

Rapport du projet de théorie des graphes

Maxence Ahlouche
Martin Carton

Maxime Arthaud
Thomas Forgione

Korantin Auguste
Thomas Wagner

7 octobre 2013

Table des matières

1	Présentation de l'équipe	3
2	Modélisation mathématique	3
3	Graphes eulériens	3
3.1	Analyse mathématique	3
3.2	Méthode de résolution	3
3.2.1	Matrices latines	3
3.2.2	Algorithme d'Euler	4
3.3	Algorithmes	4
4	Graphes hamiltonien	4
4.1	Analyse mathématique	4
4.2	Méthode de résolution	4
4.3	Algorithmes	5
5	Problème du postier chinois	5
5.1	Analyse mathématique	5
5.2	Méthode de résolution	5
6	Problème voyageur de commerce	5
6.1	Analyse mathématique	5
6.2	Méthode de résolution	6
6.3	Algorithmes	6
6.3.1	Plus proche voisin	6
6.3.2	2-opt	6
6.4	Tests	7
7	Conclusion	7

1 Présentation de l'équipe

Cette équipe a été menée par Korantin Auguste, assisté de son Responsable Qualité Martin Carton. Les autres membres de l'équipe sont Thomas Wagner, Thomas Forgione, Maxime Arthaud, et Maxence Ahlouche. Tous les membres de l'équipe ont été présents à chacune des séances lors de cette UA.

2 Modélisation mathématique

Nous avons choisi de représenter nos graphes comme une liste de sommets, chacun ayant une liste d'arêtes.

Dans la suite nous noterons n le nombre de sommets du graphe.

3 Graphes eulériens

3.1 Analyse mathématique

Un graphe eulérien est un graphe contenant un cycle eulérien, c'est-à-dire un chemin parcourant toutes les arêtes du graphe une et une seule fois, en revenant au sommet de départ. Un théorème fondamental garantit qu'un graphe connexe est eulérien si et seulement si chacun de ses sommets est associé à un nombre pair d'arêtes.

Un graphe semi-eulérien, quant à lui, contient une chaîne eulérienne : celle-ci passe également par toutes les arêtes du graphe une seule et unique fois, mais ne retourne pas au point de départ. Le théorème précédent se généralise alors aux graphes semi-eulériens : un graphe connexe et semi-eulérien si et seulement tous ses sommets sauf deux sont associés à un nombre pair d'arêtes. Dans ce cas, la chaîne eulérienne aura pour départ l'un des deux sommets associés à un nombre impair d'arêtes et pour point d'arrivée le deuxième.

3.2 Méthode de résolution

Afin de trouver une chaîne ou un cycle eulérien dans un graphe, nous avons implémenté deux méthodes : une méthode qui teste toutes les possibilités, et une autre plus intelligente et moins coûteuse.

3.2.1 Matrices latines

La première méthode est inspirée des matrices latines. Chaque coefficient de la matrice sera un ensemble de chemins, un chemin étant lui-même une liste de sommets. La matrice latine de notre graphe sera la matrice M dont chaque coefficient $m_{i,j}$ vaudra :

- l'ensemble vide si le nœud i n'est pas relié au nœud j dans le graphe.
- un ensemble contenant pour unique élément le chemin $[N_i, N_j]$ si les nœuds i et j sont reliés (où N_k représente le nœud k).

Nous définissons ensuite un produit sur les coefficients d'une telle matrice. Le produit de deux chemins sera :

- nul si le dernier nœud du premier chemin n'est pas le premier nœud du deuxième ;
- la concaténation des deux chemins sinon.

Le produit de deux ensembles de chemins sera l'ensemble contenant les produits de chaque couple de nœuds.

Pour tout k entier naturel, le coefficient (i, j) de la matrice M^k représentera l'ensemble des chemins de longueur k reliant les nœuds i et j .

Puisque un chemin eulérien passe une unique fois par chaque arête, il suffira de calculer la matrice latine élevée à cette puissance pour trouver sur sa diagonale l'ensemble des cycles possibles. En éliminant à chaque produit les chemins qui passent plusieurs fois par la même arête, on trouve l'ensemble des cycles eulériens.

3.2.2 Algorithme d'Euler

La deuxième méthode, basée sur l'algorithme d'Euler, est nettement plus efficace. Une fonction récursive cherche un cycle eulérien d'un sous-graphe de notre graphe de départ, puis s'appelle récursivement sur chacun des sommets parcourus par ce chemin, dans le graphe où l'on a supprimé les arêtes déjà parcourues. En reconstruisant ces cycles astucieusement, on parvient à trouver un cycle eulérien avec une complexité en $O(k)$ où k représente le nombre d'arêtes du graphe.

