INP ENSEEIHT

Graphes et Recherche opérationnelle

Rapport final

Chef de projet :
Martin Carton
Responsable qualité :
Maxime Arthaud

Maxence Ahlouche
Korantin Auguste
Thomas Forgione
Thomas Wagner

20 décembre 2013

Table des matières

1 Introduction

Dans ce rapport, nous allons présenter les différents algorithmes, modèles... que nous avons pu découvrir ou approfondir lors de l'UE de graphes et recherche opérationnelle.

Ce rapport va ne nous servira pas à présenter les travaux accomplis lors des différentes unités d'acquisitions, ni à présenter nos programmes : pour cela, se référer aux rapports des UAs.

2 UA : Graphes

2.1 Graphes eulériens

2.1.1 Analyse mathématique

Un graphe eulérien est un graphe contenant un cycle eulérien, c'est-à-dire une chaîne parcourant toutes les arêtes du graphe une et une seule fois, en revenant au sommet de départ ; ce problème est donc celui de la goudronneuse qui doit passer sur toutes les rues sans pouvoir repasser dessus une seconde fois. Un théorème fondamental garantit qu'un graphe connexe est eulérien si et seulement si chacun de ses sommets est associé à un nombre pair d'arêtes.

Un graphe semi-eulérien, quant à lui, contient une chaîne eulérienne : celle-ci passe également par toutes les arêtes du graphe une seule et unique fois, mais ne retourne pas au point de départ. Le théorème précédent se généralise alors aux graphes semi-eulériens : un graphe connexe est semi-eulérien si et seulement tous ses sommets sauf deux sont associés à un nombre pair d'arêtes. Dans ce cas, la chaîne eulérienne aura pour départ l'un des deux sommets associés à un nombre impair d'arêtes et pour point d'arrivée le deuxième.

2.1.2 Méthode de résolution

Afin de trouver une chaîne ou un cycle eulérien dans un graphe, nous avons étudié deux méthodes : une méthode qui teste toutes les possibilités, et une autre plus intelligente et moins coûteuse.

Matrices latines La première méthode est inspirée des matrices latines. Chaque coefficient de la matrice sera un ensemble de chaînes, une chaîne étant elle-même une liste de sommets. La matrice latine de notre graphe sera la matrice M dont chaque coefficient $m_{i,j}$ vaudra :

— l'ensemble vide si le nœud i n'est pas relié au nœud j dans le graphe ;
— un ensemble contenant pour unique élément la chaîne $[N_i, N_j]$ si les nœuds i et j sont reliés (où N_k représente le nœud k).

Nous définissions ensuite un produit sur les coefficients d'une telle matrice. Le produit de deux chaînes sera :

— nul si le dernier nœud de la première chaîne n'est pas le premier nœud du deuxième ;
— la concaténation des deux chaînes sinon.

Le produit de deux ensembles de chaînes sera l'ensemble contenant les produits de chaque couple de nœuds.

Pour tout k entier naturel, le coefficient (i, j) de la matrice M^k représentera l'ensemble des chaînes de longueur k reliant les nœuds i et j.

Puisque une chaîne eulérienne passe une unique fois par chaque arête, il suffira de calculer la matrice latine élevée à cette puissance pour trouver sur sa diagonale l'ensemble des cycles possibles. En éliminant à chaque produit les chaînes qui passent plusieurs fois par la même arête, on trouve l'ensemble des cycles eulériens.

La complexité de cet algorithme est exponentielle, calculer la puissance de la matrice latine revient en fait à calculer chaque chaîne possible dans le graphe, et tester si elle est un cycle eulérien ou non.

Algorithme d'Euler La deuxième méthode, basée sur l'algorithme d'Euler est nettement plus efficace. Une fonction récursive cherche un cycle eulérien d'un sous-graphe de notre graphe de départ, puis s'appelle récursivement sur chacun des sommets parcourus par cette chaîne, dans le graphe où l'on a supprimé les arêtes déjà parcourues. En reconstruisant ces cycles astucieusement, on parvient à trouver un cycle eulérien de complexité linéaire en le nombre d'arêtes du graphe.

