



# THÉORIE DES GRAPHES ET SYSTÈMES COMPLEXES

Maxime MARCHAND, Université de Genève, 3<sup>e</sup> année de Bachelor  
Amandine CAPACCI, Université de Genève, 3<sup>e</sup> année de Bachelor

Sous la supervision de  
Ariadna FOSSAS-TENAS, Université de Genève, Département de physique appliquée (GAP)

## Résumé

Ce document résulte du travail effectué dans le cadre des laboratoires de physique de troisième année dans le département de physique appliquée de l'Université de Genève. Ce laboratoire s'inscrit dans le cadre d'un travail de recherche sur les effets de l'altruisme dans une société partageant un bien commun à préserver [1]. Des modélisations numériques sur des graphes de morphologies différentes (Arbre régulier, Erdős-Rényi, Watts-Strogatz, Hidden parameters et Barabasi-Albert) ont permis d'étudier les éventuelles relations entre la centralité d'un joueur et les grandeurs telles que la surconsommation et le coefficient de Gini. La partie théorique de ce rapport (sections 1 - 4) a été rédigée conjointement. ~~L'analyse des résultats de ce document concerne les graphes de Erdős Rényi et Hidden parameters, traités par Amandine CAPACCI. L'analyse des graphes de Watts Strogatz et Barabasi Albert peut être consultée dans le rapport de Maxime MARCHAND.~~

### Erratum

~~L'analyse des résultats de ce document concerne les graphes de Watts-Strogatz et Barabasi-Albert, traités par Maxime Marchand.~~  
~~L'analyse des graphes de Erdős-Rényi et Hidden parameters peut être consultée dans le rapport de Amandine Capacci.~~

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Rappel des notions</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Présentation des familles de graphe</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Mise en contexte, description du jeu</b>	<b>4</b>
4.1	Equilibre de Nash . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Résultats</b>	<b>5</b>
5.1	Détails d'implémentation . . . . .	5
5.2	Gini vs surconsommation . . . . .	6
5.3	Surconsommation et Gini pour différentes valeurs de la consommation totale . . . . .	8
5.4	Riches à des positions différentes . . . . .	9
5.5	Centralités . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>15</b>

## 1 Introduction

Ce rapport résume le travail effectué dans le cadre des laboratoires de physique de troisième année dans le département de physique appliquée de l'Université de Genève. Ce laboratoire s'inscrit dans le cadre d'un travail de recherche sur les effets de l'altruisme dans une société, modélisé par un jeu à un coup impliquant des joueurs ayant un bien commun à préserver [1]. Nous tentons de déterminer s'il existe un lien entre la centralité d'un joueur et les grandeurs telles que la surconsommation et le coefficient de Gini. Des modélisations numériques sur des graphes de différents types (Arbre régulier, Erdős-Rényi, Watts-Strogatz, Hidden parameters et Barabasi-Albert) ont été effectuées.

Avant de présenter les résultats obtenus, nous commençons par rappeler quelques notions de la théorie des graphes qui ont été utilisées dans ce travail. Nous apportons aussi des détails sur les implémentations en ce qui concerne la construction des différents graphes, ainsi que des choix effectués lors des modélisations.

## 2 Rappel des notions

Nous rappelons dans cette section les notions principales qui ont été utilisées dans ce travail. Celui-ci est basé sur l'utilisation des graphes, que nous pouvons définir comme une collection de sommets  $V = \{1, 2, \dots, N\}$ , et de l'ensemble des duos  $E \subset V \times V = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)\}$  représentant les liens entre les sommets.

On définit la distance entre deux sommets  $d(i, j)$  comme le nombre minimal de liens qui séparent les sommets  $i$  et  $j$ . Le degré d'un sommet  $i$ ,  $\deg(i)$ , correspond au nombre de liens qui arrivent/partent de ce sommet. Le rayon d'un graphe est défini comme la distance entre le centre du graphe, et le sommet le plus éloigné. Cette grandeur est définie comme la distance minimale de l'ensemble des distances maximales entre tous les duos de sommets. Le diamètre d'un graphe est la plus grande distance qui puisse exister entre deux sommets. Un graphe est dit connexe lorsque, pour n'importe quel duo de sommets, il existe un chemin qui les relie. Le modèle de graphe connexe possédant le minimum de liens est le graphe en arbre, avec  $n - 1$  arêtes. Celui qui en compte le plus est le graphe complet, avec  $n(n - 1)/2$  arêtes.

### Centralité

La centralité est une grandeur qui permet d'introduire une notion d'importance entre les sommets d'un graphe. Cette quantité peut être définie de différentes manières, nous en étudierons trois. La première centralité est calculée pour chaque sommet en considérant la somme totale des distances avec tous les autres sommets :

$$\text{cent}(i) = \frac{n - 1}{\sum_{j \neq i} d(i, j)} \quad (1)$$

Avec  $n$  le nombre de sommets. On observe clairement que cette grandeur tend à être plus faible pour les sommets éloignés de tous les autres. La deuxième centralité :

$$\text{cent}(i) = \frac{r}{d_{\max}(i)} \quad (2)$$

est définie en prenant le rayon  $r$  du graphe, et en considérant la distance  $d_{\max}(i)$ , à savoir la distance maximale que nous pouvons parcourir depuis le sommet  $i$ . Nous définissons finalement la troisième centralité selon la formule suivante :

$$\text{cent}(i) = \sum_{j \neq i} \delta^{d(i, j)} \quad (3)$$

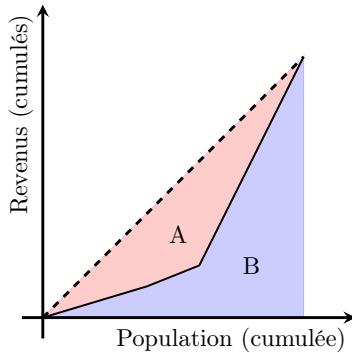
Cette centralité est calculée pour un sommet  $i$  en fonction de la distance avec tous les autres sommets  $j \neq i$ , pondérée pas un scalaire  $\delta$ .

### Étude des inégalités : Le coefficient Gini

Dans notre étude, nous allons utiliser le concept du coefficient de Gini. Dans les modélisations, le coefficient de Gini est calculé au moyen de la formule :

$$G = \frac{2 \sum_{i=1}^n i y_i}{n \sum_{i=1}^n y_i} - \frac{n+1}{n} \quad (4)$$

Avec  $y_i$  le revenu du joueur  $i$ , tel que  $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_i \leq \dots \leq y_n$ . Le coefficient de Gini est compris entre 0 et 1. Plus l'on se rapproche de 1, plus les inégalités sont fortes. Pour mieux visualiser cette grandeur, nous pouvons considérer le graphique de la part cumulée des revenus, en fonction de la part cumulée de la population, comme illustré sur la Figure 1 :



**FIGURE 1** – Une illustration pour définir le coefficient de Gini. Le trait pointillé représente l'application identité ( $x \mapsto x$ ). La courbe en noir représente la part cumulée des revenus en fonction de la part cumulée de la population. Le coefficient de Gini est calculé selon le rapport des aires supérieure (en rouge) et inférieure (en bleu) par la relation  $G = A/(A + B)$ .

