Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

"ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ"

Агарёва Любовь Андреевна
студентка 2 курса 4 группы

Преподаватель:
Дайняк Виктор
Владимирович

Минск, 2019 г.

Доказать, что оператор является линейным ограниченным, найти его норму.

1. X = C[-10, 10]; $Ax(t) = (5 - |t+8|)x(t)$

   Докажем линейность:

   $A(x(t)+y(t)) = (5-|t+8|)(x(t)+y(t)) = Ax(t) + Ay(t)$
   $A(\alpha x(t)) = \alpha(5-|t+8|)x(t) = \alpha Ax(t)$

   Докажем ограниченность:

   $||Ax(t)|| = max_{t\in[-10,10]}|Ax(t)| = max|(5-|t+8|)x(t)| \leq 13||x||$ Т.о. $||A|| \leq 13$

   Возьмём x = 10. Тогда

   $||A|| \geq \frac{||Ax(t)||}{||x||} = \frac{13*10}{10} = 13$

   Ответ: $||A|| = 13$

2. X = C[-2, 0]; $Ax(t) = (t^2+t-1)x(t)$

   Докажем линейность:

   $A(x(t)+y(t)) = (t^2+t-1)(x(t)+y(t)) = Ax(t) + Ay(t)$
   $A(\alpha x(t)) = \alpha(t^2+t-1)x(t) = \alpha Ax(t)$

   Докажем ограниченность:

   $||Ax(t)|| = max_{t\in[-2,0]}|Ax(t)| = max|(t^2+t-1)x(t)| \leq \frac{5}{4}||x||$ Т.о. $||A|| \leq \frac{5}{4}$

   Возьмём x так, чтобы

   $||A|| \geq \frac{||Ax(t)||}{||x||} = \frac{\frac{5}{4}*1}{1} = \frac{5}{4}$

   Ответ: $||A|| = \frac{5}{4}$

3. X = C[-1, 3]; Y = C[-2, 0]; $Ax(t) = \int_{-1}^{1}(1+t)s^5x(s)ds$

   Докажем линейность: $A(\alpha x(t)+\beta y(t)) = \int_{-1}^{1}(1+t)s^5(\alpha x(s)+\beta y(s)ds) = \alpha\int_{-1}^{1}(1+t)s^5x(s)ds + \beta\int_{-1}^{1}(1+t)s^5y(s)ds = \alpha Ax(t) + \beta Ay(t)$

Докажем ограниченность:

$||Ax(t)|| = max_{t\in[-2,0]}|Ax(t)| = max|\int_{-1}^{1}(1+t)s^5x(s)ds| \leq max_[-1,3]|x(s)|\int_{-1}^{1}|s^5|ds \leq max|x(s)|\frac{1}{3} = ||x(s)||\frac{1}{3}$
Т.о. $||A|| \leq \frac{1}{3}$

$$x_0 = \begin{cases} -1; t\in[-1;-\frac{1}{n}[\\ 1; t\in]\frac{1}{n};3[\\ nt; t\in[-\frac{1}{n};\frac{1}{n}] \end{cases}$$

$||x_0|| = 1$
$Ax_0 = -\int_{-1}^{-\frac{1}{n}}(1+t)s^5x(s)ds + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}(1+t)ns^6x(s)ds + \int_{\frac{1}{n}}^{1}(1+t)s^5x(s)ds =$
$= \frac{(n^6-1)(tn)}{3n^6} + \frac{2tn}{7n^6} = \frac{(7n^6-1)(tn)}{21n^6}$

$||Ax_0|| = max_{[-2,0]}|\frac{(7n^6-1)(tn)}{21n^6}| = \frac{1}{3}$

Ответ: $||A|| = \frac{1}{3}$

4. X = C[-1, 1]; Y = $L_{\frac{5}{2}}[0,1]$; $Ax(t) = \int_0^1(1+t)x(s)ds - 3x(0)$

Докажем линейность: $A(\alpha x(t)+\beta y(t)) = \int_0^1(1+t)(\alpha x(s)+\beta y(s)ds) - 3\alpha x(0) - 3\beta y(0) = \alpha\int_0^1(1+t)x(s)ds + \beta\int_0^1(1+t)y(s)ds - 3\alpha x(0) - 3\beta y(0) = \alpha Ax(t) + \beta Ay(t)$

Докажем ограниченность:

$||Ax(t)|| = max_{t\in[0,1]}|Ax(t)| = (\int_0^1(\int_0^1(1+t)x(s)ds - 3x(0))^{\frac{5}{2}})dt)^{\frac{5}{2}} \leq$
$\leq max_{[0,1]}|x(t)(\int_0^1|\int_0^1(t+1)ds + 3|^{\frac{5}{2}}dt)^{\frac{2}{5}} \leq ||x||(\int_o^1(t+1+3)^{\frac{5}{2}}dt)^{\frac{2}{5}} \leq ||x||(5^{\frac{7}{2}} - 4^{\frac{7}{2}})^{\frac{2}{5}} * (\frac{2}{7})^{\frac{2}{5}}$
Т.о. $||A|| \leq (5^{\frac{7}{2}} - 4^{\frac{7}{2}})^{\frac{2}{5}} * (\frac{2}{7})^{\frac{2}{5}}$

$x_0 = 1 - \frac{t}{n}, t \in [0,1]$
$||x_0|| = 1$ $||Ax_0|| = (\int_0^1 |\int_0^1 (t+1)(1-\frac{t}{n})ds + 3|^{\frac{5}{2}} dt)^{\frac{2}{5}} \leq$
$\leq (\int_0^1 (t+1)(1-\frac{1}{2n})ds + 3|^{\frac{5}{2}} dt)^{\frac{2}{5}} =$
$= (\int_0^1 (t - \frac{1}{2n} + 4)^{\frac{5}{2}} dt)^{\frac{2}{5}} -> (5^{\frac{7}{2}} - 4^{\frac{7}{2}})^{\frac{2}{5}} * (\frac{2}{7})^{\frac{2}{5}}$ Т.о. $||A|| \geq (5^{\frac{7}{2}} - 4^{\frac{7}{2}})^{\frac{2}{5}} * (\frac{2}{7})^{\frac{2}{5}}$

Ответ: $||A|| = (5^{\frac{7}{2}} - 4^{\frac{7}{2}})^{\frac{2}{5}} * (\frac{2}{7})^{\frac{2}{5}}$

5. X = C[-2, 2]; Y = C[3, 5];
   $Ax(t) = \int_{-1}^1 t(s+1)x(s)ds$

   Докажем линейность: $A(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \int_0^1 t(s+1)(\alpha x(s) + \beta y(s)ds) = \alpha \int_0^1 t(s+1)x(s)ds + \beta \int_0^1 t(s+1)y(s)ds = \alpha Ax(t) + \beta Ay(t)$

   Докажем ограниченность: $||Ax(t)|| = max_{t \in [3,5]} |\int_{-1}^1 t(s+1)x(s)ds| \leq 5(\int_{-1}^1 (s+1)x(s)ds) \leq$
   $\leq 5||x||(\int_{-1}^1 t(s+1)ds) \leq 10||x||$

   Возьмём x = t;

   $||A|| \geq 10$

   Ответ: $||A|| = 10$

6. X = $L_2[0;1]$ Ax(t) = $|t^5 - t^8|x(t^3)$

   Докажем линейность: $A(\alpha x(t) + \beta y(t)) = |t^5 - t^8|(x(t^3) + \beta y(t^3)) = \alpha Ax(t) + \beta Ay(t)$

   Докажем ограниченность:

   $||Ax(t)|| = (\int_0^1 (|t^5 - t^8|x(t^3))^2 dt)^{\frac{1}{2}} = [t^3 = a] = \frac{1}{\sqrt{3}}(\int_0^1 (a^{\frac{8}{3}})(1-a)^2 x^2(a)da)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2^{\frac{8}{3}}}{3^{\frac{1}{2}} 5^{\frac{11}{3}}}||x||$

   $x_0 = \begin{cases} 1; t \in [\frac{2}{5} - \frac{1}{n}; \frac{2}{5} + \frac{1}{n}] \\ 0; t[\frac{2}{5} - \frac{1}{n}; \frac{2}{5} + \frac{1}{n}] \end{cases}$

   $||x_0|| = 1$

   $||A|| \geq \frac{2^{\frac{8}{3}}}{3^{\frac{1}{2}} 5^{\frac{11}{3}}}$

   Ответ: $||A|| = \frac{2^{\frac{8}{3}}}{3^{\frac{1}{2}} 5^{\frac{11}{3}}}$

7. X = C[-10, 10]; $Ax(t) = (5 - |t+8|)x(t)$

   Докажем линейность:

   $A(x(t) + y(t)) = (5 - |t+8|)(x(t) + y(t)) = Ax(t) + Ay(t)$
   $A(\alpha x(t)) = \alpha(5 - |t+8|)x(t) = \alpha Ax(t)$

   Докажем ограниченность:

   $||Ax(t)|| = max_{t \in [-10,10]}|Ax(t)| = max|(5 - |t+8|)x(t)| \leq 13||x||$ Т.о. $||A|| \leq 13$

   Возьмём x = 10. Тогда

   $||A|| \geq \frac{||Ax(t)||}{||x||} = \frac{13*10}{10} = 13$

   Ответ: $||A|| = 13$

8. X = C[-1, 1]; Y = [0, 1];
   $Ax(t) = \int_{-1}^1 (ln(t+5) + t)sx(s)ds$

   Докажем линейность:

   $A(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \int_{-1}^1 (ln(t+5) + t)s(\alpha x(s) + \beta y(s)ds) = \alpha \int_{-1}^1 (ln(t+5) + t)sx(s)ds + \beta \int_{-1}^1 (ln(t+5) + t)sy(s)ds = \alpha Ax(t) + \beta Ay(t)$

   Докажем ограниченность:

$||A|| = max_{t\in[0,1]} \int_{-1}^{1} (ln(t+5)+t)sx(s)ds \leq (1+ln6)\int_{-1}^{1} sx(s)ds \leq (1+ln6)||x|| * 1$

$x_0 = \begin{cases} -1; t \in [0; -\frac{1}{n}[\\ 1; t \in]\frac{1}{n}; 1[\\ nt; t \in [-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}] \end{cases}$

$||x_0|| = 1$

$||Ax_0|| = max_{t\in[0,1]}(\int_{-1}^{1}(ln(t+5)+t)sx(s)ds) =$
$= (1+ln6)\int_{-1}^{1} sx(s)ds =$
$= (1+ln6)(-\int_{0}^{\frac{1}{n}} sx(s)ds + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} ns^2x(s)ds + \int_{\frac{1}{n}}^{1} sx(s)ds) -> (1+ln6)$

Ответ: $||A|| = 1 + ln6$

9. X = C[-2, 8]; Ax(t) = $(t - \sqrt{t-2})x(t)$

   Докажем линейность:

   $A(x(t) + \beta y(t)) = (t - \sqrt{t-2})x(t) + \beta(t - \sqrt{t-2})y(t) = Ax(t) + \beta Ay(t)$

   Докажем ограниченность:

   $||Ax(t)|| = max_{t\in[-2,8]}|Ax(t)| = max|(t-\sqrt{t-2})x(t)| \leq max|(t-\sqrt{t-2})|||x|| \leq (8-\sqrt{6})||x||$ Т.о. $||A|| \leq 8 - \sqrt{6}$

   Возьмём x = t. Тогда

   $||A|| \geq \frac{||Ax(t)||}{||x||} = \frac{(8-\sqrt{6})*8}{8} = 13$

   Ответ: $||A|| = 8 - \sqrt{6}$

10. X = $L_3[-1,1]$; Ax(t) = $t^2x(t^3)$;

    Докажем линейность:

    $A(x(t) + \beta y(t)) = (\int_{-1}^{1} t^6(x(t^3) + \beta y(t^3))^3 dt)^{\frac{1}{3}} = (\int_{-1}^{1} t^6(x(t^3))^3 dt)^{\frac{1}{3}} + \beta(\int_{-1}^{1} t^6(\beta y(t^3))^3 dt)^{\frac{1}{3}} = Ax(t) + \beta Ay(t)$

    Докажем ограниченность:

    $||Ax(t)|| = (\int_{-1}^{1} t^6x^3(t^3)dt)^{\frac{1}{3}} =$
    $= (\int_{-1}^{1} u^2\frac{1}{3}u^{\frac{-2}{3}}(x^3(u))du)^{\frac{1}{3}} =$
    $= (\int_{-1}^{1} \frac{1}{3}u^{\frac{4}{3}}|x^3(u)|du)^{\frac{1}{3}} \leq$
    $\leq (\frac{2}{3})^{\frac{1}{3}}||x(t)||$
    Т.о. $||A|| \leq (\frac{2}{3})^{\frac{1}{3}}$

    $x_0 = \begin{cases} \sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}; t \in [1; 1-\frac{1}{n}] \\ 0; t \in [1-\frac{1}{n}; -1] \end{cases}$

    $||x_0|| = \int_{1-\frac{1}{n}}^{1}(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}) = \dots = \frac{1}{n}$
    $||A|| \geq \frac{||Ax(t)||}{||x||} = (\frac{2}{3})^{\frac{1}{3}}$

    Ответ: $||A|| = (\frac{2}{3})^{\frac{1}{3}}$