Rapport final du projet de Graphes et Recherche opérationnelle

Maxence Ahlouche Maxime Arthaud Korantin Auguste
Martin Carton Thomas Forgione Thomas Wagner

Enseeiht

17 décembre 2013

Graphes eulériens

- Cycle eulérien : cycle parcourant toutes les arêtes du graphe une et une seule fois
- Chaine eulérienne : idem, mais ne retourne pas au sommet de départ
- Graphe eulérien : graphe contenant un cycle eulérien (degré des sommets toujours pair)
- Graphe semi-eulérien : graphe contenant une chaine eulérienne (degré des sommets toujours pair, sauf pour les extrémités de la chaine eulérienne)

Graphes eulériens

Matrices latines

- Teste toutes les possibilités
- Très peu efficace

Algorithme d'Euler

- Cherche des cycles eulériens dans des sous-graphes, récursivement
- Beaucoup plus efficace

Graphes hamiltoniens

- Cycle hamiltonien : cycle parcourant tous les sommets du graphe une et une seule fois
- Chaine hamiltonienne : idem, mais ne retourne pas au sommet de départ
- Graphe hamiltonien : graphe contenant un cycle hamiltonien
- Graphe semi-hamiltonien : graphe contenant une chaine hamiltonienne
- Pas de propriété générale pour déterminer si un graphe est hamiltonien ou non
- NP-complet : pas d'algorithme efficace

Voyageur de commerce – Énoncé

Chercher un chemin passant par tous les sommets, de longueur minimale.

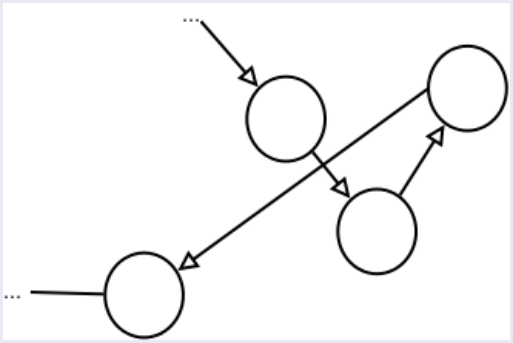
- cycle hamiltonien de cout minimal
- NP-complet
- méthodes approchées

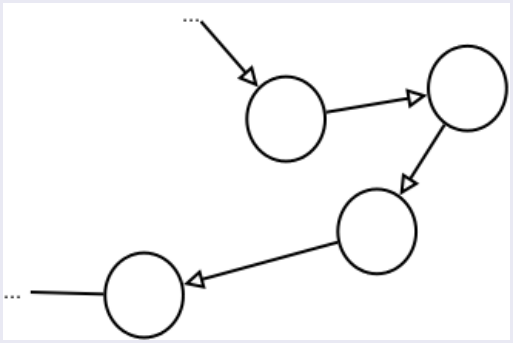
Voyageur de commerce – Résolution approchée

Heuristiques

Aller sur le sommet le plus près

Recherche locale : 2-opt





Voyageur de commerce – Tests

Fichier de test	Résultat optimum	Plus proche voisin	Plus proche voisin + 2-opt	Plus proche voisin amélioré	Plus proche voisin amélioré + 2-opt
berlin52.tsp	7542	8981/19.1%	8060/6.7%	7972/5.7%	7810/3.6%
bier127.tsp	118282	137297/16.7%	125669/6.2%	127857/8.1%	122072/3.2%
d657.tsp	48912	62176/27.1%	N/A	N/A	N/A
u724.tsp	41910	55344, 32.1%	N/A	N/A	N/A
fl1577.tsp	22249	N/A	N/A	N/A	N/A

TABLE : Résultats pour TSP

http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/

Voyageur de commerce – Métaheuristiques

- Recherche locale itérée
- Recherche tabou
- Recuit simulé
- Algorithmes génétiques
- Colonies de fourmis

Postier chinois – Énoncé

Trouver la chaine la plus courte dans un graphe connexe passant au moins une fois par chaque arête, et revenant à son point de départ.

Postier chinois – Méthode de résolution

1. On crée d'abord le graphe partiel contenant uniquement les sommets de degré impair ;
2. On transforme ensuite ce graphe en clique ;
3. On cherche le couplage parfait de cout minimum ;
4. Pour chaque arête de cet ensemble, on double la chaine la plus courte reliant les sommets reliés par cette arête dans le graphe initial ;
5. On applique l'algorithme d'Euler sur le graphe final.

