Содержание

Часть I

Интегрирование на многообразиях

1 Кривые в R^n

Мы будем рассматривать наши кривые в пространстве R^n. Иногда в формулировке теоремы или утверждения нет условия на непрерывность кривой. Это не означает, что его нет, возможно оно и так подразумевается и без него утверждение становится интуитивно некорректным.

Определение 1.1:

Непрерывная кривая — множество точек $\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t), t \in [a, b]$
$A = \varphi_1(a), ..., \varphi_n(a)$
$B = \varphi_1(b), ..., \varphi_n(b)$
Если A = B, то кривая замкнута.

Определение 1.2:

$\Phi(t) = (\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$ — параметризация кривой
Важный факт: существует бесконечное кол-во способов параметризовать кривую

Определение 1.3:

Если для кривой выполнятеся: $\exists \varphi_1'(t), ..., \varphi_n'(t)$ такие, что
$\varphi_1'^2(t) + ... + \varphi_n'^2(t) > 0, t \in [a, b]$, то такую кривую называем **гладкой**
Если $\varphi_1'^2(t) + ... + \varphi_n'^2(t) = 0$, при $t = m$, то такая точка **особенная**

Определение 1.4:

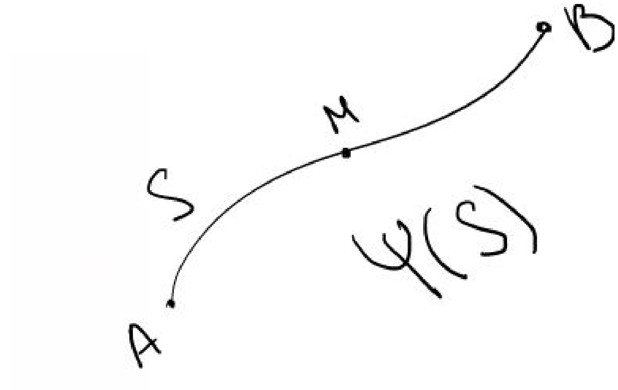
Кусочно-гладкая кривая — **непрервыная** гладкая кривая, состоящая из **конечного** числа гладких кривых.
Важный факт: не каждая кривая является спрямляемой

Определение 1.5:

Спрямляемая кривая — кривая, имеющая конечную длину.
Важный факт: гладкая кривая всегда спрямляема

Определение 1.6:

Натуральная параметризация — параметризация, параметром которой выступает длина **дуги** от начала до точки на кривой.
Обозначаем ее как $\Psi(s)$, где s — длина дуги



Теорема 1.1:

Для любой гладкой кривой существует натуральная параметризация.

Без доказательства.

Любопытное утверждение:

Если кривая гладкая и без особых точек с гладкой параметризацией $\Phi(t)$ и натуральной параметризацией $\Psi(s)$ справедливо:

$$\frac{ds}{dt} = |\Phi'(t)|$$

Некоторые факты:

Задание параметризации $(\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t))$ определяет движение на кривой Γот ее начальной точки к конечной, или, другими словами, определяет ориентацию кривой, называемую положительной. Если при переходе от исходной параметризации начальная и конечная точки меняются местами (в случае замкнутой кривой — меняется направление движения), то происходит смена ориентации от положительной к отрицательной. Кривую Γ с положительной по отношению к исходной параметризации ориентацией обозначают Γ^+, с отрицательной — Γ^-.

2 Криволинейные интегралы I рода

Определение 1.7:

Пусть задана гладкая, спрямляемая кривая с параметризацией $\Phi(t)$

$\Gamma : \Phi(t), t \in [a, b]$

Также есть натуральная параметризация:

$\Gamma : \Psi(s)$, $s \in [0, S_\Gamma]$, в силу спрямляемости

И пусть задана функция $F(x), x \in \Gamma$

Тогда **криволинейным интегралом I рода от F по** Γ назовем интеграл Римана:

$$I = \int\limits_0^{S_\Gamma} F(\Psi(s))\, ds = \int\limits_0^{S_\Gamma} F(s)\, ds$$

И будем обозначать его, как

$$I = \int\limits_\Gamma F_0(x)\, ds$$

Свойства криволинейных интегралов I рода

Свойство 1: $F(s) = 1 \Rightarrow I = S_\Gamma$

Док-во:

$$F(s) = 1 \Rightarrow I = \int\limits_0^{S_\Gamma} 1\, ds \Rightarrow I = S_\Gamma - 0 = S_\Gamma$$

читд

Свойство 2: Криволинейный интеграл I рода не зависит от ориентации кривой, те

$$\int\limits_{\Gamma^+} F_0(x)\, ds = \int\limits_{\Gamma^-} F_0(x)\, ds$$

Док-во:

Пусть дана кривая с натуральной параметризацией $\Psi(s), s \in [0, S_\Gamma]$:

$\Gamma^+ : A = \Psi(0), B = \Psi(S_\Gamma)$

Возьмем точку $M \in [A, B]$ на кривой, тогда $M = \Psi(s)$

Определим параметр $\sigma = S_\Gamma - s$, те σ — расстояние от B до M.Тогда

$$\int\limits_{\Gamma^+} F_0(x)\, ds = \int\limits_0^{S_\Gamma} F(\Psi(s))\, ds \overset{\sigma = S_\Gamma - s}{=} - \int\limits_{S_\Gamma}^{0} F(\Psi(\sigma - S_\Gamma))\, d\sigma =$$

$$= \int\limits_0^{S_\Gamma} F(\Psi(\sigma - S_\Gamma))\, d\sigma = \int\limits_{\Gamma^-} F_0(x)\, d\sigma$$

Тк криволинейный интеграл I рода не зависит от выбранной параметризации, то свойство 2 доказано. читд

Свойство 3: Пусть Γ есть кривая в R^n с непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ параметризацией $\Phi(t)$ без особых точек, тогда справедливо равенство

$$\int\limits_\Gamma F_0(x)\, ds = \int\limits_a^b F(\Phi(t))[\varphi_1'^2(t) + ... + \varphi_n'^2(t)]^{\frac{1}{2}}\, dt$$

Без доказательства

Свойство 4: Пусть $\tau = \{s_i\}_{i=0}^{m}$ есть разбиение отрезка $[0, S_\Gamma]$, ξ_i есть точки из отрезков $[s_{i-1}, s_i], i = 1, ..., m, \Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ длина дуги кривой Γ от точки $\Psi_0(s_{i-1})$ до точки $\Psi_0(s_i)$, σ_τ — интегральная сумма функции $F_0(s)$ по отрезку $[0, S_\Gamma]$

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{m} F_0(\Psi_0(\xi_i))\Delta s_i$$

Тогда, если криволинейный интеграл I первого рода существует, то

$$\lim_{max(\Delta s_i)\to 0} \sigma_\tau = I$$

Док-во:

Вспомним, как мы определяли интеграл Римана. Мы составляли интегральные суммы, потом устремляли разбиение к нулю и говорили, если вот существует такой предел, то назовем его интегралом Римана. Тут у нас условие, что криволинейный интеграл I первого рода существует, значит существует интеграл Римана, значит и предел сумм есть, который как раз и равен нашему интегралу Римана.

