# Rapport du projet de programmation stochastique

Maxence Ahlouche   Maxime Arthaud   Korantin Auguste
Martin Carton   Thomas Forgione   Thomas Wagner

27 novembre 2013

## Table des matières

# 1 Présentation de l'équipe

Cette équipe a été menée par Thomas Wagner, assisté de son Responsable Qualité Korantin Auguste. Les autres membres de l'équipe sont Martin Carton, Maxence Ahlouche, Maxime Arthaud, et Thomas Forgione.

Tous les membres de l'équipe ont été présents à chacune des séances lors de cette UA.

# 2 Colonie de scarabées

Le problème consiste, à partir d'un graphe dont les nœuds représentent des positions et les arêtes contiennent la probabilité pour le scarabée de passer d'une position à l'autre, à calculer les probabilités de présence de chaque scarabée au bout de $N$ itérations, selon sa position de départ.

Pour cela, on représente le graphe sous la forme de matrice d'adjacence, ou chaque élément de la matrice représente la probabilité de passer d'un nœud à un autre.

Si on met cette matrice à la puissance N, elle contiendra les probabilités de passer d'un nœud à un autre en exactement $N$ itérations.

En multipliant cette matrice par un vecteur contenant uniquement des zéros, sauf au nœud de départ (on mettra un 1), on peut obtenir la probabilité pour le scarabée de se trouver à chaque point, au bout d'exactement $N$ tours. Si cette probabilité est nulle, il est impossible qu'il s'y trouve.

Pour savoir la probabilité que les deux scarabées se rencontrent en un point au bout de N itérations, il suffit de multiplier les probabilités de présence de chaque scarabée en ce point. Pour savoir leur probabilité de se rencontrer en n'importe quel point, on peut tout simplement sommer les probabilité de rencontre sur chaque point.

De plus, si on calcule $\lim_{N\to\infty} A^N$ (une telle limite n'existera que si la chaîne est irréductible, récurrente positive et apériodique, et ça ne sera pas toujours le cas !), le produit du vecteur avec la position de départ par cette matrice nous donnera les probabilités pour le scarabée d'être en chaque position une fois qu'il aura suffisamment voyagé et que sa position de départ n'aura plus d'importance.

## 2.1 Chaînes de Markov

D'après Wikipédia, le problème des scarabées peut aisément être modélisé par des chaînes de Markov. En effet, nos coléoptères se promènent en temps discret dans leur graphe de promenade ; de plus, l'état d'un scarabée (autrement dit, sa position dans sa promenade) ne dépend pas du passé, mais uniquement de l'état présent.

La matrice de transition de notre promenade représente les probabilités de passer d'un état aux autres. Par conséquent, la matrice de transition à la puissance $n$ représente la probabilité de passer d'un état à un autre par un chemin de longueur $n$.

On constate qu'on se rapproche beaucoup de la matrice décrite précédemment, de manière si confuse : la matrice d'adjacence du graphe de promenade et la matrice de transition de notre chaîne de Markov sont équivalentes !

## 2.2 Temps moyen entre rencontre

### 2.2.1 À partir d'un certain point

Considérons que les deux scarabées sont sur le même point. On peut donc calculer la probabilité qu'après N tours, ils finissent encore sur la même case (en sommant le carré des probabilités que chacun se retrouve sur une case).

$U_k$ est la probabilité que les deux scarabées se retrouvent sur la même case après $k$ tours. On a $U_k = pA^k(pA^k)^\intercal$.

$V_k$ est la probabilité que les deux scarabées se retrouvent sur la même case après $k$ tours, sans s'être déjà rencontrés avant. On a :

$$V_k = (1 - U_1) \times (1 - U_2) \times \cdots \times (1 - U_{k-1}) \times U_k$$

$V_k$ peut donc se réécrire par récurrence :

$$\begin{aligned} V_1 &= U_1 \\ V_{k+1} &= V_k \times \frac{1 - U_k}{U_k} U_{k+1} \end{aligned}$$

Pour avoir le temps moyen au bout duquel ils vont se rencontrer en partant de ce même point, il suffit de prendre l'espérance de cette suite $V_k$.

### 2.2.2 À partir de deux points différents

Dans le cas où les points de départs des scarabées sont différents, on peut appliquer le même principe.

