Содержание

Часть I

Интегрирование на многообразиях

1 Кривые в R^n

Мы будем рассматривать наши кривые в пространстве R^n. Иногда в формулировке теоремы или утверждения нет условия на непрерывность кривой. Это не означает, что его нет, возможно оно и так подразумевается и без него утверждение становится интуитивно некорректным.

Определение 1.1:

Непрерывная кривая — множество точек $\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t), t \in [a, b]$
$A = \varphi_1(a), ..., \varphi_n(a)$
$B = \varphi_1(b), ..., \varphi_n(b)$
Если A = B, то кривая замкнута.

Определение 1.2:

$\Phi(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$ — параметризация кривой
Важный факт: существует бесконечное кол-во способов параметризовать кривую

Определение 1.3:

Если для кривой выполнятеся: $\exists \varphi_1'(t), ..., \varphi_n'(t)$ такие, что $\varphi_1'^2(t) + ... + \varphi_n'^2(t) > 0, t \in [a, b]$, то такую кривую называем **гладкой**
Если $\varphi_1'^2(t) + ... + \varphi_n'^2(t) = 0$, при $t = m$, то такая точка **особенная**

Определение 1.4:

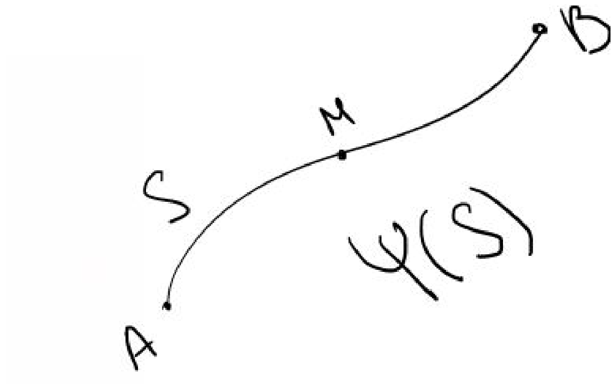
Кусочно-гладкая кривая — **непрерывная** гладкая кривая, состоящая из **конечного** числа гладких кривых.
Важный факт: не каждая кривая является спрямляемой

Определение 1.5:

Спрямляемая кривая — кривая, имеющая конечную длину.
Важный факт: гладкая кривая всегда спрямляемая

Определение 1.6:

Натуральная параметризация — параметризация, параметром которой выступает длина **дуги** от начала до точки на кривой.
Обозначаем ее как $\Psi(s)$, где s — длина дуги



Теорема 1.1:

Для любой гладкой кривой существует натуральная параметризация.

Без доказательства.

Любопытное утверждение:

Если кривая гладкая и без особых точек с гладкой параметризацией $\Phi(t)$ и натуральной параметризацией $\Psi(s)$ справедливо:

$$\frac{ds}{dt} = |\Phi'(t)|$$

Некоторые факты:

Задание параметризации $(\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$ определяет движение на кривой Γот ее начальной точки к конечной, или, другими словами, определяет ориентацию кривой, называемую положительной. Если при переходе от исходной параметризации начальная и конечная точки меняются местами (в случае замкнутой кривой — меняется направление движения), то происходит смена ориентации от положительной к отрицательной. Кривую Γ с положительной по отношению к исходной параметризации ориентацией обозначают Γ^+, с отрицательной — Γ^-.

2 Криволинейные интегралы I рода

Определение 1.7:

Пусть задана гладкая, спрямляемая кривая с параметризацией $\Phi(t)$

$\Gamma : \Phi(t), t \in [a, b]$

Также есть натуральная параметризация:

$\Gamma : \Psi(s)$, $s \in [0, S_\Gamma]$, в силу спрямляемости

И пусть задана функция $F(x), x \in \Gamma$

Тогда **криволинейным интегралом I рода от** F **по** Γ назовем интеграл Римана:

$$I = \int\limits_0^{S_\Gamma} F(\Psi(s))\, ds = \int\limits_0^{S_\Gamma} F(s)\, ds$$

И будем обозначать его, как

$$I = \int\limits_\Gamma F_0(x)\, ds$$

Свойства криволинейных интегралов I рода

Свойство 1: $F(s) = 1 \Rightarrow I = S_\Gamma$

Док-во:

$$F(s) = 1 \Rightarrow I = \int\limits_0^{S_\Gamma} 1\, ds \Rightarrow I = S_\Gamma - 0 = S_\Gamma$$

читд

Свойство 2: Криволинейный интеграл I рода не зависит от ориентации кривой, те

$$\int\limits_{\Gamma^+} F_0(x)\, ds = \int\limits_{\Gamma^-} F_0(x)\, ds$$

Док-во:

Пусть дана кривая с натуральной параметризацией $\Psi(s), s \in [0, S_\Gamma]$:

$\Gamma^+ : A = \Psi(0), B = \Psi(S_\Gamma)$

Возьмем точку $M \in [A, B]$ на кривой, тогда $M = \Psi(s)$

Определим параметр $\sigma = S_\Gamma - s$, те σ — расстояние от B до M.Тогда

$$\int\limits_{\Gamma^+} F_0(x)\,ds = \int\limits_0^{S_\Gamma} F(\Psi(s))\,ds \overset{\sigma = S_\Gamma - s}{=} -\int\limits_{S_\Gamma}^{0} F(\Psi(\sigma - S_\Gamma))\,d\sigma =$$

$$= \int\limits_0^{S_\Gamma} F(\Psi(\sigma - S_\Gamma))\,d\sigma = \int\limits_{\Gamma^-} F_0(x)\,d\sigma$$

Тк криволинейный интеграл I рода не зависит от выбранной параметризации, то свойство 2 доказано. читд

Свойство 3: Пусть Γ есть кривая в R^n с непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ параметризацией $\Phi(t)$ без особых точек, тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{\Gamma} F_0(x)\,ds = \int\limits_a^b F(\Phi(t))[\varphi_1'^2(t) + ... + \varphi_n'^2(t)]^{\frac{1}{2}}\,dt$$

Без доказательства

Свойство 4: Пусть $\tau = \{s_i\}_{i=0}^m$ есть разбиение отрезка $[0, S_\Gamma]$, ξ_i есть точки из отрезков $[s_{i-1}, s_i], i = 1, ..., m, \Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ длина дуги кривой Γ от точки $\Psi_0(s_{i-1})$ до точки $\Psi_0(s_i)$, σ_τ — интегральная сумма функции $F_0(s)$ по отрезку $[0, S_\Gamma]$

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{m} F_0(\Psi_0(\xi_i))\Delta s_i$$

Тогда, если криволинейный интеграл I первого рода существует, то

$$\lim_{max(\Delta s_i)\to 0} \sigma_\tau = I$$

Док-во:

Вспомним, как мы определяли интеграл Римана. Мы составляли интегральные суммы, потом устремляли разбиение к нулю и говорили, если вот существует такой предел, то назовем его интегралом Римана. Тут у нас условие, что криволинейный интеграл I первого рода существует, значит существует интеграл Римана, значит и предел сумм есть, который как раз и равен нашему интегралу Римана.

Свойство 5: Если функция $F(x)$ представляет собой комбинацию $\alpha F_1(x)+\beta F_2(x)$, α, β — фиксированные числа, криволинейные интегралы по кривой Γ от функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ существуют, то выполняется равенство.

$$\int\limits_\Gamma F_0(x)\,ds = \alpha\int\limits_\Gamma F_1(x)\,ds + \beta\int\limits_\Gamma F_2(x)\,ds$$

Док-во:

$$\int\limits_\Gamma F_0(x)\,ds = \int\limits_0^{S_\Gamma} F(\Psi(s))\,ds = \int\limits_0^{S_\Gamma} \alpha F_1(\Psi(s)) + \beta F_2(\Psi(s))\,ds =$$

$$\int\limits_0^{S_\Gamma} \alpha F_1(\Psi(s))\,ds + \int\limits_0^{S_\Gamma} \beta F_2(\Psi(s))\,ds = \alpha\int\limits_0^{S_\Gamma} F_1(\Psi(s))\,ds + \beta\int\limits_0^{S_\Gamma} F_2(\Psi(s))\,ds =$$

$$\alpha\int\limits_\Gamma F_1(x)\,ds + \beta\int\limits_\Gamma F_2(x)\,ds$$

читд

Вообщем сводим криволинейный интеграл к интегралу Римана, а там эти свойства уже доказаны в прошлом семестре.

Определение 1.8:

Криволинейным интегралом по кусочно-гладкой кривой Γ называется число

$$\int\limits_{\Gamma_1} F_0(x)\,ds + \int\limits_{\Gamma_2} F_0(x)\,ds \tag{1}$$

если каждый из криволинейных интегралов по Γ_1 и Γ_2 существуют.

Замечание Поскольку понятие определенного интеграла

$$\int\limits_a^b F(x)\,dx$$

по отрезку можно расширить — например, до несобственного интеграла от неограниченных функций или по неограниченному промежутку — то и понятие криволинейного интеграла первого рода можно расширить, определив несобственный криволинейный интеграл первого рода, или же перейти к какой-либо иной конструкции, расширяющей понятие обычного определенного интеграла.

3 Криволинейные интегралы II рода

Пусть Γ есть кривая, параметризованная непрерывно-дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ вектор-функцией $\Phi(t)$, и пусть эта кривая не имеет особых точек. Тогда, во-первых, в каждой точке $\Phi(t)$ определена касательная к Γ, и, во-вторых, от параметризации $\Phi(t)$ можно перейти к эквивалентной ей натуральной параметризации $\Psi(s)$. Обозначим через $cos\alpha_k, k = 1, ..., n$, направляющие косинусы единичного вектора $\vec{l} = \vec{l}(t)$ касательной к Γ в текущей точке (другими словами, искомый вектор $\vec{l}$ задается равенством $\vec{l} = (cos\alpha_1, ..., cos\alpha_n)$и $\alpha_k, k = 1, ..., n$, есть углы между вектором $\vec{l}$ и положительным направлением соответствующей оси Ox_k).

Определение 1.9:

Пусть задана функция $F_0(x)$, определенная при $x \in \Gamma$,

и пусть $F(s) = F_0(\Psi(s))$

Тогда **криволинейным интегралом второго рода по кривой** Γ **от функции** $F_0(x)$ по координате x_k, $k = 1, ..., n$, называется интеграл:

$$I = \int\limits_{\Gamma} F cos\alpha_k ds,$$

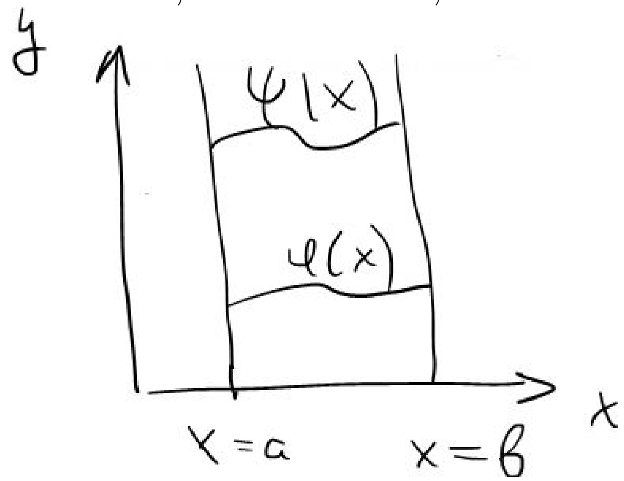
если последний существует

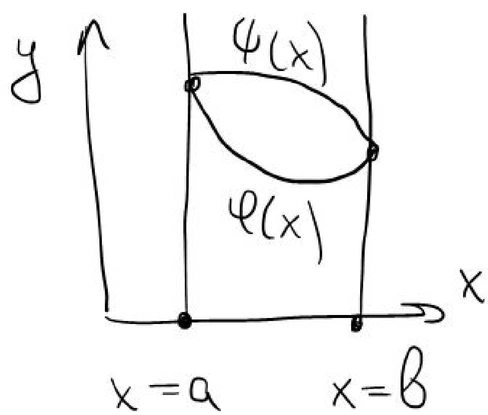
Обозначают как:

$$I = \int\limits_{\Gamma} F dx_k,$$

Определение 1.10:

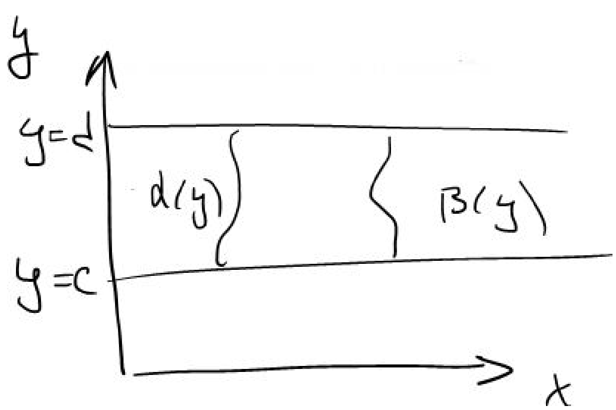
Область G из пространства R^2 называется **элементарной относительно оси** Oy, если ее граница состоит из графиков двух непрерывных функций $\phi(x)$ и $\psi(x)$, определенных при $x \in [a, b]$ и таких, что $\phi(x) \leq \psi(x)$ для всех x, а также, быть может, из некоторых отрезков прямых $x = a$ и $x = b$.