Свойство 5: Если функция $F(x)$ представляет собой комбинацию $\alpha F_1(x) + \beta F_2(x)$, α, β — фиксированные числа, криволинейные интегралы по кривой Γ от функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ существуют, то выполняется равенство.

$$\int\limits_\Gamma F_0(x)\,ds = \alpha \int\limits_\Gamma F_1(x)\,ds + \beta \int\limits_\Gamma F_2(x)\,ds$$

Док-во:

$$\int\limits_\Gamma F_0(x)\,ds = \int\limits_0^{S_\Gamma} F(\Psi(s))\,ds = \int\limits_0^{S_\Gamma} \alpha F_1(\Psi(s)) + \beta F_2(\Psi(s))\,ds =$$

$$\int\limits_0^{S_\Gamma} \alpha F_1(\Psi(s))\,ds + \int\limits_0^{S_\Gamma} \beta F_2(\Psi(s))\,ds = \alpha \int\limits_0^{S_\Gamma} F_1(\Psi(s))\,ds + \beta \int\limits_0^{S_\Gamma} F_2(\Psi(s))\,ds =$$

$$\alpha \int\limits_\Gamma F_1(x)\,ds + \beta \int\limits_\Gamma F_2(x)\,ds$$

читд

Вообщем сводим криволинейный интеграл к интегралу Римана, а там эти свойства уже доказаны в прошлом семестре.

Определение 1.8:

Криволинейным интегралом по кусочно-гладкой кривой Γ называется число

$$\int\limits_{\Gamma_1} F_0(x)\,ds + \int\limits_{\Gamma_2} F_0(x)\,ds \tag{1}$$

если каждый из криволинейных интегралов по Γ_1 и Γ_2 существуют.

Замечание Поскольку понятие определенного интеграла

$$\int\limits_a^b F(x)\,dx$$

по отрезку можно расширить — например, до несобственного интеграла от неограниченных функций или по неограниченному промежутку — то и понятие криволинейного интеграла первого рода можно расширить, определив несобственный криволинейный интеграл первого рода, или же перейти к какой-либо иной конструкции, расширяющей понятие обычного определенного интеграла.

3 Криволинейные интегралы II рода

Пусть Γ есть кривая, параметризованная непрерывно-дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ вектор-функцией $\Phi(t)$, и пусть эта кривая не имеет особых точек. Тогда, во-первых, в каждой точке $\Phi(t)$ определена касательная к Γ, и, во-вторых, от параметризации $\Phi(t)$ можно перейти к эквивалентной ей натуральной параметризации $\Psi(s)$. Обозначим через $cos\alpha_k, k = 1, ..., n$, направляющие косинусы единичного вектора $\vec{l} = \vec{l}(t)$ касательной к Γ в текущей точке (другими словами, искомый вектор $\vec{l}$ задается равенством $\vec{l} = (cos\alpha_1, ..., cos\alpha_n)$и $\alpha_k, k = 1, ..., n$, есть углы между вектором $\vec{l}$ и положительным направлением соответствующей оси Ox_k).

Определение 1.9:

Пусть задана функция $F_0(x)$, определенная при $x \in \Gamma$,

и пусть $F_0(s) = F(\Psi(s))$.(Я тут переобозначил F и F_0,так как это было в интегралах I рода, ибо можно запутаться, когда F и F_0 меняются местами просто так)

Тогда **криволинейным интегралом второго рода по кривой** Γ **от функции** $\mathbf{F(x)}$ по координате x_k, $k = 1, ..., n$, называется интеграл:

$$I = \int\limits_{\Gamma} F_0 * cos\alpha_k ds,$$

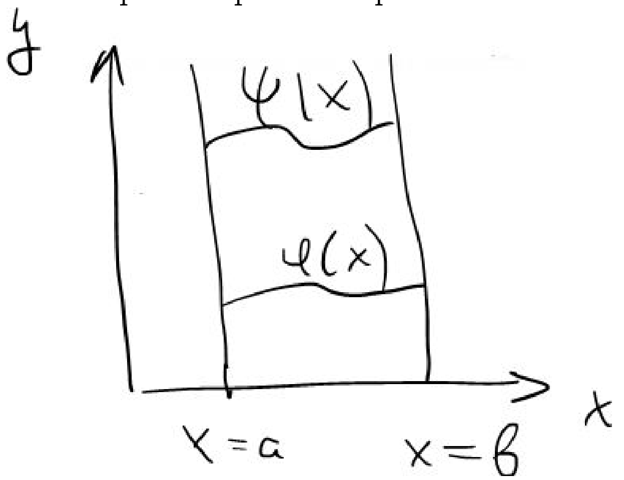
если последний существует

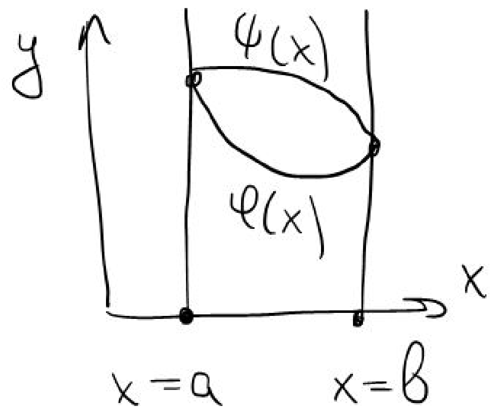
Обозначают как:

$$I = \int\limits_{\Gamma} F_0 dx_k,$$

Определение 1.10:

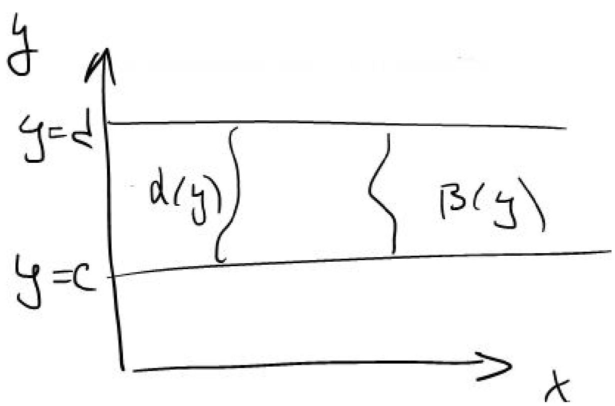
Область G из пространства R^2 называется **элементарной относительно оси** Oy, если ее граница состоит из графиков двух непрерывных функций $\phi(x)$ и $\psi(x)$, определенных при $x \in [a, b]$ и таких, что $\phi(x) \leq \psi(x)$ для всех x, а также, быть может, из некоторых отрезков прямых $x = a$ и $x = b$.

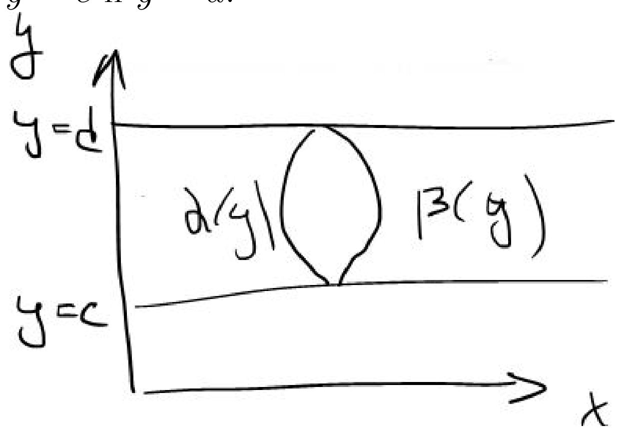




Определение 1.11:

Область G из пространства R^2 называется **элементарной относительно оси** Ox областью, если ее граница состоит из графиков двух непрерывных функций $\alpha(y)$ и $\beta(y)$, определенных при $y \in [c, d]$ и таких, что $\alpha(y) \leq \beta(y)$ для всех y, а также, быть может, из некоторых отрезков прямых $y = c$ и $y = d$.



