

Rapport du projet de théorie des jeux

Maxence Ahlouché
Martin Carton

Maxime Arthaud
Thomas Forgione

Korantin Auguste
Thomas Wagner

11 novembre 2013

Table des matières

1	Présentation de l'équipe	2
2	Shifumi	2
2.1	Stratégie développée	2
2.2	Variantes	2
2.3	Tests	2
3	Morpion	3
4	Compétition/Duopole	3
4.1	Analyse	3
4.2	Stratégies	3
4.2.1	Stackelberg	3
4.2.2	Stratégie pénalisante	3
4.2.3	Stratégie évolutive	4
4.2.4	Stratégie polynomiale	4
4.3	Comparaison	4
5	Annexes	5

Listings

1	Stratégie Stackelberg sur la moyenne	5
2	Stratégie Stackelberg sur la moyenne (variante)	5
3	Stratégie pénalisante	5
4	Stratégie pénalisante (variante)	6
5	Stratégie évolutive	6
6	Stratégie polynomiale	7

1 Présentation de l'équipe

Cette équipe a été menée par Thomas Forgione, assisté de son Responsable Qualité Maxence Ahlouch. Les autres membres de l'équipe sont Martin Carton, Thomas Wagner, Maxime Arthaud, et Korantin Auguste.

Tous les membres de l'équipe ont été présents à chacune des séances lors de cette UA.

2 Shifumi

Une stratégie simple et efficace à laquelle on pourrait penser pour gagner au Shifumi serait de jouer de manière aléatoire.

Et en effet, il s'avère que si les deux joueurs jouent de manière équiprobable, on a affaire à un équilibre de Nash : aucun changement de stratégie de la part d'un joueur ne pourra lui permettre d'augmenter ses chances de gagner.

De plus, si un adversaire ne joue pas de manière aléatoire (ou augmente les probabilités de jouer un certain élément), alors on pourra prévoir ce qu'il va jouer et donc trouver une stratégie qui pourra le battre. Les humains étant très mauvais pour jouer de manière aléatoire, il est assez facile d'écrire une stratégie permettant de les battre.

2.1 Stratégie développée

Afin de démontrer qu'un adversaire ne jouant pas aléatoirement est facile à battre, nous avons développé une stratégie qui se base sur des chaînes de Markov : en se basant sur les derniers éléments joués, elle regarde dans l'historique pour voir l'élément qui était joué le plus souvent par l'adversaire après les derniers coups joués.

Cette stratégie s'avère vraiment efficace contre un joueur humain. Toutefois, elle est prévisible : si on sait qu'on a affaire à une telle stratégie, on peut jouer de manière à la battre.

C'est pour cela qu'une stratégie aléatoire est la seule pouvant maximiser nos gains dans le pire des cas.

2.2 Variantes

Toutes les variantes du Shifumi qui consistent à rajouter des éléments pour obtenir un nombre d'éléments pair (par exemple pierre/papier/ciseaux/puits) vont créer un déséquilibre, car un élément sera moins efficace contre les autres. L'équilibre de Nash du jeu va alors consister à ne jamais jouer cet élément.

Si le nombre d'éléments est impair, alors le jeu pourra être équilibré, comme un Shifumi classique.

2.3 Tests

TODO

3 Morpion

4 Compétition/Duopole

Le but de ce jeu est de maximiser le gain d'une entreprise en concurrence avec une autre entreprise en fonction de leur production.

4.1 Analyse

Notre gain étant égal à $g_x(x) = -x(x + y - 3)$ avec x et y les productions respectives des deux entreprises, pour le maximiser il suffirait de jouer $x = \frac{3-y}{2}$ (c'est que fait la stratégie fournie **noncoopératif**).

Cependant au moment de décider quelle quantité produire nous ne connaissons pas la production y de l'entreprise concurrente. De plus si les deux entreprises s'ignorent totalement en essayant de maximiser leur seul gain, elles gagneront au final moins que deux entreprises qui coopèrent totalement c'est à dire qui chercheraient à maximiser leur gain total $g_x(x) + g_y(y)$ avec $g_x(x) = g_y(y)$ c'est à dire en jouant $x = y = 0.75$. En effet, elles gagneront alors chacune $\frac{9}{8}$ à chaque tour au lieu de 1 si elles sont toutes les deux non-coopératives.

Nous avons donc essayé plusieurs stratégies différentes, qui essayent de maximiser le gain de l'entreprise en tenant en compte l'autre entreprise, les productions et les gains des tours précédents.

4.2 Stratégies

4.2.1 Stackelberg

Todo : Pourquoi $2/3$? Pourquoi $1.1 \cdot 2/3$ c'est mieux.

Une variante de cette stratégie consiste à utiliser la production moyenne de l'autre joueur plutôt que seulement la dernière valeur. Elle permet d'obtenir des résultats légèrement meilleurs.

De plus en coopérant avec l'autre joueur (voir listing 1) si celui-ci coopère, on obtient de meilleurs résultats.