Le coefficient de Gini est alors donné par le rapport des aires inférieures et supérieures :

$$G = \frac{A}{A + B} \quad (5)$$

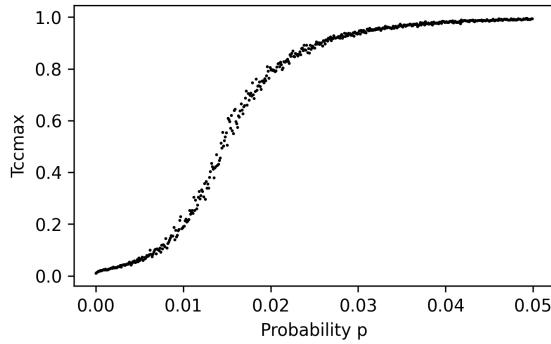
### 3 Présentation des familles de graphe

#### Graphe en arbre

Le premier modèle de graphe que nous abordons est celui de l'arbre régulier. C'est un modèle simple qui se définit par un nombre d'étages  $h$  et un paramètre  $r$  qui détermine combien de nouvelles branches apparaissent en descendant d'un étage.

#### Erdős-Rényi

Le second modèle de graphe que nous abordons est celui de Erdős-Rényi. C'est le modèle le plus simple que l'on peut construire, basé sur un mécanisme aléatoire. Malgré sa simplicité, le graphe Erdős-Rényi n'est pas très utile car trop éloigné des réseaux de la vie réelle. Ce n'est donc pas un modèle très utilisé dans les études faites sur ce domaine. Une particularité de ce modèle est l'émergence d'une composante très connexe, que l'on observe par la croissance de la courbe du graphique suivant. Nous avons représenté ce phénomène, en calculant pour chaque probabilité  $p$  le nombre maximum de liens connectés entre eux dans un graphe.



**FIGURE 2** — Pour chaque probabilité  $p$ , un graphe de Erdős-Rényi est créé, et on garde le nombre maximal de liens connectés entre eux. Dans ce graphique, chaque point est la moyenne de la valeur obtenue pour 10 graphes différents.

### Hidden parameters

Le troisième modèle est *Hidden Parameters*. Il est plus ou moins aléatoire. Comme son nom l'indique, nous devons attribuer un paramètre caché à chaque sommet  $i$ . Ce paramètre est donnée par la formule suivante :

$$\eta_i = \frac{c}{(i+1)^\alpha} \quad (6)$$

Où  $c$  est un paramètre qui représente la connectivité du graphe. Il faudra le faire varier pour voir comment la distribution des degrés se comporte. Le terme  $\alpha$  représente le coefficient d'altruisme, il est obtenu grâce à la définition :

$$\gamma = 1 + \frac{1}{\alpha} \quad (7)$$

Nous voulons garder le coefficient  $\gamma$  entre 2 et 3. Il faut donc que  $\alpha$  soit entre 0.5 et 1. Une fois que tous les sommets ont un paramètre caché, nous pouvons leur attribuer une probabilité propre à chacun avec la formule :

$$p(\eta_i, \eta_j) = \frac{\eta_i \eta_j}{\langle \eta \rangle N} \quad (8)$$

Où  $\langle \eta \rangle$  représente la moyenne de tous les paramètres cachés, et  $N$  représente le nombre de sommets. Par conséquent, le nombre attendu de liens dans notre graphe est donné par :

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^N \frac{\eta_i \eta_j}{\langle \eta \rangle N} = \frac{1}{2} \langle \eta \rangle N \quad (9)$$

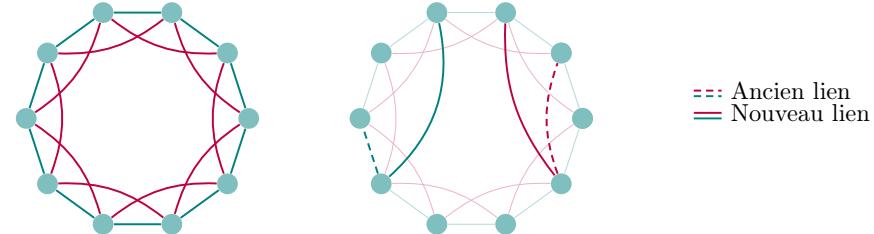
Par la même procédure que pour le graphe Erdős-Rényi, nous générerons un chiffre aléatoire  $s$  pour chaque paire de sommet  $i, j$ . Si ce chiffre est plus petit que la probabilité  $p(\eta_i, \eta_j)$  associée à cette paire, alors un lien est créé entre nos deux sommets.

### Watts-Strogatz

Le graphe de Watts-Strogatz (WS) est un modèle de graphe aléatoire, motivé par le manque de représentativité du modèle de Erdős-Rényi. Le modèle de WS permet de contrer deux problèmes du modèle de ER [2] :

1. Les réseaux réels ont un haut taux de clustering, c'est-à-dire que leurs sommets sont très regroupés entre eux.
2. Les réseaux réels ont tendance à converger vers des lois de puissance

Celui-ci est construit à partir d'un graphe régulier, dans lequel chaque sommet est relié avec ses deux voisins les plus proches, et aux sommets tels que  $d(i, j) = m$  pour un  $m$  fixé. Une probabilité  $p$  est fixée. Pour chaque paire de liens, un nombre aléatoire  $s \in [0, 1]$  est tiré. Si  $s < p$ , alors le lien est déplacé vers un autre sommet déterminé aléatoirement.



**FIGURE 3** — Structure du modèle de Watts-Strogatz. Illustration des changements de liens. La figure de gauche représente l'état initial du graphe. Les sommets sont connectés avec leurs plus proches voisins (en bleu) et à leurs voisins situés à une distance  $m = 2$  (en rouge). La figure de droite illustre deux changements de liens.

### Barabasi-Albert

Jusqu'à présent, les modèles considérés étaient construits sur la base de  $N$  sommets créés simultanément. Le modèle de Barabasi-Albert (BA) permet d'introduire deux notions qui n'avaient pas encore été considérées [2] : L'évolution dans le temps, et la liaison privilégiée avec les sommets influents. Un graphe initial est créé. Successivement, un nouveau sommet  $i$  est créé. La probabilité que le sommet  $i$  se connecte au sommet  $j$  est donnée par la formule  $p(d_{ij}) = d_i / \sum_j d_j$ , avec  $d_i, d_j$  les degrés des sommets  $i$  et  $j$ .

## 4 Mise en contexte, description du jeu

Ce travail aborde le jeu de bien public en réseau. Tout est basé sur le principe de l'altruisme, c'est-à-dire le fait que chaque individu se soucie des autres. Le but final est de répondre à la question suivante : Quels sont les effets de l'altruisme sur les efforts fournis pour limiter le changement climatique ? Cette question nous permet d'aborder le problème du bien public, qui se dégrade dans le temps à cause de sa consommation par l'ensemble des individus. Cela peut être la qualité de l'air, de l'eau, la nourriture... Ce travail tend à démontrer que, contrairement aux idées reçues, augmenter le facteur d'altruisme n'est pas suffisant pour préserver le bien commun. En effet, cet effet ne peut être observé que dans un réseau dans lequel tous les joueurs sont connectés entre eux — le cas d'un graphe complet — mais cette structure n'est pas représentative des rapports entre les individus dans la vie réelle. En considérant un joueur omniscient, on peut démontrer qu'une consommation optimale  $C^*$  existe, en maximisant la somme de l'utilité publique de chaque joueur. Cependant, ce travail étudie le jeu dans un équilibre de NASH ; lorsque chaque joueur tend à maximiser son utilité publique indépendamment.