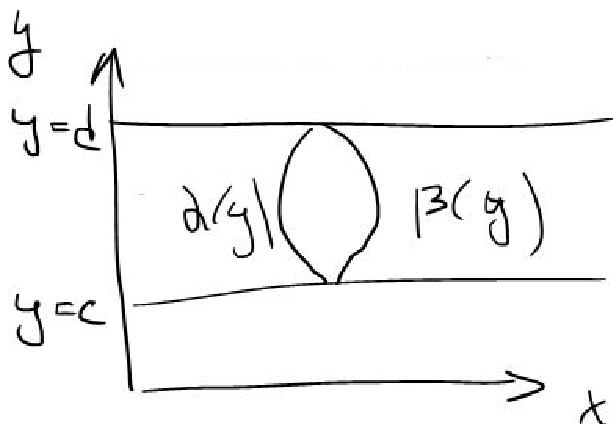




Определение 1.11:

Область G из пространства R^2 называется **элементарной относительно оси** Ox областью, если ее граница состоит из графиков двух непрерывных функций $\alpha(y)$ и $\beta(y)$, определенных при $y \in [c, d]$ и таких, что $\alpha(y) \leq \beta(y)$ для всех y, а также, быть может, из некоторых отрезков прямых $y = c$ и $y = d$.

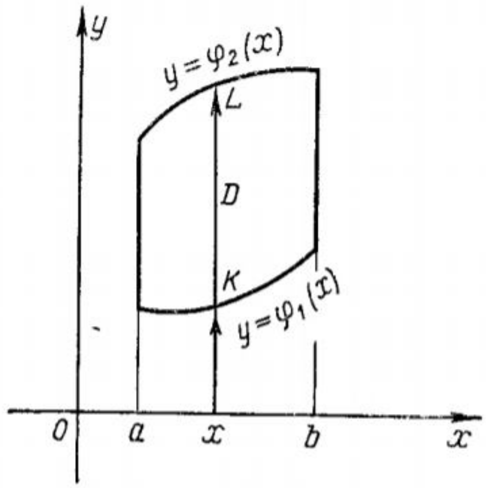


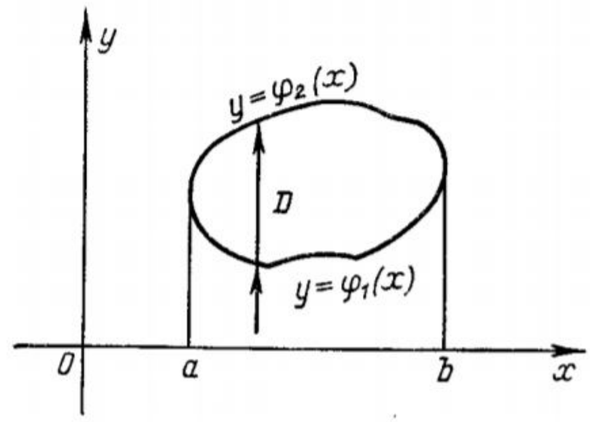


Замечание:

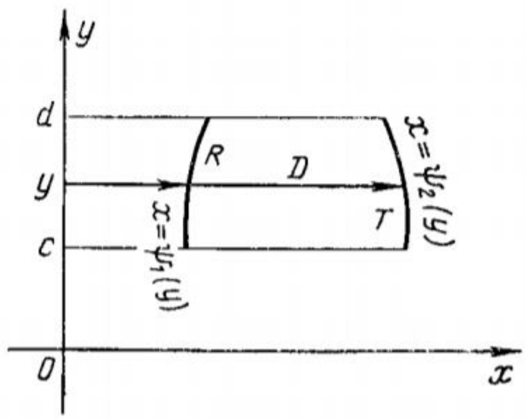
Группы Шваб идут по Крючковичу, у которого такие области называются **простыми** и, к тому же, оси меняются местами.

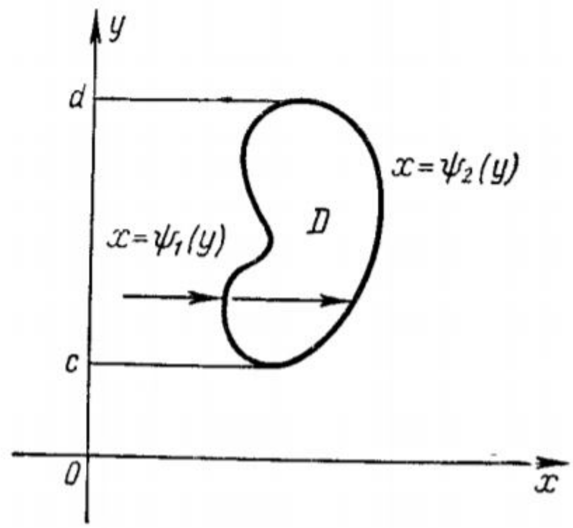
Область D на плоскости xOy назовем *простой областью*: 1) (относительно оси Ox) если она ограничена сверху линией $y=\varphi_2(x)$, снизу $y=\varphi_1(x)$ [функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны] и с боков отрезками прямых $x=a$ и $x=b$ (рис. 175); в частных случаях один из этих отрезков (или оба вместе) могут превратиться в точку (рис. 176);





2) (относительно оси Oy), если она ограничена слева линией $x=\psi_1(y)$, справа $x=\psi_2(y)$ [функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны] и сверху и снизу отрезками прямых $y=d$ и $y=c$ (рис. 177, 178).





Формула Грина:

Пусть D есть ограниченная область из пространства R^2 с кусочно-гладкой границей Γ, ориентированной положительно, и пусть эту область можно разбить на конечное число непересекающихся элементарных областей с кусочно-гладкими положительно-ориентированными границами. Далее, пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ есть заданные функции такие, что

1) P и Q непрерывны в замкнутой области D

2) P и Q имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутой
D

тогда верна формула Грина:

$$\int\limits_D \int (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \oint\limits_\Gamma (Pdx + Qdy) \tag{2}$$

Док-во для элементарной(и по Ox, и по Oy) D:

Сведем двойной интеграл к повторному и применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_D \int \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int\limits_c^d Q(x,\beta(y) - Q(x,\alpha(y))dy =$$

$$\int\limits_c^d Q(x,\beta(y))dy - \int\limits_c^d Q(x,\alpha(y))dy$$

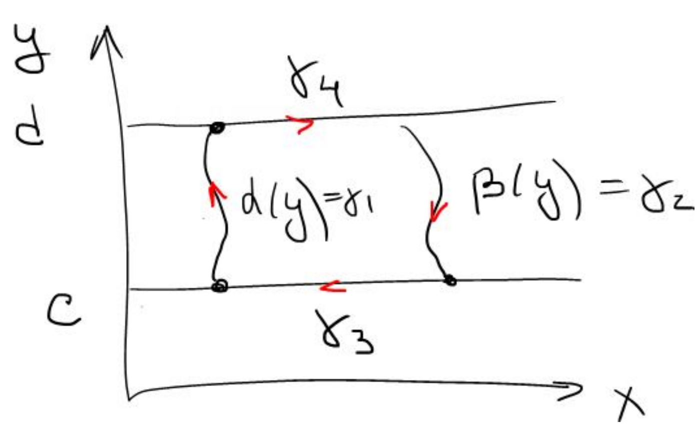
Мы можем параметризовать наши кривые

$\gamma_1 : \alpha(t), t \in [c,d]$.

$\gamma_2 : \beta(t), t \in [c,d]$.

$\gamma_3 : y = c, x = t, t \in [\alpha(c), \beta(c)]$.

$\gamma_4 : y = d, x = t, t \in [\alpha(d), \beta(d)]$.



Перепишем наши интегралы как криволинейные. Не забываем, что есть разница в направлении кривой!!!

$$\int\limits_{\gamma_1} Q(x,y)dy - \int\limits_{\gamma_2^-} Q(x,y)dy = \int\limits_{\gamma_1} Q(x,y)dy + \int\limits_{\gamma_2} Q(x,y)dy$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\gamma_3} Q(x,y)dy = \int\limits_{\gamma_4} Q(x,y)dy = 0$$

У нас получился интеграл по замкнутому контуру

$$\int\limits_{\gamma_1} Q(x,y)dy + \int\limits_{\gamma_2} Q(x,y)dy + \int\limits_{\gamma_3} Q(x,y)dy = \int\limits_{\gamma_4} Q(x,y)dy = \oint\limits_{\Gamma} Qdy$$

$$\int\limits_{D}\int \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \oint\limits_{\Gamma} Qdy$$

Аналогично:

$$\int\limits_{D}\int \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\oint\limits_{\Gamma} Pdx$$

Складывая, получаем:

$$\int\limits_{D}\int (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint\limits_{\Gamma}(Pdx + Qdy)$$

читд

Док-во, если D состоит из мн-ва непересекающихся, ненулевых элементарных областей:

$D = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_m$ при $D_i \cap D_j \neq \varnothing, i \neq j$ В силу свойства аддитивности двойного интеграла и факта, что граница области имеет нулевую меру:

$$\int\limits_{D}\int (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{D_i}\int (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

Применяя теперь для каждого слагаемого в правой части данного равенства доказанную выше формулу, получим

$$\int\limits_D\int(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\sum_{i=1}^{m}\oint\limits_{D_i}(Pdx+Qdy)$$

В сумме, стоящей справа, содержатся интегралы по положительно ориентированным частям границ областей D_i, составляющим в целом границу D, а также содержатся интегралы по тем частям границ областей D_i, которые лежат внутри D, причем эти интегралы берутся дважды по одинаковым кривым, но с противоположной ориентацией — в силу свойств криволинейных интегралов второго рода они взаимно уничтожаются. В результате суммирования как раз и получится требуемое равенство.

читд

Замечание:

Может возникнуть вопрос, что это за странная запись такая?

$$\oint\limits_{\Gamma}(Pdx+Qdy)$$

Ведь у нас никогда не было, что разные функции интегрируются по разным переменным в одном интеграле. Можно это понимать так: Мы хотим вычислить силу, поэтому интегрируем работу по составляющим, где P x-составляющая, Q y-составляющая.

Или просто воспринимайте его как сумму:

$$\oint\limits_{\Gamma}(Pdx+Qdy)=\oint\limits_{\Gamma}Pdx+\oint\limits_{\Gamma}Qdy$$

Замечание:

Не обязательно писать именно интеграл по замкнутой кривой, можно просто интеграл. Просто два нулевых интеграла нам дают такую возможность.

