

Rapport final du projet de Graphes et Recherche opérationnelle

Maxence Ahlouche Maxime Arthaud Korantin Auguste
Martin Carton Thomas Forgione Thomas Wagner

Enseeiht

17 décembre 2013

Graphes eulériens

- Cycle eulérien : cycle parcourant toutes les arêtes du graphe une et une seule fois
- Chaîne eulérienne : idem, mais ne retourne pas au sommet de départ
- Graphe eulérien : graphe contenant un cycle eulérien (degré des sommets toujours pair)
- Graphe semi-eulérien : graphe contenant une chaîne eulérienne (degré des sommets toujours pair, sauf pour les extrémités de la chaîne eulérienne)

Graphes eulériens

Matrices latines

- Teste toutes les possibilités
- Très peu efficace

Algorithme d'Euler

- Recherche des cycles eulériens dans des sous-graphes, récursivement
- Beaucoup plus efficace

Graphes hamiltoniens

- Cycle hamiltonien : cycle parcourant tous les sommets du graphe une et une seule fois
- Chaîne hamiltonienne : idem, mais ne retourne pas au sommet de départ
- Graphe hamiltonien : graphe contenant un cycle hamiltonien
- Graphe semi-hamiltonien : graphe contenant une chaîne hamiltonienne
- Pas de propriété générale pour déterminer si un graphe est hamiltonien ou non
- NP-complet : pas d'algorithme efficace

Voyageur de commerce – Énoncé

Chercher un chemin passant par tous les sommets, de longueur minimale.

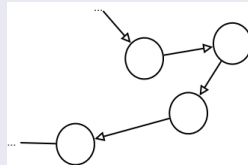
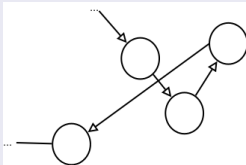
- cycle hamiltonien de coût minimal
- NP-complet
- méthodes approchées

Voyageur de commerce – Résolution approchée

Heuristiques

Aller sur le sommet le plus près

Recherche locale : 2-opt



Voyageur de commerce – Tests

| Fichier de test | Résultat optimum | Plus proche voisin | Plus proche voisin + 2-opt | Plus proche voisin amélioré | Plus proche voisin amélioré + 2-opt |
|-----------------|------------------|--------------------|----------------------------|-----------------------------|-------------------------------------|
| berlin52.tsp | 7542 | 8981/19.1% | 8060/6.7% | 7972/5.7% | 7810/3.6% |
| bier127.tsp | 118282 | 137297/16.7% | 125669/6.2% | 127857/8.1% | 122072/3.2% |
| d657.tsp | 48912 | 62176/27.1% | N/A | N/A | N/A |
| u724.tsp | 41910 | 55344, 32.1% | N/A | N/A | N/A |
| fl1577.tsp | 22249 | N/A | N/A | N/A | N/A |

TABLE : Résultats pour TSP

<http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/>

Voyageur de commerce – Métaheuristiques

- Recherche locale itérée
- Recherche tabou
- Recuit simulé
- Algorithmes génétiques
- Colonies de fourmis

Postier chinois – Énoncé

Trouver la chaîne la plus courte dans un graphe connexe passant au moins une fois par chaque arête, et revenant à son point de départ.

Postier chinois – Méthode de résolution

- 1 On crée d'abord le graphe partiel contenant uniquement les sommets de degré impair ;
- 2 On transforme ensuite ce graphe en clique ;
- 3 On cherche le couplage parfait de coût minimum ;
- 4 Pour chaque arête de cet ensemble, on double la chaîne la plus courte reliant les sommets reliés par cette arête dans le graphe initial ;
- 5 On applique l'algorithme d'Euler sur le graphe final.

Sac à dos – Énoncé

Remplir un sac pour maximiser la valeur des objets, sans dépasser une certaine masse.