### 4.1 Equilibre de Nash

On introduit une fonction  $u_{p,i}$  qui désigne l'utilité personnelle du joueur  $i$ , ainsi que la consommation de chaque joueur  $c_i$  et la consommation totale  $C = \sum_i c_i$ . On pose  $\mathcal{N}(i)$  l'ensemble des voisins du joueur  $i$ , et on pose l'état initial du bien public  $S_0$ . En ajoutant le coefficient d'altruisme  $\alpha$ , on obtient la fonction qui donne l'utilité sociale de chaque joueur :

$$u_{i,s} = u_{i,p} + \alpha \cdot \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} u_{j,p} \quad (10)$$

Le joueur se soucie en priorité de lui-même, mais avec l'ajout de ce paramètre d'altruisme il se soucie aussi des autres. La fonction utilité tient compte de l'individu et de ses proches. C'est pour cette raison que l'on a deux types d'utilité, personnelle et sociale. Pour répondre à notre problématique, nous devons nous placer dans un équilibre de Nash. Les équations principales pour trouver les équilibres de Nash sont :

$$c_i \geq \alpha^2 \cdot c_j \quad \forall j \in \mathcal{N}(i) \quad (11)$$

$$\frac{S_0 + B - C - \frac{c^2}{2}}{1 + C} \geq \max_{i \leq N} \left( c_i + \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \alpha \cdot \sqrt{c_i} \cdot \sqrt{c_j} \right) \quad (12)$$

La première équation représente le fait que chaque joueur se soucie des autres. Le joueur  $i$  va transférer ses richesses au joueur  $j$  seulement s'il en a les moyens. La seconde équation décrit le bien public. La fonction d'utilité personnelle est donnée par :

$$u_p = \sqrt{c_i} \cdot \sqrt{S_0 + B - c - \frac{c^2}{2}} + \alpha \cdot \sum_j \sqrt{c_j} \cdot \sqrt{S_0 + B - c - \frac{c^2}{2}} = (\sqrt{c_i} + \alpha \cdot \sum_j \sqrt{c_j}) \cdot \sqrt{S_j + B - c - \frac{c^2}{2}} \quad (13)$$

Le facteur  $\frac{c^2}{2}$  représente la dégradation du bien public,  $C$  est la consommation totale et  $S_0 + B - C$  est la somme totale des transferts effectués par les joueurs vers le bien public.

Les économistes pensent que l'altruisme est une condition suffisante à la réduction des inégalités et la limitation de la surconsommation. L'objectif final de ce travail est de montrer que ce n'est pas le cas. Le fait que chaque individu se préoccupe des autres n'est pas suffisant pour améliorer notre société et préserver notre environnement.

Nous utiliserons aussi la quantité qui nous donne la consommation optimale. Elle est obtenue en maximisant la somme de toutes les utilités des joueurs. Elle sera dénotée par  $C^*$ . À partir de cette quantité, nous pourrons déduire la surconsommation avec le quotient  $\frac{C}{C^*}$ .

Nous partirons avec des modèles déjà établis qui calculent les conditions initiales d'un équilibre de Nash, puis nous allons étudier le comportement du système par rapport à la centralité, la distance entre les joueurs, la distribution des degrés, ou encore la position des plus riches.

## 5 Résultats

### 5.1 Détails d'implémentation

Nous présentons dans cette section des détails concernant les modélisations effectuées.

#### Organisation du répertoire

L'intégralité du code se situe dans le répertoire `CODE/`. Le projet se décompose selon les fichiers suivants :

`functions.py` — contient les fonctions nécessaires à modéliser le jeu. Dans ce fichier ont été rajoutées les fonctions `centrality1`, `centrality2` et `centrality3`, pour calculer les centralités des joueurs selon les formules mentionnées ci-dessus. La fonction `choose_rich_by_degree` pour choisir les riches dans le graphe, et la fonction `make_connected` qui évite d'avoir des sommets non connectés dans le graphe.

`create_graphs.py` — contient les fonctions pour créer les graphes selon les algorithmes mentionnés dans la section 3

`Gini_vs_Overconsumption_and_variabilityAnalysis.ipynb` — Modélisations pour étudier l'effet du coefficient d'altruisme sur la surconsommation et le coefficient de Gini, ainsi que l'influence de la consommation totale

`OverconsumptionGini_oneRichDifferentPositions.ipynb` — Modélisations pour étudier l'influence de la position/du degré d'un joueur sur la surconsommation et le coefficient de Gini

`OverconsumptionGini_vs_centralities.ipynb` — Étudier les liens entre la centralité des joueurs et la surconsommation et le coefficient de Gini

## Sauvegarde des graphiques

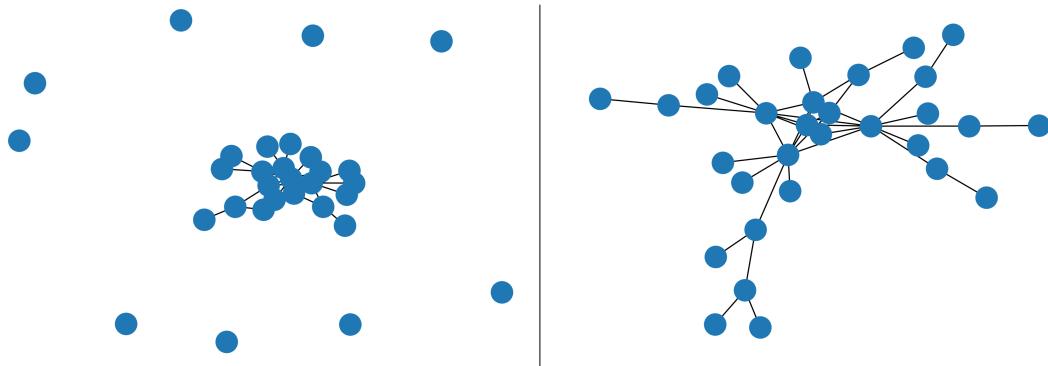
Les graphiques des résultats sont enregistrés par défaut dans le répertoire `output/`. Afin d'éviter que des fichiers soient écrasés, le nom des graphiques correspond au moment de leur création, sous le format `AAAA_MM_JJ_HH_MM_SS.png`.