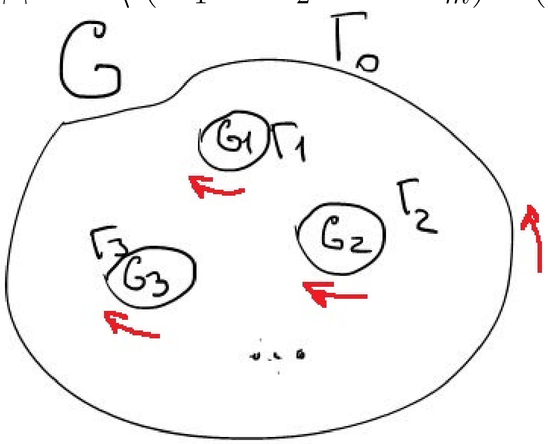
Определение 1.12:

Зададим $(m+1)$ гладкие, замкнутые кривые $\Gamma_0, \Gamma_1 \dots \Gamma_m$

Пусть Γ_0 - граница области G и $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$ при $i \neq j$

Γ_i - граница области G_i, $\Gamma_i \in G$, $i = 1 \dots m$

Тогда $G \setminus (G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_m)$ - $(m+1)$-связная область



Заметим, что при таком задании ориентации границы $(m+1)$-связной области кривые Γ_i, $i = 1, \dots, m$, будут ориентированы отрицательно по отношению к ограниченным областям G_i, кривые же Γ_i^- , наоборот, будут положительно ориентированы по отношению к G_i.

Формула Грина для многосвязных областей:

Пусть область G $(m+1)$-связна, ее внешний и внутренние контуры Γ_0, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ являются замкнутыми кусочно-гладкими кривыми без самопересечений, и пусть граница области G положительно ориентирована. Далее, пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ есть заданные функции такие, что

1) P и Q непрерывны в замкнутой области G

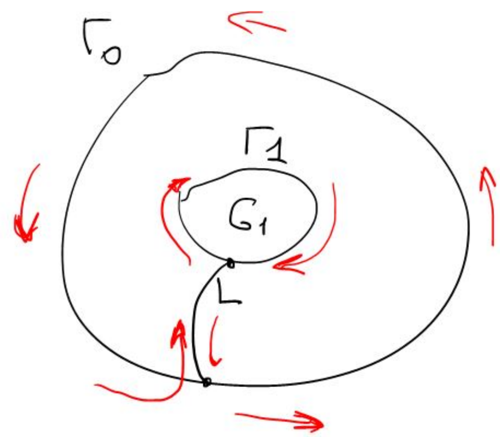
2) P и Q имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутой G

Тогда имеет место равенство

$$\int\limits_G\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_{\Gamma_0}(Pdx+Qdy)-\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\Gamma_i^-}(Pdx+Qdy) \qquad (3)$$

Док-во для двусвязной области G:

Соединим область G_1 с кривой Γ_0 разрезом, который представляет собой кусочно-гладкую кривую без самопересечений. Обозначим разрез как L



Обозначим через G^* область, полученную из G удалением данного разреза, предполагая, что граница области G^* состоит из границы G (с сохранением ориентации) и разреза, проходимого дважды.Граница G^* представляет собой кусочно-гладкую кривую, а значит по Формуле Грина для односвязной области имеем:

$$\int\limits_{G^*}\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_{\delta G^*}(Pdx+Qdy)$$

Далее, поскольку двойной интеграл не меняется при присоединении к множеству интегрирования множества нулевой двумерной меры, то имеет место равенство

$$\int\limits_{G^*}\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_{\delta G}(Pdx+Qdy)=\int\limits_{G}\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Заметим, что $\delta G=\Gamma_0\cup L\cup\Gamma_1$, вспоминая определение (1) интеграла по кусочно-гладкой кривой:

$$\int\limits_{\delta G}(Pdx+Qdy)=\int\limits_{\Gamma_0}(Pdx+Qdy)+\int\limits_{L^+}(Pdx+Qdy)+\int\limits_{L^-}(Pdx+Qdy)+\int\limits_{\Gamma_1}(Pdx+Qdy)$$

Учитывая, что направление движения по кривой имеет значение:

$$\int\limits_G\int(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\int\limits_{\delta G}(Pdx+Qdy)=\int\limits_{\Gamma_0}(Pdx+Qdy)-\int\limits_{\Gamma_1^-}(Pdx+Qdy)$$

Таким образом, мы получили формулу (3) для случая двусвязной области G

Что будет в случае, если G - $(m+1)$-связная область? Да то же самое, только $\delta G=\Gamma_0\cup(L_1\cup\ ...\ \cup L_m)\cup(\Gamma_1\cup\ ...\ \cup\Gamma_m)$

$$\int\limits_{\delta G}(Pdx+Qdy)=\int\limits_{\Gamma_0}(Pdx+Qdy)+\sum_{i=1}^{m}(\int\limits_{L_i^+}(Pdx+Qdy)-\int\limits_{L_i^-}(Pdx+Qdy))-\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\Gamma_i^-}(Pdx$$

Отсюда немедленно получаем

$$\int\limits_{\delta G}(Pdx+Qdy)=\int\limits_{\Gamma_0}(Pdx+Qdy)-\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{\Gamma_i^-}(Pdx+Qdy)$$

читд

Теорема 1.2

Пусть

1) P и Q непрерывны в замкнутой, связной области G

2) P и Q имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутой G

тогда 4 свойства эквивалентны:

1) Независимость $P(x,y)$, $Q(x,y)$ от пути интегрирования в G

2) Для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ, целиком лежащей в G, выполняется

$$\int\limits_{\Gamma}(Pdx+Qdy)=0$$

3) Существует функция $u(x, y)$ такая, что для любых точек (x, y) из G выполняется

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy;$$

4) Для любых точек (x, y) из G выполняется

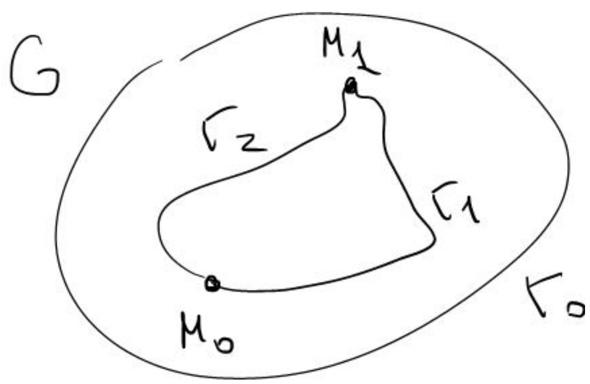
$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$$

Док-во: $(1 \Rightarrow 2)$

$$\int\limits_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) = \int\limits_{\Gamma_2} (Pdx + Qdy)$$

$$\int\limits_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) - \int\limits_{\Gamma_2} (Pdx + Qdy) = 0$$

$$\int\limits_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) + \int\limits_{\Gamma_2^-} (Pdx + Qdy) = 0$$



В силу того, что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2^-$(с учетом направления):

$$\int\limits_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \int\limits_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) + \int\limits_{\Gamma_2^-} (Pdx + Qdy) = 0$$

В силу произвольности выбора Γ_1 и Γ_2 получаем, что Γ - тоже произвольная кривая.

$(2 \Rightarrow 1)$

Пусть Γ - замкнутая кусочно-гладкая кривая и выполняется $\int\limits_{\Gamma}(Pdx + Qdy) = 0$

Разобьем(с учетом направления) $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 - кусочно-гладкие или просто гладкие кривые. Тогда:

$$\int\limits_{\Gamma}(Pdx + Qdy) = \int\limits_{\Gamma_1}(Pdx + Qdy) + \int\limits_{\Gamma_2}(Pdx + Qdy) = 0$$

Отсюда:

$$\int\limits_{\Gamma_1}(Pdx + Qdy) = \int\limits_{\Gamma_2^-}(Pdx + Qdy)$$

$(1 \Rightarrow 3)$**Надо еще исправлять** Пусть $M_0 = (x_0, y_0)$ есть фиксированная точка G, $M = (x^*, y^*)$ есть текущая точка G, $\Gamma : M_0M$ есть кусочно-гладкая кривая без самопересечений, целиком лежащая в G и соединяющая точки M_0 и M. Пусть

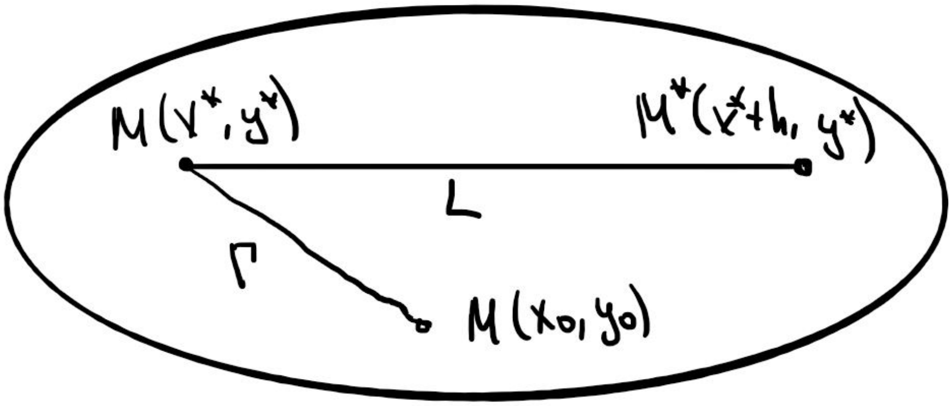
$$u(x, y) = \int\limits_{M_0M}(Pdx + Qdy) = \int\limits_{\Gamma}(Pdx + Qdy)$$

В силу условия связности G: $\exists h : (x^* + h, y^*) \in G$

Пусть прямая L, прямая соединяющая $M(x^*, y^*)$ и $M^*(x^* + h, y^*)$

Покажем, что

$$u_x = \lim_{h \to 0} \frac{u(x^* + h, y^*) - u(x^*, y^*)}{h} = P(x^*, y^*)$$



Имеем

$$\frac{u(x^*+h,y^*)-u(x^*,y^*)}{h}=\frac{1}{h}(u(x^*+h,y^*)-u(x^*,y^*))$$

$$=\frac{1}{h}\int\limits_{M}^{M^*}(Pdx+Qdy)=\frac{1}{h}\int\limits_{L}(Pdx+Qdy)$$

Параметризуем отрезок L:

$x=x^*+th, t\in[0,1]\Rightarrow dt=dx$

$y=y^*\Rightarrow dy=0$

$$\int\limits_{L}(P(x,y)dx+Q(x,y)dy)=\int\limits_{0}^{1}P(x^*+th,y^*)dt=P(x^*+h,y^*)-P(x^*,y^*)$$

Применим формулу конечных приращений Лагранжа

$$P(x^*+h,y^*)-P(x^*,y^*)=P(x^*+\theta h,y^*)h,\theta\in(0,1)$$

Отсюда:

$$P(x^*+\theta h,y^*)=\frac{u(x^*+h,y^*)-u(x^*,y^*)}{h}$$

Теперь при $h\to 0$ получаем:

$$P(x^*,y^*)=u_x$$

Аналогично доказываем, что $Q(x^*, y^*) = u_y$

$$du(x^*, y^*) = u_x dx + u_y dy = P(x^*, y^*)dx + Q(x^*, y^*)dy$$

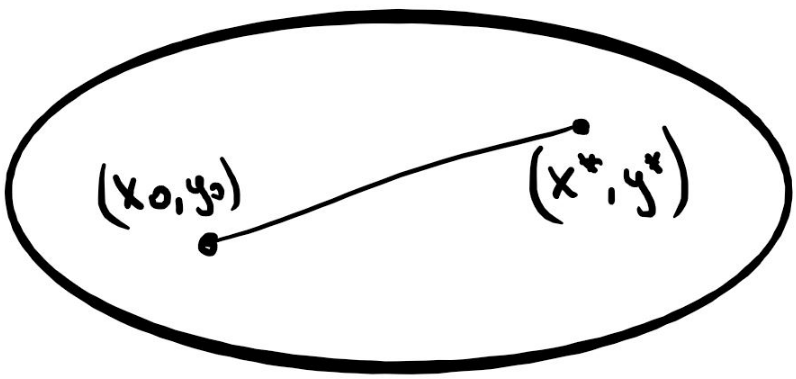
Но нам нужно еще доказать дифференцируемость $u(x, y)$ в G

$u_x = P(x, y)$ $u_y = Q(x, y)$

Тк по условию у нас P и Q имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутой G, то существую вторые производные для $u(x, y)$, отсюда немедленно следует дифференцируемость$u(x, y)$ читд

