

# Rapport final du projet de Graphes et Recherche opérationnelle

Maxence Ahlouche    Maxime Arthaud    Korantin Auguste  
Martin Carton    Thomas Forgione    Thomas Wagner

Enseeiht

17 décembre 2013

# Graphes eulériens

- Cycle eulérien : cycle parcourant toutes les arêtes du graphe une et une seule fois
- Chaîne eulérienne : idem, mais ne retourne pas au sommet de départ
- Graphe eulérien : graphe contenant un cycle eulérien (degré des sommets toujours pair)
- Graphe semi-eulérien : graphe contenant une chaîne eulérienne (degré des sommets toujours pair, sauf pour les extrémités de la chaîne eulérienne)

# Graphes eulériens

## Matrices latines

- Teste toutes les possibilités
- Très peu efficace

## Algorithme d'Euler

- Recherche des cycles eulériens dans des sous-graphes, récursivement
- Beaucoup plus efficace

# Graphes hamiltoniens

- Cycle hamiltonien : cycle parcourant tous les sommets du graphe une et une seule fois
- Chaîne hamiltonienne : idem, mais ne retourne pas au sommet de départ
- Graphe hamiltonien : graphe contenant un cycle hamiltonien
- Graphe semi-hamiltonien : graphe contenant une chaîne hamiltonienne
- Pas de propriété générale pour déterminer si un graphe est hamiltonien ou non
- NP-complet : pas d'algorithme efficace

# Voyageur de commerce – Énoncé

Chercher un chemin passant par tous les sommets, de longueur minimale.

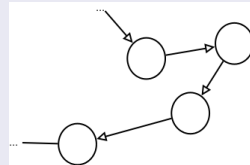
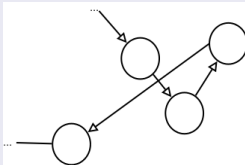
- cycle hamiltonien de coût minimal
- NP-complet
- méthodes approchées

# Voyageur de commerce – Résolution approchée

## Heuristiques

Aller sur le nœud le plus près

## Recherche locale : 2-opt



# Voyageur de commerce – Tests

Fichier de test	Résultat optimum	Plus proche voisin	Plus proche voisin + 2-opt	Plus proche voisin amélioré	Plus proche voisin amélioré + 2-opt
berlin52.tsp	7542	8981/19.1%	8060/6.7%	7972/5.7%	7810/3.6%
bier127.tsp	118282	137297/16.7%	125669/6.2%	127857/8.1%	122072/3.2%
d657.tsp	48912	62176/27.1%	N/A	N/A	N/A
u724.tsp	41910	55344, 32.1%	N/A	N/A	N/A
fl1577.tsp	22249	N/A	N/A	N/A	N/A

TABLE : Résultats pour TSP

# Voyageur de commerce – Métaheuristiques

- Recherche locale itérée
- Recherche tabou
- Recuit simulé
- Algorithmes génétiques
- Colonies de fourmis



# Sac à dos – Énoncé

Remplir un sac pour maximiser la valeur des objets, sans dépasser une certaine masse.

# Sac à dos – Résolution

- Résolution exacte :
  - Programmation dynamique.
  - Masses entières uniquement.
  - $O(nW)$
- Résolution dynamique :
  - Algorithme glouton.
  - Masses quelconques.
  - $O(n \log n)$

## Sac à dos – Résultats

Nombre d'objets/ Amplitudes des prix et masses/ Masse maximale autorisée	Résultat optimum	Prix le plus élevé	Masse la plus faible	Meilleur ratio prix/masse
50/25/20	85	49/42.4%	67/21.2%	81/4.7%
500/25/500	2016	1125/44.2%	1725/14.4%	1983/1.6%
5000/25/500	5540	1175/79%	4577/17.4%	5540/0%
50000/25/500	11195	1175/90%	6684/40.3%	11195/0%
50000/1000/500	118260	5959/95%	101857/13.9%	118147/0.1%
50000/5000/100	100847	14931/85.2%	93532/7.3%	100282/0.6%

TABLE : Résultats pour le sac à dos

# Simplexe – Présentation du problème

$$\begin{array}{l} \max f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ Ax \leq b \end{array}$$

## Exemple

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	stock
$R_A$	2	4	5	7	72
$R_B$	1	1	2	2	17
$R_C$	1	2	3	3	24
bénéfice	7	9	18	17	

# Simplexe – Simplification du problème

Transformation des contraintes d'inégalité en égalité.

## Exemple

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	stock
$R_A$	2	4	5	7	1	0	0	72
$R_B$	1	1	2	2	0	1	0	17
$R_C$	1	2	3	3	0	0	1	24
bénéfice	7	9	18	17	0	0	0	

# Simplexe – Algorithme

## Algorithme

Tant qu'il y a un élément strictement positif sur la première ligne

à\_ajouter = indice de la colonne dont le gain est maximal

à\_retirer =  $\operatorname{argmin}_i \frac{\text{matrice}[i, \text{stock}]}{\text{matrice}[i, \text{à\_ajouter}]}$

mettre à\_ajouter dans la base et retirer à\_retirer de la base

mettre à jour le reste de la matrice

Fin Tant que

## Cas difficiles

- Cas où l'ensemble de départ vide
- Cas où  $(0,0) \notin C$
- Cas de dégénérescence