## Création des graphes de Watts-Strogatz

Pour les graphes de Watts-Strogatz, nous commençons par créer un graphe, comme mentionné dans la section 3. Nous avons décidé de fixer  $m = 3$ . Nous itérons sur tous les liens en initialisant un nombre aléatoire, et gardons en mémoire tous les liens pour lesquels  $s < p$ . Nous faisons ceci afin de ne pas modifier les arêtes du graphe lors de la sélection des liens à déplacer. Dans le package `networkx`, les liens sont stockés dans des tuples de taille 2. En itérant sur tous les liens sélectionnés, nous sélectionnons un nouveau sommet afin de remplacer la deuxième composante du tuple. Nous avons fait en sorte que ce sommet ne soit ni l'ancien sommet (pour s'assurer que le nouveau lien soit différent du précédent), ni le même sommet que la première composante du tuple (pour éviter les liens d'un sommet à lui-même). À noter que la fonction `create_watts_strogatz` possède un argument `printStep` (booléen), afin d'afficher le graphe avant et après, ainsi que la liste des liens modifiés.

## Création des graphes de Barabasi-Albert

Pour cette variété de graphes, nous respectons l'algorithme décrit dans [2]. Nous avons choisi de partir d'un graphe complet à 5 sommets. Nous avons remarqué que de nombreux sommets étaient isolés (voir Figure 4), et avons donc implémenté la fonction `make_connected` afin de remédier à ce problème

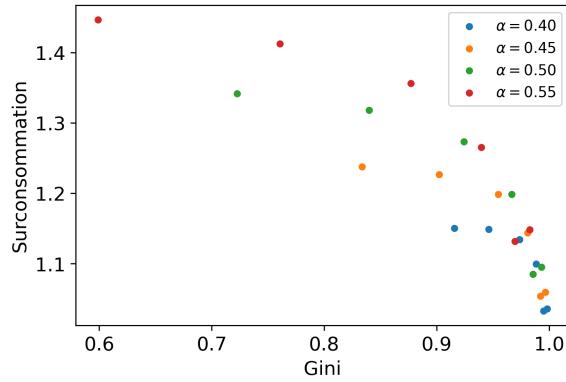


**FIGURE 4** – Graphes résultant de la fonction `create_barabasi_albert`, sans connecter les liens (à gauche), et en les connectant (à droite).

Nous présentons dans les sections suivantes les résultats concernant le graphe en arbre, et les graphes de Watts-Strogatz (WS) et de Barabasi-Albert (BA). Les résultats pour Erdős-Rényi et Hidden parameters peuvent être consultés dans le rapport de Amandine CAPACCI.

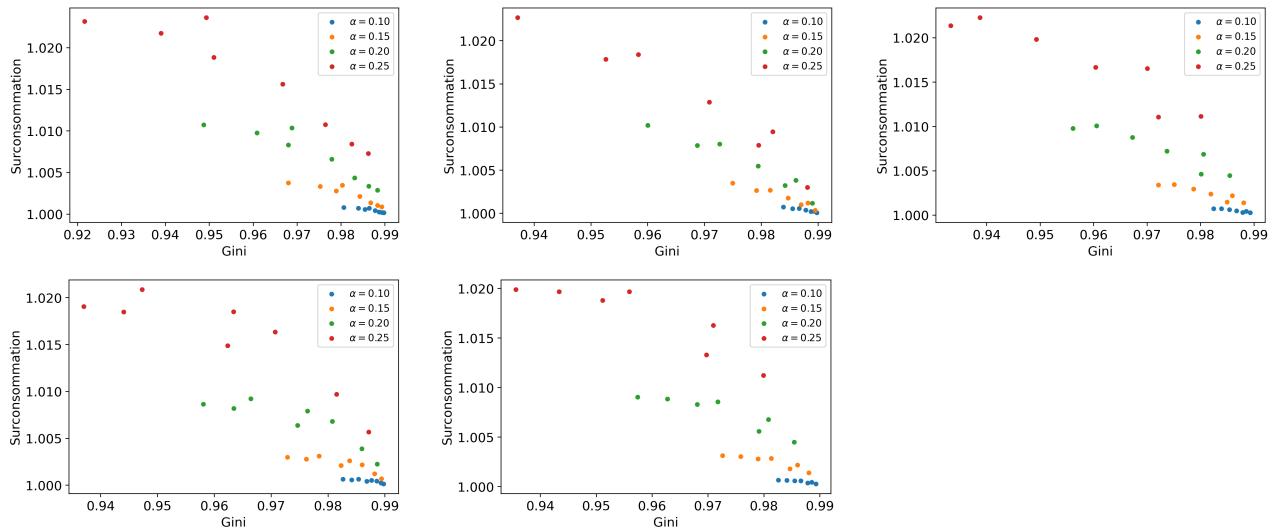
## 5.2 Gini vs surconsommation

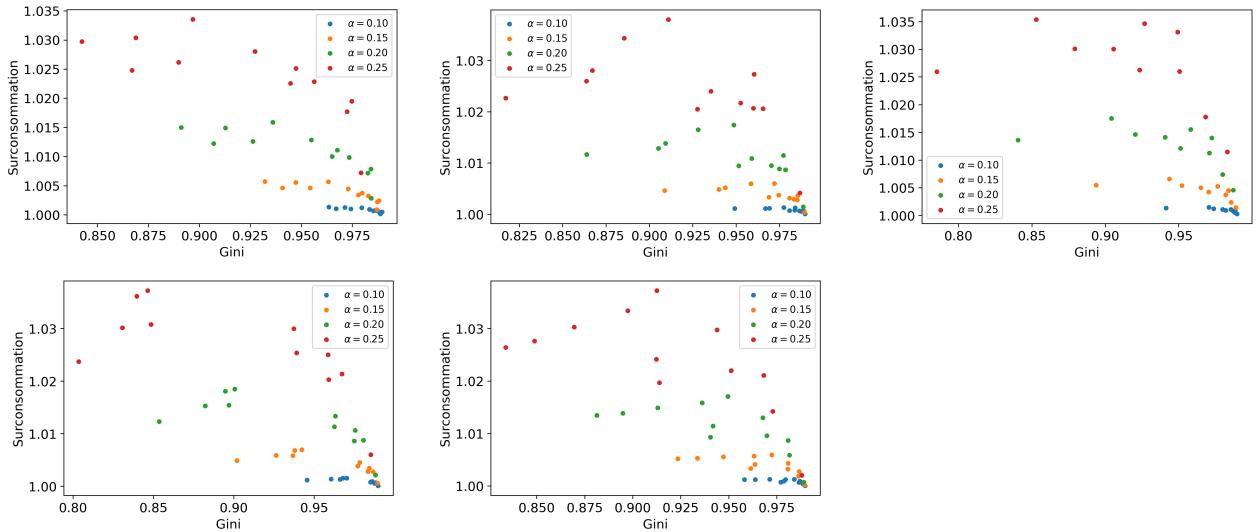
Nous présentons dans cette section les résultats de l'analyse de la surconsommation en fonction du coefficient de Gini, pour différentes valeurs du coefficient d'altruisme  $\alpha$ . L'objectif est de s'assurer que nous retrouvons bien les tendances mentionnées dans le papier .

**FIGURE 5** – Arbre régulier de hauteur  $h = 5$  et rapport de branchement  $r = 4$ .

On retrouve bien le comportement annoncé par l'article. La surconsommation semble diminuer brusquement lorsque le coefficient de Gini s'approche de 1. Nous voulons également effectuer cette analyse sur les graphes aléatoires. Pour rendre nos résultats plus crédibles, nous faisons les modélisations sur 5 graphes différents pour s'assurer que la tendance reste la même, malgré la composante aléatoire lors de la conception des graphes.