$(3 \Rightarrow 1)$

Одно звено : $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x^*, y^*)$



$$\int\limits_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \int\limits_{\Gamma} (u_x dx + u_y dy)$$

Параметризуем Г:

$x = \varphi(t)$

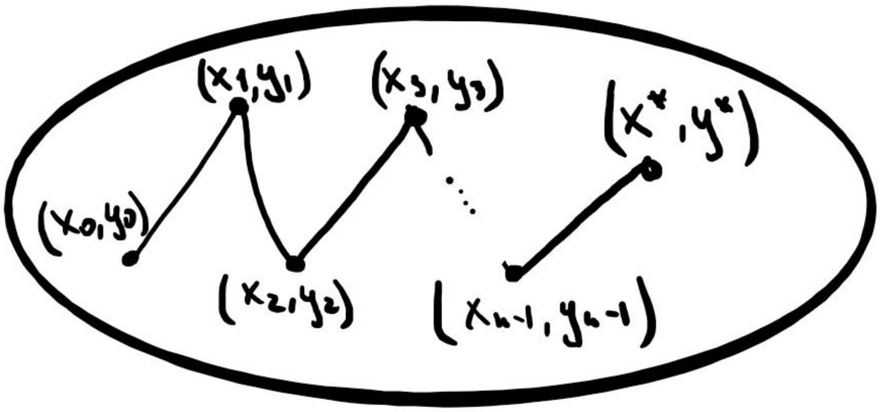
$y = \psi(t)$, где $t \in [\alpha, \beta]$

$$\int\limits_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi'(t), \psi'(t)) \cdot \varphi'(t)dt + Q(\varphi'(t), \psi'(t)) \cdot \psi'(t)dt =$$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}(u(\varphi(t), \psi(t)))dt = u(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - u(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$$

Получается, что интеграл зависит лишь от начальных точек, а значит не зависит от пути интегрирования

Если **n звеньев:**



$$u(x_1,y_1)-u(x_0,y_0)+u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1)+u(x_3,y_3)-u(x_2,y_2)+...+u(x^*,y^*)-u(x_{n-1},$$

$$= u(x^*,y^*) - u(x_0,y_0)$$

Получается, что и от количества звеньев не зависит

читд

$(3 \Rightarrow 4)$

$$u_{xy}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y} = P_y$$

$$u_{yx}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x} = Q_x$$

В силу непрерывности P_y, Q_y, получается, что и $u_{xy}(x,y), u_{yx}(x,y)$ непрерывны в G. А если если существуют смешанные непрерывные производные, то они равны.

Теорема о смешанных производных

$$u_{xy} = u_{yx} \Rightarrow Q_x = P_y$$

читд

$(4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3)$ Пусть $P_y = P_y$

Рассмотрим кусочно-гладкую замкнутую кривую в замкнутой G

Тогда справедлива формула Грина:

$$\int\limits_{\Gamma}(Pdx + Qdy) = \int\limits_{G}\int(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = 0$$

Отсюда получаем свойство 2:

$$\int\limits_{\Gamma}(Pdx + Qdy) = 0$$

Ранее уже доказали, что $(2 \Rightarrow 3)$

читд

4 Поверхности в R^n

Определение 1.13

Пусть G есть ограниченная область из пространства R^2, $f(u,v), g(u,v), h(u,v)$ — определенные при $(u,v) \in G$ и непрерывные на G функции. **Непрерывной поверхностью** S называется множество:

$S = \{(x,y,z) : x = f(u,v), y = g(u,v), z = h(u,v), (u,v) \in G\}$

Вектор-функция $\Phi(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$ называется представлением, или **параметризацией** поверхности.

Определение 1.14

Рассмотрим точку $(u_0, v_0) \in S$

$$(u_0, v_0) = \begin{cases} \textbf{не особая}, \text{если } \Phi_u(u_0,v_0), \Phi_v(u_0,v_0) - \text{ЛН}; \\ \textbf{особая}, \text{если } \Phi_u(u_0,v_0), \Phi_v(u_0,v_0) - \text{ЛЗ}; \end{cases}$$

Определение 1.15

Поверхность называется **гладкой**, если все ее точки не особые.

Определение 1.16

Совокупность касательных прямых к поверхности в точке -**касательная плоскость** к поверхности в этой точке.

Определение 1.17

Пусть задана поверхность S и $M_0(x_0, y_0, x_0) \in S$, где

$x_0 = f(u_0,v_0), y_0 = g(u_0,v_0), z_0 = h(u_0,v_0)$

Тогда **касательная к плоскости** S **в** (u_0, v_0) определяется через определитель данной матрицы:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ f_u(u_0,v_0) & g_u(u_0,v_0) & h_u(u_0,v_0) \\ f_v(u_0,v_0) & g_v(u_0,v_0) & h_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

Определение 1.18

Прямая, проходящая через точку касания поверхности с касательной плоскостью и перпендикулярная этой плоскости, называется **нормальной прямой к поверхности в указанной точке.** Нормаль определяется матрицей:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_u(u_0,v_0) & g_u(u_0,v_0) & h_u(u_0,v_0) \\ f_v(u_0,v_0) & g_v(u_0,v_0) & h_v(u_0,v_0) \end{vmatrix}; \tag{5}$$

Замечание

У плоскости в точке есть две нормали, верная из них та, которая задается матрицей из определениия 1.17(5).

Важный факт В каждой точке гладкой поверхности S однозначно определена нормаль,вычисляемая по формуле (5).

Определение 1.19

Если на поверхности S эта нормаль меняется непрерывно, то поверхность S называется **ориентированной**. При задании ориентации поверхности считается, что поверхность S является **двусторонней** , и та сторона поверхности, которая прилегает к нормали (5), называется **положительной**

стороной и обозначается S^+ , противоположная же сторона называется **отрицательной и обозначается** S^- .

Пример неориентированной поверхности: Лента Мебиуса

Определение 1.20

Две поверхности S_i и S_j называются **соседними**, если кривые Γ_i и Γ_j имеют одну или несколько общих дуг (общих участков,не вырождающихся в точку).

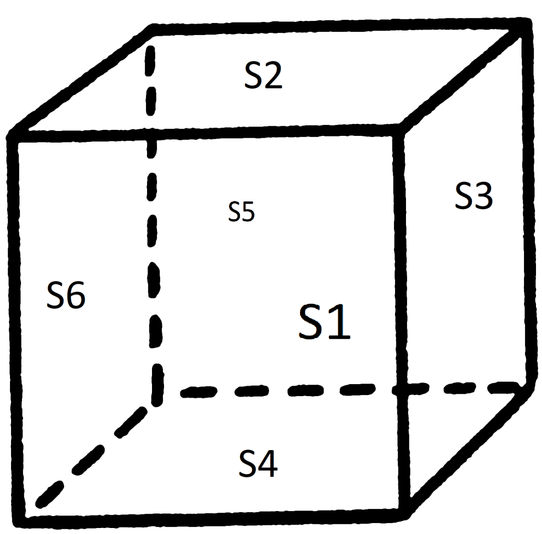
Определение 1.21

Поверхность называется **кусочно-гладкой**, если она состоит конечного числа гладких поверхностей, которые могут пересекаться лишь по своим граничным точкам.

Если S - кусочно-гладкая поверхность, то ее можно представить в виде:

$S = S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_p$, где S_i и S_j или соседние или могут быть соединены некоторой последовательностью поверхностей.

Пример: Кубик



Определение 1.22

Кусочно-гладкая поверхность S, состоящая из m частей S_1,...,S_m, называется **ориентируемой**, если существует такая ориентация кривых Γ_1, ..., Γ_m (границ поверхностей $S_1, ..., S_m$), что части (дуги) этих кривых, принадлежащие двум различным кривым Γ_i и Γ_j, получают от них противоположную ориентацию.

I квадратичная форма поверхности

Введем обозначения:

$E(u,v) = (\vec{\Phi}_u(u,v), \vec{\Phi}_u(u,v)) = |\vec{\Phi}_u(u,v)|^2$ - квадрат модуля
$G(u,v) = (\vec{\Phi}_v(u,v), \vec{\Phi}_v(u,v)) = |\vec{\Phi}_v^2(u,v)|^2$ - квадрат модуля
$F(u,v) = (\vec{\Phi}_u(u,v), \vec{\Phi}_v(u,v))$

Тогда:

$$(d\vec{\Phi})^2 = (\vec{\Phi}_u du + \vec{\Phi}_v dv)^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

I квадратичная форма имеет вид:

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

Замечание: I квадратичная форма не отрицательна

Док-во: Как известно из курса Линала, квадрат скалярного произведения неотрицателен.

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = (d\vec{\Phi})^2 \geqslant 0$$

Поверхностный интеграл I рода

Пусть $S : \Phi(u,v)$ - Гладкая поверхность и задана функция $\psi(u,v)$, тогда **поверхностным интегралом I рода от** $\psi(u,v)$ назовем:

$$\int\limits_S \psi(u,v)ds = \int\limits_\Omega \int \psi(u,v)\sqrt{EG - F^2}dudv$$

Также введем меру:

$$\int\limits_S ds = mesS;$$

Свойства поверхностных интегралов I рода:

1) Линейность

$$\int\limits_S (\alpha F_1 + \beta F_2) ds = \alpha \int\limits_S F_1 ds + \beta \int\limits_S F_2 ds$$

2)Аддитивность

$$\int\limits_S F_2 ds + \int\limits_S F_1 ds$$

Поверхностный интеграл II рода

Некоторые факты про нормаль

Пусть есть поверхность S с заданной параметризацией $\Phi(u, v)$, где (u, v) из замкнутой области Ω. Если $\vec{n}$ - нормаль, вычисляемая по (5), то единичная нормаль будет вычисляться так:

$$\vec{V} = \frac{\vec{n}}{|n|}$$

Однако единичную нормаль можно задать по-другому:

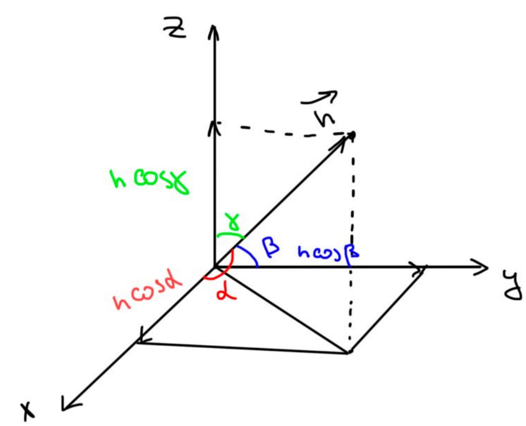
Пусть $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$

Тогда

$$n_x = |n| cos\alpha;$$

$$n_y = |n| cos\beta;$$

$$n_z = |n| cos\gamma;$$



...

Тогда вектор

$$(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma) = (\frac{n_x}{|n|}, \frac{n_y}{|n|}, \frac{n_z}{|n|})$$

А это не что иное как нормированный вектор $\vec{n}$, те $\vec{V}$

Определение 1.23:

Поверхностным интегралом II рода по поверхности S по переменным x, y назовем

$$\int\limits_{S}\int \Psi dxdy = \int\limits_{S^{+}}\int \Psi dxdy = \int\limits_{S} \Psi cos\gamma ds$$

Соотвественo, если интеграл по y, z будет такой же, но с $cos\alpha$

Замечание:

$$\int\limits_{S^{+}}\int \Psi dxdy = -\int\limits_{S^{-}}\int \Psi dxdy$$

Свойства поверхностных интегралов II рода

1) Линейность
2) Аддитивность
3) Зависимость от стороны поверхность(замечание выше)

Определение 1.24

Пусть S есть кусочно-гладкая поверхность, состоящая из частей $S_1, ..., S_m$, и пусть на S имеется согласованная ориентация S^{+}. Далее, пусть на S задана функция $F(x, y, z)$. **Поверхностным интегралом второго рода по поверхности S^{+} по координатам x, y называется сумма**:

$$I = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{S_i^{+}}\int F dxdy$$

Для $dxdz, dydz$ определяется аналогично.