Sac à dos – Résolution

- Résolution exacte :
 - Programmation dynamique.
 - Masses entières uniquement.
 - $O(nW)$
- Résolution approchée :
 - Algorithme glouton.
 - Masses quelconques.
 - $O(n \log n)$

Sac à dos – Résultats

| Nombre d'objets/ Amplitudes des prix et masses/ Masse maximale autorisée | Résultat optimum | Prix le plus élevé | Masse la plus faible | Meilleur ratio prix/masse |
|--|---------------------|-----------------------|-------------------------|------------------------------|
| 50/25/20 | 85 | 49/42.4% | 67/21.2% | 81/4.7% |
| 500/25/500 | 2016 | 1125/44.2% | 1725/14.4% | 1983/1.6% |
| 5000/25/500 | 5540 | 1175/79% | 4577/17.4% | 5540/0% |
| 50000/25/500 | 11195 | 1175/90% | 6684/40.3% | 11195/0% |
| 50000/1000/500 | 118260 | 5959/95% | 101857/13.9% | 118147/0.1% |
| 50000/5000/100 | 100847 | 14931/85.2% | 93532/7.3% | 100282/0.6% |

TABLE : Résultats pour le sac à dos

<http://www.diku.dk/~pisinger/codes.html>

Simplexe – Présentation du problème

$$\max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ Ax \leq b}} f(x)$$

Exemple

| | P_1 | P_2 | P_3 | P_4 | stock |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| R_A | 2 | 4 | 5 | 7 | 72 |
| R_B | 1 | 1 | 2 | 2 | 17 |
| R_C | 1 | 2 | 3 | 3 | 24 |
| bénéfice | 7 | 9 | 18 | 17 | |

Simplexe – Simplification du problème

Transformation des contraintes d'inégalité en égalité.

Exemple

| | P_1 | P_2 | P_3 | P_4 | x_1 | x_2 | x_3 | stock |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| R_A | 2 | 4 | 5 | 7 | 1 | 0 | 0 | 72 |
| R_B | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 17 |
| R_C | 1 | 2 | 3 | 3 | 0 | 0 | 1 | 24 |
| bénéfice | 7 | 9 | 18 | 17 | 0 | 0 | 0 | |

Simplexe – Algorithme

Algorithme

Tant qu'il y a un élément strictement positif sur la première ligne

à_ajouter = indice de la colonne dont le gain est maximal

à_retirer = $\operatorname{argmin}_i \frac{\text{matrice}[i, \text{stock}]}{\text{matrice}[i, \text{à_ajouter}]}$

mettre à_ajouter dans la base et retirer à_retirer de la base

mettre à jour le reste de la matrice

Fin Tant que

Cas difficiles

- Cas où l'ensemble de départ vide
- Cas où $(0,0) \notin C$
- Cas de dégénérescence

Simplexe – Une itération

Exemple

| | P_1 | P_2 | P_3 | P_4 | x_1 | x_2 | x_3 | stock |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| R_A | 2 | 4 | 5 | 7 | 1 | 0 | 0 | 42 |
| R_B | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 17 |
| R_C | 1 | 2 | 3 | 3 | 0 | 0 | 1 | 24 |
| bénéfice | 7 | 9 | 18 | 17 | 0 | 0 | 0 | |

Simplexe – Une itération

Exemple

| | P_1 | P_2 | P_3 | P_4 | x_1 | x_2 | x_3 | stock |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| R_A | 2 | 4 | 5 | 7 | 1 | 0 | 0 | 42 |
| R_B | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 17 |
| R_C | 1 | 2 | 3 | 3 | 0 | 0 | 1 | 24 |
| bénéfice | 7 | 9 | 18 | 17 | 0 | 0 | 0 | |

Simplexe – Une itération

Exemple

| | P_1 | P_2 | P_3 | P_4 | x_1 | x_2 | x_3 | stock |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| R_A | 1/3 | 2/3 | 0 | 2 | 1 | 0 | -5/3 | 2 |
| R_B | 1/3 | -1/3 | 0 | 0 | 0 | 1 | -2/3 | 1 |
| R_C | 1/3 | 2/3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1/3 | 8 |
| bénéfice | 1 | -3 | 0 | -1 | 0 | 0 | -6 | -144 |

Shifumi

Équilibre de Nash

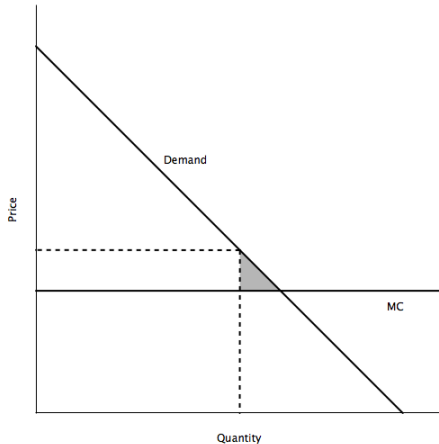
Équilibre de Nash : jouer de manière aléatoire.