### Watts-Strogatz :

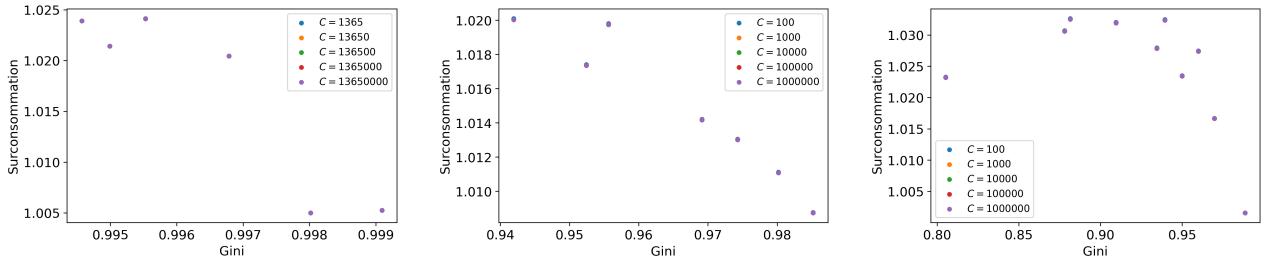
**FIGURE 6** – Watts-Strogatz, 100 joueurs,  $p = 0.7$ ,  $m = 3$ .

**Barabasi-Albert :****FIGURE 7** – Barabasi-Albert, 100 joueurs.

De façon générale, on retrouve la même tendance inverse pour tous les graphes. Les points sont cependant moins ordonnés en ce qui concerne les graphes (WS) et (BA), peut être à cause de leur construction aléatoire. En ce qui concerne la surconsommation, on remarque également que l'ordre de grandeur des valeurs ne sont pas les mêmes (environ 0.4 pour l'arbre régulier, et moins de un dixième pour les deux autres). Nous étudions l'amplitude des valeurs de la surconsommation et du coefficient de Gini dans la section 5.5.

### 5.3 Surconsommation et Gini pour différentes valeurs de la consommation totale

Nous voulons maintenant analyser l'évolution des graphiques de la surconsommation et du coefficient de Gini en faisant varier la consommation totale  $C$ . Nous ne faisons cette fois-ci qu'un graphique par famille de graphe. Nous choisissons de fixer le coefficient d'altruisme à  $\alpha = 0.25$ . Les valeurs de la consommation totale sont fixées de façon à couvrir une large sélection de valeurs.

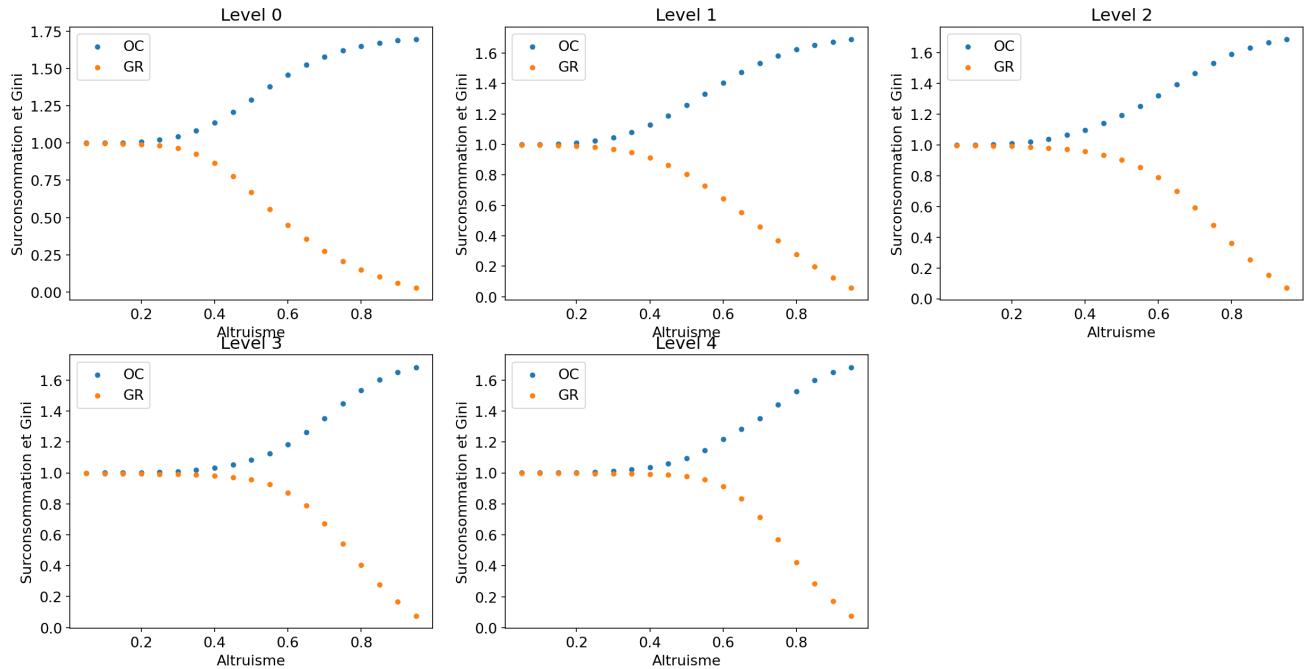
**FIGURE 8** – Surconsommation en fonction de Gini pour un arbre régulier (Gauche) un graphe de Watts-Strogatz (Centre) et Barabasi-Albert (Droite)

Pour tous les graphes, les courbes de la surconsommation en fonction du coefficient de Gini semblent se superposer relativement bien, pour des valeurs de la consommation totale couvrant plusieurs ordres de grandeur. Nous pouvons donc considérer que ce paramètre n'a pas d'influence sur les résultats obtenus.

## 5.4 Riches à des positions différentes

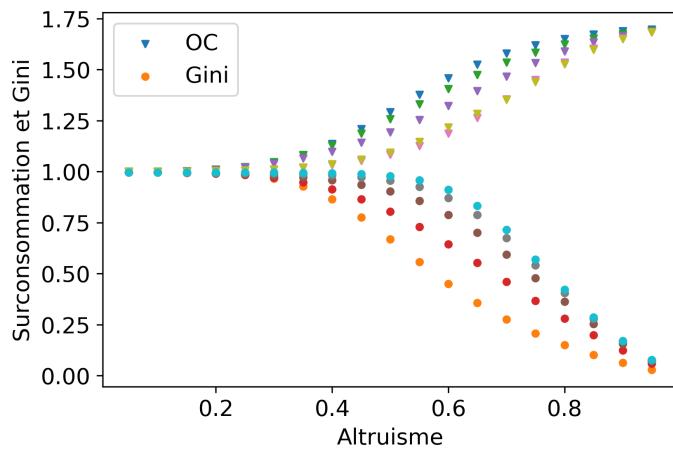
Nous étudions maintenant la surconsommation et le coefficient de Gini en plaçant un riche à des positions différentes dans le graphe en arbre. Pour les graphes aléatoires, nous choisissons un riche pour chaque valeur de degré des sommets.