3.3 Algorithmes

4 Graphes hamiltonien

4.1 Analyse mathématique

Un graphe (semi-)hamiltonien est un graphe sur lequel on peut trouver un cycle(/chemin) passant par tous les sommets une et une seule fois.

Le problème de savoir si un graphe est (semi-)hamiltonien est NP-complet, de même que de trouver un cycle ou chemin s'il y en a.

Il existe cependant des conditions suffisantes pour lesquelles on peut affirmer qu'un graphe est hamiltonien ou non.

Par exemple un graphe complet est forcément hamiltonien (utile dans le cas du voyageur de commerce, voir section 6), il existe aussi des conditions sur les degrés des sommets (théorème de Dirac, d'Ore, etc.).

4.2 Méthode de résolution

Pour tester si un graphe est hamiltonien, nous avons utilisé les théorèmes de Dirac et Pósa qui donnent des conditions nécessaires, si ces conditions ne sont pas vérifiées, comme il n'y a aucun théorème qui permette d'affirmer qu'un graphe n'est pas semi-hamiltonien, on recherche un chemin hamiltonien dans ce graphe.

Pour rechercher un chemin hamiltonien dans un graphe, nous avons écrit un algorithme qui recherche parmi tout les chemins possibles. Sa complexité dans le pire des cas est donc très mauvaise : $O(n!)$. Comme on peut s'arrêter dès qu'on a trouvé un chemin sans devoir tester tout les autres chemins possibles, la complexité moyenne sera inférieure.

Nous avons écrit une version améliorée de cet algorithme qui essaye d'éviter les culs de sac.

4.3 Algorithmes

5 Problème du postier chinois

5.1 Analyse mathématique

Le problème du postier chinois consiste à trouver le plus court chemin dans un graphe connexe passant au moins une fois par chaque arête, et revenant à son point de départ.

Ce problème peut être réduit à la recherche d'un couplage parfait de coût minimum, il peut donc être résolu en temps polynomial dans le cas général.

5.2 Méthode de résolution

Tout d'abord, si le graphe est eulérien, il suffit d'appliquer l'algorithme d'Euler pour avoir le chemin voulu.

Sinon, la méthode de résolution consiste à transformer le graphe en graphe eulérien :

- on crée d'abord le graphe partiel contenant uniquement les sommets de degré impair ;
- on transforme ensuite ce graphe en clique : pour chaque couple de sommets non reliés entre eux, on crée une arête les rejoignant, de poids égal au coût le plus faible possible pour rejoindre ces sommets dans le graphe initial (ceci se calcul facilement avec l'algorithme de Dijkstra) ;
- on cherche le couplage parfait de coût minimum : c'est à dire l'ensemble d'arêtes disjointes couvrant tous les sommets du graphe, dont la somme des poids doit est le plus faible possible. Pour cela, on peut utiliser des algorithmes comme celui d'Edmonds, mais dans notre implémentation, nous avons utilisé la bruteforce, par manque de temps ;
- pour chaque arête de cet ensemble, on double le chemin le plus court reliant les nœuds reliés par cette arête dans le graphe initial ;
- on obtient alors un graphe Eulérien sur lequel on applique l'algorithme d'Euler.

6 Problème voyageur de commerce

6.1 Analyse mathématique

On s'intéresse ici à passer par tout les points d'un ensemble une et une seule fois en minimisant la distance totale du cycle.

On peut modéliser ce problème par un graphe complet, dont les arêtes ont un coup qui correspond à la distance entre chaque point, on cherche alors le cycle hamiltonien de coût minimal. On sait qu'un tel cycle existe car le graphe est complet.

Cependant trouver un tel cycle est un problème NP-difficile, il n'existe donc pas d'algorithme efficace pour trouver ce cycle.

6.2 Méthode de résolution

Bien que la résolution exact de ce problème soit NP-complet, il existe des méthodes approchées de résolution.

Un heuristique simple consiste à partir d'un sommet au hasard du graphe et d'aller au sommet le plus proche sur lequel on est pas encore passer (puis à retourner au sommet de départ pour boucler le cycle). Cet algorithme est en $O(n)$ et donc rapide. Mais il n'offre cependant aucune garantie de résultat, il existe même des graphes pour lesquels il donne le pire cycle.