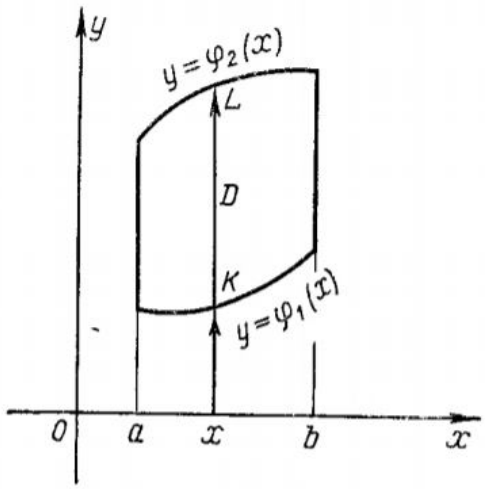


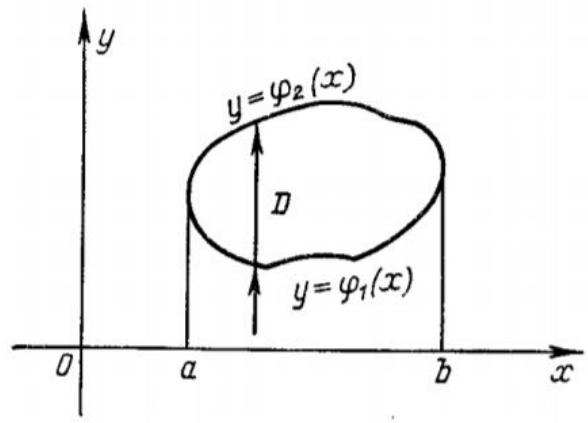
Замечание:

Группы Шваб идут по Крючковичу, у которого такие области называются **простыми** и, к тому же, оси меняются местами.

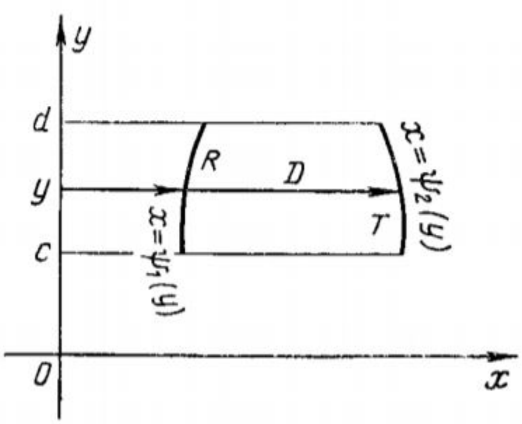
D

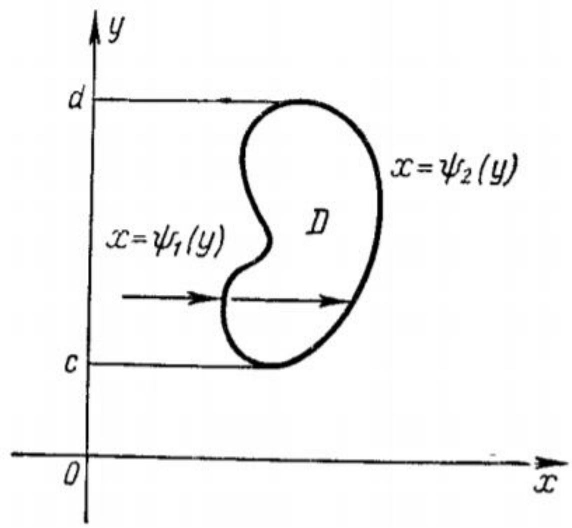
Область D на плоскости xOy назовем *простой областью*: 1) (относительно оси Ox) если она ограничена сверху линией $y=\varphi_2(x)$, снизу $y=\varphi_1(x)$ [функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны] и с боков отрезками прямых $x=a$ и $x=b$ (рис. 175); в частных случаях один из этих отрезков (или оба вместе) могут превратиться в точку (рис. 176);





2) (относительно оси Oy), если она ограничена слева линией $x=\psi_1(y)$, справа $x=\psi_2(y)$ [функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны] и сверху и снизу отрезками прямых $y=d$ и $y=c$ (рис. 177, 178).





Формула Грина:

Пусть D есть ограниченная область из пространства R^2 с кусочно-гладкой границей Г, ориентированной положительно, и пусть эту область можно разбить на конечное число непересекающихся элементарных областей с кусочно-гладкими положительно-ориентированными границами. Далее, пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ есть заданные функции такие, что

1) P и Q непрерывны в замкнутой области D

2) P и Q имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутой D

тогда верна формула Грина:

$$\int\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_\Gamma (Pdx + Qdy) \tag{2}$$

Док-во для элементарной(и по Ox, и по Oy) D:

Сведем двойной интеграл к повторному и применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d Q(x, \beta(y) - Q(x, \alpha(y))dy =$$

$$\int_c^d Q(x, \beta(y))dy - \int_c^d Q(x, \alpha(y))dy$$

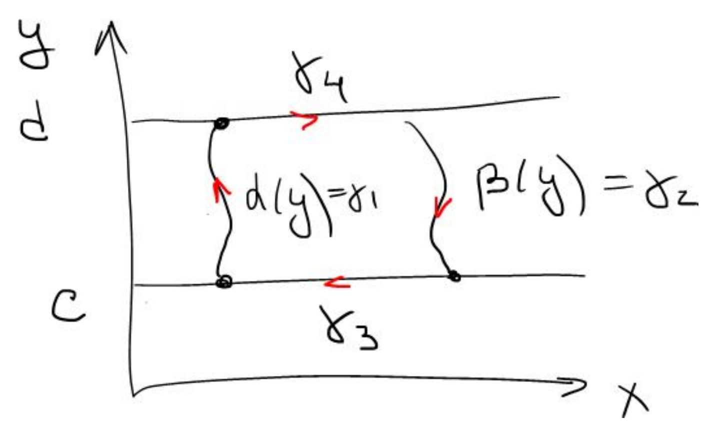
Мы можем параметризовать наши кривые

$\gamma_1 : \alpha(t), t \in [c, d]$.

$\gamma_2 : \beta(t), t \in [c, d]$.

$\gamma_3 : y = c, x = t, t \in [\alpha(c), \beta(c)]$.

$\gamma_4 : y = d, x = t, t \in [\alpha(d), \beta(d)]$.