Sac à dos – Énoncé

Remplir un sac pour maximiser la valeur des objets, sans dépasser une certaine masse.

Sac à dos – Résolution

- Résolution exacte :
  - Programmation dynamique.
  - Masses entières uniquement.
  - $O(nW)$
- Résolution approchée :
  - Algorithme glouton.
  - Masses quelconques.
  - $O(n \log n)$

Sac à dos – Résultats

Nombre d'objets/ Amplitudes des prix et masses/ Masse maximale autorisée	Résultat optimum	Prix le plus élevé	Masse la plus faible	Meilleur ratio prix/masse
50/25/20	85	49/42.4%	67/21.2%	81/4.7%
500/25/500	2016	1125/44.2%	1725/14.4%	1983/1.6%
5000/25/500	5540	1175/79%	4577/17.4%	5540/0%
50000/25/500	11195	1175/90%	6684/40.3%	11195/0%
50000/1000/500	118260	5959/95%	101857/13.9%	118147/0.1%
50000/5000/100	100847	14931/85.2%	93532/7.3%	100282/0.6%

TABLE : Résultats pour le sac à dos

`http://www.diku.dk/~pisinger/codes.html`

Simplexe – Présentation du problème

$$\max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ Ax \leqslant b}} f(x)$$

Exemple

	P_1	P_2	P_3	P_4	stock
R_A	2	4	5	7	72
R_B	1	1	2	2	17
R_C	1	2	3	3	24
bénéfice	7	9	18	17	

Simplexe – Simplification du problème

Transformation des contraintes d'inégalité en égalité.

Exemple

	P_1	P_2	P_3	P_4	x_1	x_2	x_3	stock
R_A	2	4	5	7	1	0	0	72
R_B	1	1	2	2	0	1	0	17
R_C	1	2	3	3	0	0	1	24
bénéfice	7	9	18	17	0	0	0	

Simplexe – Algorithme

Algorithme

Tant qu'il y a un élément strictement positif sur la première ligne
  à_ajouter = indice de la colonne dont le gain est maximal
  à_retirer = $\underset{i}{\text{argmin}} \frac{matrice[i,stock]}{matrice[i,\text{à\_ajouter}]}$
  mettre à_ajouter dans la base et retirer à_retirer de la base
  mettre à jour le reste de la matrice
Fin Tant que

Cas difficiles

- Cas où l'ensemble de départ vide
- Cas où $(0,0) \notin C$
- Cas de dégénérescence

Simplexe – Une itération

Exemple

	P_1	P_2	P_3	P_4	x_1	x_2	x_3	stock
R_A	2	4	5	7	1	0	0	42
R_B	1	1	2	2	0	1	0	17
R_C	1	2	3	3	0	0	1	24
bénéfice	7	9	18	17	0	0	0	

Simplexe – Une itération

Exemple

	P_1	P_2	P_3	P_4	x_1	x_2	x_3	stock
R_A	2	4	5	7	1	0	0	42
R_B	1	1	2	2	0	1	0	17
R_C	1	2	3	3	0	0	1	24
bénéfice	7	9	18	17	0	0	0	

Simplexe – Une itération

Exemple

	P_1	P_2	P_3	P_4	x_1	x_2	x_3	stock
R_A	1/3	2/3	0	2	1	0	-5/3	2
R_B	1/3	-1/3	0	0	0	1	-2/3	1
R_C	1/3	2/3	1	1	0	0	1/3	8
bénéfice	1	-3	0	-1	0	0	-6	-144

