Перечень теоретических вопросов и задач для подготовки к экзамену по дисциплине «МАТЕМАТИКА» (III семестр, специальности ПОИТ, ДЭВИ, ИСиТ, ПОИБМС)

ПРОГРАММА КУРСА

1. Понятия ряда, общего члена ряда, суммы ряда, остатка ряда. Необходимый признак сходимости ряда.
2. Основные свойства числовых рядов.
3. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами.
4. Гармонический ряд. Обобщенный гармонический ряд.
5. Знакопеременные ряды, понятия абсолютной и условной сходимости. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.
6. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
7. Степенные ряды. Область сходимости, радиус сходимости. Теорема Абеля.
8. Степенные ряды в комплексной области.
9. Ряды Тейлора и Маклорена. Применение степенных рядов в приближенных вычислениях.
10. Ряды Фурье. Достаточное условие сходимости ряда Фурье (теорема Дирихле).
11. Ряды Фурье для четных и нечетных функций.
12. Комплексная форма ряда Фурье.
13. Обобщенные ряды Фурье по ортогональным системам функций.
14. Различные формы записи комплексных чисел.
15. Понятие функции комплексного переменного. Однозначные и многозначные функции. Основные элементарные функции комплексного переменного.
16. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана.
17. Понятие аналитической функции. Правильные и особые точки. Классификация изолированных особых точек.
18. Интеграл от функции комплексного переменного, связь с криволинейными интегралами, свойства.
19. Свойства интегралов от аналитических функций. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.
20. Интегралы вида $\oint\limits_L \frac{\mathrm{d}\, z}{z - z_0}$, $\oint\limits_L (z - z_0)^n \,\mathrm{d}\, z$, $\oint\limits_L \frac{\mathrm{d}\, z}{(z - z_0)^n}$.
21. Разложение аналитической функции в ряд Тейлора. Разложение в ряд Лорана.
22. Ряд Лорана. Главная и правильная части ряда Лорана, область сходимости ряда Лорана.
23. Понятие о вычетах и их применении.
24. Элементы комбинаторики: размещения, сочетания, перестановки.

25. Пространство элементарных исходов. Классическое определение вероятности. Методы задания вероятностей.

26. Вероятностное пространство. Аксиомы теории вероятностей. Основные теоремы о вероятности.

27. Сумма событий. Совместные и несовместные события. Теорема сложения вероятностей для совместных и несовместных событий.

28. Произведение событий. Понятие условной вероятности. Теорема умножения вероятностей для зависимых и независимых событий.

29. Формула полной вероятности и формулы Байеса.

30. Схема Бернулли. Формула Бернулли.

31. Предельные теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа в схеме Бернулли.

32. Понятие случайной величины. Способы задания случайных величин. Функция распределения и ее свойства.

33. Дискретные случайные величины, способы их задания. Примеры дискретных распределений.

34. Непрерывные случайные величины, способы их задания. Плотность распределения непрерывной случайной величины и ее свойства.

35. Числовые характеристики случайных величин. Свойства математического ожидания и дисперсии.

36. Биномиальное распределение.

37. Распределение Пуассона.

38. Равномерное распределение.

39. Показательное распределение.

40. Нормальное распределение, его числовые характеристики. Правило трех сигм.

41. Закон больших чисел и центральная предельная теорема теории вероятностей.

42. Задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Повторная и бесповторная выборки. Репрезентативная выборка.

43. Вариационный ряд. Статистический ряд. Полигон и гистограмма. Эмпирическая функция распределения и ее свойства.

44. Выборочное среднее и выборочная дисперсия. Точечные и интервальные оценки математического ожидания и дисперсии.

45. Элементы регрессионного и корреляционного анализа. Уравнение линейной эмпирической регрессии.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

Уровень А

РЯДЫ

Вопросы.

1. Что называется рядом?

2. Что называется n-й частичной суммой ряда?

3. Что называется суммой ряда?

4. В каком случае ряд называется сходящимся?

5. Необходимый признак сходимости ряда.

6. Признак Даламбера.

7. Предельный признак сравнения.

8. Непредельный признак сравнения.

9. Какой ряд называется гармоническим?

10. Какой ряд называется обощенным гармоническим рядом?

11. Какой ряд называется знакопеременным?

12. Какой ряд называется знакочередующимся?

13. При каком условии знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся?

14. При каком условии знакопеременный ряд называется условно сходящимся?

15. Признак Лейбница.

16. Что называется степенным рядом?

17. Что называется областью сходимости степенного ряда?

18. Теорема Абеля.

19. Что называется рядом Маклорена для функции $f(x)$?

20. Записать ряд Маклорена для функции e^x.

Задачи.

Задача 1. Проверить, выполняется ли для данного ряда необходимый признак сходимости. Можно ли сделать вывод о сходимости или расходимости этого ряда?