Перепишем наши интегралы как криволинейные. Не забываем, что есть разница в направлении кривой!!!

$$\int\limits_{\gamma_1} Q(x,y)dy - \int\limits_{\gamma_2^-} Q(x,y)dy = \int\limits_{\gamma_1} Q(x,y)dy + \int\limits_{\gamma_2} Q(x,y)dy$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\gamma_3} Q(x,y)dy = \int\limits_{\gamma_4} Q(x,y)dy = 0$$

У нас получился интеграл по замкнутому контуру

$$\int\limits_{\gamma_1} Q(x,y)dy + \int\limits_{\gamma_2} Q(x,y)dy + \int\limits_{\gamma_3} Q(x,y)dy = \int\limits_{\gamma_4} Q(x,y)dy = \oint\limits_{\Gamma} Qdy$$

$$\int\limits_{D}\int \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint\limits_{\Gamma} Qdy$$

Аналогично:

$$\int\limits_{D}\int \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint\limits_{\Gamma} Pdx$$

Складывая, получаем:

$$\int\limits_{D}\int (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \oint\limits_{\Gamma} (Pdx + Qdy)$$

читд

Док-во, если D состоит из мн-ва непересекающихся, ненулеых элементарных областей:

$D = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_m$ при $D_i \cap D_j \neq \varnothing, i \neq j$ В силу свойства аддитивности двойного интеграла и факта, что граница области имеет нулевую меру:

$$\int\limits_{D}\int (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{D_i}\int (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy$$

Применяя теперь для каждого слагаемого в правой части данного равенства доказанную выше формулу, получим

$$\int\limits_D\int(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\sum_{i=1}^{m}\oint\limits_{D_i}(Pdx+Qdy)$$

В сумме, стоящей справа, содержатся интегралы по положительно ориентированным частям границ областей D_i, составляющим в целом границу D, а также содержатся интегралы по тем частям границ областей D_i, которые лежат внутри D, причем эти интегралы берутся дважды по одинаковым кривым, но с противоположной ориентацией — в силу свойств криволинейных интегралов второго рода они взаимно уничтожаются. В результате суммирования как раз и получится требуемое равенство.

читд

Замечание:

Может возникнуть вопрос, что это за странная запись такая?

$$\oint\limits_{\Gamma}(Pdx+Qdy)$$

Ведь у нас никогда не было, что разные функции интегрируются по разным переменным в одном интеграле. Можно это понимать так: Мы хотим вычислить силу, поэтому интегрируем работу по составляющим, где P x-составляющая, Q y-составляющая.

Или просто воспринимайте его как сумму:

$$\oint\limits_{\Gamma}(Pdx+Qdy)=\oint\limits_{\Gamma}Pdx+\oint\limits_{\Gamma}Qdy$$

Замечание:

Не обязательно писать именно интеграл по замкнутой кривой, можно просто интеграл. Просто два нулевых интеграла нам дают такую возможность.

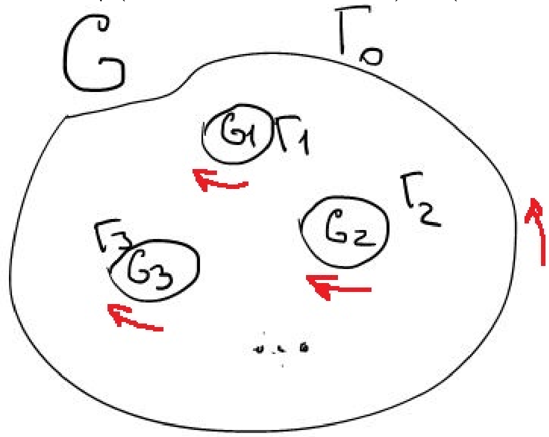
Определение 1.12:

Зададим $(m+1)$ гладкие, замкнутые кривые $\Gamma_0, \Gamma_1 \dots \Gamma_m$

Пусть Γ_0 - граница области G и $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$ при $i \neq j$

Γ_i - граница области G_i, $\Gamma_i \in G$, $i = 1 \dots m$

Тогда $G \setminus (G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_m)$ - $(m+1)$-связная область



Заметим, что при таком задании ориентации границы $(m+1)$-связной области кривые Γ_i, $i = 1, \dots, m$, будут ориентированы отрицательно по отношению к ограниченным областям G_i, кривые же Γ_i^- , наоборот, будут положительно ориентированы по отношению к G_i.

Формула Грина для многосвязных областей:

Пусть область G $(m+1)$-связна, ее внешний и внутренние контуры Γ_0, Γ_1,..., Γ_m являются замкнутыми кусочно-гладкими кривыми без самопересечений, и пусть граница области G положительно ориентирована. Далее, пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ есть заданные функции такие, что

1) P и Q непрерывны в замкнутой области G

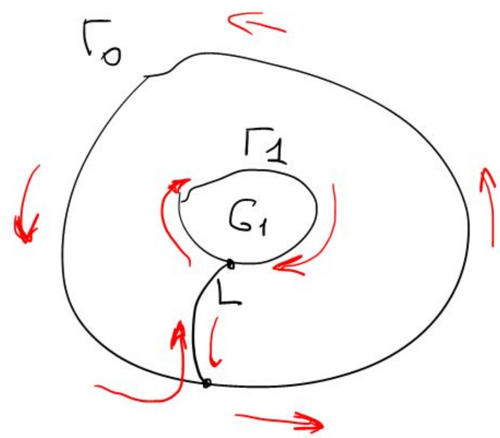
2) P и Q имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутой G

Тогда имеет место равенство

$$\int_G \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = \int_{\Gamma_0} (P dx + Q dy) - \sum_{i=1}^{m} \int_{\Gamma_i^-} (P dx + Q dy) \tag{3}$$

Док-во для двусвязной области G:

Соединим область G_1 с кривой Γ_0 разрезом, который представляет собой кусочно-гладкую кривую без самопересечений. Обозначим разрез как L



Обозначим через G^* область, полученную из G удалением данного разреза, предполагая, что граница области G^* состоит из границы G (с сохранением ориентации) и разреза, проходимого дважды.Граница G^* представляет собой кусочно-гладкую кривую, а значит по Формуле Грина для односвязной области имеем:

$$\int\limits_{G^*}\int(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\int\limits_{\delta G^*}(Pdx+Qdy)$$

Далее, поскольку двойной интеграл не меняется при присоединении к множеству интегрирования множества нулевой двумерной меры, то имеет место равенство

$$\int\limits_{G^*}\int(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\int\limits_{\delta G}(Pdx+Qdy)=\int\limits_{G}\int(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

Заметим, что $\delta G=\Gamma_0\cup L\cup\Gamma_1$, вспомниая определение (1) интеграла по кусочно-гладкой кривой:

$$\int\limits_{\delta G}(Pdx+Qdy)=\int\limits_{\Gamma_0}(Pdx+Qdy)+\int\limits_{L^+}(Pdx+Qdy)+\int\limits_{L^-}(Pdx+Qdy)+\int\limits_{\Gamma_1}(Pdx+Qdy)$$

Учитывая, что направление движения по кривой имеет значение:

$$\int\limits_{G}\int(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\int\limits_{\delta G}(Pdx+Qdy)=\int\limits_{\Gamma_0}(Pdx+Qdy)-\int\limits_{\Gamma_1^-}(Pdx+Qdy)$$

Таким образом, мы получили формулу (3) для случая двусвязной области G

Что будет в случае, если G - $(m+1)$-связная область? Да то же самое, только $\delta G = \Gamma_0 \cup (L_1 \cup \dots \cup L_m) \cup (\Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m)$

$$\int\limits_{\delta G} (Pdx+Qdy) = \int\limits_{\Gamma_0} (Pdx+Qdy) + \sum_{i=1}^{m} (\int\limits_{L_i^+} (Pdx+Qdy) - \int\limits_{L_i^-} (Pdx+Qdy)) - \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_i^-} (Pdx+Qdy)$$

Отсюда немедленно получаем

$$\int\limits_{\delta G} (Pdx+Qdy) = \int\limits_{\Gamma_0} (Pdx+Qdy) - \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_i^-} (Pdx+Qdy)$$