2.1.3 Algorithmes

Méthode de la matrice latine

```
Entrée : un graphe
Sortie : la liste des cycles eulériens dans le cas d'un graphe eulérien
         la liste des chaînes eulériennes dans le cas d'un graphe semi-eulérien
         la liste vide sinon

Construire la matrice latine du graphe :
    construire une matrice à n lignes et n colonnes
    remplir la matrice de listes vides
    pour chaque nœud du graphe:
        pour chaque arête sortant de ce nœud:
            ajouter la liste [noeud de départ, noeud d'arrivée] à la case de la
                matrice correspondante

n = "le nombre d'arêtes total du graphe"

calculer la puissance (n-1)ième de la matrice

pour chaque coefficient de la matrice ainsi calculée:
    si le coefficient n'est pas nul:
        concaténer ce coefficient à la variable de retour
```

Produit matriciel

```
Entrée : A et B deux matrices latines
Sortie : le produit de ces deux matrices

construire la matrice de retour à n lignes et n colonnes
initialiser chaque coefficient de cette matrice à la liste vide

pour chaque coefficient de la matrice de retour:
    pour k allant de 1 jusqu'à n:
        calculer les chaînes produits entre a(i,k) et b(k,j)
        ajouter au coefficient de la matrice ces chaînes
```

Produit entre listes de chaînes (coefficients de matrices latines)

```
Entrée : liste_1 et liste_2 deux listes de chaîne
Sortie : une liste de chaînes
```

```
créer une liste de chaîne vide (liste de retour)
pour i dans liste_1:
    pour j dans liste_2:
        construire la chaîne résultante de la concaténation de i et j (en
            enlevant le nœud présent deux fois)
        construire un ensemble de chaîne vide
        pour k allant de 1 à la longueur de la chaîne construit:
            construire la chaîne élémentaire menant du nœud k au nœud k+1
            si cette chaîne n'est pas dans l'ensemble:
                ajouter cette chaîne dans l'ensemble
            sinon:
                rendre la chaîne nulle
                sortir de la boucle

        si le chaîne n'est pas nulle:
                concaténer la chaîne trouvée à la liste de retour
retourner la liste de retour
```

2.1.4 Tests

La première solution étant très coûteuse en espace mémoire, elle lève une erreur mémoire dès que la taille du graphe devient trop importante. Afin de comparer nos deux algorithmes, nous avons lancé un test sur un graphe complet à 6 nœuds. Le premier algorithme met 138 secondes avant de donner son résultat, tandis que le deuxième met à peine plus d'un dixième de seconde.

On voit donc que la première méthode est inexploitable même sur de toutes petites matrices.

2.2 Graphes hamiltoniens

2.2.1 Analyse mathématique

Un graphe (semi-)hamiltonien est un graphe sur lequel on peut trouver un cycle (ou une chaîne) passant par tout les sommets une et une seule fois. Ce problème est donc celui de l'enfant qui souhaite visiter de manière unique toutes les salles d'un musée.

Le problème de savoir si un graphe est (semi-)hamiltonien est NP-complet, de même que de trouver un cycle ou une chaîne s'il y en a.

Il existe cependant des conditions suffisantes pour lesquelles on peut affirmer qu'un graphe est hamiltonien ou non.

Par exemple un graphe complet est forcement hamiltonien (utile dans le cas du voyageur de commerce, voir section 2.4), il existe aussi des conditions sur les degrès des sommets (théorème de Dirac, d'Ore, etc.).

2.2.2 Méthode de résolution

Pour tester si un graphe est hamiltonien, nous avons utilisé les théorèmes de Dirac et Pósa qui donnent des conditions nécessaires, si ces conditions ne sont pas vérifiées, comme il n'y a aucun théorème qui permette d'affirmer qu'un graphe n'est pas semi-hamiltonien, on recherche une chaîne hamiltonienne dans ce graphe.

Pour rechercher une chaîne hamiltonienne dans un graphe, nous avons écrit un algorithme qui recherche parmi toutes les chaînes possibles. Sa complexité dans le pire des cas est donc très mauvaise : $O(n!)$. Comme on peut s'arrêter dès qu'on a trouvé une chaîne sans devoir tester toutes les autres chaînes possibles, la complexité moyenne sera inférieure.

Nous avons écrit une version améliorée de cet algorithme qui essaye d'éviter les culs de sac.

