

MT11-62Б

Максим Зотов

Вариант 5 (10)

Содержание

1	Заданные условия	3
2	Последовательность выполняемых этапов	3
3	Математическое обеспечение основных этапов	4
3.1	Получение волнового уравнения (уравнение Гельмгольца)	4
3.1.1	Дифференцирование комплексной формы	4
3.1.2	Дифференцирование тригонометрической формы	5
3.2	Переход от уравнения в общем виде к уравнению для фазора . . .	6
3.3	Переход от формулы для амплитуды к формуле для интенсивности	6
3.4	Анализ порядка аппроксимаций	7
3.4.1	Фазовый член	8
3.4.2	Амплитудный член	10
3.4.3	Итог	10
4	Программное обеспечение	11
4.1	Запуск Matlab	11
4.2	Алгоритм расчёта, листинг программы	11
4.3	Методика расчёта	13

5	Иллюстрации	14
5.1	Расчётная схема	14
5.2	Входное распределение интенсивности	14
5.3	Профиль распределения интенсивности	15

1 Заданные условия

Линейный размер окна	W	3	[мкм]
Микрозазор	z	1,186662	[мкм]
Длина волны актиничного излучения	λ	0.24	[мкм]

2 Последовательность выполняемых этапов

Разбиваем область изображения на подложке на $n = 500$ отрезков. Далее вычисляем пределы интегрирования для каждой из точек

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -\sqrt{\frac{k}{\pi z}} \left(x + \frac{W}{2} \right) \\ \xi_2 &= \sqrt{\frac{k}{\pi z}} \left(-x + \frac{W}{2} \right)\end{aligned}\tag{1}$$

Затем вычисляем интегралы Френеля в каждой точке

$$\begin{aligned}C(\xi_1) &= \int_0^{\xi_1} \cos \frac{\pi \xi^2}{2} d\xi, & C(\xi_2) &= \int_0^{\xi_2} \cos \frac{\pi \xi^2}{2} d\xi \\ S(\xi_1) &= \int_0^{\xi_1} \sin \frac{\pi \xi^2}{2} d\xi, & S(\xi_2) &= \int_0^{\xi_2} \sin \frac{\pi \xi^2}{2} d\xi\end{aligned}\tag{2}$$

Рассчитываем значение интенсивности излучения в каждой из точек

$$I(x_i) = \frac{1}{2} \left([C(\xi_2) - C(\xi_1)]^2 + [S(\xi_2) - S(\xi_1)]^2 \right)\tag{3}$$

Строим график распределения интенсивности рис. 3

3 Математическое обеспечение основных этапов

3.1 Получение волнового уравнения (уравнение Гельмгольца)

Требуется получить уравнение Гельмгольца

$$(\Delta + k^2) U(x) = 0, \text{ где} \quad (4)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad - \text{оператор Лапласа} \quad (5)$$

двумя способами.

3.1.1 Дифференцирование комплексной формы

Запишем уравнение гармонических колебаний в комплексной форме

$$U(x, t) = Ae^{i(-kx+\varphi)}e^{i\omega t} \quad (6)$$

Возьмём частные производные функции $U(x, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} &= -ikAe^{i(-kx+\varphi)}e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = iA\omega e^{i(-kx+\varphi)}e^{i\omega t} \\ \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} &= -k^2Ae^{i(-kx+\varphi)}e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = -A\omega^2 e^{i(-kx+\varphi)}e^{i\omega t} = -\omega^2 U(x, t) \end{aligned} \quad (7)$$

Сравним частные производные функции $U(x, t)$ между собой

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U(x, t) = 0 \quad (8)$$

Подставляя из (7) в (8), получим

$$-k^2Ae^{i(-kx+\varphi)}e^{i\omega t} - \frac{1}{c^2} \left(-A\omega^2 e^{i(-kx+\varphi)}e^{i\omega t} \right) = 0 \quad (9)$$

Сократим на A , $e^{i(-kx+\varphi)}$ и $e^{i\omega t}$ (поскольку показательная функция ненулевая), получим