Формула Гаусса-Остроградского:

Обозначаю: $R = R(x, y, z), Q = Q(x, y, z), P = P(x, y, z)$;

Пусть V есть ограниченная поверхностью Ω, область из пространства R^3, и V можно разбить кусочно-гладкими поверхностями на конечное число элементарных областей. Далее, пусть $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ есть заданные функции такие, что

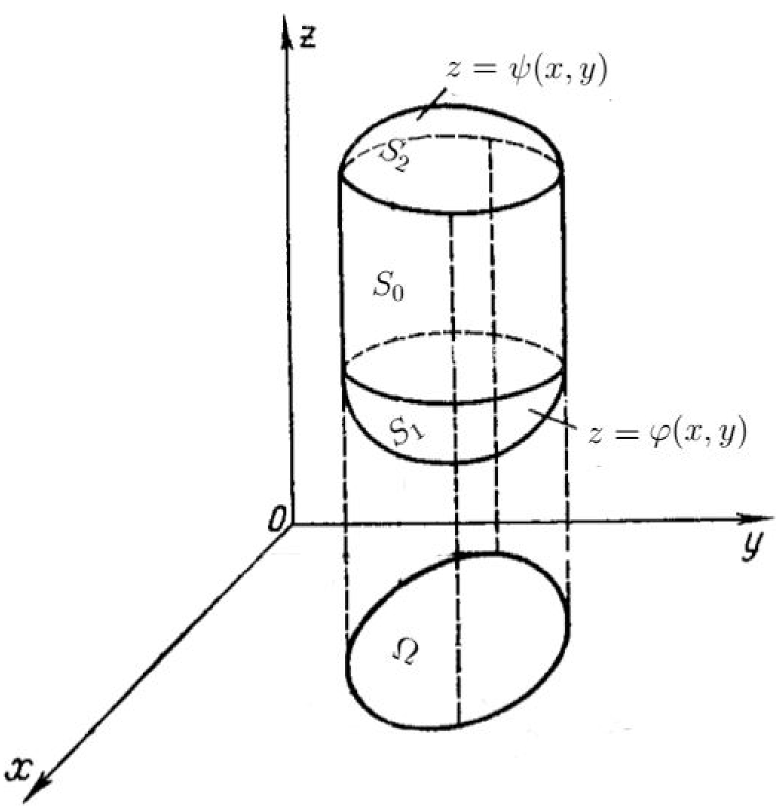
1) P, Q и R непрерывны в замкнутой области V

2) P,Q и R имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ в замкнутой V

Тогда верная формула Гаусса-Остроградского:

$$\int\int_V\int\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \int_S(Pcos\alpha + Qcos\beta + Rcos\gamma)ds$$

в которой $(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$ есть направляющие косинусы вектора **внешней** нормали к границе S области V



Док-во для элементарной V:

Поверхность S можно представить как: $S = S_0 \cup S_1^- \cup S_2^+$

Коль V элементарна, значит и по Oz элементарна, а значит $\varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)$

Рассмотрим
$$\int\int\limits_V\int R_z(x,y,z)$$

Тк V элементарна по Oz:
$$\int\int\limits_V\int R_z(x,y,z)dxdxydz = \int\limits_\Omega\int(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} R_z(x,y,z)dz)dxdy =$$
$$= \int\limits_\Omega\int(R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y)))dxdy$$

Тк

1) $\varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)$

2) $\vec{n_1}$ - внешний к $z = \psi(x,y)$, но $\vec{n_2}$ - внутренний к $z = \varphi(x,y)$

3) $cos\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\psi_x^2+\psi_y^2}}$ для S_2 , и $cos\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}}$ для S_1

4)$\psi(x,y) : \sqrt{EG-F^2} = \sqrt{(1+\psi_x^2)(1+\psi_y^2)-(\psi_x\psi_y)^2} = \sqrt{1+\psi_x^2+\psi_y^2}$

$\varphi(x,y) : \sqrt{EG-F^2} = \sqrt{(1+\varphi_x^2)(1+\varphi_y^2)-(\varphi_x\varphi_y)^2} = \sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}$

Можно сделать вывод:
$$\int\limits_\Omega\int R(x,y,\psi(x,y))dxdy \stackrel{?}{=} \int\limits_{S_2^+}\int R(x,y,z)cos\gamma_1\sqrt{EG-F^2}dxdy =$$
$$= \int\limits_{S_2^+}\int R(x,y,z)dxdy$$
$$\int\limits_\Omega\int R(x,y,\varphi(x,y))dxdy \stackrel{?}{=} \int\limits_{S_2^+}\int R(x,y,z)cos\gamma_2\sqrt{EG-F^2}dxdy =$$

$$= \int\limits_{S_1^+}\int R(x,y,z)dxdy$$

По определению поверхностного интеграла II рода, учитывая то, что для S_2^+ нормаль будет внешней, а для S_1^+ - внутренней, можно переписать наши поверхностные интегралы II рода, как поверхностные интегралы I рода:

$$\int\limits_{S_2^+}\int R(x,y,z)dxdy = \int\limits_{S_2} R(x,y,z)cos\gamma_1 ds$$

$$\int\limits_{S_1^+}\int R(x,y,z)dxdy = -\int\limits_{S_1} R(x,y,z)cos\gamma_2 ds$$

Тогда, зная, что S_0 - боковая поверхность(это интеграл равен нулю, тк $\gamma_3 = 90$(нормаль к S_0 перпендикулярная Oz),а значит $cos\gamma_3 = 0$), Пусть γ - угол между номалью к поверхности S и положительным направлением оси Oz , тогда можно сделать вывод:

$$\int\int\limits_{V}\int \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \int\limits_{S_2^+} R(x,y,z)cos\gamma_1 ds + \int\limits_{S_0} R(x,y,z)cos\gamma_3 ds - \int\limits_{S_1^+} R(x,y,z)cos\gamma_2$$

$$= \int\limits_{S} R(x,y,z)cos\gamma ds$$

(**Замечание**)

Аналогично доказывается:

$$\int\int\limits_{V}\int \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = \int\limits_{S} R(x,y,z)cos\alpha ds$$

$$\int\int\limits_{V}\int \frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz = \int\limits_{S} R(x,y,z)cos\beta ds$$

Суммируя, получаем нужную формулу.

читд

Док-во для V - составленной из гладких поверхностей:

Пусть теперь область V есть множество $V = V_1 \cap V_2 \cap S^*$, причем V_1 и V_2 есть элементарные области, S^* есть разделяющая их кусочно-гладкая поверхность. Представляя интеграл по области V в виде суммы интегралов по областям V_1 и V_2 (что возможно вследствие свойства аддитивности тройного интеграла), применяя формулу **Гаусса-Остроградского для элементарной области** к каждой области V_1 и V_2, учитывая, что внешняя нормаль на поверхности S^* направлена взаимно противоположно по отношению к областям V_1 и V_2, а также то, что оставшиеся части границ областей V_1 и V_2 составят вместе границу V, получим требуемую формулу для составной области V.

Если область G составлена из более чем двух областей V_1 и V_2 и разделяющих их поверхностей, то рассуждения будут вполне аналогичны, и тем самым формула **Гаусса-Остроградского для элементарной области** будет справедлива и для такой области.

Формула Стокса:

1) Пусть S - поверхность в R^3, заданная своей вектор-функцией $\Phi(u,v)$, $(u,v) \in \overline{\Omega}$
2) Пусть вектор-функция $\Phi(u,v)$ есть дважды непрерывно дифференцируемая при
$(u,v) \in \overline{\Omega}$ функция
3) Пусть Ω есть плоская ограниченная область такая, что для нее выполняется
формула Грина
4) Путь γ_0 - граница Ω , γ_0 - замкнутая, кусочно-гладкая без самопересечений с
положительным направление обхода с параметризацией $\gamma_0 : u(t), v(t), t \in [a,b]$
5)На S определена нормаль $\vec{V}(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$
6)Определим кривую γ в пространстве R^3 как кривую с параметризацией
$\Phi(u(t), v(t)), t \in [a,b]$, и пусть эта кривая представляет собой границу,или край
поверхности S (говорят также, что поверхность S натянута на кривую γ).
7) Пусть область G из пространства R^3 есть такая область, что выполняется
вложение $S \subset G$, и пусть функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ определены при
$(x,y,z) \in G$

Формула Стокса

1)Пусть функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны в области G

2) Все частные производные P, Q, R тоже непрерывны в G (9 штук)

3)Для поверхности S, для кривых γ_0 и γ выполняются сделанные выше предположения. Тогда выполняется равенство:

$$\int\limits_{\gamma} Pdx+Qdy+Rdz = \int\limits_{\gamma} [(R_y-Q_z)cos\alpha+(P_z-R_x)cos\beta+(Q_x-P_y)cos\gamma]ds \quad (6)$$

Док-во Потом

5 Элементы векторного анализа

Поле - область пространства, если а каждой точке определено значение некоторой величины.

1) Если в каждой точке M этой области определено число $U = U(M)$, то говорят, что в области определено **скалярное поле**

Пример: Поле температур, давления, плотности, электрического потенциала.

2) Если каждой точки M области соответствует вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$, то говорят, что задано **векторное поле**

Пример: Поле силы тяжести, магнитное поле.

Будем работать в пространстве R^3. G область из R^3 и $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x$ - заданные функции, определенные при $(x,y,z) \in G$ **Обозначаю:** $R = R(x,y,z), Q = Q(x,y,z), P = P(x,y,z)$**;**

Определение 1.25

Векторным полем назовем совокупность векторов

$\vec{a}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, где $(x,y,z) \in G$

Определение 1.26

Оператор **"набла":**

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$$

Градиент Тогда, если f - функция, то

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = gradf \text{ - вектор}$$

Если есть вектор $\vec{F} = (P, Q, R)$, то

$$\nabla\vec{F} = \vec{i}\frac{P}{\partial x} + \vec{j}\frac{Q}{\partial y} + \vec{k}\frac{R}{\partial z} \text{ - вектор}$$

Дивергенция: Скалярное произведение ∇ и $\vec{F} = (P, Q, R)$:

$$(\nabla, \vec{F}) = div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \text{ - скаляр}$$

Ротор: Векторное произведение ∇ и $\vec{F} = (P, Q, R)$:

$$[\nabla, \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Циркуляция: Пусть γ есть замкнутая кусочно-гладкая кривая, без самопересечений, лежащая в G. Интеграл второго рода

$$\int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

называется циркуляцией векторного поля $\vec{a}(x, y, z)$ по кривой γ, **если интеграл существует**

Поток векторного поля:

Пусть S есть некоторая ориентированная поверхность, лежащая в G, и пусть ее ориентацию определяет единичная нормаль V, вычисляемая с помощью формулы (5), в случае если поверхность S не является границей некоторой области G' , лежащей в G, или же внешняя нормаль, если поверхность S является границей области G'(просто должен получиться *ежик*, чтобы все нормали не были направлены внутрь).

Интеграл первого рода

$$\int\limits_{S} (\vec{a}, \vec{v})ds$$

($(\vec{a},\vec{v})$ — скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{v}$) называется потоком векторного поля $\vec{a}(x,y,z)$ через поверхность S.

Замечание:

Можно переформулировать формулы Гаусса-Остроградского и Стокса:

Пусть выполняются все условия теоремы про формулу Гаусса-Остроградского . Тогда интеграл от дивергенции векторного поля $\vec{a}(x,y,z)$ по области G равен потоку этого поля через границу G.

Пусть выполняются все условия теоремы про формулу Стокса. Тогда циркуляция векторного поля $\vec{a}(x,y,z)$ по контуру γ равна потоку ротора этого поля через поверхность S, натянутую на γ.

Определение 1.27

Пусть G есть некоторая область из пространства R^3, и пусть в G задано векторное поле $\vec{a}(x,y,z)$. Если циркуляция векторного поля $\vec{a}(x,y,z)$ по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой без самопересечений, лежащей в области G, равна нулю, то это поле называется **потенциальным**.

Пример: Электрическое поле напряженности точечного заряда

Замечание

Векторное поле **потенциальное** $\Leftrightarrow$ оно является безвихревым(при условии существованияP, Q, R)

Определение 1.28

Поверхность, ограничивающая некоторую область - **допустима**, если к ней можно применить формулу Гаусса-Остроградского.