2.2.3 Algorithmes

Tests de semi-hamiltoniannité

```
Entrée : un graphe
Sortie : un booléen indiquant si le graphe est semi-hamiltonien ou non

si le graphe suit les conditions du théorème de Dirac ou du théorème de Pósa:
    retourner Vrai
sinon:
    chercher une chaîne hamiltonienne
    retourner Vrai si on en a trouvé un, Faux sinon
```

Recherche de chaîne hamiltonienne

```
Entrée : un graphe graph
         un point de départ optionnel node_from
         un ensemble (éventuellement vide) de nœuds déjà parcouru nodes_done
Sortie : une chaîne hamiltonienne sous la forme d'une liste ordonnée de points,
    ou None s'il n'en existe pas

Si la fonction a été appelée sans node_from:
    node_from = "un nœud de graph"

ajouter node_from à nodes_dones

si cardinal(node_from) == ordre(graph):
    retourner [node_from]

pour chaque arête dans le graphe:
    autre = "le point opposé à node_from par rapport à cette arête"
    si autre dans nodes_done:
        passer à la prochaîne arête

    appeler la fonction récursivement avec graphe, node_from et nodes_dones comme
        paramètre
    si la liste retournée est non-vide:
        y ajouter node_from au début et la retourner

retourner None (si on arrive ici, aucunne chaîne n'est bonne)
```

2.2.4 Tests

Nos algorithmes fonctionnent biens sur de petits graphes, mais ils sont beaucoup trop lents pour être utilisés sur de grands graphes pour lesquels il y a "peu" d'arêtes : jusqu'à 30 sommets et 46 arêtes, l'algorithme trouve une solution en moins d'une seconde. Pour

40 sommets et 63 arêtes, il faut déjà une minute. Pour 100 sommets et 150 arêtes, l'algorithme prend tellement de temps que l'avons arrêté après quelques heures.

Par contre, pour des graphes ayant beaucoup d'arêtes (graphes "presque complets"), l'algorithme reste rapide.

Nous avons pu constater que la deuxième version de notre algorithme ne sert à rien : il n'y a aucune amélioration des performances.

2.3 Modélisation mathématique

Nous avons choisi de représenter nos graphes comme une liste de sommets, chacun ayant une liste d'arêtes.

En mémoire, cette structure est donc constituée d'une liste de pointeurs vers des sommets. Les sommets contenant une liste de pointeurs vers des arêtes. Chaque arête ayant un pointeur vers chaque sommet extrémité.

Dans la suite nous noterons n le nombre de sommets du graphe.

2.4 Problème du voyageur de commerce

2.4.1 Analyse mathématique

Le problème du voyageur de commerce consiste à chercher un chemin passant par tous les sommets du graphe, de longueur minimale. Ce problème peut s'illustrer par l'exemple d'une fraiseuse qui doit percer des trous dans une plaque le plus rapidement possible, ou encore par un car de touristes qui souhaiterait trouver l'itinéraire le plus rapide pour visiter un certain nombre de lieux.

On peut modéliser ce problème par un graphe complet, dont les arêtes ont un coût qui correspond à la distance entre chaque point, on cherche alors le cycle hamiltonien de coût minimal. On sait qu'un tel cycle existe car le graphe est complet.

Cependant trouver un tel cycle est un problème NP-complet : il n'existe donc pas d'algorithme efficace pour trouver ce cycle, à part une recherche exhaustive. En effet, la seule méthode exacte consisterait à tester toutes les chaînes hamiltoniennes, et à prendre celle la plus courte, mais le nombre de chaînes hamiltonniennes croît exponentiellement en fonction du nombre de sommets dans le graphe.

Nous allons donc nous concentrer sur les méthodes approchées de résolution, qui peuvent donner de très bons résultats tout en étant rapides. Toutefois, le résultat n'est donc pas forcément le plus court.

2.4.2 Heuristiques

Les heuristiques vont nous permettre de construire un chemin court (par rapport au plus court possible), de manière rapide, avec le moins de calcul possible. Étant donné qu'on est confronté à énormément de possibilités pendant la recherche, elles vont permettre d'orienter cette dernière, en faisant des choix les plus judicieux possibles sur les possibilités à explorer.

Exemple Une heuristique simple consiste à partir d'un sommet au hasard du graphe et d'aller au sommet le plus proche sur lequel on n'est pas encore passé (puis à retourner au sommet de départ pour boucler le cycle). Cet algorithme est en $O(n)$ et donc rapide. Mais il n'offre cependant aucune garantie de résultat, il existe même des graphes pour lesquels il donne le pire cycle.

Plus généralement, chercher parmi les p sommets les plus proches s'avère être une solution relativement efficace, avec une complexité en $O(p^n)$ (donc toujours exponentielle si $p \neq 1$).