Enfin, une autre variante de cette stratégie (voir listing 2) maximise le gain si l'autre joueur a joué une constante sur les derniers tours. Cette variante donne des résultats un peu moins bons en moyenne mais est meilleure dans le meilleur des cas.

4.2.2 Stratégie pénalisante

Le principe de cette stratégie (voir listing 3) est d'être coopératif tant que l'adversaire l'est, et de devenir plus agressif quand il ne l'est plus : à chaque fois que l'autre joueur n'est pas coopératif, on joue comme le ferait la stratégie Stackelberg.

Une variante de cette stratégie (voir listing 4) consiste à le pénaliser de plus en plus : la première fois on le pénalise une fois, puis deux, puis trois, etc.

Ces deux stratégies sont efficaces à la fois quand l'autre joueur est coopératif (on est alors coopératif) et contre un joueur non-coopératif (on devient alors agressif).

4.2.3 Stratégie évolutive

Une autre stratégie (voir listing 5) que nous avons développée consiste à augmenter la production si la dernière augmentation a augmenté notre gain ou si la dernière diminution l'a diminué et vice-versa.

Celle-ci est plutôt efficace, mais n'est pas la meilleure que nous ayons développée : elle se met souvent à osciller inutilement.

4.2.4 Stratégie polynomiale

Enfin, une autre stratégie (voir listing 6) joue en fonction de la production moyenne de l'autre joueur telle que :

- $f(0) = 1.125$: on joue beaucoup si l'autre joue peu, sans jouer trop pour ne pas le fâcher ;
- $f(0.75) = 0.75$: elle coopère avec quelqu'un qui coopère ;
- $f(1.5) = 0.75$: elle coopère avec quelqu'un qui ne coopère pas, pour essayer de faire coopérer celui-ci (c'est dans notre intérêt et ça ne changerait pas son gain, il est donc possible qu'elle le fasse).

On choisit alors la fonction f pour être un polynôme qui interpole ces valeurs.

Cette méthode s'avère très efficace en moyenne.

4.3 Comparaison

Les tables 1 et 2 montrent les résultats obtenus par les quelques stratégies que nous avons à notre disposition¹ pour une durée de 99 tours et 1000 tours respectivement. Nous faisons s'opposer toutes les stratégies entre elles puis notons pour chacune d'elles son gain minimal, moyen et maximal².

Todo : mettre à jour avec les dernières valeurs quand on aura fini et mettre les résultats pour un autre nombre de tours : il suffit d'appeler `comp_tests(100, true)` d'ajouter les `*` et les `_` et supprimer cette phrase quand on aura fini.

On remarque que notre meilleure stratégie en moyenne est la stratégie qui utilise un polynôme (voir section 4.2.4), cette stratégie est aussi plutôt bonne dans le pire des cas (elle est donc adaptée à une entreprise qui souhaiterait minimiser ses risques).

Todo : parler de palkeo qui est mauvaise à court terme et devient bonne à long terme dans le pire des cas.

On remarque aussi que nos stratégie gagneront toujours de l'argent, contrairement à la stratégie nommée "killer" fournie par un autre groupe.

Enfin on remarque que la stratégie non-coopérative est plutôt bonne dans le pire des cas et en moyenne et est la meilleure dans le meilleur des cas. Elle est donc adaptée à une

1. Les stratégies fournies par les professeurs (marquées *), les notre et des stratégies « prêtées » par d'autres groupes pour les tests (marquées **) que nous remercions.

2. Cette table peut être générée par le script matlab `comp_tests.m` fourni dans l'archive.

entreprise qui serait prête à prendre quelques risques pour avoir une chance de gagner plus.

5 Annexes

Listing 1 – Stratégie Stackelberg sur la moyenne

```
% Stackelberg en moyenne, sauf si l'adversaire est coopératif.
function x = strategie(numpart,tx,ty,gx,gy)
if (numpart == 2)
    x= 0.75;
else
    ty_near_mean = mean(ty(max(numpart-5, 2):numpart-1));

    if (ty_near_mean < 0.76)
        x = 0.75;
    else
        ty_mean = mean(ty(2:numpart-1));
        x = 2*(3-ty_mean)/3;
    end;
end;
```

Listing 2 – Stratégie Stackelberg sur la moyenne (variante)

```
% Stackelberg en moyenne, sauf si l'adversaire est coopératif avec
% maximisation des gains si l'adversaire est constant.
function x = strategie(numpart,tx,ty,gx,gy)
if (numpart == 2)
    x= 0.75;
else
    far = ty(max(2:numpart-15):max(2,numpart-1));
    cst = false;
    if (far == mean(far))
        cst = true;
    end;

    if (cst && numpart > 5)
        x = (3-mean(far))/2;
    else
        ty_near_mean = mean(ty(max(numpart-5, 2):numpart-1));

        if (ty_near_mean < 0.76)
            x = 0.75;
        else
            ty_mean = mean(ty(2:numpart-1));
            x = 2*(3-ty_mean)/3;
        end;
    end;
end;
```