Il existe aussi des algorithmes non-constructifs comme le 2-opt, qui essaye d'améliorer un cycle donné en échangeant des sommets.

6.3 Algorithmes

6.3.1 Plus proche voisin

```

Entrée : g (Graphe complet)
Sortie : (coût, cycle) où cycle est un cycle hamiltonien construit selon la
         méthode du plus proche voisin et coût son coût associé sous forme de liste de
         points
coût = 0
cycle = ["un point de g au hasard"]

tant qu'il reste des points:
    # On ajoute au cycle le point suivant
    plus_proche = "point de g sur lequel on est pas encore passé le plus proche
                  du dernier point du cycle"

    coût += "coût de plus_proche au dernier point du cycle"
    cycle = cycle :: plus_proche

# On ferme le cycle
coût += "coût du dernier au premier point de cycle"
cycle = chemin :: "premier point de chemin"

retourner (coût, cycle)

```

6.3.2 2-opt

```

Entrée : un cycle hamiltonien (liste de sommets) et son coût
Sortie : un cycle hamiltonien et son coût inférieur ou égal au coup d'entrée

pour chaque couple de points (a, b) dans le cycle:
    nouveau_coût = coût
        - "coût de a à son successeur dans le cycle"
        - "coût de b à son successeur dans le cycle"

```

```

+ "coût de a à b"
+ "coût du successeur de a et au successeur de b dans le
  cycle"

si nouveau_coût < coût :
    coût = nouveau_coût
    cycle = cycle créée en échangeant a et b dans cycle

retourner (coût, cycle)

```

6.4 Tests

Nous avons lancé cet algorithme sur plusieurs “grands” graphes¹, les résultats sont présentés dans la table 1².

Fichier de test	Résultat optimum	Plus proche voisin	Plus proche voisin + 2-opt	Plus proche voisin amélioré	Plus proche voisin amélioré + 2-opt
berlin52.tsp	7542	8981/19.1%	8060/6.7%	7972/5.7%	7810/3.6%
bier127.tsp	118282	137297/16.7%	125669/6.2%	127857/8.1%	122072/3.2%
d657.tsp	48912	62176/27.1%	N/A	N/A	N/A
u724.tsp	41910	55344, 32.1%	N/A	N/A	N/A
fl1577.tsp	22249	N/A	N/A	N/A	N/A

TABLE 1 – Résultats pour TSP

On remarque que bien qu’il ne fournisse aucune garantie, l’algorithme du plus proche voisin donne des résultats plutôt bons.

L’application du 2-opt sur les résultats donnés par la méthode du plus proche voisin donne des résultats assez intéressants : ils sont très proches du résultat optimum. Malheureusement, cet algorithme est très coûteux en temps.

L’algorithme du 2-opt a été appliqué en boucle tant qu’il améliorait le résultat pour **berlin52.tsp** et **bier127.tsp**, mais pour le fichier **d657.tsp**, il était beaucoup trop long pour pouvoir faire ça, cependant, après 50 itérations (4h de calcul), on obtient un chemin de coût 58754, soit une erreur relative de 20.1%. L’algorithme est d’autant plus long que le cycle est déjà bon.

7 Conclusion

Le python n’est évidemment pas adapté blabla

1. Trouvés sur <http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/>.

2. N/A indique que l’algorithme est trop long ou cause une erreur à cause de la taille du graphe, pour chaque méthode de résolution sont données les longueurs des chemins trouvés et l’erreur relative avec le résultat optimum.

8 Annexes

Listings

1	Classe pour représenter un graphe	8
2	Codes à la connexité	10
3	Codes relatifs au graphes eulériens	10
4	Codes relatifs au graphes hamiltonien	12
5	Codes relatifs postier chinois	14
6	Codes relatifs au TSP	17
7	Tests	19