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (10)$$

Перепишем (8) с учётом последнего уравнения (7)

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U(x,t) &= 0 \\ \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} U(x,t) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Из (5) и (10) получим

$$(\Delta + k^2) U(x,t) = 0 \quad (12)$$

3.1.2 Дифференцирование тригонометрической формы

Запишем уравнение гармонических колебаний

$$U(x,t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi) \quad (13)$$

Возьмём частные производные функции $U(x,t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x,t)}{\partial x} &= -Ak \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = A\omega \cos(\omega t - kx + \varphi) \\ \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} &= -Ak^2 \sin(\omega t - kx + \varphi), \quad \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t - kx + \varphi) = -\omega^2 U(x,t) \end{aligned} \quad (14)$$

Сравним частные производные функции $U(x,t)$ между собой

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] U(x,t) = 0 \quad (15)$$

Подставляя последнее уравнение из (14) в (15) с учётом (10), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} U(x,t) &= 0 \\ \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + k \cdot U(x,t) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Из (5) получим

$$(\Delta + k^2) U(x,t) = 0 \quad (17)$$

3.2 Переход от уравнения в общем виде к уравнению для фазора

Из уравнений (12) и (17) видно, что они зависят не только от x , но и от t , хотя уравнение Гельмгольца (4) зависит только от x .

Попробуем перейти от уравнения в общем виде $U(x, t)$ к уравнению для фазора $U(x)$. Запишем функцию $U(x, t)$ в комплексном виде

$$U(x, t) = Ae^{i(-kx + \varphi)} e^{i\omega t} = U(x) \cdot e^{i\omega t} = [U(x) \cdot U(t)] \quad (18)$$

Комплексное уравнение гармонических колебаний (18) состоит из произведения фазора $U(x)$ на составляющую колебания, зависящую от времени (фазор от времени не зависит и часто используется как самостоятельный параметр волны).

В большинстве физико-оптических явлений частота колебаний остаётся неизменной ($\omega = \text{const}$), поэтому выражение $U(t) = e^{i\omega t}$ при расчётах обычно опускают

Учитывая это и (18) получим

$$(\Delta + k^2) U(x) = 0 \quad (19)$$

3.3 Переход от формулы для амплитуды к формуле для интенсивности

Одно из свойств комплексных чисел – наличие у каждого из них сопряженного (сопряжённые числа, числа отличающиеся только знаком мнимой части).

Из формулы (6.17): интенсивность поля, т.е. средняя по времени энергия, протекающая в единицу времени через единицу площади, пропорциональна квадрату амплитуды световой волны, т.е. $I(x) \sim U^2$.

$$I(x) \sim Ue^{i\varphi} Ue^{-i\varphi} = U^2 \quad (20)$$

Из формулы (6.58)

$$U(x_i, y_i) = \frac{e^{ikz}}{2i} ([C(\xi_2) - C(\xi_1)] + i [S(\xi_2) - S(\xi_1)]) \cdot \\ \cdot ([C(\eta_2) - C(\eta_1)] + i [S(\eta_2) - S(\eta_1)]) \quad (21)$$

При домножении (21) на комплексное сопряжённое, получим

$$U(x_i, y_i) \times U^*(x_i, y_i) = \frac{e^{ikz}}{2i} ([C(\xi_2) - C(\xi_1)] + i [S(\xi_2) - S(\xi_1)]) \cdot \\ \cdot ([C(\eta_2) - C(\eta_1)] + i [S(\eta_2) - S(\eta_1)]) \times \\ \times \frac{e^{(-i)kz}}{2(-i)} ([C(\xi_2) - C(\xi_1)] + (-i) [S(\xi_2) - S(\xi_1)]) \cdot \\ \cdot ([C(\eta_2) - C(\eta_1)] + (-i) [S(\eta_2) - S(\eta_1)]) \quad (22)$$