читд

Теорема 1.2

Пусть

1) P и Q непрерывны в замкнутой, связной области G

2) P и Q имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутой G

тогда 4 свойства эквивалентны:

1) Независимость $P(x,y)$, $Q(x,y)$ от пути интегрирования в G

2) Для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ, целиком лежащей в G, выполняется

$$\int\limits_{\Gamma} (Pdx+Qdy) = 0$$

3) Существует функция $u(x,y)$ такая, что для любых точек (x,y) из G выполняется

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy;$$

4) Для любых точек (x,y) из G выполняется

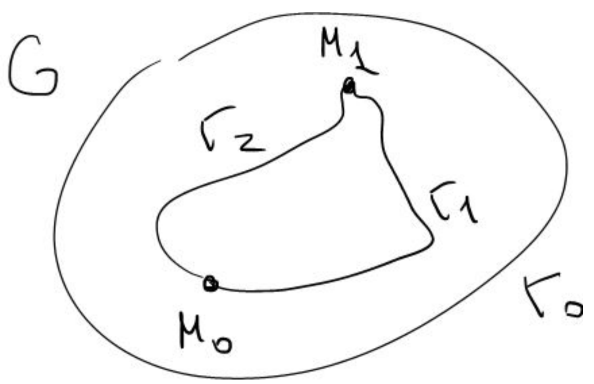
$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$$

Док-во: $(1 \Rightarrow 2)$

$$\int\limits_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) = \int\limits_{\Gamma_2} (Pdx + Qdy)$$

$$\int\limits_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) - \int\limits_{\Gamma_2} (Pdx + Qdy) = 0$$

$$\int\limits_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) + \int\limits_{\Gamma_2^-} (Pdx + Qdy) = 0$$



В силу того, что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2^-$(с учетом направления):

$$\int\limits_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \int\limits_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) + \int\limits_{\Gamma_2^-} (Pdx + Qdy) = 0$$

В силу произвольности выбора Γ_1 и Γ_2 получаем, что Γ - тоже произвольная кривая.

$(2 \Rightarrow 1)$

Пусть Γ - замкнутая кусочно-гладкая кривая и выполняется $\int\limits_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = 0$

Разобьем(с учетом направления) $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 - кусочно-гладкие или просто гладкие кривые. Тогда:

$$\int\limits_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \int\limits_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) + \int\limits_{\Gamma_2} (Pdx + Qdy) = 0$$

Отсюда:

$$\int\limits_{\Gamma_1} (Pdx + Qdy) = \int\limits_{\Gamma_2^-} (Pdx + Qdy)$$

$(1 \Rightarrow 3)$**Надо еще исправлять** Пусть $M_0 = (x_0, y_0)$ есть фиксированная точка G, $M = (x^*, y^*)$ есть текущая точка G, $\Gamma : M_0M$ есть кусочно-гладкая кривая без самопересечений, целиком лежащая в G и соединяющая точки M_0 и M. Пусть

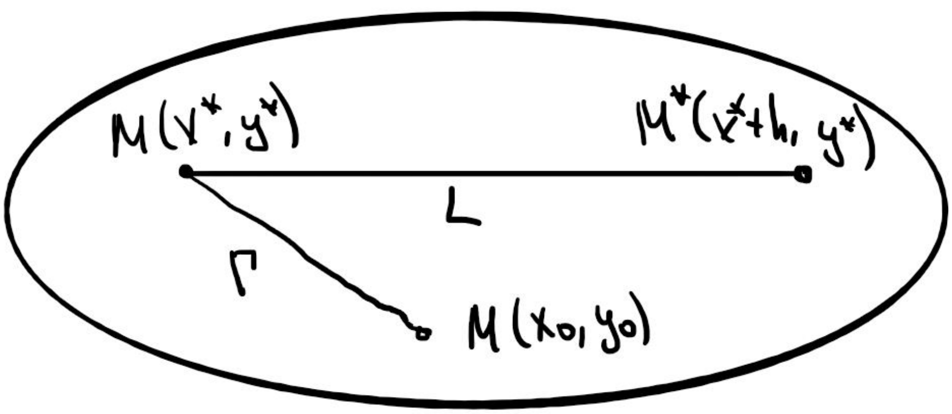
$$u(x,y) = \int\limits_{M_0M} (Pdx + Qdy) = \int\limits_{\Gamma} (Pdx + Qdy)$$

В силу условия связности G: $\exists h : (x^* + h, y^*) \in G$

Пусть прямая L, прямая соединяющая $M(x^*, y^*)$ и $M^*(x^* + h, y^*)$

Покажем, что

$$u_x = \lim_{h \to 0} \frac{u(x^* + h, y^*) - u(x^*, y^*)}{h} = P(x^*, y^*)$$



Имеем

$$\frac{u(x^* + h, y^*) - u(x^*, y^*)}{h} = \frac{1}{h}(u(x^* + h, y^*) - u(x^*, y^*))$$

$$= \frac{1}{h} \int\limits_{M}^{M^*} (Pdx + Qdy) = \frac{1}{h} \int\limits_{L} (Pdx + Qdy)$$

Параметризуем отрезок L:

$x = x^* + th, t \in [0, 1] \Rightarrow dt = dx$

$y = y^* \Rightarrow dy = 0$

$$\int\limits_{L} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int\limits_{0}^{1} P(x^* + th, y^*)dt = P(x^* + h, y^*) - P(x^*, y^*)$$

Применим формулу конечных приращений Лагранжа

$$P(x^* + h, y^*) - P(x^*, y^*) = P(x^* + \theta h, y^*)h, \theta \in (0, 1)$$

Отсюда:

$$P(x^* + \theta h, y^*) = \frac{u(x^* + h, y^*) - u(x^*, y^*)}{h}$$

Теперь при $h \to 0$ получаем:

$$P(x^*, y^*) = u_x$$

Аналогично доказываем, что $Q(x^*, y^*) = u_y$

$$du(x^*, y^*) = u_x dx + u_y dy = P(x^*, y^*)dx + Q(x^*, y^*)dy$$

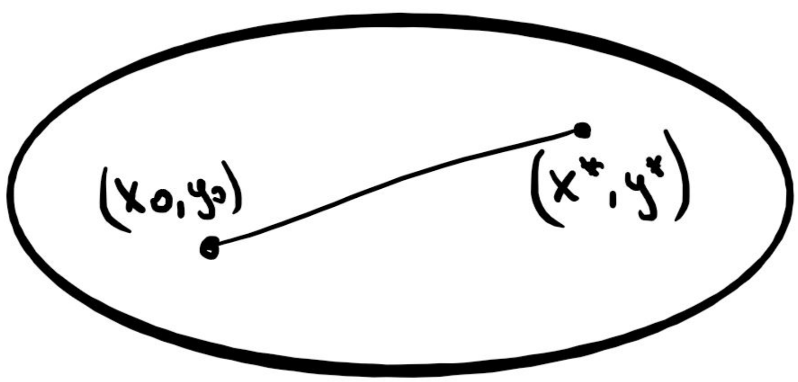
Но нам нужно еще доказать дифференцируемость $u(x, y)$ в G

$u_x = P(x, y)$ $u_y = Q(x, y)$

Тк по условию у нас P и Q имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ в замкнутой G, то существую вторые производные для $u(x, y)$, отсюда немедленно следует дифференцируемость$u(x, y)$ читд

$(3 \Rightarrow 1)$

Одно звено : $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x^*, y^*)$



$$\int\limits_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \int\limits_{\Gamma} (u_x dx + u_y dy)$$