Listing 1 – Classe pour représenter un graphe

```
#!/usr/bin/python2
# -*- coding: utf-8 -*-

class Edge:
    def __init__(self, origin, dest, cost=1):
        self.origin = origin
        self.dest = dest
        self.cost = cost

    def other_side(self, node):
        return self.origin if node is self.dest else self.dest

    def __repr__(self):
        return "Edge(%s, %s, %s)" % (self.origin.data, self.dest.data, self.cost)

class Node:
    def __init__(self, data):
        self.edges_out = set() # liste des arêtes qui sortent du nœud pour
                               # pointer sur d'autres
        self.data = data # must be unique

    def __hash__(self):
        return hash(self.data)

    def degree(self):
        return len(self.edges_out)

    def __repr__(self):
        return "Node(%s, [%s])" % (self.data, ', '.join(map(repr,
            self.edges_out)))

    def cost_to(self, other):
        return self.edge_to(other).cost

    def edge_to(self, other):
        for edge in self.edges_out:
            if edge.other_side(self) == other:
                return edge
        raise RuntimeError("Not complete graph")

class Graph:
    def __init__(self, path=None):
        self.nodes = [] # liste des noeuds du graphe
```



```

        self.name = ""
        if path:
            self.name = path.split('/')[−1]

def __repr__(self):
    return 'Graph(\n%s\n)' % ',\n'.join(map(repr, self.nodes))

def order(self):
    return len(self.nodes)

def copy(self):
    g = Graph()
    g.oriented = self.oriented

    for node in self.nodes:
        g.nodes.append(Node(node.data))

    g_nodes = set(g.nodes)
    while g_nodes:
        node_g = g_nodes.pop()
        node = filter(lambda n: n.data == node_g.data, self.nodes)[0]
        for edge in node.edges_out:
            other_side_g = filter(lambda n: n.data ==
                                   edge.other_side(node).data, g.nodes)[0]
            if self.oriented:
                node_g.edges_out.add(Edge(node_g, other_side_g, edge.cost))
            elif other_side_g in g_nodes:
                edge_g = Edge(node_g, other_side_g, edge.cost)
                node_g.edges_out.add(edge_g)
                other_side_g.edges_out.add(edge_g)

    return g

def read_gph(path):
    nodes_added = dict()
    g = Graph(path)

    with open(path, 'r') as f:
        nb_v, nb_e, oriented = map(int, f.readline().split(' '))
        g.oriented = oriented == 1

        for i in range(nb_v):
            data = int(f.readline())
            n = Node(data)
            g.nodes.append(n)
            nodes_added[data] = n

        for i in range(nb_e):
            #(orig, dest, cost) = map(int, (f.readline()+" 1").split(' ')[:3])
            line = f.readline()
            try:
                orig, dest, cost = map(int, line.split(' '))
            except ValueError:
                orig, dest = map(int, line.split(' '))
                cost = 1

            n_orig = nodes_added[orig]
            n_dest = nodes_added[dest]
            edge = Edge(n_orig, n_dest, cost)
            n_orig.edges_out.add(edge)
            if not g.oriented:
                n_dest.edges_out.add(edge)

```

```
return g
```

Listing 2 – Codes à la connexité

```
#!/usr/bin/python2
# -*- coding: utf-8 -*-

def is_connected(graph):
    def visit(node, visited):
        visited.add(node)
        for e in node.edges_out:
            n = e.other_side(node)
            if n not in visited:
                visit(n, visited)

    if graph.order() <= 1: # useless cases
        return True

    if not graph.oriented:
        visited = set()
        x = next(iter(graph.nodes))
        visit(x, visited)
        return len(visited) == graph.order()
    else:
        raise NotImplementedError()
```