Shifumi

Équilibre de Nash

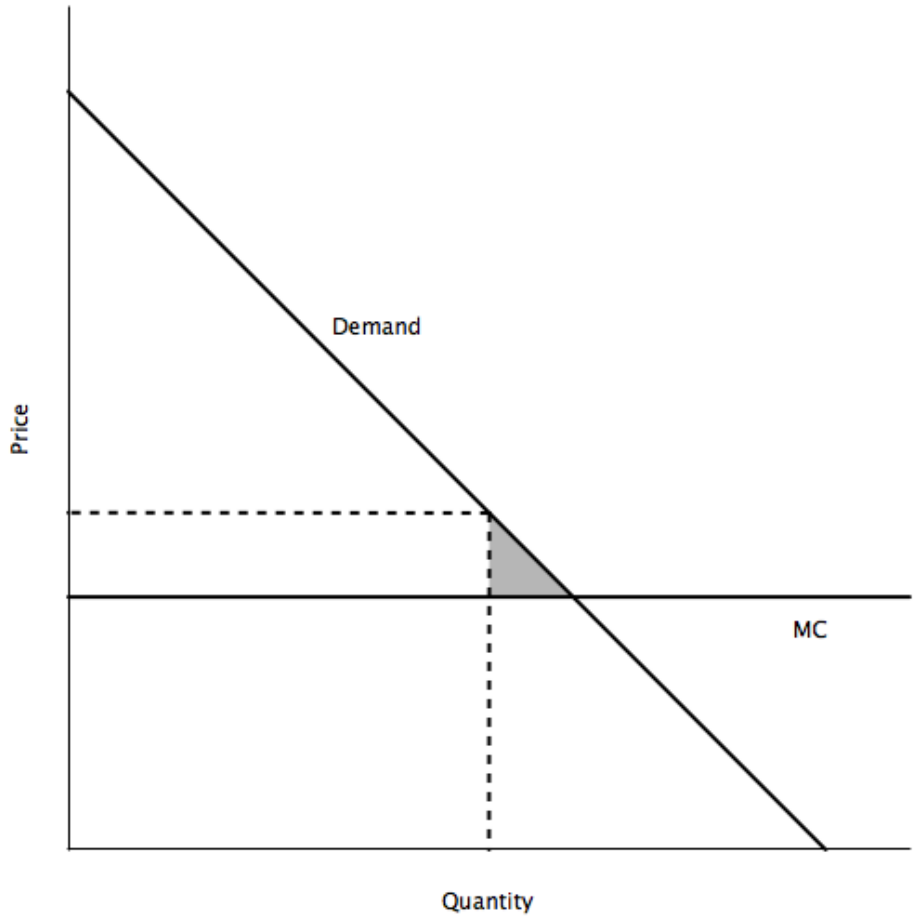
Équilibre de Nash : jouer de manière aléatoire.

- Chaines de Markov : bat aisément un humain qui joue « normalement ».
- Variantes : reviennent au shifumi classique si le nombre d'éléments est impair.

Somme magique

- Représentation sous forme de morpion
- Stratégie du morpion : minimax
- Élagage Alpha-Béta

Duopole – principe



Nos stratégies :

- Stackelberg en moyenne
  $x = \frac{3-y}{2}$
- Stratégie pénalisante
- Stratégie évolutive
- Stratégie polynomiale
  $f(0) = 1.125$
  $f(0.75) = 0.75$
  $f(1.5) = 0.75$

Duopole – résultats

Stratégie	Gain minimal	Gain moyen	Gain maximum
cooperatif*	561.56	978.59	1123.88
noncooperatif*	380.79	877.10	1317.08
stackelberg*	498.00	797.42	1132.44
palkeo	694.54	986.94	1123.88
Pénalise	419.12	860.12	1124.70
Pénalise variante	421.22	896.10	1123.88
Stackelberg en moyenne	492.11	923.94	1123.88
Stackelberg en moyenne (variante)	531.85	800.61	1262.25
poly	561.82	1011.24	1123.88
gklmjbse**	561.56	832.41	1135.33
killer**	0.00	773.86	1133.09
cooperatifmixte**	698.67	990.58	1123.88
agressivemieux**	3.15	750.64	1126.18
best_strategie**	322.67	881.00	1262.81

TABLE : Résultats des différentes stratégies sur 1000 tours

Colonie de scarabées – Énoncé

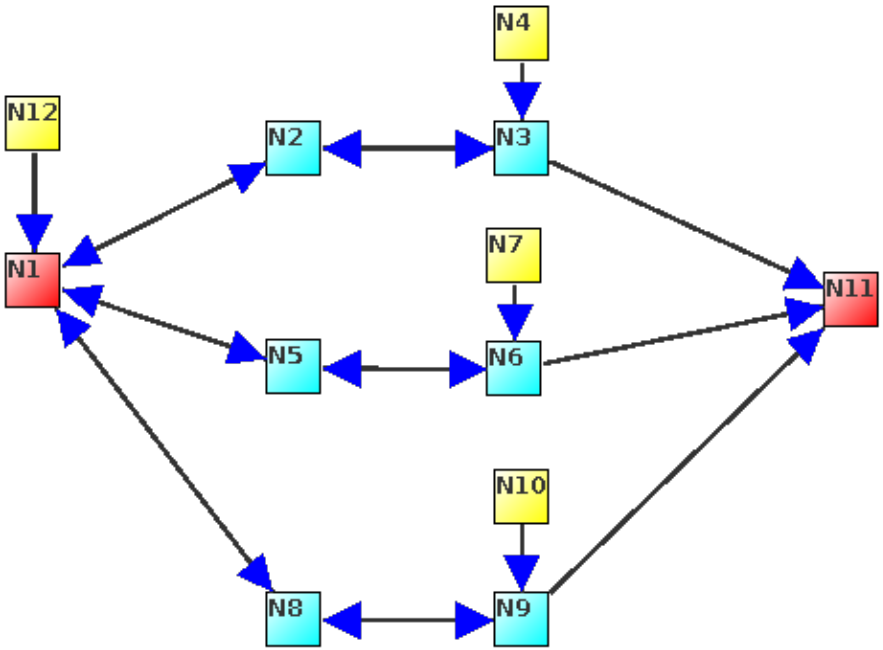
Calcul des probabilités de présence de chaque scarabée après k itérations, en se basant sur la matrice de transition (matrice stochastique).