Определение 1.29

G - **объемно-односвязная**, если для любой замкнутой допустимой поверхности S, ее внутренность лежит в G(трехмерная область без дырок).

Определение 1.30

Заданное в области G векторное поле $a(x, y, z)$ называется **соленоидальным**, если его **поток** через любую лежащую в G **допустимую** поверхность равен нулю.

Пример: Поле линейных скоростей вращающегося тела, магнитное поле, создаваемое прямолинейным проводником, вдоль которого течет электрический ток.

Теорема Гельмгольца

Формулировка с лекции:

Непрерывно дифференциемое векторное поле соленоидально в объемно-односвязной $G \Leftrightarrow$ дивергенция в каждой точке равна нулю.

Оригинальная формулировка(хз зачем):

Любое векторное поле F , однозначное, непрерывное и ограниченное во всем пространстве, может быть разложено на сумму потенциального и соленоидального векторных полей

б/д

Часть II

Элементы функционального анализа

6 Метрические пространства

Определение 2.1:

Метрическое пространство:

Пусть задано множество X.Тогда отображение $\rho : X \times X \to R_+$ - метрика, если

$\forall x, y, z \in X$

1) $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Пример:

$$P(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 1, & \text{если } x \neq y; \end{cases}$$

Определение 2.2:

Открытый шар с радиусом R**:** $B_R(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) < R\}, x_0 \in X$

Определение 2.3:

Замкнутый шар с радиусом R**:** $B_{\bar{R}}(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) \leq R\}, x_0 \in X$

Определение 2.4:

Сфера с радиусом R: $S_R(x_0) = \{x \in X : \rho(x, x_0) = R\}, x_0 \in X$

Определение 2.5:

Предел последовательности точек из M:

Пусть задано метрическое пространство (X, ρ) и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность элементов из M

Тогда число a - **предел данной последовательности**, если $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$

Упражнение: x_0 - предельная точка для $M \Leftrightarrow x_0$ - предел последовательности точек из M.

Упражнение:

Привести пример метрического пространства и таких двух шаров $B_{R_1}(x_0), B_{R_2}(y_0)$ в нём, что $R_1 > R_2$, и тем не менее $B_{R_1}(x_0) \subset B_{R_2}(y_0)$

Пример:

$$P(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 1, & \text{если } x \neq y; \end{cases}$$

$R_1 = 3, R_2 = 2$, $x_0 = y_0$

7 Точки и множества из метрического пространства

Определение 2.6:

Точка $x_0 \in X$ - **точка прикосновения для множества** $M \subset X$, если $\forall B_R(x_0)$ - содержит элементы множества M

Определение 2.7:

Точка $x_0 \in X$ - **предельная точка для множества** $M \subset X$, если $\forall B_R(x_0)$ - содержит элементы множества M, не равные x_0

Определение 2.8:

Точка $x_0 \in X$ - **внутренняя точка для множества** $M \subset X$, если $\exists B_R(x_0) \subset M$

Определение 2.9:

Точка $x_0 \in X$ - **изолированная точка для множества** $M \subset X$, если $\exists B_R(x_0) \subset M$ такой, что он не содержит точек из M, не равных x_0

Определение 2.10:

Точка $x_0 \in X$ - **граничная точка для множества** $M \subset X$, если $\forall B_R(x_0) \subset M$ верно, что он содержит точки из M и не из M

Определение 2.11:

Замыкание множества - это присоединение ко множеству всех его предельных точек.

Определение 2.12:

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - **фундоментальная последовательность в метрическом пространстве** X, если
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon)$: если $\forall n > N, \forall m \geq 0$, то $\rho(x_{n+m}, x_n) < \varepsilon$

Определение 2.13:

Множество $M \subset X$ **замкнуто**, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение 2.14:

Множество $M \subset X$ **совершенно**, если оно замкнуто и содержит все свои предельные точки.

Определение 2.15:

Множество $M \subset X$ **открытое**, если все его точки внутренние.

Определение 2.16:

Метрическое пространство X - **полное**, если для любой фундоментальной последовательности его элементов, в X найдется x_0: $\lim_{n\to\infty} = x_0$

Определение 2.17:

Множество $M \subset X$ **всюду плотное в** X, если его замыкание совпадает со всем X.

Определение 2.18:

Множество $M \subset X$ **нигде не плотное в** X, если любой открытый шар пространства X содержит открытый шар, свободный от точек множества M .

Определение 2.19:

Метрическое пространство X называется **сепарабельным,** если оно имеет счетное всюду плотное подмножество

Определение 2.20:

Множество М метрического пространства Х называется **связным**, если его нельзя представить виде объединения двух непустых отделимых множеств M_1 и M_2 .

Определение 2.21:

Расстоянием между непустыми подмножествами M_1, M_2 метрического пространства X назовем:

$inf \rho(x, y)$, где $x \in M_1, y \in M_2$

Определение 2.22:

Множество $M \subset X$ - **область**, если оно открыто и связно.

8 Линейные(векторные) пространства

Будем рассматривать линейные пространства над R

Определение 2.23:

M - линейное(векторное) пространство, если выполняются следующие аксиомы:

$\forall x, y, z \in M$ и любых скаляров $\lambda, \mu \in R_+$

1)$x + y \in M$

2)$\lambda x \in M$

3)$x + y = y + x$

4)$x + (y + z) = (x + y) + z$

5)$\exists \Theta \in M : x + \Theta = \Theta + x = x$, где Θ - нуль пространства

6)$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

7)$\exists 1 \in M : 1 * x = x * 1 = x$

8)$0x = \Theta$

Замечание: Нуль пространства не всегда равен 0.

Пример: Пространство матриц $m \times n$ имеет Θ - нулевая матрица, которая не равна 0.

Определение 2.24:

Отрезок в линейном пространстве: $[x, y] = \{z : x = x + t(y - x)\}$, $t \in [0, 1]$

Определение 2.25:

Линейное пространство **конечномерное**, если существует конечное множество его элементов, которое является ЛН и любой другой элемент из этого пространства выражается через их линейную комбинацию.

Определение 2.26:

Линейное пространство бесконечномерное, если для любого $n \in N$ в нем найдется система из n независимых элементов.

Определение 2.27:

M - линейное многообразие, если

$$\begin{cases} x, y \in M \Rightarrow \exists (x+y) \in M; \\ x \in M, \lambda \in R \Rightarrow \exists \lambda x \in M. \end{cases}$$

Определение 2.28

Множество $M \subset X$ - **выпуклое**, если:
$\forall x_1, x_2 \in M$ и $\forall \lambda_1, \lambda_2 \geq 0 : \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ выполняется:
$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in M$

Определение 2.29

Выпуклая комбинация элементов $x_1, ..., x_n \in X$ называется $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n$, где $\lambda_i \geq 0$ и $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$

Упражнение: Множество M - выпуклое $\Leftrightarrow$ любая его выпуклая комбинация принадлежит M.

Доказательство:

($\Leftarrow$) Частный случай $n = 2$ дает нам требуемое.

($\Rightarrow$)(feat. Bakel) Пусть M выпуклое множество, тогда

$\forall x_i, x_{i+1} \in M$ и $\forall \lambda_i, \lambda_{i+1} \geq 0 : \lambda_i + \lambda_{i+1} = 1$ выполняется:

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in M \\ \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \in M \\ ... \\ \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n \in M \end{cases}$$

Просуммируем и получим линейную комбинацию, принадлежащую M

$\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2 x_2 + 2\lambda_3 x_3 + ... + \lambda_n x_n$

Рассмотрим коэффициенты:

$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 ... + \lambda_n = n - 1$

Тогда:

$\frac{1}{n-1}(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 ... + \lambda_n) = 1 \in M$

Пусть $\lambda_i' = \frac{1}{n-1}\lambda_i$, тогда

$\lambda_1' x_1 + \lambda_2' x_2 + \lambda_3' x_3 + ... + \lambda_n' x_n \in M$

В силу произвольности выбора λ_i мы рассмотрели все комбинации.

9 Нормированные пространства

Линейное пространство X - нормированное, если в нем определено отображение $\phi(x) = ||x|| : x \to R_+$ со свойствами:

1) $\forall x \in X : ||x|| \geq 0$, $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$
2) $\forall \lambda \in R : ||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
3) $\forall x, y \in X : ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Каноническая метрика: $\rho(x, y) = ||x - y||$

Всякое нормированное пространство является метрическим(наооборот не верно). Значит и все аксиомы ЛП справедливы.

Определение 2.30

Последовательность x_n из метрического пространства **сходится к** x_0, если:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} ||x_n - x_0|| = 0$$

Свойство непрерывности нормы

Пусть последовательность x_n элементов нормированного пространства X сходится к элементу x_0 того же пространства. Тогда выполняется

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = ||x_0||$$

Доказательство Оценочки:
$||x_n|| = ||x_n + x_0 - x_0|| \leq ||x_n - x_0|| + ||x_0||$
$||x_0|| = ||x_0 + x_n - x_n|| \leq ||x_0 - x_n|| + ||x_n||$
Отсюда, в силу сходимости x_nк x_0:
$||x_n|| - ||x_0|| \leq ||x_n - x_0|| \to 0$
$||x_n|| - ||x_0|| \geq -||x_n - x_0|| \to 0$
По теореме о двух милиционерах получаем:

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = ||x_0||$$

+ Попали в определение непрерывности в точке x_0

Определение 2.31

Пусть X - линейное пространство и есть две нормы $||x||_1, ||x||_2$

Тогда $||x||_1 \sim ||x||_2$ - эквивалентны, если существуют $c_1, c_2 > 0$ и $\forall x \in X$:

$$c_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2||x||_1$$

Упражнение $\sim$ - отношение эквивалентности

Доказательство:

1) Рефлексивность:

$c_1||x|| \leq ||x|| \leq c_2||x||$ - верно, при $c_1 = c_2 = 1$

2) Симметричность:

$\exists c_1, c_2$: $c_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2||x||_1$

$$\begin{cases} c_1||x||_1 \leq ||x||_2 \\ c_2||x||_1 \geq ||x||_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ||x||_1 \leq \frac{1}{c_1}||x||_2 \\ ||x||_1 \geq \frac{1}{c_2}||x||_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{c_2}||x||_2 \leq ||x||_1 \leq \frac{1}{c_1}||x||_2$$

Тк $\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2} > 0$, то доказано

3) Транзитивность: Пусть есть три нормы $||x||_1, ||x||_2, ||x||_3$:

Если $||x||_2 = 0 \Rightarrow ||x||_3 = 0$, короче все норм.

Если $||x||_2 \neq 0$

$$\begin{cases} c_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2||x||_1 \\ d_1||x||_2 \leq ||x||_3 \leq d_2||x||_2 \end{cases} \Rightarrow d_1c_2||x||_1 \leq ||x||_3 \leq c_2d_2||x||_1$$

Доказано

Теорема об эквивалентности норм в КЛП

В конечномерном линейном пространстве X все нормы эквивалентны

Доказательство:

Тк ЛП X - конечномерное, то в нем есть базис $e_1, e_2, ..., e_n$

Евклидова норма: $||x||_e = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2}$

Докажем, что $\forall ||x|| : ||x|| \sim ||x||_e$ и в силу транзитивности будет доказано.

Верхняя оценка Раскладывая по базису, получим:

$||x|| = ||\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n|| \leq |\alpha_1| \ ||e_1|| + ... + |\alpha_n| \ ||e_n|| \leq$
$\leq max(||e_k||)(|\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_n|)$

Применяя неравенство Коши-Буняковского($a_i = |a_i|, b_i = 1$):

$max(||e_k||)(|\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_n|) \leq \sqrt{n} \ max(||e_k||)\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2} \leq$
$\leq n \ max(||e_k||)\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2} = N_1\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2} = N_1||x||_e$

Нижняя оценка

Рассмотрим функцию $f(x) : f(x) = ||x||$ - непрерывная, по теореме о непрерывности нормы.