Listing 3 – Codes relatifs au graphes eulériens

```
#!/usr/bin/python2
# -*- coding: utf-8 -*-

from connected import *

def get_odd_vertices(graph):
    """
    Returns true if the graph is eulerian or semi-eulerian
    """
    if not graph.oriented:
        nb_odd_deg = 0
        odd_list = []
        for n in graph.nodes:
            if len(n.edges_out) % 2 != 0:
                odd_list.append(n)
        return odd_list
    else:
        raise NotImplementedError()

def is_eulerian(graph):
    nb_odd_vertices = len(get_odd_vertices(graph))
    return nb_odd_vertices == 0 and is_connected(graph)

def is_semi_eulerian(graph):
    nb_odd_vertices = len(get_odd_vertices(graph))
    return nb_odd_vertices == 2 and is_connected(graph)

def eulerian_path_euler(graph):
    def aux(node, visited_edges):
        result = [node]
        final_result = [node]
```

```

while True:
    edges = filter(lambda e: e not in visited_edges, node.edges_out)
    if not edges:
        break
    else:
        edge = edges[0]
        node = edge.other_side(node)
        result.append(node)
        visited_edges.add(edge)

for node in result[1:]:
    cycle = aux(node, visited_edges)
    final_result += cycle

return final_result

if not graph.is_connected():
    return None

odd_vertices = get_odd_vertices(graph)
if len(odd_vertices) == 0:
    return aux(graph.nodes[0], set())
elif len(odd_vertices) == 2:
    return aux(odd_vertices[0], set())
else:
    return None

# no multigraph nor reflexive edge
# equivalent to brute force
def eulerian_path_lat_mat(graph):
    def gen_lat_mat(graph):
        nb_n = len(graph.nodes)
        lat_mat = [[None for i in range(nb_n)] for j in range(nb_n)]
        for n in graph.nodes:
            for e in n.edges_out:
                n2 = e.other_side(n)
                lat_mat[n.data-1][n2.data-1] = [[n.data, n2.data]]
        return lat_mat

    def lat_mat_mul(a, b):
        nb_n = len(a)
        result = [[None for i in range(nb_n)] for j in range(nb_n)]
        for i in range(nb_n):
            for j in range(nb_n):
                for k in range(nb_n):
                    # "multiplication"
                    cell_a = a[i][k]
                    cell_b = b[k][j]
                    if cell_a is not None and cell_b is not None:
                        for l in cell_a: # for each path in cell_a
                            for m in cell_b: # for each path in cell_b
                                path = l[:]
                                path.extend(m[1:])
                                edges = set()
                                for n in range(len(path)-1):
                                    edge = (path[n], path[n+1])
                                    edge_rev = (path[n+1], path[n])
                                    if edge not in edges:
                                        edges.add(edge)
                                        edges.add(edge_rev)

```

```

        else:
            path = None
            break
        if path is not None:
            result[i][j].append(path)
    if result[i][j] == []:
        result[i][j] = None
    return result

def lat_mat_pow(lat_mat, n):
    result = lat_mat_mul(lat_mat, lat_mat)
    for i in range(n-2):
        result = lat_mat_mul(lat_mat, result)

    return result

nb_a = 0
for n in graph.nodes:
    nb_a += len(n.edges_out)
nb_a /= 2
a = gen_lat_mat(graph)
b = lat_mat_pow(a, nb_a)
for row in b:
    for cell in row:
        print cell

return None

```

Listing 4 – Codes relatifs au graphes hamiltonien

```

#!/usr/bin/python2
# -*- coding: utf-8 -*-
import graphs

def dirac_test(graph):
    """
    Dirac's theorem.
    """
    return len(graph.nodes) < 3 and min(node.degree() for node in graph.nodes) >=
        graph.order() / 2

def posa_test(graph):
    """
    Pósa's theorem.
    """
    n = len(graph.nodes)
    if n < 3: return False

    k = int((n+1)/2)
    degrees = [0 for i in range(0, k)]
    for node in graph.nodes:
        for d in range(0, node.degree()+1):
            if d < k:
                degrees[d] += 1

    for i in range(0, k):
        if degrees[i] > i:
            return False

    return True

```

```

def is_semi_hamiltonian(graph):
    """
        Returns whether a graph is hamiltonian or not.
        The graph must be a simple graph and non-oriented.
    """
    # rapid tests, only sufficient
    if dirac_test(graph) or posa_test(graph):
        return True

    # general test, complexity sucks
    return hamiltonian_path2(graph) != None

def hamiltonian_path(graph, node_from=None, nodes_done=frozenset()):
    """
        Return a hamiltinian path if one exists or None.
        This is brute force.
        The graph must be non-oriented.
    """
    if node_from is None:
        node_from = graph.nodes[0]

    nodes_done = nodes_done | frozenset((node_from,))

    if len(nodes_done) == graph.order():
        return [node_from]

    for edge in node_from.edges_out:
        other = edge.other_side(node_from)
        if other in nodes_done:
            continue
        path = hamiltonian_path(graph, other, nodes_done)
        if path:
            return [node_from] + path

    return None

def hamiltonian_path2(graph, node_from=None, nodes_done=frozenset()):
    """
        Return a hamiltinian path if one exists or None.
        This is sligthly more efficient than brute force as it tries to stop
        sonner.
        The graph must be non-oriented.
    """
    if node_from is None:
        node_from = graph.nodes[0]

    nodes_done = nodes_done | frozenset((node_from,))

    if len(nodes_done) == graph.order():
        return [node_from]

    poss = filter(lambda x: x.other_side(node_from).degree() == 1,
                  node_from.edges_out)

    if len(poss) == 1:
        path = hamiltonian_path(graph, poss[0].other_side(node_from), nodes_done)
        return [node_from] + path if path else None
    elif len(poss) > 1:
        return None

    for edge in node_from.edges_out:
        other = edge.other_side(node_from)