- Chaines de Markov : bat aisément un humain qui joue « normalement ».
- Variantes : reviennent au Shifumi classique si le nombre d'éléments est impair.

Somme magique

todo

Duopole – principe



Nos stratégies :

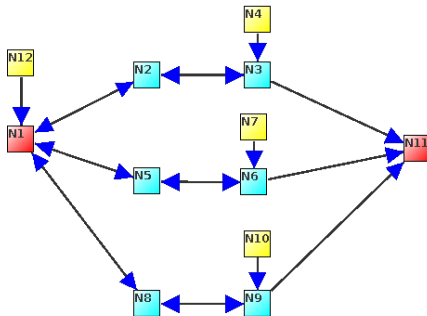
- Stackelberg en moyenne
 $x = \frac{3-y}{2}$
- Stratégie pénalisante
- Stratégie évolutive
- Stratégie polynomiale
 $f(0) = 1.125$
 $f(0.75) = 0.75$
 $f(1.5) = 0.75$

Duopole – résultats

| Stratégie | Gain minimal | Gain moyen | Gain maximum |
|-----------------------------------|--------------|------------|--------------|
| coopératif* | 561.56 | 978.59 | 1123.88 |
| noncoopératif* | 380.79 | 877.10 | 1317.08 |
| stackelberg* | 498.00 | 797.42 | 1132.44 |
| palkeo | 694.54 | 986.94 | 1123.88 |
| Pénalise | 419.12 | 860.12 | 1124.70 |
| Pénalise variante | 421.22 | 896.10 | 1123.88 |
| Stackelberg en moyenne | 492.11 | 923.94 | 1123.88 |
| Stackelberg en moyenne (variante) | 531.85 | 800.61 | 1262.25 |
| gklmjbse | 561.56 | 832.41 | 1135.33 |
| poly | 561.82 | 1011.24 | 1123.88 |
| killer** | 0.00 | 773.86 | 1133.09 |
| coopératifmixte** | 698.67 | 990.58 | 1123.88 |
| agressivemieux** | 3.15 | 750.64 | 1126.18 |
| best_strategie** | 322.67 | 881.00 | 1262.81 |

TABLE : Résultats des différentes stratégies sur 1000 tours

Gare de péage



- $x[12] = \text{random}() < p_{cb}$
- $x[1] = \text{random}() < \lambda$
- $x[2] = (x[2] > 0) * (x[2] - 1 + d_{32}) + d_{12}$
- $d_{12} = x[1] * d_{121} * (d_{21} \leq d_{81})$
- $d_{23} = (x[2] > 0)$
- $d_{32} = x[3] * (1 - d_{43})$
- $x[3] = d_{23} + x[3] * (1 - d_{23}) * (1 - d_{43})$
- $d_{311} = x[3] * d_{43}$
- $x[10] = \text{random}() < \frac{1}{p_{cb}/\mu_{cb} + (1-p_{cb})/\mu_{ncb}}$

UA 5 Robots

- Suivi de mur
- Algorithme de Dijkstra
- Algorithme A*

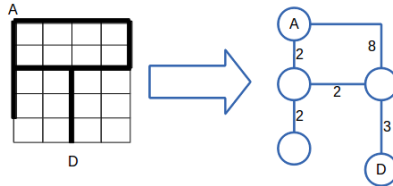
Suivi de mur

Un capteur ultrasonique à gauche.

Un capteur ultrasonique frontale.

- Si distance frontale $<$ minima : on pivote à droite.
- Sinon :
 - Si distance latérale $>$ distance voulue + marge : coupe le moteur de gauche
Sinon il est actif
 - Si distance latérale $<$ distance voulue - marge : coupe le moteur de droite
Sinon il est actif

Algorithme de Dijkstra



Si le robot connaît le plan du labyrinthe l'algorithme de dijkstra suffit.