Из (20):

$$I(x_i, y_i) = \frac{e^{ikz+(-i)kz}}{2i \cdot 2(-i)} \left([C(\xi_2) - C(\xi_1)]^2 + i \cdot (-i) [S(\xi_2) - S(\xi_1)]^2 \right) \cdot \\ \cdot \left([C(\eta_2) - C(\eta_1)]^2 + i \cdot (-i) [S(\eta_2) - S(\eta_1)]^2 \right) \quad (23)$$

Таким образом

$$I(x_i, y_i) = \frac{1}{4} \left([C(\xi_2) - C(\xi_1)]^2 + [S(\xi_2) - S(\xi_1)]^2 \right) \cdot \\ \cdot \left([C(\eta_2) - C(\eta_1)]^2 + [S(\eta_2) - S(\eta_1)]^2 \right) \quad (24)$$

3.4 Анализ порядка аппроксимаций

Проанализировать и обосновать, почему для амплитудного члена выражения можно провести аппроксимацию *первого порядка*, а для фазового члена выражения необходимо провести аппроксимацию *второго порядка*.

Весовая функция определяется выражением:

$$h(x_0, x_i) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{ikr_i}}{r_i} \frac{z}{r_i}, \text{ где} \quad (25)$$

- e^{ikr_i} – фазовый член, сферическая волна, умноженная на r_i

- $A(x_0, x_i) = \frac{1}{i\lambda} \frac{z}{r_i^2}$ – амплитудный член, коэффициент наклона, делённый на $i\lambda r_i$

Рассмотрим предел отношения фазового члена к амплитудному для установления порядка роста/малости

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{e^{kr_i}}{A(x_0, x_i)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{e^{kr_i}}{\frac{1}{\lambda} \frac{z}{r_i^2}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{e^{kr_i} \lambda r_i^2}{z} = \infty \quad (26)$$

Получили, что экспоненциальный член обладает большим порядком роста, нежели амплитудный, поэтому его точность должна превалировать над точностью амплитудного члена.

3.4.1 Фазовый член

Точная формула расстояния r_i из *рис. 6.9*

$$r_i = \sqrt{z^2 + (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} \quad (27)$$

Следуя Френелю, полагаем, что расстояние z между экраном (объектом) и плоскостью наблюдения (изображением) значительно превышает линейный размер окна, выражение (27) примет вид

$$\begin{aligned} r_i &= \sqrt{1 + (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} = \sqrt{z^2 + \rho^2} = z \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{z}\right)^2} \approx \\ &\approx z \left(1 + \frac{\left(\frac{\rho}{z}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{\rho}{z}\right)^4}{8} + \frac{\left(\frac{\rho}{z}\right)^6}{16} - \frac{5 \cdot \left(\frac{\rho}{z}\right)^8}{128} + o\left(\left(\frac{\rho}{z}\right)^{10}\right) \right) = \\ &= z + \frac{\rho^2}{2z} - \frac{\rho^4}{8z^3} + \frac{\rho^6}{16z^5} - \frac{5\rho^8}{128z^7}, \text{ где } \end{aligned} \quad (28)$$

- $\rho^2 = (x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2$ – квадрат расстояния между точками распространения сферической волны и точками их суммирования в плоскости наблюдения
- $z + \frac{\rho^2}{2z} - \frac{\rho^4}{8z^3} \dots$ – разложение выражение вида $\sqrt{1 + \text{б.м.}}$ в ряд Тейлора

На рисунке 1 показана исходная функция $\sqrt{1+x^2}$ и замена её на разложение Тейлора. В пределах 0 функции ведут себя практически идентично.