```

```

        if other in nodes_done:
            continue
        path = hamiltonian_path2(graph, other, nodes_done)
        if path:
            return [node_from] + path

    return None

def read_hcp(path):
    """
        Create a graph from a file of the form:
        [3 useless lines]
        DIMENSION : 1000
        [2 useless lines]
        node1 node2
        node3 node4
        ...
        -1
        These graphs are found here
        http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/tsp/
    """
    with open(path, 'r') as f:
        for i in range(1,4): f.readline()

        line = f.readline()
        nb_nodes = int(line.split()[2])

        f.readline()
        f.readline()

        nodes = []
        for i in range(0, nb_nodes):
            nodes.append(graphs.Node(i))

        line = f.readline()
        while line != "-1\n":
            a, b = map(int, line.split())
            edge = graphs.Edge(nodes[a-1], nodes[b-1])
            nodes[a-1].edges_out.add(edge)
            nodes[b-1].edges_out.add(edge)
            line = f.readline()

        g = graphs.Graph(path)
        g.nodes = nodes
        g.oriented = False
        return g

```

Listing 5 – Codes relatifs postier chinois

```

#!/usr/bin/python2
# -*- coding: utf-8 -*-
from graphs import Graph, Node, Edge
from eulerian import eulerian_path_euler

def dijkstra_min_cost(origin, dest):
    """
        Retourne le coût minimum pour aller de origin vers dest.
        précondition: le graphe est connexe
    """
    if origin is dest:
        return 0

```

```

reachable_nodes = [(e.cost, e.other_side(origin)) for e in origin.edges_out]
reachable_nodes.sort(key=lambda n: n[0])

while True:
    cost, node = reachable_nodes.pop(0)
    if node is dest:
        return cost

    for edge in node.edges_out:
        node_reachable = edge.other_side(node)
        reachable_nodes.append((cost + edge.cost, node_reachable))

    reachable_nodes.sort(key=lambda n: n[0])

def dijkstra_min_cost_path(origin, dest):
    """
    Retourne le chemin (liste d'arêtes) de coût minimum pour aller de origin vers
    dest.
    précondition: le graphe est connexe
    """
    if origin is dest:
        return []

    reachable_nodes = [(e.cost, [e], e.other_side(origin)) for e in
                        origin.edges_out]
    reachable_nodes.sort(key=lambda n: n[0])

    while True:
        cost, path, node = reachable_nodes.pop(0)
        if node is dest:
            return path

        for edge in node.edges_out:
            node_reachable = edge.other_side(node)
            reachable_nodes.append((cost + edge.cost, path + [edge],
                                   node_reachable))

        reachable_nodes.sort(key=lambda n: n[0])

def postier_chinois(g):
    """
    Retourne le chemin optimal pour le problème du postier chinois, ou None s'il
    n'y a pas de chemin.
    Attention : l'algorithme peut modifier le graphe.
    """
    if not g.is_connected():
        return None

    if g.oriented:
        raise NotImplementedError()

    # Création du graphe partiel
    pg = Graph()
    pg.oriented = False

    # Copie des nœuds de degré impair
    for node in g.nodes:
        if len(node.edges_out) % 2 == 1:
            pg.nodes.append(Node(node.data))

    if not pg.nodes: # graphe eulérien
        return eulerian_path_euler(g)