Параметризуем Г:

$x = \varphi(t)$

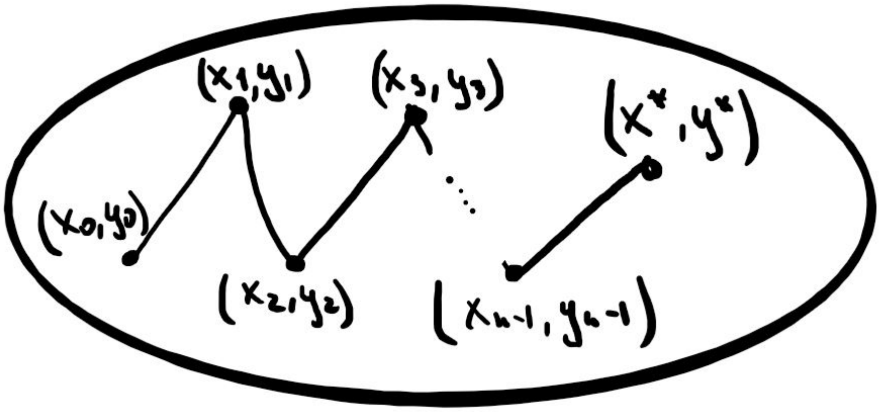
$y = \psi(t)$, где $t \in [\alpha, \beta]$

$$\int\limits_{\Gamma} (Pdx + Qdy) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi'(t), \psi'(t)) * \varphi'(t)dt + Q(\varphi'(t), \psi'(t)) * \psi'(t)dt =$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}(u(\varphi(t), \psi(t)))dt = u(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - u(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$$

Получается, что интеграл зависит лишь от начальных точек, а значит не зависит от пути интегрирования

Если **n звеньев:**



$$u(x_1,y_1)-u(x_0,y_0)+u(x_2,y_2)-u(x_1,y_1)+u(x_3,y_3)-u(x_2,y_2)+...+u(x^*,y^*)-u(x_{n-1},y_{n-1}) =$$

$$= u(x^*,y^*) - u(x_0,y_0)$$

Получается, что и от количества звеньев не завсисит

читд

$(3 \Rightarrow 4)$

$$u_{xy}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y} = P_y$$

$$u_{yx}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x} = Q_x$$

В силу непрерывности P_y, Q_y, получается, что и $u_{xy}(x,y), u_{yx}(x,y)$ непрерывны в G. А если если существуют смешанные непрерывные производные, то они равны.

Теорема о смешанных производных

$$u_{xy} = u_{yx} \Rightarrow Q_x = P_y$$

читд

$(4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3)$ Пусть $P_y = P_y$

Рассмотрим кусочно-гладкую замкнутую кривую в замкнутой G

Тогда справедлива формула Грина:

$$\int\limits_{\Gamma}(Pdx+Qdy)=\int\limits_{G}\int(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0$$

Отсюда получаем свойство 2:

$$\int\limits_{\Gamma}(Pdx+Qdy)=0$$

Ранее уже доказали, что $(2\Rightarrow 3)$

читд

4 Поверхности в R^n

Определение 1.13

Пусть G есть ограниченная область из пространства R^2, $f(u,v),g(u,v),h(u,v)$ — определенные при $(u,v)\in G$ и непрерывные на G функции. **Непрерывной поверхностью** S называется множество:

$S=\{(x,y,z):x=f(u,v),y=g(u,v),z=h(u,v),(u,v)\in G\}$

Вектор-функция $\Phi(u,v)=(f(u,v),g(u,v),h(u,v))$ называется представлением, или **параметризацией** поверхности.

Определение 1.14

Рассмотрим точку $(u_0,v_0)\in S$

$$(u_0,v_0)=\begin{cases}\textbf{не особая}, \text{если } \Phi_u(u_0,v_0),\Phi_v(u_0,v_0)-\text{ЛН};\\ \textbf{особая}, \text{если } \Phi_u(u_0,v_0),\Phi_v(u_0,v_0)-\text{ЛЗ};\end{cases}$$

Определение 1.15

Поверхность назывется **гладкой**, если все ее точки не особые.

Определение 1.16

Совокупность касательных прямых к поверхности в точке -**касательная плоскость** к поверхности в этой точке.

Определение 1.17

Пусть задана поверхность S и $M_0(x_0, y_0, x_0) \in S$, где

$x_0 = f(u_0, v_0), y_0 = g(u_0, v_0), z_0 = h(u_0, v_0)$

Тогда **касательная к плоскости** S **в** (u_0, v_0) определяется через определитель данной матрицы:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ f_u(u_0, v_0) & g_u(u_0, v_0) & h_u(u_0, v_0) \\ f_v(u_0, v_0) & g_v(u_0, v_0) & h_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

Определение 1.18

Прямая, проходящая через точку касания поверхности с касательной плоскостью и перпендикулярная этой плоскости, называется **нормальной прямой к поверхности в указанной точке.** Нормаль определяется матрицей:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_u(u_0, v_0) & g_u(u_0, v_0) & h_u(u_0, v_0) \\ f_v(u_0, v_0) & g_v(u_0, v_0) & h_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}; \tag{5}$$

Замечание

У плоскости в точке есть две нормали, верная из них та, которая задается матрицей из определениия 1.17(5).

Важный факт В каждой точке гладкой поверхности S однозначно определена нормаль,вычисляемая по формуле (5).

Определение 1.19

Если на поверхности S эта нормаль меняется непрерывно, то поверхность S называется **ориентированной**. При задании ориентации поверхности считается, что поверхность S является **двусторонней** , и та сторона поверхности, которая прилегает к нормали (5), называется **положительной стороной и обозначается** S^+ , противоположная же сторона называется **отрицательной и обозначается** S^- .

Пример неориентированной поверхности: Лента Мебиуса

Определение 1.20

Две поверхности S_i и S_j называются **соседними**, если кривые Γ_i и Γ_j имеют одну или несколько общих дуг (общих участков,не вырождающихся в точку).

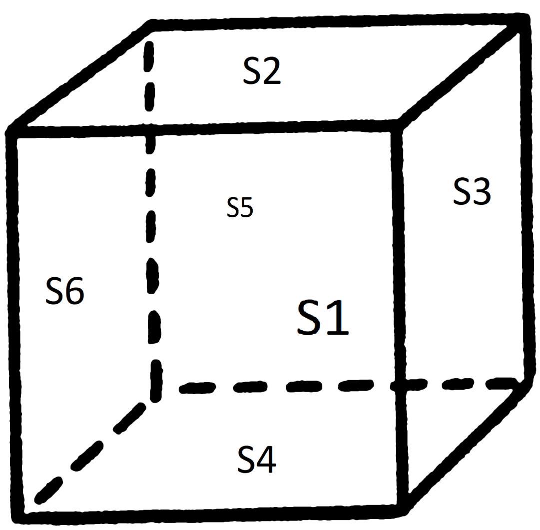
Определение 1.21

Поверхность называется **кусочно-гладкой**, если она состоит конечного числа гладких поверхностей, которые могут пересекаться лишь по своим граничным точкам.

Если S - кусочно-гладкая поверхность, то ее можно представить ввиде:

$S = S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_p$, где S_i и S_j или соседние или могут быть соеденены некоторой последовательностью поверхностей.