Listing 3 – Stratégie pénalisante

```
% Stratégie qui "pénalise" l'adversaire s'il n'est pas coopératif.
function x = strategie(numpart,tx,ty,gx,gy)
nbr_penal_y = 0;
nbr_penal_x = 0;

for i = 1:numpart-1
```

```

    if (ty(i) > 0.75)
        nbr_penal_y = nbr_penal_y + 1;
    end;
    if (tx(i) > 0.75)
        nbr_penal_x = nbr_penal_x + 1;
    end;
end;

if (nbr_penal_x <= nbr_penal_y)
    ty_mean = ty(2);
    if numpart > 2
        ty_mean = mean(ty(2:numpart-1));
    end;

    x = (3-ty_mean)/2;
else
    x = 0.75;
end;

```

Listing 4 – Stratégie pénalisante (variante)

```

% Stratégie qui "pénalise" de plus en plus l'adversaire s'il n'est pas
% coopératif.
function x = strategie(numpart,tx,ty,gx,gy)
nbr_penal_y = 0;
nbr_penal_x = 0;

for i = 2:numpart-1
    if (ty(i) > 0.75)
        nbr_penal_y = nbr_penal_y + 1;
    end;
end;

while numpart-nbr_penal_x-1>0 && (tx(numpart-nbr_penal_x-1) > 0.75),
    nbr_penal_x = nbr_penal_x + 1;
end;

if (nbr_penal_x < nbr_penal_y)
    x = 1.1255*2*(3-ty(numpart-1))/3;
else
    x = 0.75;
end;

```

Listing 5 – Stratégie évolutive

```

function x = strategie(numpart,tx,ty,gx,gy)
persistent step;
if (numpart <= 2)
    x = 0.75;
    step = 1.3;
elseif (numpart == 3)
    x = 0.85;
else

    if ((gx(numpart-1)>gx(numpart-2)) && (tx(numpart-1)>tx(numpart-2)))
        x = tx(numpart-1) + step;
        step = step * 1.2;
    elseif (gx(numpart-1)<gx(numpart-2) && (tx(numpart-1)>tx(numpart-2)))
        x = tx(numpart-1) - step;
        step = step / 1.2;
    elseif (gx(numpart-1)>gx(numpart-2) && (tx(numpart-1)<tx(numpart-2)))

```

```

        x = tx(numpart-1) - step;
        step = step * 1.2;
    else
        x = tx(numpart-1) + step;
        step = step / 1.2;
    end

    x = max(0.75, min(1.5, x));
end

```

Listing 6 – Stratégie polynomiale

```

% Stratégie qui joue telle que :
%   f(0)   = 1.125   (on est pas trop brutal)
%   f(0.75) = 0.75   (on coopère avec qqn qui coopère)
%   f(1.5) = 0.75   (on essaye de coopérer avec qqn qui ne coopère pas, des
%                   fois qu'il changerait d'avis)
% en fonction de mean(ty(2:numpart-1)).
function x = strategie(numpart,tx,ty,gx,gy)
if (numpart <= 2)
    x= 0.75;
else
    x= 1/3*mean(ty(2:numpart-1))^2-3/4*mean(ty(2:numpart-1))+1.125;
end;

```

Stratégie	Gain minimal	Gain moyen	Gain maximum
coopératif*	55.31	97.84	111.38
noncoopératif*	42.96	87.74	130.26
stackelberg*	48.00	79.75	114.69
palkeo	15.75	92.49	111.38
penalise	45.53	86.45	111.87
penalise_violent	41.87	89.08	111.38
mmmttk	48.13	91.19	111.38
mmmttkv2	48.92	78.55	123.19
gklmjbse	55.31	83.89	116.29
poly	55.53	100.21	111.38
killer**	0.00	71.91	114.64
coopératifmixte**	61.43	97.84	111.38
agressivemieux**	3.15	74.76	112.18
best_strategie**	32.11	86.15	122.62

TABLE 1 – Résultats des différentes stratégies sur 100 tours

Stratégie	Gain minimal	Gain moyen	Gain maximum
coopératif*	561.56	978.59	1123.88
noncoopératif*	380.79	877.10	1317.08
stackelberg*	498.00	797.42	1132.44
palkeo	694.54	986.94	1123.88
penalise	419.12	860.12	1124.70
penalise_violent	421.22	896.10	1123.88
mmmttk	492.11	923.94	1123.88
mmmttkv2	531.85	800.61	1262.25
gklmjbse	561.56	832.41	1135.33
poly	561.82	1011.24	1123.88
killer**	0.00	773.86	1133.09
coopératifmixte**	698.67	990.58	1123.88
agressivemieux**	3.15	750.64	1126.18
best_strategie**	322.67	881.00	1262.81

TABLE 2 – Résultats des différentes stratégies sur 1000 tours