```

```

# Copie des arêtes
pg_nodes = set(pg.nodes)
while pg_nodes:
    node_pg = pg_nodes.pop()
    node = filter(lambda n: n.data == node_pg.data, g.nodes)[0]
    for edge in node.edges_out:
        other_side_pg = filter(lambda n: n.data ==
                                edge.other_side(node).data, pg_nodes)
        if other_side_pg:
            other_side_pg = other_side_pg[0]
            edge_pg = Edge(node_pg, other_side_pg, edge.cost)
            node_pg.edges_out.add(edge_pg)
            other_side_pg.edges_out.add(edge_pg)

# Transformation en clique
pg_nodes = set(pg.nodes)
while pg_nodes:
    node_pg = pg_nodes.pop()
    for node in pg_nodes:
        if not node_pg.exists_edge_to(node):
            # Récupération des nœuds dans le graphe initial
            node_pg_g = filter(lambda n: n.data == node_pg.data, g.nodes)[0]
            node_g = filter(lambda n: n.data == node.data, g.nodes)[0]

            # Création de l'arête
            edge = Edge(node_pg, node, dijkstra_min_cost(node_pg_g, node_g))
            node_pg.edges_out.add(edge)
            node.edges_out.add(edge)

# Recherche du couplage parfait de coût minimum
edges = set() # ensemble des arêtes
for node_pg in pg.nodes:
    edges.update(node_pg.edges_out)

def aux(matching, nodes, cost):
    if len(nodes) == len(pg.nodes):
        return matching, cost

    best_matching, best_cost = None, 0

    for edge in edges:
        if edge.origin not in nodes and edge.dest not in nodes:
            matching_copy = matching[:]
            matching_copy.append(edge)
            nodes_copy = set(nodes)
            nodes_copy.add(edge.origin)
            nodes_copy.add(edge.dest)

            result_matching, result_cost = aux(matching_copy, nodes_copy,
                                                cost + edge.cost)
            if best_matching is None or best_cost > result_cost:
                best_matching, best_cost = result_matching, result_cost

    return best_matching, best_cost

best_matching, best_cost = aux([], set(), 0)

# On double les arêtes dans best_matching
for edge_pg in best_matching:
    origin = filter(lambda n: n.data == edge_pg.origin.data, g.nodes)[0]
    dest = filter(lambda n: n.data == edge_pg.dest.data, g.nodes)[0]

```



```

path = dijkstra_min_cost_path(origin, dest)

for edge in path:
    new_edge = Edge(edge.origin, edge.dest, edge.cost)
    edge.origin.edges_out.add(new_edge)
    edge.dest.edges_out.add(new_edge)

return eulerian_path_euler(g)

```

Listing 6 – Codes relatifs au TSP

```

#!/usr/bin/python2
# -*- coding: utf-8 -*-

import graphs
import heapq
import random

def ant(graph, max_iter_without_improvement=100, node_from=None):
    """ Ant colony optimization """

    def weight(edge):
        try:
            return 1 / float(edge.cost) + edge.ph * graph.order()
        except AttributeError:
            return 1 / float(edge.cost)

    best_cost = 0
    best_solution = None
    iter_without_improvement = 0

    if node_from is None:
        node_from = graph.nodes[0]

    while iter_without_improvement < max_iter_without_improvement:
        nodes_done = set((node_from,))
        path = [node_from]
        edges = []
        node = node_from
        cost = 0

        while len(nodes_done) < graph.order():
            valid_edges = filter(lambda edge: edge.other_side(node) not in
                                nodes_done, node.edges_out)

            sum_costs = sum(weight(i) for i in valid_edges)
            r = random.random() * sum_costs
            c = 0
            for e in valid_edges:
                c += weight(e)
                if c > r:
                    edge = e
                    break

            cost += edge.cost
            node = edge.other_side(node)
            nodes_done.add(node)
            path.append(node)
            edges.append(edge)

        if cost < best_cost or best_solution is None:
            best_cost = cost

```

```

        best_solution = path
        iter_without_improvement = 0
    else:
        iter_without_improvement += 1

    for e in edges:
        try:
            e.ph += 1 / float(cost)
        except AttributeError:
            e.ph = 1 / float(cost)

    return (best_cost, best_solution)

def nearest_neighbor(graph, node_from=None, first_node=None,
    nodes_done=frozenset()):
    """
    Nearest Neighbor algorithm, simple approximation for TSP problem.
    Requires the graph to be complete.
    Returns (cost, [nodes...]).
    """

    if node_from is None:
        node_from = graph.nodes[0]

    if first_node is None:
        first_node = node_from

    nodes_done = nodes_done | frozenset((node_from,))

    if len(nodes_done) == graph.order():
        return (node_from.cost_to(first_node), [node_from, first_node])

    heap = []
    for edge in node_from.edges_out:
        other = edge.other_side(node_from)
        if other not in nodes_done:
            heapq.heappush(heap, (edge.cost, other))

    best_cost = 0
    best_path = None
    for i in range(1): #range(2 if len(nodes_done) < 14 else 1):
        if not heap:
            break
        edge_cost, node = heapq.heappop(heap)
        cost, path_end = nearest_neighbor(graph, node, first_node, nodes_done)
        cost += edge_cost

        if cost < best_cost or best_path is None:
            best_cost = cost
            best_path = path_end

    return (best_cost, [node_from] + best_path)

def two_opt(solution):
    """
    2-opt algorithm, try to find a better solution than a given one.
    """

    best_cost, best_path = solution
    improvement_made = True