Обозначим $S = \{x \in X : ||x||_e = 1\}$. Множество S можно эквивалентным образом рассматривать как сферу $S_1(0)$ единичного радиуса с центром в точке $(0, ..., 0)$ евклидова пространства R^n

Тк $S_1(0)$ - ограниченное и замкнутое ,по теореме Вейерштрасса функция $f(x)$ достигает в нем своего минимального и максимального значения, а значит:

$$\exists x_0 \in S : \forall x \in S : f(x) \geq f(x_0) = ||x_0|| > 0$$

, тк все значения лежат на сфере ненулевого радиуса.

Пусть $x \in X$,

$$f(x) = ||x|| = ||\frac{x}{||x||_e}|| \cdot ||x||_e$$

$\frac{x}{||x||_e} \in S$, тк мы нормировали вектор x и его модуль стал равен 1 (те Евклидова норма равна 1).

Значит можно оценить:

$$||\frac{x}{||x||_e}| \geq ||x_0|| = N_0, x_0 \in S$$

Отсюда:

$||x|| \geq N_0||x||_e$

Оценка снизу доказана

Ну и получили определение эквивалентности норм $N_0||x||_e \leq ||x|| \leq N_1||x||_e$, в силу транзитивности и произвольности $||x||$ все нормы будут эквивалентны.

10 Фактор-пространство

Определение 2.31

Подпространство линейного пространства - линейное пространство относительно тех же операций + замкнутое множество относительно операций изначального пространства.

Определение 2.32

Пусть X есть линейное векторное пространство, L — его подпространство, $x \in X$. **Классом смежности** $\pi(x)$ **называется множество**

$$\pi(x) = \{y \in X : y = x + z, z \in L\}.$$

Фактор-пространство $X/_L$ - совокупность всех $\pi(x), x \in X$

Теорема о классах смежности

Любые два фактор-класса или совпадают, или не пересекаются.

Доказательство:

Пусть $\pi(x_1) \cap \pi(x_2) \neq \varnothing$. Тогда $\exists y_0 \in \pi(x_1) \cap \pi(x_2)$ и выполняется:

$y_0 = x_1 + z_1 = x_2 + z_2$, где $z_1, z_2 \in L$

Отсюда:

$x_1 - x_2 = z_2 - z_1 \in L \Rightarrow x_1 - x_2 \in L$

1) Пусть y есть произвольный элемент из $\pi(x_1)$. Имеет место цепочка равенств

$$y = x_1 + z = x_2 + ((x_1 - x_2) + z)$$

Поскольку $z, x_1 - x_2 \in L$, то получаем, что y есть элемент $\pi(x_2)$. Таким образом, всякий элемент y из класса $\pi(x_1)$ принадлежит классу $\pi(x_2)$.

2) Можно доказать и обратно:

$y_0 = x_1 + z_1 = x_2 + z_2 \Rightarrow x_2 - x_1 = z_1 - z_2 \in L \Rightarrow x_2 - x_1 \in L$

Пусть y есть произвольный элемент из $\pi(x_2)$. Имеет место цепочка равенств

$$y = x_2 + z = x_1 + ((x_2 - x_1) + z)$$

Поскольку $z, x_2 - x_1 \in L$, то получаем, что y есть элемент $\pi(x_1)$. Таким образом, всякий элемент y из класса $\pi(x_2)$ принадлежит классу $\pi(x_1)$.
Доказано

11 Изометрия, изоморфизм пространств

Определение 2.33

Метрические пространства $(X, \rho_1), (Y, \rho_2)$ называются **изометричными**, если существует биекция $J(x) : X \to Y : \forall x_1, x_2 \in X$ выполнятся:
$\rho_1(x_1, x_2) = \rho_2(J(x_1), J(x_2))$

Определение 2.34

Линейные пространства X и Y называются **изоморфными**, если существует биекция $J(x) : X \to Y$, что $\forall x_1, x_2 \in X$ и $\forall \lambda, \mu \in R$ выполняется:

$$J(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda J(x_1) + \mu J(x_2)$$

Определение 2.35

Нормированное пространство X называется **вложенным** в нормированное пространство Y , если существует отображение $J(x)$, определенное на всем X и такое, что

1) $J(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda J(x_1) + \mu J(x_2), x_1, x_2 \in X, \lambda, \mu \in R$
2) $\exists M \geq 0 : ||J(x)||_Y \geq M||x||_X \ \forall x \in X$

Определение 2.36

Последовательность элементов из метрического нормированного пространства (X, ρ) фундаментальная, если
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) : ||x_n - x_m|| < \varepsilon \ \forall n, m > N; x_n, x_m \in X$

Определение 2.37

Полное пространство - пространство, в котором любая фундаментальная последовательности сходится к элементу этого же пространства.

Определение 2.38

Нормированное пространство, полное по метрике $||x - y||$, называется **банаховым** пространством.

12 Нормируемость фактор-пространства

Теорема о замкнутых классах смежности

Если X есть нормированное пространство, то любой класс смежности есть замкнутое множество.

Доказательство: Пусть $x \in X, \pi(x)$ - его класс смежности. Пусть $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность элементов из $\pi(x)$, сходящаяся к y_0, тогда

$$y_n = x + z_n, z_n \in L$$

Тк $y_0 \in X, x \in X$, то справедливо

$$y_0 = x + z_0$$

Заметим, что если сходится $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ к y_0, то сходится $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ к элементу z_0.

Поскольку подпространство L есть замкнутое множество, то z_0 есть элемент L, а значит по определению класса смежности $y_0 \in \pi(x)$. Получается любой класс смежности содержит все свои предельные точки, по определению замкнутого множества **Доказано**

Теорема о нормируемости фактор-пространства

Если X есть нормированное пространство, то и фактор-пространство $X/_L$ будет нормируемым.

Доказательство:

Путь

$$||\pi(x)||_{X/_L} = inf_{y \in \pi(x)} ||y||$$

Тупа докажем аксиомы нормированного пространства.

1)

Теорема о подпространстве банахового пространства

Пусть X есть банахово пространство, L — его подпространство,
$X/_L$ фактор-пространство с нормой:

$$||\pi(x)||_{X/_L} = inf_{y\in\pi(x)}||y||$$

Тогда $X/_L$ есть банахово пространство.
Без доказательства

13 Гильбертовы пространства

Определение 2.39

Линейное пространство называется **унитарным**, если $X \times X \to Q$ и в нем определено скалярное произведение со свойствами:

$\forall x, y, z \in X$, $\forall \lambda \in Q$

1) $(x, x) \geq 0, (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$

2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

Если $\lambda \in R$, то такое пространство называется **евклидовым**

Замечание

В евклидовых и унитарных пространствах верно **неравенство Коши-Буняковского**:

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$$

Доказательство:

1) **Если (y,y) = 0** $\Leftrightarrow y = \Theta \Rightarrow |(x, \Theta)| = 0$

Но по аксиоме 1: $(x, x) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{(x, x)} \geq 0$, значит неравенство верно.

2) По аксиоме 1: $(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0$

Если $(y, y) \neq 0$. Положим

$$\lambda = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$$

Преобразуем

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x + \lambda y) + (\lambda y, x + \lambda y) = \overline{(x + \lambda y, x)} + \overline{(x + \lambda y, \lambda y)} =$$

$$= \overline{(x, x)} + \overline{(\lambda y, x)} + \overline{(x, \lambda y)} + \overline{(\lambda y, \lambda y)} = (x, x) + \overline{\lambda (x, y)} + \lambda (y, x) + \lambda^2 (y, y)$$

$$= (x,x) - (\overline{\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}}) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} + \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} > 0$$

Отсюда: $(x,x)(y,y) \geq (y,x)^2 \Rightarrow |(y,x)| \leq \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)}$

Пусть $(y,x) = a + bi \Rightarrow |(y,x)| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+(-b)^2} = |(x,y)| \Rightarrow$
$\Rightarrow |(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)}$ **Доказано**

Определение 2.40

Линейное пространство называется **гильбертовым**, если:

1) Оно унитарное или евклидово пространство

2) Полное по норме, порожденной скалярным произведением: $||x|| = \sqrt{(x,x)}$

3) Оно бесконечномерное!!!(Так сказала Шваб)

Обозначать гильбертовы пространства будем буквой H И будем дальше рассматривать гильбертовы пространства, исходящие из евклидова пространства

Свойство непрерывности скалярного произведения в H

Пусть H есть гильбертово пространство,$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть две последовательности его элементов такие, что $x_n \to x_0, y_n \to y_0$ в H при $n \to \infty$. Тогда имеет место сходимость

$$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0) \text{ при } n \to \infty$$

Доказательство: Имеет место цепочка:

$$|(x_n,y_n) - (x_0,y_0)| = |(x_n,y_n) - (x_0,y_n) + (x_0,y_n) - (x_0,y_0)| =$$

$$= |(x_n - x_0, y_n) + (x_0, y_n - y_0)| \leq |(x_n - x_0, y_n)| + |(x_0, y_n - y_0)| \leq$$

$$\overset{\text{Коши-Бун.}}{\leq} ||x_n - x_0|| \cdot ||y_n|| + ||x_0|| \cdot ||y_n - y_0||$$

1) Из сходимостей $x_n \to x_0, y_n \to y_0$ и свойства непрерывности нормы следует, что $||x_n - x_0|| \to 0, ||y_n - y_0|| \to 0$ при $n \to \infty$

2) Тк $||y_n - y_0|| \to 0 \Rightarrow \{||y_n||\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена.

Отсюда вытекает $|(x_n, y_n) - (x_0, y_0)| \to 0$ **Доказано**

Замечание:

Когда пишется, что $x_n \to x_0, n \to \infty$ - имеется ввиду сходимость x_n к x_0 по норме $||x|| = \sqrt{(x,x)}$

Упражнение

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

Доказательство: Перепишем равенство:

$$(x+y, x+y) + (x-y, x-y) = 2((x,x) + (y,y))$$

$$(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)+(x,x)+(x,-y)+(-y,x)+(-y,-y) = 2((x,x)+(y,y))$$

$$(x,x) + (y,y) + (x,x) + (y,y) = 2((x,x) + (y,y))$$

Доказано

Ортогональное проектирование

Определение 2.41

Пусть X есть нормированное пространство, L — его подпространство такое, что $L \neq X$, x - не принадлежащий L элемент X, d есть расстояние между x и L. Если в L найдется элемент u^* такой, что $d = ||x - u^*||$, то u^* называется **элементом наилучшего приближения** к элементам L. Элемент наилучшего приближения может существовать, может не существовать, может быть единственным, может быть неединственным

Теорема о наилучшем приближении

Пусть H есть гильбертово пространство, L — его подпространство, x есть фиксированный элемент из H, не принадлежащий L. Тогда в L имеется ровно один элемент z, являющийся элементом наилучшего приближения для x.

Доказательство

Пусть $d = \rho(x, L)$

Определение 2.42

Путь задано ЛП V и L - его подпространство, тогда множество векторов $v \in V : (v, l) = 0, l \in L$ называется **ортогональным дополнением** V.