Par contre, on ne peut pas supposer $U_k \neq 0$. On peut introduire une suite $W_k$ :

$$\begin{aligned} W_0 &= 1 \\ W_k &= W_{k-1} \times (1 - U_k) \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} V_1 &= U_1 \\ V_k &= W_{k-1} \times U_k \end{aligned}$$

Pour avoir un temps moyen de rencontre global, on fait la moyenne du temps de rencontre pour chaque position initiale possible.

# 3 Gare de péage

Le but de ce problème est de déterminer si une gare de péage constituée de plusieurs couloirs de payement est efficace. C'est à dire si le temps d'attente ne sera pas trop élevé et si il n'y a aucun couloir ouvert mais inutile. Le nombre de voitures qui arrivent par unité de temps et le temps mis pour payer (sans compter l'attente) suivent des lois de Poisson.

Dans la suite, on notera $S$ le nombre de files, $\lambda$ la fréquence à laquelle les voitures entrent dans le système et $\mu$ la fréquence moyenne à laquelle elles sortent [1].

Ce problème donc est celui d'une file d'attente de type $M/M/S$ (où $M/M$ représente le fait que les lois d'entrés et sorties suivent des lois de Poisson).

### 3.1 Chaines de Markov

On peut montrer que le temps d'attente converge si et seulement si $\psi = \frac{\lambda}{S\mu} < 1$. Il faudra donc ouvrir au moins $\frac{\lambda}{\mu}$ files.

De plus, le temps d'attente moyen dans le système étant donné par $T_S = \frac{1}{\mu}\frac{1}{1-\psi}$, pour le limiter à $T_{max}$ temps maximum que l'on veut faire attendre les clients il faudra $\frac{T_{max}\lambda}{\mu T_{max}-1} < S$.

Or $\frac{1}{\mu} < \frac{T_{max}}{\mu T_{max}-1}$ (car évidement $T_{max} > \frac{1}{\mu}$), il faudra donc ouvrir au moins $\frac{T_{max}\lambda}{\mu T_{max}-1}$ files.

### 3.2 Simulation sisyphe

#### 3.2.1 Cas d'une file

Nous avons commencé par simuler un cas plus simple : celui où il n'y a qu'une seule file d'attente.

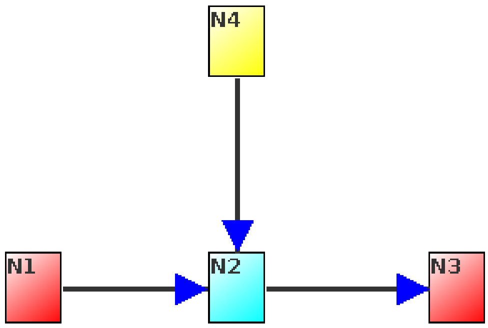


FIGURE 1 – Modélisation d'une gare de péage avec une seule file

Nous avons représenté une file à l'aide de 4 éléments (voir figure 1) :

— l'élément $N1$ représente la route d'entrée : il permet de générer un nombre aléatoire indiquant si une nouvelle voiture arrive dans le système ;

— l'élément $N2$ représente la file d'attente : il compte le nombre de voitures qui attendent ;

1. C'est à dire $\frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1}{\mu}$ sont respectivement les temps moyens entre deux arrivés et le temps moyen que prennent les gens pour payer : $\lambda$ et $\mu$ sont les paramètres des lois de Poisson régissant l'entrée et la sortie.

— l'élément $N3$ est un générateur de nombre aléatoire qui permet à l'élément $N2$ de savoir si une voiture peut passer car elle a fini de payer ;
— l'élément $N4$ représente la route de sortie : il ne sert qu'à compter le nombre de voitures qui ont payé.

On constate expérimentalement que le nombre de voitures dans la file reste faible quand on a $\lambda < \mu$ ce qui est cohérent avec l'analyse mathématique et logique : les voitures arrivent moins vite qu'elles ne partent. Par contre si $\lambda > \mu$ le nombre de voitures semble tendre vers l'infini.

### 3.2.2 Cas de plusieurs files

Nous avons ensuite simulé le cas où il y a 3 files :
— la première permet de payer uniquement par carte bancaire ;
— la deuxième permet de payer uniquemetn en espèce ;
— la troisième permet de payer avec ces deux moyens de payement.

Les fréquences de sorties $\mu$ dépendent du moyen de payement, on les notera donc $\mu_{cb}$ et $\mu_e$. todo