### Arbre régulier



**FIGURE 9** – Caption

Il est plus commode d'afficher les courbes sur un même graphique :



**FIGURE 10** – Arbre régulier

Dans tous les cas, on observe que le coefficient de Gini chute vers 0 à partir d'une certaine valeur du coefficient d'altruisme. Dans le cas où le joueur le plus riche se trouve tout en haut du graphe, cette chute

arrive plus rapidement que lorsque le joueur est tout en bas. Cela peut s'expliquer avec l'architecture du graphe : le joueur placé tout en bas est positionné deux fois plus loin que le joueur tout en haut du graphe pour atteindre le joueur à l'autre extrémité. Ce graphique illustre deux aspects mentionnés dans le papier [1]. Premièrement, le compromis entre la surconsommation et les inégalités entre les joueurs ; la baisse des inégalités est envisageable, mais au détriment de la qualité du bien commun, en raison de l'augmentation de la surconsommation. Deuxièmement, ces résultats illustrent l'idée que, dans un graphe non-complet, l'altruisme n'est pas suffisant afin de lutter contre la dégradation du bien commun.

### Watts Strogatz

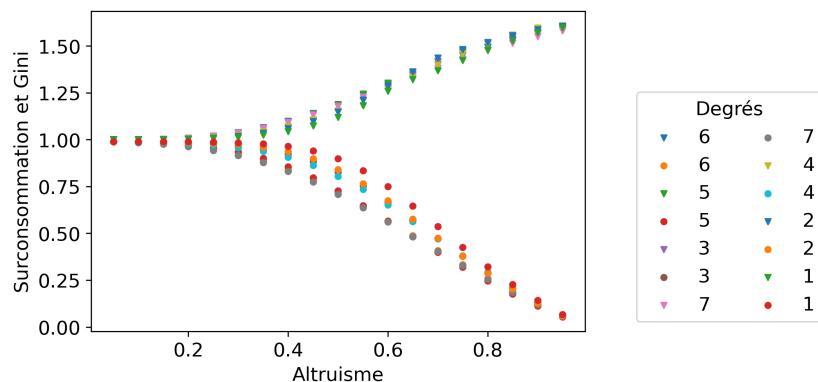


FIGURE 11 – Watts-Strogatz

### Barabasi Albert

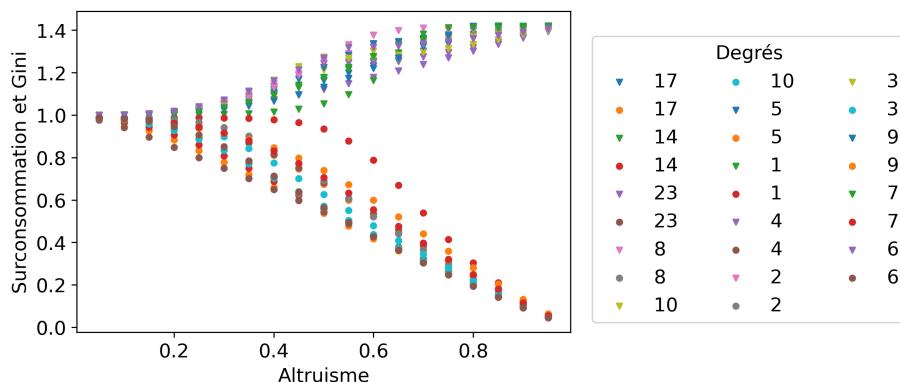
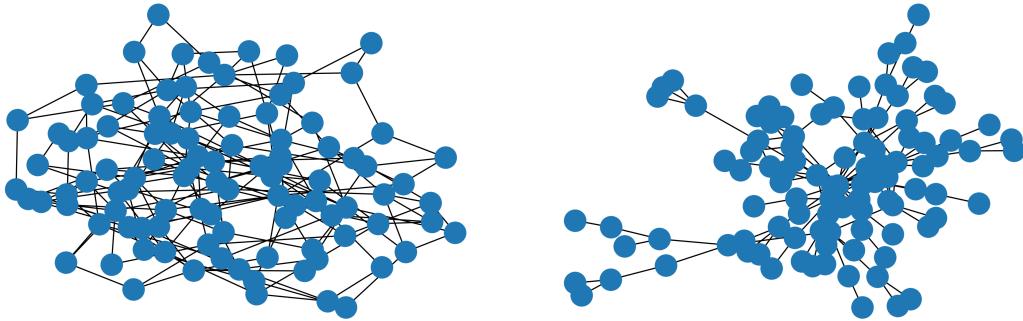


FIGURE 12 – Barabasi-Albert

On retrouve la même tendance que pour le graphe en arbre. Il est intéressant de constater que la largeur des courbes est plus fine pour le modèle (WS) que pour (BA). Cette différence est peut-être dûe à la structure des graphes. En effet, en regardant la Figure 13, on remarque que les liens entre les joueurs du modèle de Watts-Strogatz ont l'air plus connectés que dans le modèle de Barabasi-Albert. Ces structures sont peut-être la cause de cette différence sur les graphiques. On observe également que les degrés sur le modèle de WS couvre des valeurs entre 1 et 7, tandis que le modèle BA couvre des valeurs entre 1 et 23.

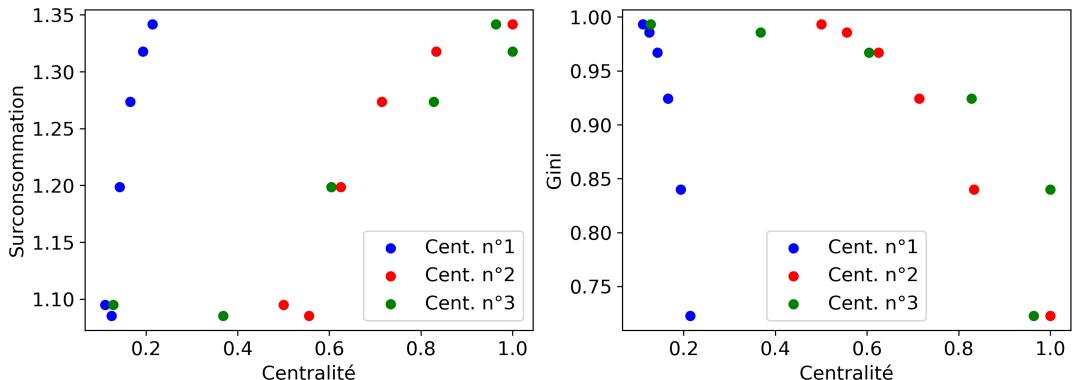
**FIGURE 13** – Modèles de Watts-Strogatz (à gauche) et modèle de Barabasi-Albert (à droite). Graphes à 100 joueurs.