Une méthode purement basée sur cette heuristique consisterait donc à parcourir tout le graphe, en allant sur le voisin le plus proche du sommet courant :

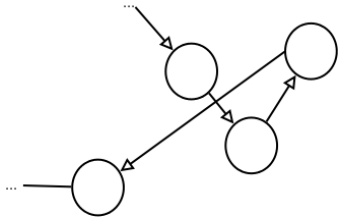
```
Entrée : g (Graphe complet)
Sortie : (coût, cycle) où cycle est un cycle hamiltonien construit selon la
    méthode du plus proche voisin et coût son coût associé sous forme de liste de
    points
coût = 0
cycle = ["un point de g au hasard"]

tant qu'il reste des points:
    # On ajoute au cycle le point suivant
    plus_proche = "point de g sur lequel on est pas encore passé le plus proche
        du dernier point du cycle"

    coût += "coût de plus_proche au dernier point du cycle"
    cycle = cycle :: plus_proche

# On ferme le cycle
coût += "coût du dernier au premier point de cycle"
cycle = cycle :: "premier point de chaîne"

retourner (coût, cycle)
```

2.4.3 Recherche locale

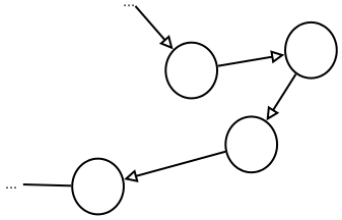
Les heuristiques nous donnant des solutions acceptables, choisies avec un minimum de « bon sens », il est ensuite possible de tenter d'améliorer ces solutions, via de la recherche locale. Partant d'une solution fournie, on va explorer les solutions voisines à cette dernière, afin de voire si on pourrait pas trouver des solutions encore meilleures parmi leur voisinage.

Exemple Un algorithme de recherche locale adapté au problème du voyageur de commerce est le 2-opt. Le principe du 2-opt consiste à tenter d'éliminer les « boucles » qui pourraient survenir dans le chemin, afin de le rendre plus court.

Ainsi, partant du chemin suivant (qu'on obtiendrait logiquement en suivant l'heuristique consistant à aller sur le sommet le plus près) :



On obtiendrait ceci, en éliminant le croisement :



L'algorithme pour le 2-opt est le suivant :

```
Entrée : un cycle hamiltonien (liste de sommets) et son coût
Sortie : un cycle hamiltonien et son coût inférieur ou égal au coup d'entrée

pour chaque couple de points (a, b) dans le cycle:
    nouveau_coût = coût
                    - "coût de a à son successeur dans le cycle"
                    - "coût de b à son successeur dans le cycle"
                    + "coût de a à b"
                    + "coût du successeur de a et au successeur de b dans le
                        cycle"

    si nouveau_coût < coût:
        coût = nouveau_coût
        cycle = cycle crée en échangeant a et b dans cycle

retourner (coût, cycle)
```

Il a donc une complexité quadratique du nombre de sommets du cycles.

L'application du 2-opt sur le chemin obtenu via une heuristique simple peut donner des résultats plus proches de la solution optimale qu'on pourrait le penser, et la combinaison des deux est donc une bonne méthode.

2.4.4 Métaheuristiques

Plutôt que d'utiliser une simple heuristique pour trouver une solution à priori plutôt bonne, puis d'y appliquer une recherche locale pour tenter de l'améliorer encore, il est possible d'utiliser des « métaheuristiques ». Ces algorithmes vont avoir besoin d'heuristiques et de recherche locale, mais vont s'en servir en boucle, pour tenter sans cesse de trouver une solution meilleure.

Ils vont partir explorer différentes parties de l'espace, souvent en guidant leur exploration grâce à l'heuristique, et en essayant de retomber sur des parties de l'espace les plus intéressantes possibles grâce aux algorithmes de recherche locale.

Il existe énormément de métaheuristiques. En voici quelques uns :

Recherche locale itérée métaheuristique très simple consistant à utiliser une heuristique puis appliquer de la recherche locale pour améliorer son résultat. Ensuite, on perturbe légèrement ce résultat, on applique à nouveau une recherche locale et on recommence.

Recherche tabou amélioration de la recherche locale itérée, qui va utiliser une « liste taboue » bannissant toute recherche autour des zones de l'espace déjà explorées.

Recuit simulé explore d'abord l'espace sans se restreindre aux parties donnant des solutions efficaces, puis se restreint de plus en plus au voisinage de celles-ci. Converge donc vers les solutions les plus efficaces trouvées, puis relâche les contraintes et explore autour de ces dernières, quitte à trouver des solutions vraiment moins efficaces. Recommence à se contraindre aux plus efficaces, etc...

Algorithmes génétiques imitent la sélection naturelle, avec une population de solutions qui évoluent en mutant et en s'échangeant leurs caractéristiques entre elles. On peut même faire évoluer des populations séparément avec les modèles en îles, pour avoir plusieurs populations très différentes.