```

```

while improvement_made:
    improvement_made = False
    for i in range(len(best_path)-1):
        for j in range(i+1, len(best_path)-1):
            ni = best_path[i]
            nj = best_path[j]
            new_cost = best_cost - best_path[i+1].cost_to(ni) -
                best_path[j+1].cost_to(nj) + ni.cost_to(nj) +
                best_path[j+1].cost_to(best_path[i+1])

            if new_cost < best_cost:
                improvement_made = True
                best_cost = new_cost
                best_path = best_path[:i+1] + best_path[i+1:j+1][::-1] +
                    best_path[j+1:]

    return (best_cost, best_path)

def read_tsp(path):
    """
        Create a graph from a file of the form:
        [6 useless lines]
        1 x1 y1
        2 x2 y2
        ...
        These graphs are found here
        http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/tsp/
    """
    def distance(a, b):
        return ((a[0]-b[0])*(a[0]-b[0]) + (a[1]-b[1])*(a[1]-b[1])) ** 0.5

    points = []
    with open(path, 'r') as f:
        for i in range(1, 7): f.readline()

        line = f.readline()
        while line != "EOF\n":
            x, y = map(float, line.split()[1:3])
            points.append((x, y))
            line = f.readline()

    node_id = 0
    nodes = []
    for (x, y) in points:
        new_node = graphs.Node(node_id)
        node_id += 1
        for other in nodes:
            edge = graphs.Edge(other[1], new_node, distance((x, y), other[0]))
            other[1].edges_out.add(edge)
            new_node.edges_out.add(edge)

        nodes += [(x, y), new_node]

    g = graphs.Graph(path)
    g.nodes = map(lambda x: x[1], nodes)
    g.oriented = False
    g.name = path.split('/')[-1]
    return g

```

Listing 7 – Tests

```

#!/usr/bin/python2
# -*- coding: utf-8 -*-
from graphs import *
from hamiltonian import *
from connected import *
from eulerian import *
from tsp import *
import datetime

def print_ok(string):
    print "\033[92m" + string + "\033[0m"

def print_warn(string):
    print "\033[93m" + string + "\033[0m"

def print_err(string):
    print "\033[91m" + string + "\033[0m"

def test(condition, tested_fn, graph_nb, graph_name, exec_time):
    if condition:
        print_ok("OK in %s.%ss" % (exec_time.seconds, exec_time.microseconds))
    else:
        print_err("Error testing %s on graph number %s: %s" % (tested_fn,
            graph_nb, graph_name))

def test_one(graphs, fun, indice):
    fun_name = "Graph." + fun.__name__ + "()"
    print "Testing " + fun_name + "..."
    i = 0
    for g in graphs:
        i = i + 1
        start = datetime.datetime.now()
        condition = fun(g[0]) == g[indice]
        exec_time = datetime.datetime.now() - start
        test(condition, fun_name, i, g[0].name, exec_time)

if __name__ == '__main__':
    graphs = []

    # Format: [Graph, connected, eulerian, semi-eulerian, semi-hamiltonian]
    graphs.append([read_gph('tests/1.gph'), True, True, False, True])
    graphs.append([read_gph('tests/2.gph'), True, False, True, False])
    graphs.append([read_gph('tests/3.gph'), False, False, False, False])
    graphs.append([read_gph('tests/4.gph'), True, False, False, True])
    graphs.append([read_tsp('tests/berlin52.tsp'), True, False, False, True])
    graphs.append([read_tsp('tests/d657.tsp'), True, True, False, True])
    # graphs.append([read_tsp('tests/fl1577.tsp'), False, False, False, False])
    graphs.append([read_tsp('tests/bier127.tsp'), True, True, False, True])
    graphs.append([read_tsp('tests/u724.tsp'), True, False, False, True])
    graphs.append([read_gph('tests/complete.gph'), True, True, False, True])
    graphs.append([read_gph('tests/complete_cost.gph'), True, True, False, True])
    # graphs.append([read_hcp('tests/alb1000.hcp'), True, True, False, True]) #todo
    # graphs.append([read_hcp('tests/alb2000.hcp'), True, True, False, True]) #todo

    #tests connexité
    test_one(graphs, is_connected, 1)

    #tests eulérianité
    test_one(graphs, is_eulerian, 2)

    # tests semi eulerianité
    test_one(graphs, is_semi_eulerian, 3)

```

```
# tests semi hamiltoniannité  
test_one(graphs, is_semi_hamiltonian, 4)
```