## 5.5 Centralités

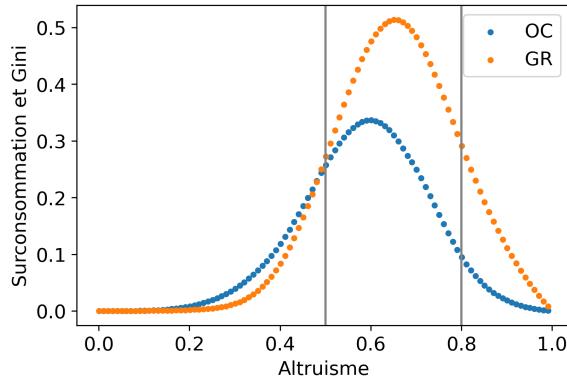
Dans cette section nous présentons les résultats concernant l'analyse de la centralité des joueurs et son lien avec la surconsommation et le coefficient de Gini. Dans les modélisations, nous avons posé  $\alpha = 0.5$ , et  $\delta = \alpha^2$ .

### Arbre régulier

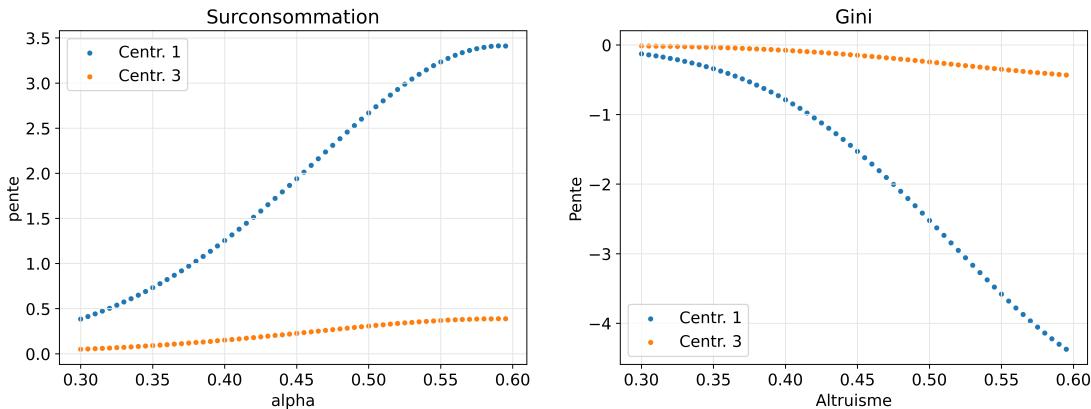
Nous voulons étudier la surconsommation et le coefficient de Gini en fonction des trois centralités différentes. On effectue d'abord la modélisation sur un arbre régulier de hauteur  $h = 5$  et de rapport de branchement  $r = 4$ . Nous posons le coefficient d'altruisme à  $\alpha = 4$ .

**FIGURE 14** – Arbre régulier

Comme nous pouvons le constater, il semble y avoir une relation entre ces grandeurs. Les points semblent former une droite, nous allons donc étudier comment évolue la pente des régressions linéaires pour différentes valeurs du coefficient d'altruisme. Nous voulons sélectionner les valeurs pour  $\alpha$  telles que l'amplitude de la surconsommation et du coefficient de Gini (la différence entre la valeur maximum et la valeur minimum). La Figure 15 représente le graphique des amplitudes en fonction du coefficient d'altruisme.

**FIGURE 15** — Arbre régulier — Amplitudes de la surconsommation et du coefficient de Gini

Cette figure nous permet de sélectionner<sup>1</sup> les bornes pour  $\alpha$ . Nous allons nous intéresser aux centralités données par les équations 1 et 3.

**FIGURE 16** — Arbre régulier

Les graphiques ci-dessus montrent des points bien agencés, ce qui laisse penser à une relation entre le modèle de la régression linéaire et le coefficient d'altruisme. Les résultats ont l'air cohérents ; la pente de la surconsommation est positive (dégradation du bien public) et la pente du coefficient de Gini est négative (augmentation des inégalités). On remarque également que la pente varie beaucoup moins pour la centralité 3 que la centralité 1. Cette tendance se fait remarquer sur tous les types de graphes.

Nous effectuons les mêmes manipulations sur les modèles de graphes aléatoires.

1. Sur le graphique des amplitudes, les barres verticales fixent les valeurs entre  $\alpha_{\min} = 0.5$  et  $\alpha_{\max} = 0.8$ . Cependant les valeurs de  $\alpha$  sur les graphiques de la Figure 16 vont entre 0.3 et 0.8. Il s'agit d'une petite erreur d'implémentation.

## Watts-Strogatz

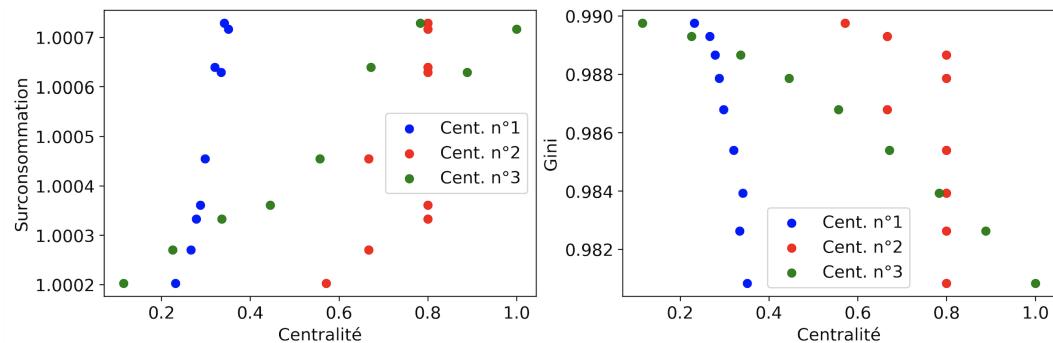


FIGURE 17 – Watts-Strogatz

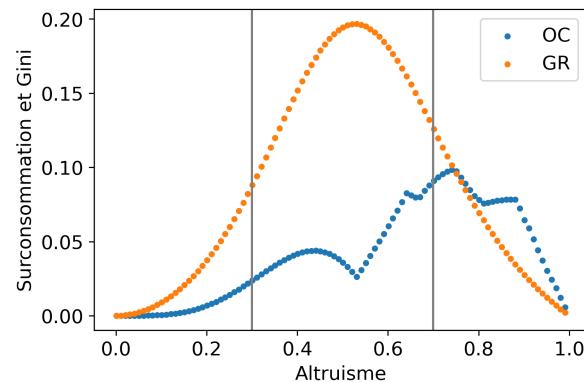


FIGURE 18 – Watts-Strogatz — Amplitudes de la surconsommation et du coefficient de Gini