Обозначается: $L^\perp$

Теорема об ортогональном проектировании

Пусть H - гильбертово пространство, L - его подпространство, тогда

$\forall x \in H\ \exists! z \in L$ и $\exists! w \in L^\perp$, такие что $x = z + w$

Доказательство:

1) Если $x \in L$, то $x = x + \Theta_L$

2) Иначе

Существование:

По теореме об элементе наилучшего приближения, существует $z \in L$ - элемент наилучшего приближения

Пусть $x \in H, h \in L, t \in R$. Покажем, что $z - th \in L^{\perp}$

Тк z - элемент наилучшего приближения, то справедливо:

$$||x - z + th||^2 \geq ||x - z||^2$$

$$(x - z + th, x - z + th) \geq (x - z, x - z)$$

$$2(x, th) - 2(z, th) + (th, th) \geq 0$$

$$2t(x - z, h) + t^2(h, h) \geq 0$$

Пусть $t = -\frac{(x-z,h)}{||h||^2}$, тогда

$$-2\frac{(x - z, h)^2}{||h||^2} + \frac{(x - z, h)^2}{||h||^2} \geq 0 \Rightarrow (x - z, h) = 0$$

Отсюда получаем, что $x - z \in L^{\perp}$

А значит любой $x \in H$ можно представить, как

$$x = z + (x - z) = z + w, \text{где} z \in L, w \in L^{\perp}$$

Единственность:

Пусть

$$x = z + w = z^* + w^* \Rightarrow z - z^* = w^* - w$$

Умножим скалярно на $(z - z^*)$, тк $w^* - w \in L^{\perp}$

$$||z - z^*|| = 0 \Rightarrow z = z^* \Rightarrow w = w^*$$

14 Специальные пространства

1) Пространство сходящихся последовательностей $l_p, p \geq 1$

$$l_p = \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty\}$$

l_p является нормированным, банаховым и сепарабельным.
l_2 является гильбертовым.
Норма определяется как $||x||_{l_p} = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}$
2) Пространство l_∞

$$l_\infty = \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : \underset{k\geq 1}{sup}|x_k| < +\infty\}$$

l_∞ является нормированным, банаховым, но не сепарабельным.
Норма определяется как $||x||_{l_\infty} = \underset{k\geq 1}{sup}|x_k|$
3) Пространство $L_p(Q)$ - пространство последовательностей:
Q - ограниченно, измеримое по Лебегу.

$$L_p(Q) = \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : \int_Q |f(x)|^p dx < +\infty\}$$

$L_p(Q)$ является нормированным, банаховым и сепарабельным.
L_2 является гильбертовым.
Норма определятся $||f||_{L_p(Q)} = (\int_Q |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$
4) Пространство $L_\infty(Q)$

$$L_\infty = \{f(x) : \underset{Q}{vraimax} f(x) < +\infty\}$$

$L_\infty(Q)$ является нормированным и банаховым.
Норма определяется как $||f(x)||_{L_\infty(Q)} = \underset{Q}{vraimax}|f(x)|$
5) Пространство $M(Q)$ - пространство ограниченных на $Q \subset R^n$ функций

$M(Q)$ - нормированное, банахово пространство.

Норма определяется как $||f||_{M(Q)} = \underset{x\in Q}{sup}|f(x)|$

6) Пространство $C(Q)$ - пространство непрерывных на Q функций

Пусть $Q \subset R^n$ - замкнутое ограниченное множество.

$$C(Q) = \{f : f \text{ определена и непрерывна } Q\}$$

$C(Q)$ - нормированное пространство.

Норма определяется как $||f||_{C(Q)} = \underset{x\in Q}{max}|f(x)|$

7) Пространство $C^k(Q), k \in N$

Пусть $Q \subset R^n$ - замкнутое ограниченное множество.

$C^k(Q)$ множество функций, которые имеют непрерывные частные производные до порядка k включительно

$C^k(Q)$ нормируемое пространство

Норма определяется как

$$||f||_{C^k(Q)} = \underset{Q}{max}|f| + ... + \underset{Q}{max}|D^k f|$$

8) $C^\infty(Q)$ - множество функций у которых все частные производные любого порядка непрерывны.

$Q \subset R^n$ - замкнутое ограниченное множество.

$C^\infty(Q)$ не нормированное пространство.

Часть III

Приложения функционального анализа

15 Разрешимость интегральных уравнений

Рассмотрим задачу нахождения $\varphi(t)$ в данном интегральном уравнении:

$$\varphi(t) - \int_a^b N(t,s)\varphi(s)ds = f(t), t, s \in [a,b]$$

, где

$$\varphi(t), f(t) \in C([a,b]), N(t,s) \in C([a,b] \times [a,b])$$

Решение:

Определим оператор $\mathcal{A} : C([a,b]) \to C([a,b])$

$$(\mathcal{A}\varphi)(t) = \int_a^b N(t,s)\varphi(s)ds$$

Тогда

$$(I - \mathcal{A}\varphi)(t) = \varphi(t) - \int_a^b N(t,s)\varphi(s)ds$$

и наше интегральное уравнение будет иметь вид:

$$((I - \mathcal{A})\varphi)(t) = f(t)$$

и нам будет достаточно доказать существование $((I - \mathcal{A})\varphi)^{-1}(t)$

$$((I - \mathcal{A})\varphi)(t) = f(t) \Rightarrow \varphi(t) = ((I - \mathcal{A})\varphi)^{-1}(t)f(t)$$

Покажем ограниченность:

$$||(\mathcal{A}\varphi)(t)||_{C([a,b])} = \underset{\varphi(t)\in C([a,b])}{max}|(\mathcal{A}\varphi)(t)| = \underset{t,s\in[a,b]}{max}|\int_a^b N(t,s)\varphi(s)ds| \leq$$

$$\leq \underset{t,s\in[a,b]}{max}\int_a^b |N(t,s)\varphi(s)|ds \leq \underset{s\in[a,b]}{max}|\varphi(s)|\underset{t\in[a,b]}{max}\int_a^b |N(t,s)|ds =$$

$$= N_0||\varphi(s)||_{C([a,b])}$$

Условие банаховости $C([a,b])$ соблюдается.

Линейность $\mathcal{A}$ следует из линейности интеграла Римана.

Чтобы выполнялась теорема об обратимости $(I \pm \mathcal{A})$, нам нужно наложить условие $N_0 < 1$, тк $||\mathcal{A}|| \leq N_0$.

Отсюда вытекает условие разрешимости интегрального уравнения:

$$\underset{t\in[a,b]}{max}\int_a^b |N(t,s)|ds < 1$$

16 Задача Коши. Теорема Пеано

Пусть Q из R^2 и $f(x,y)$ задана на Q.

Задача Коши состоит в поиске функции $y(x)$:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

Пусть $G = \{(x,y) \in Q : |x-x_0| \leq a; |y-y_0| \leq b\}$ - замкнута и ограничена

По т. Вейерштрасса существует $\underset{G}{max}|f(x,y)| = M$

Положим $h_0 = min(a, \frac{b}{M})$

Отрезком Пеано назовем отрезок $[x_0 - h_0, x_0 + h_0]$

Теорема Пеано

Пусть $f(x,y) \in C(Q)$, тогда задача Коши разрешима на отрезке Пеано.

Доказательство:

Определим оператор $\mathcal{A} : C([x_0 - h_0, x_0 + h_0]) \to C([x_0 - h_0, x_0 + h_0])$

$$(\mathcal{A}y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

Определим шар $\mathcal{B}$ в пространстве $C([x_0 - h_0, x_0 + h_0])$

$$\mathcal{B} = \{y(x) : y(x) - \text{определена на отрезке Пеано и } ||y(x) - y_0|| \leq b\}$$

Покажем, что оператор $\mathcal{A}$ переводит шар $\mathcal{B}$ в себя

$$||\mathcal{A}y(x) - y_0|| = \underset{x\in[x_0-h_0,x_0+h_0]}{max} |\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt| \leq$$

$$\leq \underset{x\in[x_0-h_0,x_0+h_0]}{max} \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|dt = \int_{x_0}^{x_0+h_0} |f(t, y(t))|dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h_0} Mdt = Mh_0 \leq b$$

Отсюда получает, что $(\mathcal{A}y)(x) \in \mathcal{B}$

Покажем , что $\{(\mathcal{A}y)(x)\}$ - относительно компактно.

Равномерная ограниченность:

$$|(\mathcal{A}y)(x)| \leq |y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt| \leq |y_0| + Mh_0 - \text{фиксированное число}$$

Равностепенная непрерывность:

$$|(\mathcal{A}y)(x_1) - (\mathcal{A}y)(x_2)| \leq |\int_{x_1}^{x_2} f(t, y(t))dt| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t, y(t))|dt \leq M|x_2 - x_1|$$

Положим за $\varepsilon = M|x_2 - x_1|, \delta = \frac{\varepsilon}{M}$

По теореме Арцело-Аскольди $\{(\mathcal{A}y)(x)\}$ - относительно компактно, значит можно применить теорему Шаудера и будет существовать неподвижная точка $\varphi(x) = (\mathcal{A}\varphi)(x)$

$$(\mathcal{A}y)(x) = y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

Правая часть данного равенства есть функция, имеющая производную (это следует из свойств определенного интеграла с переменным верхним пределом). Следовательно, и левая часть будет иметь производную. Более того, производные правой и левой частей будут совпадать. Но тогда функция $\varphi(x)$ будет решением уравнения $y'(x) = f(x, y(x))$. Другими словами, функция $y(x)$ представляет собой искомое решение задачи Коши

Часть IV

Полезности

Связная область

Определение. Пусть задана область E, т.е. множество, состоящее из внутренних точек. Множество E называется связным, если любые две точки этого множества можно соединить ломаной, целиком лежащей в этой области.

Формула конечных приращений Лагранжа

Если функция F непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b), то найдётся такая точка $c \in (a, b)$, что

$F(a) - F(b) = F'(c)(b - a)$

Можно записать так:

$F(x + \Delta x) - F(x) = F'(x + \theta \Delta x)\Delta x, \theta \in (0, 1)$

Теорема о смешанных производных

Теорема. Предположим, что 1) $f(x, y)$, определена в открытой области Ω, 2) в этой области f имеет частные производные f_x, f_y, а также вторые смешанные производные f_{xy}, f_{yx}, 3) эти последние производные непрерывны в некоторой точке $(x_0, y_0) \in \Omega$. Тогда в этой точке

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Вывод $cos\gamma$ в т. Гаусса-Остроградского

Учитывая, что

$$\begin{cases} f = u \\ g = v \\ h = \psi(u,v) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (f_u = 1) & (g_u = 0) & h_u \\ (f_v = 0) & (g_v = 1) & h_v \end{vmatrix} = h_u\vec{i} - h_v\vec{j} + \vec{k}$$

Отсюда:

$$|\vec{n}| = \sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}$$

А значит:

$$\vec{V} = (...,...,\frac{1}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}}) = (...,...,\frac{1}{\sqrt{1+\psi_x^2+\psi_y^2}})$$

те $cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\psi_x^2+\psi_y^2}} > 0$, γ - острый, а значит $\vec{V}$ - внешняя нормаль к S_2

Аналогично для $\varphi(x,y)$:

$$cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}}$$

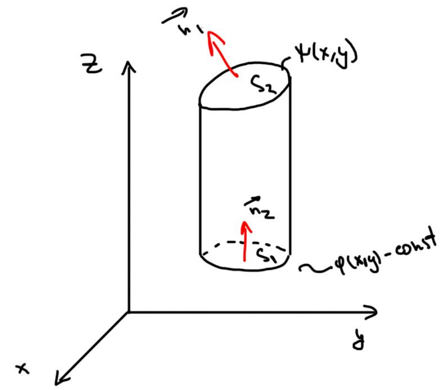
Замечание в т. Гаусса-Остроградского:

В оригинальной методичке написано вот так:

$$\int\limits_{S_2^+} R\,dx\,dy = \int\limits_{S_2} R\cos\gamma\,ds,$$

$$\int\limits_{S_1^+} R\,dx\,dy = -\int\limits_{S_1} R\cos\gamma\,ds.$$

Те почему-то считается, что $cos\gamma$ угол между нормалью S_2 и осью Oz - с точностью до знака совпадает с углом между нормалью S_1 и осью Oz. Но это же абсурд. Можно привести контрпример, когда это не выполняется:



$\vec{n_1}(0,0,1)$

$\vec{n_2}(a,b,c)$, где $a, b \neq 0$

Понятно, что нормаль к S_2 никогда не будет нормалью к S_1, ну и углы не совпадут соответственно.

Но если мы говорим, что S_1 и S_2 - части кусочно-гладкой поверхности, то в силу того, что мы нормаль ищем в конкретной точке нашей поверхности, мы можем писать общий угол γ.

Предел по Гейне

Определение предела по Гейне. Говорят, что f имеет пределом число A при стремлении переменных x_1, x_2, $\ldots$, x_n, соответственно, к a_1, a_2, $\ldots$, a_n, если для любой последовательности $\{M_k\}$ точек отличных от M_0, сходящейся к M_0, числовая последовательность $\{f(M_k)\}$ сходится к A.

Теорема Вейерштрасса

Теорема Вейерштрасса 1. Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области Ω, то функция ограничена, т.е. имеет место оценка

$$m \leq f(x, y) \leq M.$$