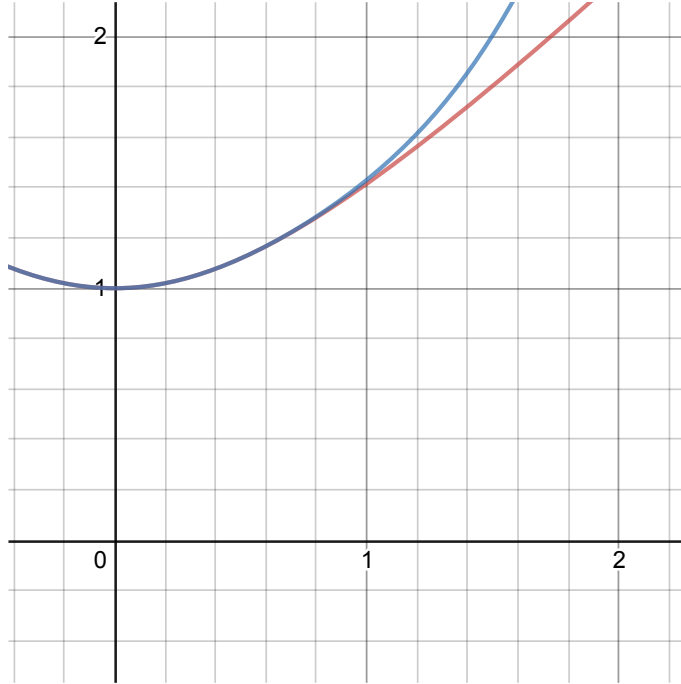


Рис. 1: График функции и её разложения

Ключ к приближению Френеля состоит в том, чтобы предположить, что третий член разложения очень мал и может быть проигнорирован, а с этого момента и более высоких порядков. Чтобы сделать это возможным, он должен вносить вклад в вариацию экспоненты для почти нулевого члена. Другими словами, он должен быть намного меньше периода комплексной экспоненты, то есть 2π :

$$k \frac{\rho^4}{8z^3} \ll 2\pi, \quad \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\rho^4}{8z^3} \ll 2\pi, \quad \rho^4 \ll 8z^3 \lambda \times \frac{1}{\lambda^4} \Rightarrow \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^4 \ll 8 \left(\frac{z}{\lambda}\right)^3 \quad (29)$$

Обычно длина волны много меньше физических размеров, особенно z . Таким образом, можем аппроксимировать (28) следующим образом

$$r \approx z + \frac{\rho^2}{2z} = z + \frac{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}{2z} \Rightarrow e^{ikr} = e^{ik \left(z + \frac{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}{2z} \right)} \quad (30)$$

3.4.2 Амплитудный член

В параграфе **3.4** было получено, что экспоненциальный член обладает большим порядком роста, нежели амплитудный, поэтому его точность должна прева-лировывать над точностью амплитудного члена. Таким образом, для амплитудного члена будет достаточно аппроксимации первого порядка, то есть

$$r \approx z \quad \Rightarrow \quad A(x_0, x_i) = \frac{1}{i\lambda z} \quad (31)$$