Пример: Кубик



Определение 1.22

Кусочно-гладкая поверхность S, состоящая из m частей S_1,...,S_m, называется **ориентируемой**, если существует такая ориентация кривых Γ_1, ..., Γ_m (границ поверхностей $S_1, ..., S_m$), что части (дуги) этих кривых, принадлежащие двум различным кривым Γ_i и Γ_j, получают от них противоположную ориентацию.

I квадратичная форма поверхности

Введем обозначения:

$E(u,v) = (\vec{\Phi}_u(u,v), \vec{\Phi}_u(u,v)) = |\vec{\Phi}_u^2(u,v)|$ - квадрат скалярного произведения.

$G(u,v) = (\vec{\Phi}_v(u,v), \vec{\Phi}_v(u,v)) = |\vec{\Phi}_v^2(u,v)|$ - квадрат скалярного произведения.

$F(u,v) = (\vec{\Phi}_u(u,v), \vec{\Phi}_v(u,v))$

Тогда:

$$(d\vec{\Phi})^2 = (\vec{\Phi}_u du + \vec{\Phi}_v dv)^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

I квадратичная форма имеет вид:

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

Замечание: I квадратичная форма не отрицательна

Док-во: Как известно из курса Линала, квадрат скалаярного произведения неотрицателен.

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = (d\vec{\Phi})^2 \geqslant 0$$

Поверхностный интеграл I рода

Пусть $S : \Phi(u,v)$ - Гладкая поверхность и задана функция $\psi(u,v)$, тогда **поверхностным интегралом I рода от** $\psi(u,v)$ назовем:

$$\int\limits_S \psi(u,v)ds = \int\limits_\Omega\int \psi(u,v)\sqrt{EG-F^2}dudv$$

Также введем меру:

$$\int\limits_S ds = mesS;$$

Свойства поверхностных интегралов I рода:

1) Линейность

$$\int\limits_S (\alpha F_1 + \beta F_2) ds = \alpha \int\limits_S F_1 ds + \beta \int\limits_S F_2 ds$$

2)Аддитивность

$$\int\limits_S F_2 ds + \int\limits_S F_1 ds$$

Поверхностный интеграл II рода

Некторые факты про нормаль

Пусть есть поверхность S с заданной параметризацией $\Phi(u, v)$, где (u, v) из замкнутой области Ω. Если $\vec{n}$ - нормаль, вычисляемая по (5), то единичная нормаль будет вычисляться так:

$$\vec{V} = \frac{\vec{n}}{|n|}$$

Однако единичную нормаль можно задать по-другому:

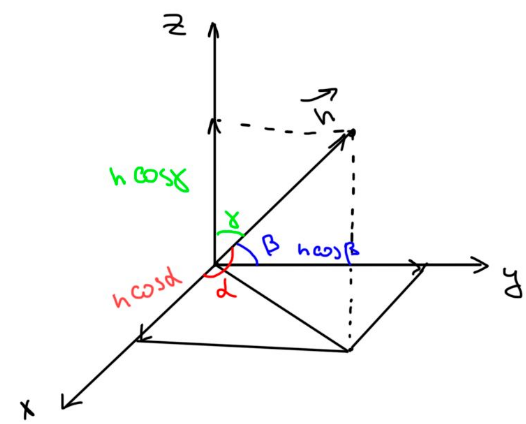
Пусть $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$

Тогда

$$n_x = |n| cos\alpha;$$

$$n_y = |n| cos\beta;$$

$$n_z = |n| cos\gamma;$$



...

Тогда вектор

$$(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma) = (\frac{n_x}{|n|}, \frac{n_y}{|n|}, \frac{n_z}{|n|})$$

А это не что иное как нормированный вектор $\vec{n}$, те $\vec{V}$

Определение 1.23:

Поверхностным интегралом II рода по поверхности S по переменным x, y назовем

$$\int\limits_S \int \Psi dxdy = \int\limits_{S^+} \int \Psi dxdy = \int\limits_S \Psi cos\gamma ds$$

Соотвествено, если интеграл по y, z будет такой же, но с $cos\alpha$

Замечание:

$$\int\limits_{S^+} \int \Psi dxdy = -\int\limits_{S^-} \int \Psi dxdy$$

Свойства поверхностных интегралов II рода

1) Линейность

2) Аддитивность

3) Зависимость от стороны поверхность(замечание выше)

Определение 1.24

Пусть S есть кусочно-гладкая поверхность, состоящая из частей $S_1, ..., S_m$, и пусть на S имеется согласованная ориентация S^+. Далее, пусть на S задана функция $F(x, y, z)$. **Поверхностным интегралом второго рода по поверхности S^+ по координатам x, y называется сумма**:

$$I = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{S_i^+} \int F dxdy$$

Для $dxdz, dydz$ определяется аналогично.

Формула Гаусса-Остроградского:

Обозначаю: $R = R(x, y, z), Q = Q(x, y, z), P = P(x, y, z)$;

Пусть V есть ограниченная поверхностью Ω, область из пространства R^3, и V можно разбить кусочно-гладкими поверхностями на конечное число элементарных областей. Далее, пусть $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ есть заданные функции такие, что

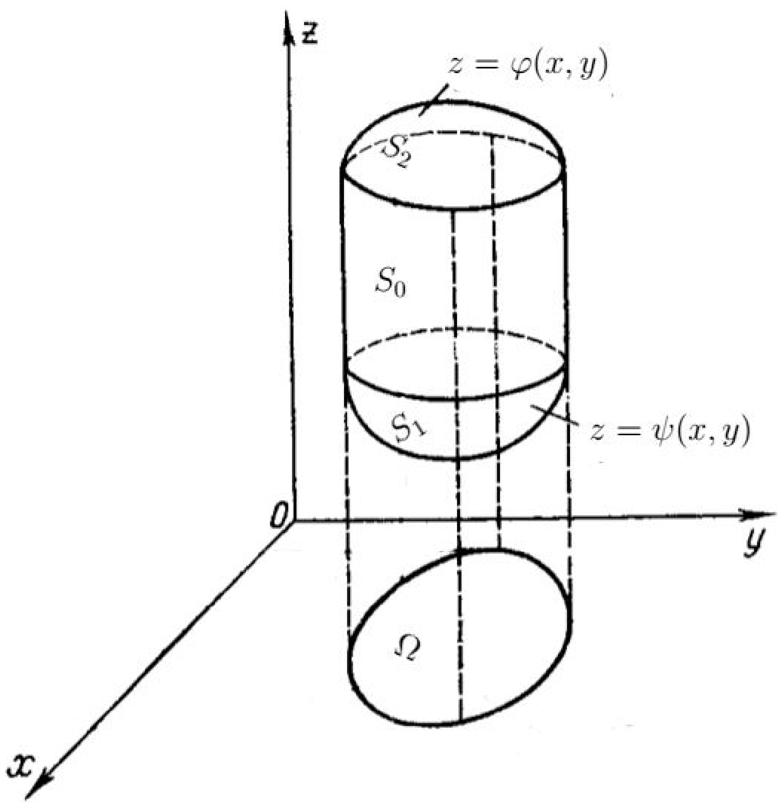
1) P, Q и R непрерывны в замкнутой области V

2) P,Q и R имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ в замкнутой V

Тогда верная формула Гаусса-Остроградского:

$$\int\int\limits_V\int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \int\limits_S (Pcos\alpha + Qcos\beta + Rcos\gamma)ds$$

в которой $(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$ есть направляющие косинусы вектора **внешней** нормали к границе S области V



