это еще

Следствие 3.1.2. Если поверхность S имеет явное задание $z = \varphi(x, y)$, φ — непрерывно дифференцируемая в измеримой области D функция и $f: \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}$, причём функция $f(x, y, \varphi(x, y))$ непрерывна на \bar{D} , то

$$\iint_S f ds = \iint_D f(x, y, \varphi(x, y)) \sqrt{1 + \varphi_x'^2(x, y) + \varphi_y'^2(x, y)} dx dy.$$

Можно сделать вывод:

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} R(x, y, \psi(x, y)) dx dy &= \int \int_{S_2^+} R(x, y, z) dx dy \\ \int \int_{\Omega} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy &= - \int \int_{S_1^+} R(x, y, z) dx dy \end{aligned}$$

По определению [поверхностного интеграла II рода](#), учитывая то, что для S_2^+ нормаль будет внешней, а для S_1^+ - внутренней, можно переписать наши поверхностные интегралы II рода, как поверхностные интегралы I рода:

$$\int \int_{S_2^+} R(x, y, z) dx dy = \int_{S_2} R(x, y, z) \cos \gamma ds$$

$$\int_{S_1^+} \int R(x, y, z) dx dy = \int_{S_1} R(x, y, z) \cos \gamma ds$$

Тогда, зная, что S_0 - боковая поверхность (это интеграл равен нулю, тк $\gamma = 90^\circ$ (нормаль к S_0 перпендикулярная Oz), а значит $\cos \gamma = 0$) можно сделать вывод:

$$\begin{aligned} \int_V \int \int \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \int_{S_2^+} R(x, y, z) \cos \gamma ds + \int_{S_0} R(x, y, z) \cos \gamma ds - \int_{S_1^+} R(x, y, z) \cos \gamma ds = \\ &= \int_S R(x, y, z) \cos \gamma ds \end{aligned}$$

Аналогично доказывается:

$$\int_V \int \int \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \int_S R(x, y, z) \cos \alpha ds$$

$$\int_V \int \int \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \int_S R(x, y, z) \cos \beta ds$$

Суммируя, получаем нужную формулу.

читд

Док-во для V - составленной из гладких поверхностей:

Пусть теперь область V есть множество $V = V_1 \cap V_2 \cap S^*$, причем V_1 и V_2 есть элементарные области, S^* есть разделяющая их кусочно-гладкая поверхность. Представляя интеграл по области V в виде суммы интегралов по областям V_1 и V_2 (что возможно вследствие свойства аддитивности тройного интеграла), применяя формулу **Гаусса-Остроградского для элементарной области** к каждой области V_1 и V_2 , учитывая, что внешняя нормаль на поверхности S^* направлена взаимно противоположно по отношению к областям V_1 и V_2 , а также то, что оставшиеся части границ областей V_1 и V_2 составят вместе границу V , получим требуемую формулу для составной области V .

Если область G составлена из более чем двух областей V_1 и V_2 и разделяющих их поверхностей, то рассуждения будут вполне аналогичны, и тем самым формула **Гаусса-Остроградского для элементарной области** будет справедлива и для такой области.

5 Полезности

Связная область

Определение. Пусть задана область E , т.е. множество, состоящее из внутренних точек. Множество E называется связным, если любые две точки этого множества можно соединить ломаной, целиком лежащей в этой области.

Формула конечных приращений Лагранжа

Если функция F непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b) , то найдётся такая точка $c \in (a, b)$, что

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b - a)$$

Можно записать так:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = F'(x + \theta \Delta x) \Delta x, \theta \in (0, 1)$$

Теорема о смешанных производных

Теорема. Предположим, что 1) $f(x, y)$, определена в открытой области Ω , 2) в этой области f имеет частные производные f_x, f_y , а также вторые смешанные производные f_{xy}, f_{yx} , 3) эти последние производные непрерывны в некоторой точке $(x_0, y_0) \in \Omega$. Тогда в этой точке

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Корректность нормали в т. Гаусса-Остроградского

Учитывая, что

$$\begin{cases} f = u \\ g = v \\ h = \psi(u, v) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (f_u = 1) & (g_u = 0) & h_u \\ (f_v = 0) & (g_v = 1) & h_v \end{vmatrix} = h_u \vec{i} - h_v \vec{j} + \vec{k}$$

Отсюда:

$$|\vec{n}| = \sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}$$

А значит:

$$\vec{V} = (\dots, \dots, \frac{1}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}}) = (\dots, \dots, \frac{1}{\sqrt{1+\psi_x^2+\psi_y^2}})$$

те $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\psi_x^2+\psi_y^2}} > 0$, γ - острый, а значит \vec{V} - внешняя нормаль к S_2