Colonies de fourmis imitent là encore la nature en simulant des phéromones déposées par des fourmis virtuelles, qui orientent la recherche au fil du temps.

2.4.5 Conclusion

Il est intéressant de constater que les heuristiques, les méthodes de recherche locales et les métaheuristiques sont des choses extrêmement générales, utilisées pour résoudre énormément de problèmes demandant d'explorer un espace extrêmement grand.

Elles ne sont donc pas propres au voyageur du commerce, même si on a vu comment, dans ce cas précis, on pouvait obtenir des résultats corrects en se passant de métaheuristiques. On pourrait donc améliorer ces résultats en en utilisant.

3 UA : Programmation linéaire

3.1 Introduction

La programmation linéaire, ou optimisation linéaire, consiste à maximiser (resp. minimiser) une fonction linéaire sur un polyèdre convexe (dont un cas particulier courrant est sous des contraintes linéaires).

3.2 Problème du sac à dos

3.2.1 Présentation du problème

Ce problème paraît simple en apparence : nous avons un ensemble d'objets, chaque objet pouvant avoir une masse différente et ayant une certaine valeur, et nous voulons remplir un sac à dos de manière à maximiser la valeur totale, sans dépasser une certaine masse maximale.

Résoudre ce genre de problème est utile par exemple en gestion de portefeuilles pour trouver le meilleur rapport entre rendement et risque, ou en découpe de matériaux, pour minimiser les chutes.

Ce problème est un problème d'optimisation linéaire, en effet, cela revient à résoudre le problème :

$$\begin{cases} \max v_i \\ i \in S \\ \sum_{j \in S} m_j \leq W \end{cases}$$

où S est un ensemble de n objets à choisir, v_i la valeur de l'objet i, m_i sa masse et W la masse maximale autorisée dans le sac.

Cependant la résolution de ce problème n'est pas simple : déterminer s'il est possible de dépasser une valeur minimale sans dépasser le poids maximal est un problème NP-complet.

3.2.2 Résolution exacte

Ce problème peut être résolu en utilisant la programmation dynamique [1]. En effet, on peut déterminer si un objet i fait parti de l'ensemble des objets à choisir en considérant le problème sur l'ensemble $S \backslash \{i\}$ et la masse maximale $W - m_i$.

Toutefois, un tel algorithme fonctionne uniquement si les poids des objets sont des entiers. De plus sa complexité en temps est en $O(nW)$ et celle en mémoire en $O(W)$ [2].

1. Qui consiste à résoudre un problème de taille n à partir de la résolution d'un problème de taille $n-1$

2. En pratique on pourrait l'utiliser sur des masses non-entières en les multipliants, ce qui augmenterait la compléxité du même facteur. De plus on peut réduire la compléxité en $O(nW')$ avec $W' = \frac{W}{\text{ppcm(toutes les masses)}}$.

L'algorithme est le suivant :

```
Entrée : une liste d'objets
         une masse maximale autorisée
Sortie : la valeur maximale qu'il est possible d'atteindre
Précondition : toutes les masses doivent être entières.

ligne_courante = liste composée de masse_max+1 0
ligne_prec     = liste composée de masse_max+1 0

pour chaque objet obj de la liste d'entrée:
    pour m variant de 0 à masse_max:
        if masse(obj) <= m:
            ligne_courrante[m] = max(ligne_prec[m], ligne_prec_line[m-masse(obj)]
                + prix(obj))

    ligne_prec = ligne_courante

Retourner ligne_courante[masse_max]
```

3.2.3 Résolution approchée

Un autre algorithme pour résoudre ce problème, dit algorithme glouton, consiste simplement à choisir les « meilleurs » objets jusqu'à que la masse maximale soit dépassée. Le critère déterminant quels sont les meilleurs objets pourrait être la masse faible, le prix élevé, ou le rapport prix/masse élevé.

Cet algorithme est beaucoup plus rapide que le précédent (il a une complexité en temps de $O(n \log n)$ (pour le tri des objets)) et ne nécessite en mémoire que la liste des objets, mais ce n'est qu'un algorithme approché. Les résultats obtenus sont cependant très satisfaisant, en effet en considérant le ratio prix/masse, on obtient des résultats très proches de l'optimum (quelques pourcents d'erreur relative en moyenne, mais aucune garantie n'est fournie : il peut même fournir la pire solution).

De plus il peut être utilisé quand les masses ne sont pas entières.

4 UA : Jeux

4.1 Shifumi

Une stratégie simple et efficace à laquelle on pourrait penser pour gagner au Shifumi serait de jouer de manière aléatoire.