3.4.3 Итог

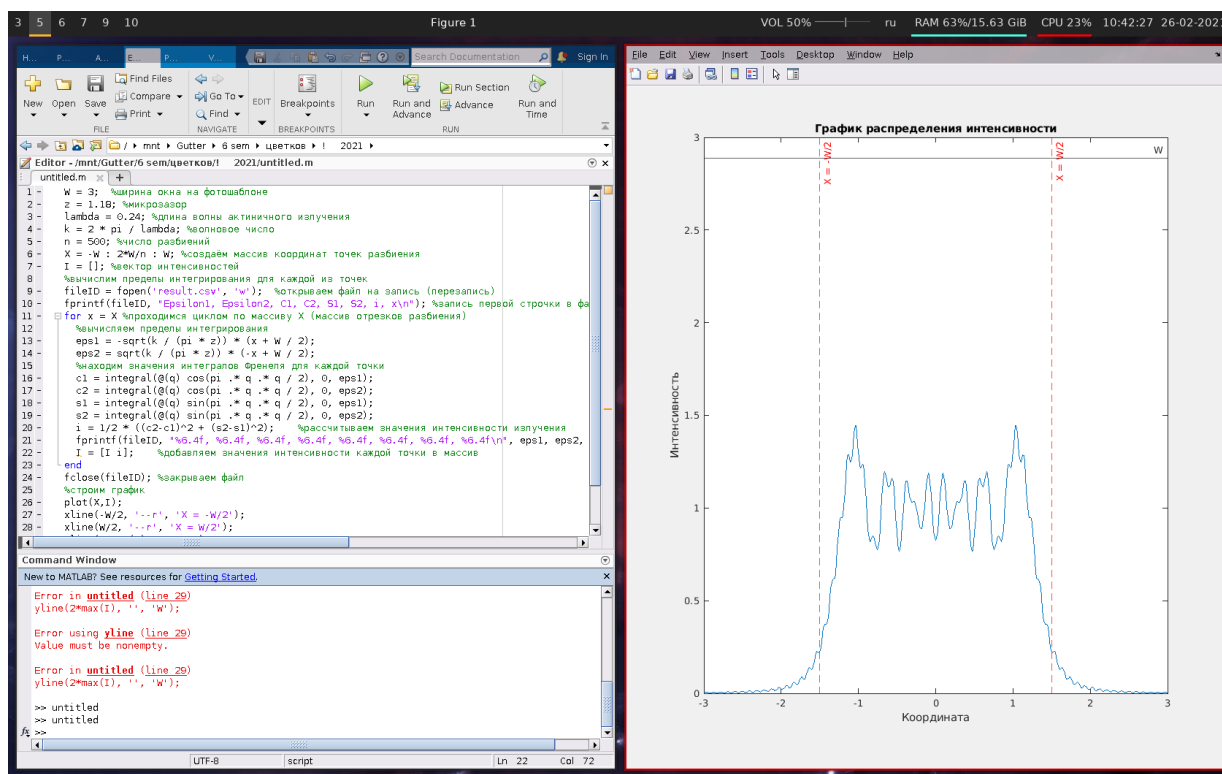
Несмотря на то, что выведенные в параграфах **3.4.1** и **3.4.2** ограничения на соотношения размера окна, микроззора и длины волны зачастую нарушаются в реальных процессах микролитографии, получаемые распределения весьма близки к экспериментальным результатам. На анимации **2** приводится сравнение дифракционной картины, полученной при помощи различных уравнений в зависимости от величины микроззора.

Нажмите ▷ для воспроизведения и || для остановки

Рис. 2: Сравнение дифракционной картины, полученной с помощью уравнения Рэлея-Зоммерфельда, (параксиального) приближения Френеля и (дальнего поля) приближения Фраунгофера.

4 Программное обеспечение

4.1 Запуск Matlab



4.2 Алгоритм расчёта, листинг программы

Ниже приведён код программы с комментариями. Методика расчёта: задать массив X , в котором содержатся координаты границ отрезков разбиения. Затем проходимся циклом по этому массиву и вычисляем значения пределов интегрирования, интегралов Френеля и значений интенсивности в каждой точке. Записываем значения интенсивности i в массив I . Выводим значения в .csv файл. После этого строим график из значений X и I

```

W = 3; %ширина окна на фотошаблоне
z = 1.18; %микроазор
lambda = 0.24; %длина волны актиничного излучения
k = 2 * pi / lambda; %волновое число
n = 500; %число разбиений
X = -W : 2*W/n : W; %создаём массив координат точек разбиения
I = []; %вектор интенсивностей
%вычислим пределы интегрирования для каждой из точек
fileID = fopen('result.csv', 'w'); %открываем файл на запись (перезапись)
fprintf(fileID, "Epsilon1, Epsilon2, C1, C2, S1, S2, i, x\n"); %запись первой строки в файл
for x = X %проходимся циклом по массиву X (массив отрезков разбиения)
    %вычисляем пределы интегрирования
    eps1 = -sqrt(k / (pi * z)) * (x + W / 2);
    eps2 = sqrt(k / (pi * z)) * (-x + W / 2);
    %находим значения интегралов Френеля для каждой точки
    c1 = integral(@(q) cos(pi .* q .* q / 2), 0, eps1);
    c2 = integral(@(q) cos(pi .* q .* q / 2), 0, eps2);
    s1 = integral(@(q) sin(pi .* q .* q / 2), 0, eps1);
    s2 = integral(@(q) sin(pi .* q .* q / 2), 0, eps2);
    i = 1/2 * ((c2-c1)^2 + (s2-s1)^2); %рассчитываем значения интенсивности излучения
    fprintf(fileID, "%6.4f, %6.4f, %6.4f, %6.4f, %6.4f, %6.4f, %6.4f, %6.4f\n", eps1, eps2, c1, c2, s1, s2,
i, x); %выводим в файл в определённом формате
    I = [I i]; %добавляем значения интенсивности каждой точки в массив
end
fclose(fileID); %закрываем файл
%строим график
plot(X,I);
xline(-W/2, '--r', 'X = -W/2');
xline(W/2, '--r', 'X = W/2');
yline(2*max(I), '', 'W');
title('График распределения интенсивности');
xlabel('Координата');
ylabel('Интенсивность');