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2016n+2017}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2016n^2+2017}$; в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n+1}$.

Задача 2. Проверить сходимость ряда с помощью признака Даламбера:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2^n}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)3^n}$; в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}$; г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+3)!}$.

Задача 3. Исследовать сходимость ряда с помощью признака сравнения:

а) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{n^3-1}$; б) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2}{n^5-1}}$; в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{n^2+1}$.

Задача 4. Исследовать вопрос о сходимости числовых рядов с положительными членами:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n(n+2)!}{n^5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^3+4}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n^2+1}{4n^2-3}$.

Задача 5. Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость знакочередующиеся ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+2)3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{2n-1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2n+5}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n}{\sqrt{2n^2+5}}$.

Задача 6. Найти радиус сходимости степенного ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^n}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!x^n}{(n+1)3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{n^2+1}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2nx^n}{(n+3)!}$.

Задача 7. Найти интервал сходимости степенного ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{n\cdot 3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x+1)^n}{\sqrt{n}}$.

Задача 8. Найти область сходимости степенного ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}x^n}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!(x-1)^n$;

Задача 9. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить $\displaystyle\int\limits_0^1\frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\,\mathrm{d}\,x$ с точностью до 0,001.

Задача 10. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в ряд решения задачи Коши $y'=2\,\mathrm{e}^x-xy,\ y(0)=4$.

Ответы.

1. а) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{1008}$; необходимый признак сходимости ряда не выполняется; ряд расходится; б) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$; необходимый признак сходимости ряда выполняется; вывод о сходимости или расходимости этого ряда на основании такой проверки сделать нельзя; в) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$; необходимый признак сходимости ряда выполняется; вывод о сходимости или расходимости этого ряда на основании такой проверки сделать нельзя; г) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$; необходимый признак сходимости ряда не выполняется; ряд расходится. **2.** а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+1}{a_n}=\dfrac{1}{2}<1$; ряд сходится; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+1}{a_n}=\infty>1$; ряд расходится; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+1}{a_n}=2>1$; ряд расходится; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+1}{a_n}=0<1$; ряд сходится. **3.** а) ряд расходится; его можно сравнить с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$; б) ряд расходится; его можно сравнить с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ в) ряд сходится; его можно сравнить с обобщенным гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$; . **4.** а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+1}{a_n}=\infty>1$; ряд расходится; б) ряд сходится; его можно сравнить с обобщенным гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+1}{a_n}=2>1$; ряд расходится; г) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,5$; ряд расходится. **5.** а) абсолютно сходится; б) расходится; в) условно сходится; г) условно сходится. **6.** а) $R=2$; б) $R=0$; в) $R=1$;

г) $R=\infty$. **7.** а) $(-1;1)$; б) $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$; в) $(-\infty;+\infty)$; г) $(-2;0)$. **8.** а) $[-1/2;1/2]$; б) $(3;5)$; в) $\{1\}$; **9.** 0,398. **10.** $y=4+2x-x^2$...

РЯДЫ ФУРЬЕ

Вопросы.

1. Что называется рядом Фурье для периодической функции с периодом $T=2l$?

2. По каким формулам определяются коэффициенты ряда Фурье для периодической с периодом $T=2l$ функции $f(x)$?

3. Что называется рядом Фурье для периодической функции с периодом $T=2\pi$?

4. По каким формулам определяются коэффициенты ряда Фурье для периодической с периодом $T=2\pi$ функции $f(x)$?

5. Сформулировать теорему Дирихле.

6. Какой вид имеет ряд Фурье для четной периодической с периодом $T=2l$ функции $f(x)$? По каким формулам определяются коэффициенты этого ряда?

7. Какой вид имеет ряд Фурье для нечетной периодической с периодом $T=2l$ функции $f(x)$? По каким формулам определяются коэффициенты этого ряда?

Задачи.

Задача 1. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T=2$) функцию $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } -1<x<0,\\ x & \text{при } 0\le x\le 1;\end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Задача 2. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T=2\pi$) функцию $f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } -\pi<x\le 0,\\ -2 & \text{при } 0<x\le \pi;\end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Задача 3. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T=4$) функцию $f(x)=\begin{cases}1+x & \text{при } -2<x\le 0,\\ -1 & \text{при } 0<x\le 2;\end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Задача 4. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T=2\pi$) функцию $f(x)=\begin{cases}\pi+2x & \text{при } -\pi<x<0,\\ \pi/2 & \text{при } x=0,\\ -\pi & \text{при } 0<x\le \pi;\end{cases}$ построить графики функции и суммы ряда.

Ответы.

1. $f(x)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}$. **2.** $f(x)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{6}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$. **3.** $f(x)=-\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\dfrac{\pi(2k-1)x}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{\pi n}\sin\dfrac{\pi n x}{2}$. **4.** $f(x)=-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Вопросы.