Et en effet, il s'avère que si les deux joueurs jouent de manière équiprobable, on a affaire à un équilibre de Nash : aucun changement de stratégie de la part d'un joueur ne pourra lui permettre d'augmenter ses chances de gagner.

De plus, si un adversaire ne joue pas de manière aléatoire (ou augmente la probabilité de jouer un certain élément), alors on pourra prévoir ce qu'il va jouer et donc trouver une stratégie qui pourra le battre. Les humains étant très mauvais pour jouer de manière aléatoire, il est assez facile d'écrire une stratégie permettant de les battre.

4.1.1 Stratégie développée

Afin de démontrer qu'un adversaire ne jouant pas aléatoirement est facile à battre, nous avons développé une stratégie qui se base sur des chaînes de Markov : en se basant sur les derniers éléments joués, elle regarde dans l'historique pour voir l'élément qui était joué le plus souvent par l'adversaire après les derniers coups joués.

Cette stratégie s'avère vraiment efficace contre un joueur humain. Toutefois, elle est prévisible : si on sait qu'on a affaire à une telle stratégie, on peut jouer de manière à la battre.

C'est pour cela qu'une stratégie aléatoire est la seule pouvant maximiser nos gains dans le pire des cas.

4.1.2 Variantes

Toutes les variantes du Shifumi qui consistent à rajouter des éléments pour obtenir un nombre d'éléments pair (par exemple pierre/papier/ciseaux/puits) vont créer un déséquilibre, car un élément sera moins efficace contre les autres. L'équilibre de Nash du jeu va alors consister à ne jamais jouer cet élément.

Si le nombre d'éléments est impair, alors le jeu pourra être équilibré, comme un Shifumi classique.

4.2 Jeu de la somme magique

4.2.1 Représentation sous forme de morpion

Ce jeu, comme expliqué dans les transparents présentés en cours, consiste à choisir, à tour de rôle, n nombres parmi n^2 afin que leur somme soit égale à $\frac{n(n^2+1)}{2}$.

Une représentation possible de ce jeu est le carré magique : les joueurs doivent choisir, l'un après l'autre une case dans un carré magique, leur but étant de contrôler une ligne, une colonne ou une diagonale entière du carré magique ; alors, les nombres qu'ils auront choisis totaliseront le score voulu. De même, ce problème correspond exactement au jeu du morpion, étendu à des grilles $n \times n$.

Ainsi, une des stratégies possibles pour un joueur du jeu de la somme magique est de construire un carré magique, et de représenter les nombres choisis par l'adversaire par un rond dans la case correspondante. Afin de choisir un nombre, il suffit d'appliquer la stratégie de morpion de son choix sur le carré magique, et de jouer le nombre correspondant.

Le choix du carré magique n'importe pas. En effet, dans un carré magique sont présentes toutes les possibilités de combinaison de nombres pour obtenir la somme voulue. Par conséquent, peu importe le carré magique d'ordre n que l'on choisit, les représentations sous forme de morpion seront toutes équivalentes.

Le morpion étant un jeu où l'on essaie de minimiser la perte maximum, on peut s'intéresser à l'algorithme du minmax, pour déterminer une stratégie non-perdante.

4.2.2 Algorithme du minmax appliqué au jeu du morpion

L'algorithme du minmax consiste à évaluer toutes les positions de jeu atteignables depuis la position courante, sur une certaine profondeur (autrement dit, un certain nombre de tours de jeu), et à jouer de manière à atteindre la position la plus avantageuse, en supposant que l'adversaire joue toujours le meilleur coup pour lui-même (ce coup étant évalué avec notre propre fonction d'évaluation, qui n'est pas forcément la même que celle de l'adversaire).

Par conséquent, afin d'implémenter l'algorithme du minmax, il faut commencer par déterminer une fonction d'évaluation.

Fonction d'évaluation La fonction d'évaluation que nous avons choisie est très simple : une ligne, colonne ou diagonale (que nous appelleront désormais simplement "ligne") complétée avec notre symbole (ce qui signifie qu'on a gagné) vaut $+\infty$; si, au contraire, l'adversaire a complété une ligne, alors cette ligne vaut $-\infty$. Une ligne contenant uniquement notre symbole rapporte le nombre d'occurrences de notre symbole dans cette ligne ; à l'inverse, une ligne contenant uniquement le symbole de l'adversaire rapportera négativement le nombre Toutes les autres lignes ne rapportent aucun point. Ainsi, l'évaluation d'une position de jeu est la somme des points rapportés par chacune de ses lignes, colonnes et diagonales.