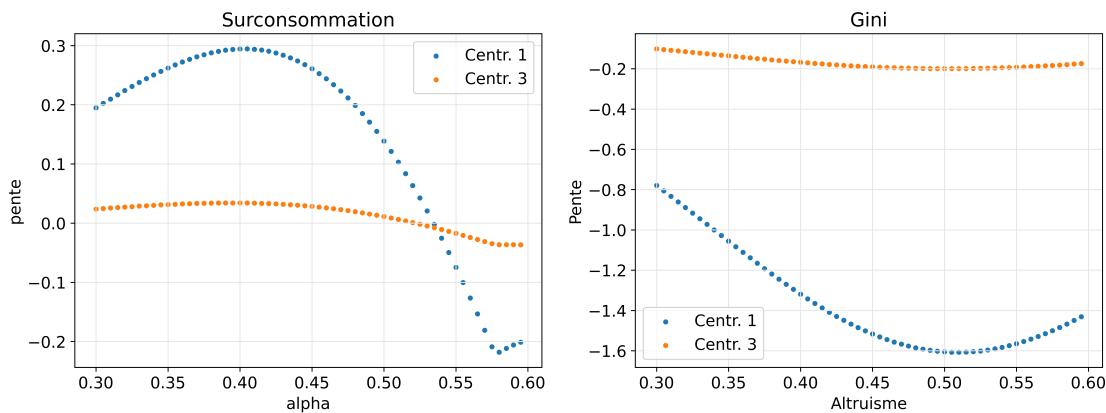


FIGURE 19 – Watts-Strogatz

## Barabasi-Albert

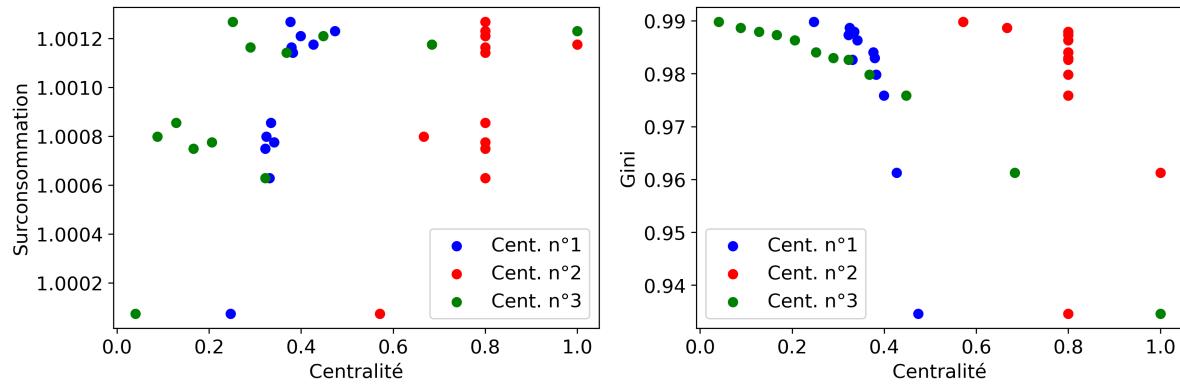


FIGURE 20 — Barabasi-Albert

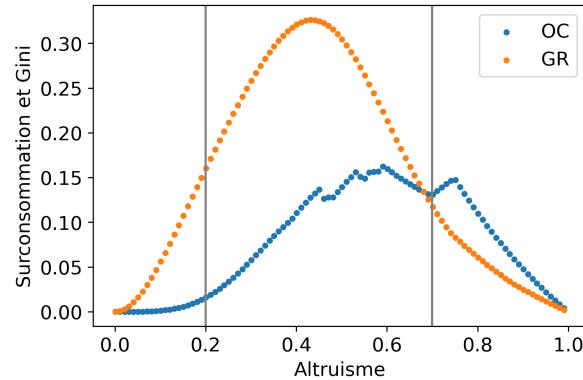


FIGURE 21 — Barabasi-Albert — Amplitudes de la surconsommation et du coefficient de Gini

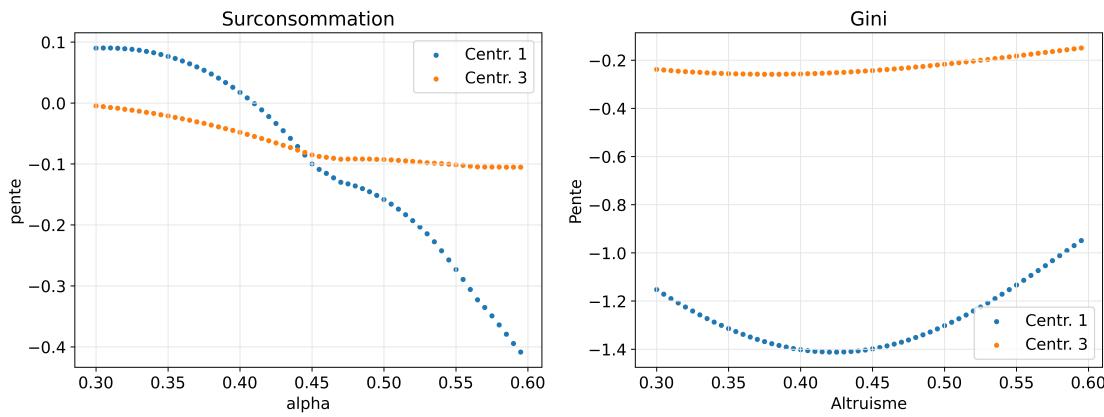


FIGURE 22 — Barabasi-Albert

Concernant les graphiques pour les modèles de Watts-Strogatz et Barabasi-Albert, nous pouvons tirer les mêmes conclusions que pour le graphe en arbre ; il semble y avoir une relation entre le modèle linéaire et le coefficient d'altruisme. On remarque que, à partir d'une certaine valeur du coefficient d'altruisme, la pente recommence à monter. Ceci est sûrement dû à la structure du graphe, il aurait fallu faire plusieurs essais pour voir si cette tendance reste la même.

On remarque que les tendances sont les mêmes pour les deux modèles aléatoires, mais ceux-ci diffèrent du graphe en arbre. La pente de la surconsommation diminue, et le coefficient de Gini semble atteindre un minimum dans le voisinage de  $\alpha = 0.45$ .

Certaines irrégularités se font remarquer sur les courbes de l'amplitude de la surconsommation. Ceci est sûrement dû à la formation aléatoire des graphes. Ces irrégularités peuvent s'apercevoir sur les courbes de la pente en fonction du coefficient d'altruisme.

De façon générale, on remarque que les variations sont moins importantes pour la troisième centralité. Il aurait été intéressant de faire ces modélisations avec différentes valeurs de  $\delta$  afin de voir comment cette courbe évolue. En effet, dans la définition de la troisième centralité,  $\delta$  agit comme un facteur d'atténuation.

## 6 Conclusion

Ce travail nous a permis de déterminer s'il existait une relation entre la centralité d'un joueur, la surconsommation et le coefficient de Gini. Nous avons développé les algorithmes pour construire les différents modèles de graphes, et vérifié que nous retrouvions les mêmes tendances que dans le papier [1]. Nous avons aussi pu conclure que les résultats étaient indépendants de la valeur de la consommation totale. Pour aller plus loin dans le travail sur les centralités, il serait intéressant d'étudier l'écart type des régressions linéaires afin de déterminer la validité de ces résultats. Il serait également intéressant de continuer d'étudier la notion de centralité. En effet, celle-ci peut être définie de différentes manières, et les résultats ne sont pas exactement les mêmes.

## Références

- [1] A. FOSSAS-TENAS et al. Paradoxical effects of altruism on efforts to mitigate climate change. 2022.
- [2] Albert László BARABÁSI. Network science. <http://networksciencebook.com>.