Док-во для элементарной V*:*

Поверхность S можно представить как: $S = S_0 \cup S_1^- \cup S_2^+$

Коль V элементарна, значит и по Oz элементарна, а значит $\varphi(x, y) \le z \le \psi(x, y)$

Рассмотрим

$$\int\int\limits_V\int R_z(x,y,z)$$

Тк V элементарна по Oz:

$$\int\int\limits_V\int R_z(x,y,z)dxdxydz = \int\limits_\Omega\int\left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} R_z(x,y,z)dz\right)dxdy =$$

$$= \int\limits_\Omega\int (R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y)))dxdy$$

Тк

1) $\varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)$

2) $\vec{n_1}$ - внешний к $z = \psi(x)$, но $\vec{n_2}$ - внутренний к $z = \varphi(x)$

3) $cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\psi_u^2+\psi_v^2}}$ для S_2 , и $cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_u^2+\varphi_v^2}}$ для S_1

4) $\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{(1+\psi_u^2)(1+\psi_v^2) - (\psi_u\psi_v)^2} = \sqrt{1+\psi_u^2+\psi_v^2}$

Можно сделать вывод:

$$\int\limits_\Omega\int R(x,y,\psi(x,y))dxdy \stackrel{?}{=} \int\limits_{S_2^+}\int R(x,y,z)cos\gamma\sqrt{EG-F^2}dxdy = \int\limits_{S_2^+}\int R(x,y,z)dxdy$$

$$\int\limits_\Omega\int R(x,y,\varphi(x,y))dxdy \stackrel{?}{=} \int\limits_{S_2^+}\int R(x,y,z)cos\gamma\sqrt{EG-F^2}dxdy = -\int\limits_{S_1^+}\int R(x,y,z)dxdy$$

По определению поверхностного интеграла II рода, учитывая то, что для S_2^+ нормаль будет внешней, а для S_1^+ - внутренней, можно переписать наши поверхностные интегралы II рода, как поверхностные интегралы I рода:

$$\int\limits_{S_2^+}\int R(x,y,z)dxdy = \int\limits_{S_2} R(x,y,z)cos\gamma ds$$

$$\int\limits_{S_1^+}\int R(x,y,z)dxdy = \int\limits_{S_1} R(x,y,z)cos\gamma ds$$

Осознать, почему там не γ_1, γ_2!!!

Тогда, зная, что S_0 - боковая поверхность(это интеграл равен нулю, тк $\gamma = 90$(нормаль к S_0 перпендикулярная Oz),а значит $cos\gamma = 0$) можно сделать вывод:

$$\int\int\limits_V\int \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \int\limits_{S_2^+} R(x,y,z)cos\gamma ds + \int\limits_{S_0} R(x,y,z)cos\gamma ds - \int\limits_{S_1^+} R(x,y,z)cos\gamma ds =$$

$$= \int\limits_S R(x,y,z)cos\gamma ds$$

Аналогично доказывается:

$$\int\int\limits_V\int \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \int\limits_S R(x,y,z)cos\alpha ds$$

$$\int\int\limits_V\int \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \int\limits_S R(x,y,z)cos\beta ds$$

Суммируя, получаем нужную формулу.

читд

Док-во для V - составленной из гладких поверхностей:

Пусть теперь область V есть множество $V = V_1 \cap V_2 \cap S^*$, причем V_1 и V_2 есть элементарные области, S^* есть разделяющая их кусочно-гладкая поверхность. Представляя интеграл по области V в виде суммы интегралов по областям V_1 и V_2 (что возможно вследствие свойства аддитивности тройного интеграла), применяя формулу **Гаусса-Остроградского для элементарной области** к каждой области V_1 и V_2, учитывая, что внешняя нормаль на поверхности S^* направлена взаимно противоположно по отношению к областям V_1 и V_2, а также то, что оставшиеся части границ областей V_1 и V_2 составят вместе границу V, получим требуемую формулу для составной области V.

Если область G составлена из более чем двух областей V_1 и V_2 и разделяющих их поверхностей, то рассуждения будут вполне аналогичны, и тем самым формула **Гаусса-Остроградского для элементарной области** будет справедлива и для такой области.

Формула Стокса:

1) Пусть S - поверхность в R^3, заданная своей вектор-функцией $\Phi(u,v)$, $(u,v) \in \overline{\Omega}$
2) Пусть вектор-функция $\Phi(u,v)$ есть дважды непрерывно дифференцируемая при $(u,v) \in \overline{\Omega}$ функция
3) Пусть Ω есть плоская ограниченная область такая, что для нее выполняется формула Грина
4) Путь γ_0 - граница Ω , γ_0 - замкнутая, кусочно-гладкая без самопересечений с положительным направление обхода с параматризацией $\gamma_0 : u(t), v(t), t \in [a,b]$
5)На S определена номаль $\vec{V}(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$
6)Определим кривую γ в пространстве R^3 как кривую с параметризацией $\Phi(u(t), v(t)), t \in [a,b]$, и пусть эта кривая представляет собой границу,или край поверхности S (говорят также, что поверхность S натянута на кривую γ).
7) Пусть область G из пространства R^3 есть такая область, что выполняется вложение $S \subset G$, и пусть функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ определены при $(x,y,z) \in G$

Формула Стокса

1)Пусть функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны в области G

2) Все частные производные P, Q, R тоже непрерывны в G (9 штук)

3)Для поверхности S, для кривых γ_0 и γ выполняются сделанные выше предположения. Тогда выполняется равенство

$$\int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{\gamma} [(R_y - Q_z)cos\alpha + (P_z - R_x)cos\beta + (Q_x - P_y)cos\gamma]ds \quad (6)$$

5 Полезности

Связная область

Определение. Пусть задана область E, т.е. множество, состоящее из внутренних точек. Множество E называется связным, если любые две точки этого множества можно соединить ломаной, целиком лежащей в этой области.

Формула конечных приращений Лагранжа

Если функция F непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b), то найдётся такая точка $c \in (a, b)$, что

$F(a) - F(b) = F'(c)(b - a)$

Можно записать так:

$F(x + \Delta x) - F(x) = F'(x + \theta \Delta x)\Delta x, \theta \in (0, 1)$

Теорема о смешанных производных

Теорема. Предположим, что 1) $f(x, y)$, определена в открытой области Ω, 2) в этой области f имеет частные производные f_x, f_y, а также вторые смешанные производные f_{xy}, f_{yx}, 3) эти последние производные непрерывны в некоторой точке $(x_0, y_0) \in \Omega$. Тогда в этой точке

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Вывод $cos\gamma$ в т. Гаусса-Остроградского

Учитывая, что

$$\begin{cases} f = u \\ g = v \\ h = \psi(u, v) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (f_u = 1) & (g_u = 0) & h_u \\ (f_v = 0) & (g_v = 1) & h_v \end{vmatrix} = h_u\vec{i} - h_v\vec{j} + \vec{k}$$

Отсюда:

$$|\vec{n}| = \sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2}$$

А значит:

$$\vec{V} = (...,...,\frac{1}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}}) = (...,...,\frac{1}{\sqrt{1+\psi_x^2+\psi_y^2}})$$

те $cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+h_u^2+h_v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\psi_x^2+\psi_y^2}} > 0$, γ - острый, а значит $\vec{V}$ - внешняя нормаль к S_2

Аналогично для $\varphi(x,y)$:

$$cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_u^2+\varphi_v^2}}$$