Minmax L'algorithme du minmax va construire (implicitement) l'arbre des coups possibles à partir de la position courante. L'évaluation d'un nœud de cet arbre sera :

— si c'est à notre tour de jouer, le maximum de l'évaluation de nos fils ;
— si c'est à l'adversaire de jouer, le minimum de l'évaluation de ses fils (i.e. on suppose que l'adversaire joue le meilleur coup à sa disposition, selon la fonction d'évaluation du joueur courant).

L'évaluation d'une feuille de l'arbre se fera par la fonction d'évaluation définie précédemment.

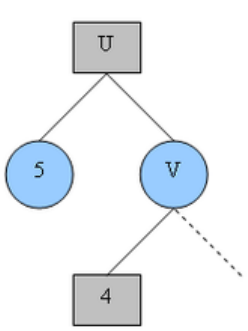
Ainsi, l'algorithme se dirigera naturellement vers la position la plus avantageuse pour lui.

4.2.3 Élagage alpha-bêta

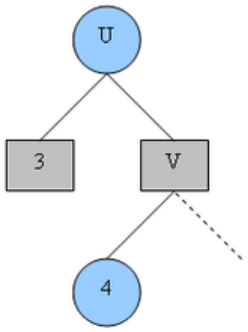
L'élagage alpha-bêta permet de réduire le nombre de nœuds à parcourir durant l'algorithme du minmax.

Cette algorithme arrête le parcours des fils d'un nœud quand il se rend compte qu'il ne pourra pas faire mieux.

Dans l'exemple suivant, où les nœuds en bleus sont ceux où l'on doit prendre le minimum, et ceux en gris le maximum :



Coupure Alpha



Coupure Beta

On se rend bien compte qu'on n'a pas besoin de parcourir les nœuds suivant, car on prend le maximum des minimums, ou l'inverse.

Par exemple, pour la coupure alpha : si on trouve des fils de V plus petit que 4, on va prendre le maximum, donc c'est 4 qui sera utilisé, et si on trouve plus grand ou égal à 5, on devra prendre le minimum au niveau de V, donc on prendra 5 dans tous les cas.

Au final, cette amélioration permet de gagner un temps considérable.

4.2.4 Résultats

Meilleure stratégie Nous avons fait s'affronter différentes stratégies les unes contre les autres, afin de voir laquelle était la meilleure, sur différentes tailles de plateaux. Les stratégies que nous avons fait s'affronter étaient :

- la stratégie aléatoire,
- la stratégie qui prend toujours la première case disponible,
- les stratégies utilisant le minmax à différentes profondeurs, entre 2 et 10,
- les stratégies utilisant le minmax et l'élagage alpha-bêta à différentes profondeurs, entre 2 et 10.

Les résultats ne sont guère surprenants : toutes les stratégies parviennent au match nul, à l'exception des stratégies aléatoires et premier_dispo, qui perdent systématiquement contre un minmax de profondeur supérieure à 2.

Performances Du point de vue du temps d'exécution, toutefois, l'algorithme avec élagage est beaucoup plus rapide qu'un minmax simple, alors qu'il retourne le même résultat. Malheureusement, nous n'avons pas pu tester nos algorithmes sur des plateaux de

grande taille : en effet, à partir de la taille 4, un minmax avec élagage de profondeur 10 met en moyenne 5 secondes pour décider de son coup, et peut aller jusqu'à 40s !

Il est également intéressant de noter, bien que ceci n'ait rien à voir à notre projet, que le passage du langage Python au langage C a permis de diviser le temps d'exécution des tests par 60 pour des stratégies sans élagage.

5 UA : Processus stochastiques

5.1 Introduction

La programmation stochastique cherche à étudier la progression au cours du temps de processus aléatoires.

5.2 Théorie des files d'attente

Une file d'attente est un système ayant une entrée par laquelle arrivent des tâches, ou client, qui attendent leur tour avant d'être traitée une pour en sortir.

Elles sont utilisées pour l'étude de beaucoup de systèmes : attentes de clients à des guichets, trafic routier, traitement des tâches par un serveur, etc.

Les files sont étudiées en fonction de la loi qui gère l'entrée, la loi qui gère la sortie et le nombre de "serveurs" qui traitent les clients.

La loi de Little est cependant un résultat général :

$$N = \lambda T_s$$

où N est le nombre moyen de clients dans le système, λ la fréquence moyenne d'entrée et T_s le temps moyen passé dans le système.