Colonie de scarabées – Chaines de Markov

Modélisation possible par les chaines de Markov.

- pA^k nous donne un vecteur colonne contenant les probabilités que le scarabée se retrouve sur chaque case après k tour.
- $U_k = pA^k(pA^k)^\intercal$ donne la probabilité que les deux scarabées se retrouvent sur la même case après k tours.
- l'espérance de la suite $V_k = (1 - U_1) \times (1 - U_2) \times \cdots \times (1 - U_{k-1}) \times U_k$ donne le temps moyen entre chaque rencontre.

Gare de péage



- $x[12] = random() < p_{cb}$
- $x[1] = random() < lambda$
- $x[2] = (x[2] > 0) * (x[2] - 1 + d_{32}) + d_{12}$
- $d_{12} = x[1] * d_{121} * (d_{21} <= d_{81})$
- $d_{23} = (x[2] > 0)$
- $d_{32} = x[3] * (1 - d_{43})$
- $x[3] = d_{23} + x[3] * (1 - d_{23}) * (1 - d_{43})$
- $d_{311} = x[3] * d_{43}$
- $x[10] = random() < \frac{1}{p_{cb}/\mu_{cb}+(1-p_{cb})/\mu_{ncb}}$

UA 5 Robots

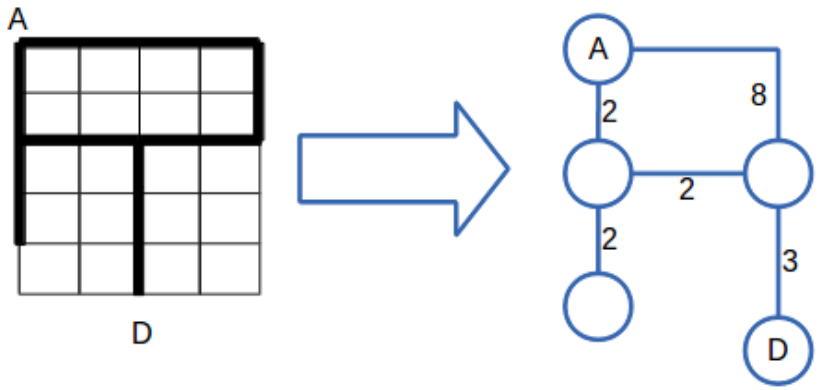
- Suivi de mur
- Algorithme de Dijkstra
- Algorithme A*

Suivi de mur

Un capteur ultrasonique à gauche.
Un capteur ultrasonique frontal.

- Si distance frontale $<$ minima : on pivote à droite.
- Sinon :
  - Si distance latérale $>$ distance voulue $+$ marge : coupe le moteur de gauche
    Sinon il est actif
  - Si distance latérale $<$ distance voulue - marge : coupe le moteur de droite
    Sinon il est actif

Algorithme de Dijkstra



Si le robot connait le plan du labyrinthe l'algorithme de Dijkstra suffit.

Algorithme A*

liste ouverte, liste fermée

- Création d'un nœud
  - calcule du coup heuristique = coût + estimation
  - ajout du nœud à la liste ouverte
- On prend le meilleur nœud de la liste ouverte et on le met dans la liste fermée.| LaTeX
- Creation des noeuds adjacent
  - cout <- cout + cout du prédecesseur
  - si dans liste ouverte :
    - si meilleur : on modifie
    - sinon : rien
  - si dans fermée : rien
  - sinon : on ajoute a la liste ouverte

À la fin, en remontant tout les prédécesseurs on remonte le chemin le plus court.