# Simplexe – Une itération

## Exemple

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	stock
$R_A$	2	4	5	7	1	0	0	42
$R_B$	1	1	2	2	0	1	0	17
$R_C$	1	2	3	3	0	0	1	24
bénéfice	7	9	18	17	0	0	0	

# Simplexe – Une itération

## Exemple

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	stock
$R_A$	2	4	5	7	1	0	0	42
$R_B$	1	1	2	2	0	1	0	17
$R_C$	1	2	3	3	0	0	1	24
bénéfice	7	9	18	17	0	0	0	



# Simplexe – Une itération

## Exemple

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	stock
$R_A$	1/3	2/3	0	2	1	0	-5/3	2
$R_B$	1/3	-1/3	0	0	0	1	-2/3	1
$R_C$	1/3	2/3	1	1	0	0	1/3	8
bénéfice	1	-3	0	-1	0	0	-6	-144

# Shifumi

## Équilibre de Nash

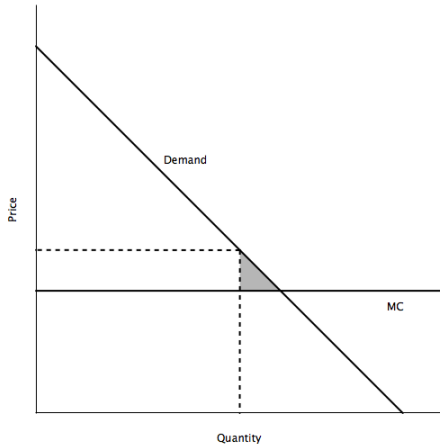
Équilibre de Nash : jouer de manière aléatoire.

- Chaines de Markov : bat aisément un humain qui joue « normalement ».
- Variantes : reviennent au Shifumi classique si le nombre d'éléments est impair.

# Somme magique

- Représentation sous forme de morpion
- Stratégie du morpion : Minmax
- Élagage Alpha-Beta

# Duopole – principe



Nos stratégies :

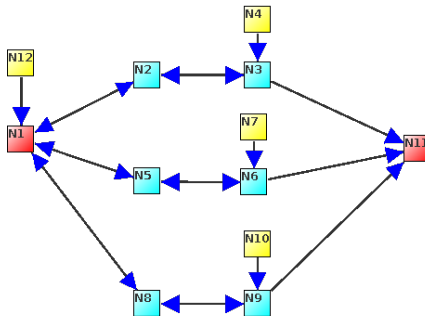
- Stackelberg en moyenne  
 $x = \frac{3-y}{2}$
- Stratégie pénalisante
- Stratégie évolutive
- Stratégie polynomiale  
 $f(0) = 1.125$   
 $f(0.75) = 0.75$   
 $f(1.5) = 0.75$

## Duopole – résultats

Stratégie	Gain minimal	Gain moyen	Gain maximum
coopératif*	561.56	978.59	1123.88
noncoopératif*	380.79	877.10	1317.08
stackelberg*	498.00	797.42	1132.44
palkeo	694.54	986.94	1123.88
Pénalise	419.12	860.12	1124.70
Pénalise variante	421.22	896.10	1123.88
Stackelberg en moyenne	492.11	923.94	1123.88
Stackelberg en moyenne (variante)	531.85	800.61	1262.25
gklmjbse	561.56	832.41	1135.33
poly	561.82	1011.24	1123.88
killer**	0.00	773.86	1133.09
coopératifmixte**	698.67	990.58	1123.88
agressivemieux**	3.15	750.64	1126.18
best_strategie**	322.67	881.00	1262.81

TABLE : Résultats des différentes stratégies sur 1000 tours

# Gare de péage



- $x[12] = \text{random}() < p_{cb}$
- $x[1] = \text{random}() < \lambda$
- $x[2] = (x[2] > 0) * (x[2] - 1 + d_{32}) + d_{12}$
- $d_{12} = x[1] * d_{121} * (d_{21} \leq d_{81})$
- $d_{23} = (x[2] > 0)$
- $d_{32} = x[3] * (1 - d_{43})$
- $x[3] = d_{23} + x[3] * (1 - d_{23}) * (1 - d_{43})$
- $d_{311} = x[3] * d_{43}$
- $x[10] = \text{random}() < \frac{1}{p_{cb}/\mu_{cb} + (1-p_{cb})/\mu_{ncb}}$

# UA 5 Robots

- Suivi de mur
- Algorithme de Dijkstra
- Algorithme A\*

# Suivi de mur

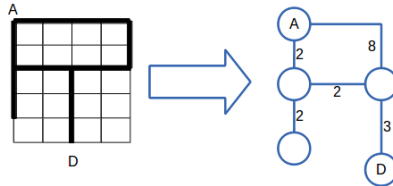
Un capteur ultrasonique à gauche.

Un capteur ultrasonique frontale.

- Si distance frontale  $<$  minima : on pivote à droite.
- Sinon :
  - Si distance latérale  $>$  distance voulue + marge : coupe le moteur de gauche  
Sinon il est actif
  - Si distance latérale  $<$  distance voulue - marge : coupe le moteur de droite  
Sinon il est actif



# Algorithme de Dijkstra



Si le robot connaît le plan du labyrinthe l'algorithme de dijkstra suffit.