```

4.3 Методика расчёта

После выполнения программы получили график распределения интенсивности по координате, а также файл со значениями, несколько из которых приведены ниже

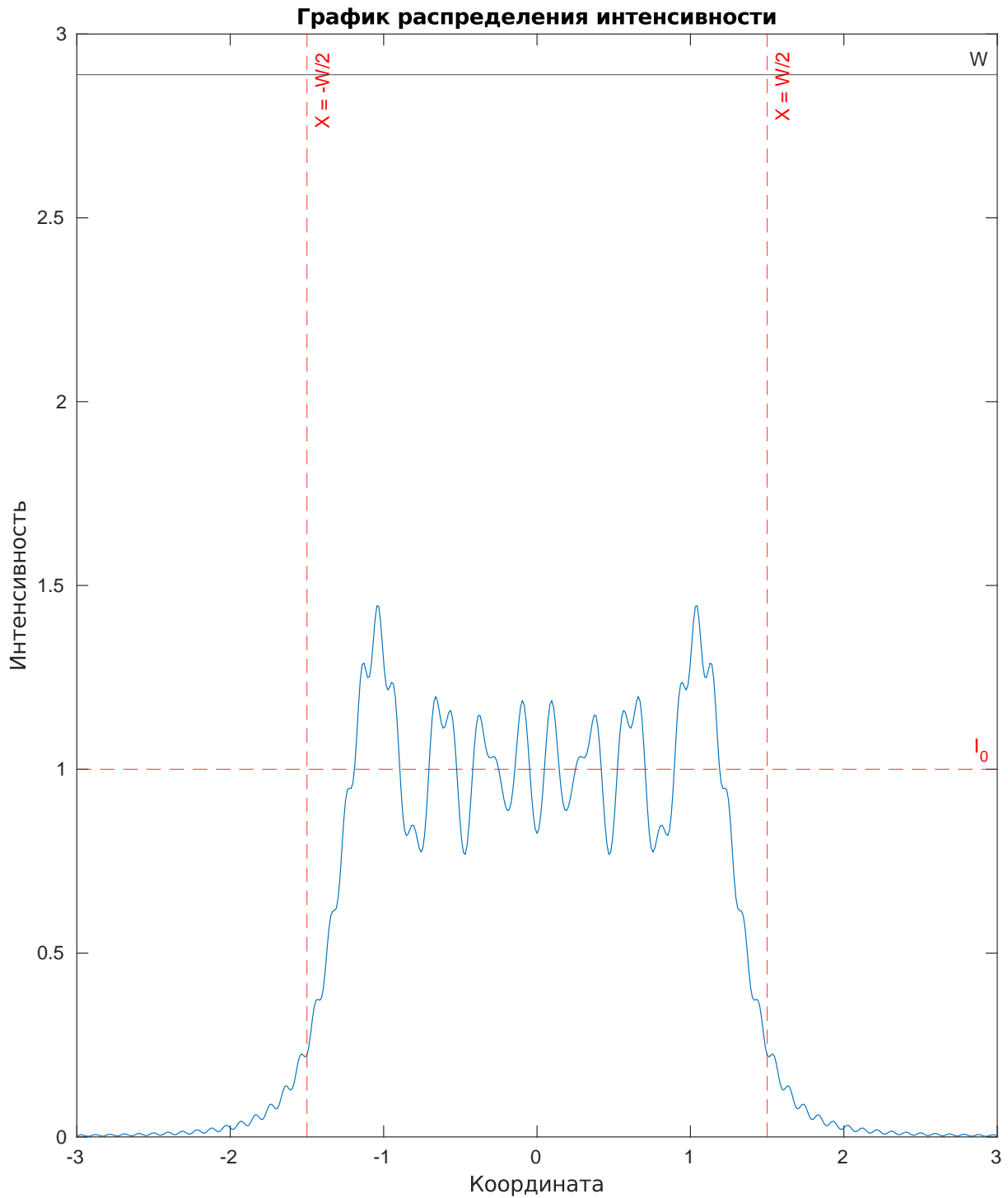


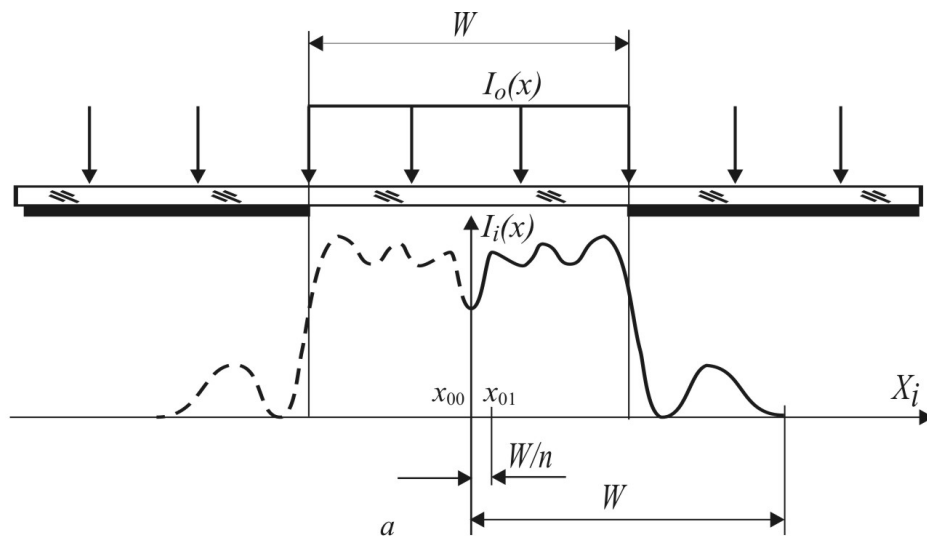
Рис. 3: График распределения интенсивности

ξ_1	ξ_2	C_1	C_2	S_1	S_2	i	x
3.9862	11.9586	0.4847	0.4734	0.4217	0.4997	0.0031	-3.0000
3.9543	11.9267	0.4552	0.4900	0.4332	0.5247	0.0048	-2.9880
3.9224	11.8948	0.4324	0.5193	0.4552	0.5185	0.0058	-2.9760
...

Таблица 1: Таблица результатов расчёта

5 Иллюстрации

5.1 Расчётная схема



5.2 Входное распределение интенсивности

Показано на рис. 3 красной пунктирной линией I_o и на рис. 4

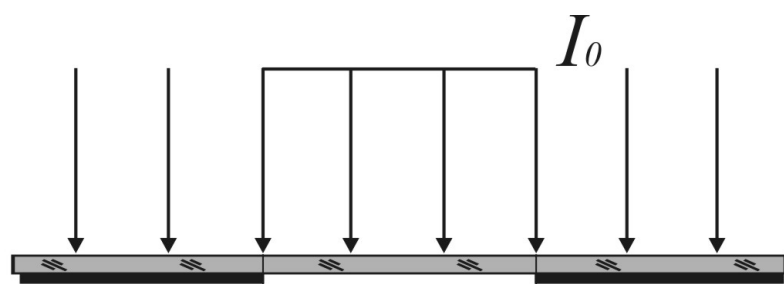


Рис. 4: Профиль распределения излучения на шаблоне

5.3 Профиль распределения интенсивности

Приведён на рис. 3