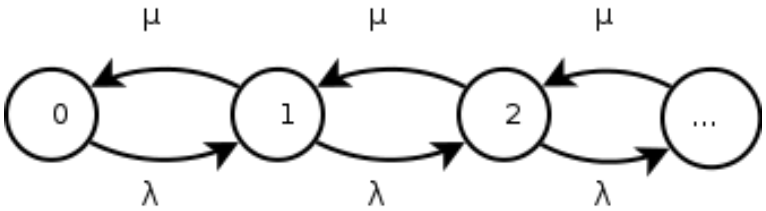
5.2.1 Cas M/M/1

On considère une file d'attente où la loi d'entrée suit une loi de Poisson de paramètre λ (λ est dont le nombre de d'arrivées par unité de temps) et que le temps de service suit une loi exponentielle de paramètre μ ($\frac{1}{\mu}$ est donc le temps moyen de traitement, sans compter l'attente dans la file).

On dit que ce genre de file d'attente est de type $M/M/1$ selon les notations de Kendall.

Dans ce cas, le nombre moyen d'arrivées pendant le temps de service, appelé trafic offert, est $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Le système converge alors si et seulement si $\rho < 1$.

Sous cette condition, la file peut être représentée comme une chaîne de Markov :



où chaque état i représente la probabilité qu'il y ait i voitures dans le système.

Ces états sont liés en régime permanent par les équations :

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \lambda p_1 = \mu p_2 \\ \quad \dots \\ \lambda p_n = \mu p_{n+1} \\ \quad \dots \end{cases}$$

et

$$\sum_{i=0}^{+\infty} p_n = 1$$

D'où $p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \rho^n(1-\rho)$ (d'où la condition $\rho < 1$).
Le nombre moyen de clients dans le système est donc :

$$N = \sum_{i=0}^{n} np_n = \frac{\rho}{1-\rho}$$

D'après la loi de Little, le temps moyen passé dans le système est donc :

$$T_s = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho}{1-\rho} = \rho\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

6 UA : Ingénierie robotique

7 Bilan

7.1 Enseignement

Nous avons étés surpris de la façon dont fonctionnent les séances de TD, et avons eu du mal à nous y faire : lors des séances, nous étions censés être lâchés sur les différents problèmes et nous renseigner par nous-mêmes. Toutefois, le professeur présent se mettait souvent à présenter des choses au tableau, et nous ne savions plus trop si nous devions avancer, ou stopper tout travail et l'écouter.

Il a aussi été assez frustrant de se répartir le travail : comme nous étions dans un groupe de 6 et avions quand même pas mal de choses à faire, il fallait forcément se concentrer sur un seul problème. Du coup, chacun a simplement abordé quelques points précis, et n'a pas vraiment acquis de connaissances poussées sur tout le reste des sujets abordés...

Le fait de devoir faire des rapports à chaque séance était aussi très lourd à gérer, et assez peu pratique : nous avions l'impression de passer énormément de temps à écrire des rapports de séances, rapports d'UA...Ajouté au rapport final, cela donne un travail de rédaction très important.

7.2 Travail en groupe

L'utilisation d'un gestionnaire de version nous a permis de nous faciliter énormément le travail en centralisant tout le code et les rapports. Pour certains rapports, nous avons aussi utilisé un « pad », qui permet d'éditer à plusieurs du texte en temps réel.

Concernant le travail en groupe, il est clair que travailler en groupe de 6 en faisant en sorte que tout le monde travaille efficacement n'est pas évident.

Nous avons donc essayé de nous répartir le travail le plus efficacement possible, mais ça n'a pas non plus évident : à de nombreuses reprises, il fallait se recentrer et essayer de se re-répartir les tâches clairement, et ce n'est pas évident. Il y a donc eu certaines séances très peu productives (ou alors seulement sur certains points) avec aussi des pertes de motivation lors de certaines UAs...

Toutefois, les tâches étaient quand même généralement assignées à des binômes ou trinômes, et le travail a, dans l'ensemble, été plutôt efficace.

7.3 Apprentissages

8 Références

Références

[1] Fabrice Evrard, `http://evrard.perso.enseeiht.fr/Enseignement/2IN/`

[2] Wikipédia, *Problème du sac à dos*,
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_du_sac_%C3%A0_dos`

[3] Wikipedia, *Knapsack problem*,
`http://en.wikipedia.org/wiki/Knapsack_problem`

[4] David Pisinger's optimization codes,
`http://www.diku.dk/~pisinger/codes.html`

[5] Frédéric Sur, *Les files d'attentes*,
`www.loria.fr/~sur/enseignement/RO/Files1_FSur.pdf`

[6] Nils Berglund, *Processus aléatoires et applications*,
`www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/berglund/procal.pdf`