1. Действительной частью комплексного числа $z = x+iy$ называется $\mathrm{Re} z = \ldots$; мнимой частью называется $\mathrm{Im} z = \ldots$

2. Число, комплексно сопряженное числу $z = x + iy$ равно $\overline{z} = \ldots$

3. Алгебраическая форма записи комплексного числа: ...

4. Тригонометрическая форма записи комплексного числа: ...

5. Связь между тригонометрической и алгебраической формами записи комплексного числа задается формулами: ...

6. Показательная форма записи комплексного числа: ...

7. Определение производной функции комплексного переменного.

8. Условия Коши-Римана.

9. В каком случае функция комплексного переменного назывыается аналитической в точке z_0?

10. Какие точки называются особыми точками функции комплексного переменного?

11. Перечислить виды особых точек функции комплексного переменного.

12. Записать формулу для вычисления интеграла от функции комплексного переменного с помощью криволинейных интегралов.

13. Чему равен интеграл по замкнутому контуру $\oint\limits_L f(z)\,\mathrm{d}\,z$, если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области и контур L лежит внутри этой области?

14. Что называется рядом Лорана?

15. Что называется главной частью ряда Лорана? Что называется правильной частью ряда Лорана?

16. Какой вид имеет область сходимости ряда Лорана?

17. При каких значениях q справедливо равенство $\dfrac{1}{1-q} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$?

Задачи.

Задача 1. Проверить равенство: $i^7 + i^{18} + i^{25} + i^{35} + i^{97} + i^{100} = 0$.

Задача 2. Вычислить: а) $\dfrac{5-3i}{1-i}$;

б) $z_1 + z_2 \cdot \overline{z_3}$, если $z_1 = 1+2i,\ z_2 = 2-i,\ z_3 = 3+2i$;

в) $\dfrac{(3z_1 - 2z_2)z_3}{z_2}$, если $z_1 = 3+i,\ z_2 = 2-2i,\ z_3 = 1-4i$;

г) $\dfrac{z_1^2 + z_2 + z_3}{z_2}$, если $z_1 = 2+i,\ z_2 = -1-2i,\ z_3 = 8+7i$.

Задача 3. Записать числа $z_1 = -1$, $z_2 = \pi$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 3i-3$, $z_5 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ в тригонометрической и показательной формах записи.

Задача 4. Представить числа $z_1 = 1 + i\sqrt{3},\ z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$ в тригонометрической форме записи и найти $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^{10}; записать результат в алгебраической форме записи.

Задача 5. Вычислить: а) $(1-i)^{11}$; б) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^{10}}{(1-i)^6}$. (*Указание.* Выполнить действия, представив числа в тригонометрической форме записи.)

Задача 6. Показать, что $\mathrm{e}^{\pi i}=-1$.

Задача 7. Вычислить: а) $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}i}$; б) $\mathrm{e}^{\pi(1-i)}$; в) $\mathrm{e}^{\pi i-1}$.

Задача 8. Изобразить на комплексной плоскости множество комплексных чисел, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $\mathrm{Re}z<0$; б) $\mathrm{Im}z\geq 0$; в) $1\leq \mathrm{Re}z\leq 5$; г) $\dfrac{\pi}{6}\leq \arg z\leq \dfrac{5\pi}{6}$;
д) $|z|\leq 5$; е) $|z+2i|\leq 1$; ж) $|z-5+3i|>2$.

Задача 9. Найти круг и радиус сходимости степенного ряда:

а) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n(\sqrt{3}-i)^n z^n$; б) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2-i)^n z^n}{n+1}$; в) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2i}{2-ni}z^n$;
г) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{3}-i)^n(z-3i)^n}{n^2+3i}$; д) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2-i)^n(z+1)^n}{n+2i}$; е) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2i}{2-ni}(z-2-i)^n$.

Задача 10. Для данных функций требуется: 1) проверить выполнение условий Коши-Римана; 2) указать область аналитичности функции; 3) найти производную $f'(z)$:

а) $f(z)=3z^2+2z$; б) $f(z)=2iz^2-3(z-3i)$; в) $f(z)=\dfrac{1}{z}$;
г) $f(z)=\dfrac{z}{z+4}$; д) $f(z)=z\overline{z}$; е) $f(z)=z\mathrm{Re}z$.

Задача 11. Найти $f'(z_0)$, если:

а) $f(z)=2iz^2-3(z-3i)$, $z_0=2+3i$; б) $f(z)=\dfrac{z+2}{z-3i}$, $z_0=2+i$.

Задача 12. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_L f(z)\,\mathrm{d}\,z$, если:

а) $f(z)=x^2+y^2i$, L — отрезок прямой от точки $z_A=1+i$ до точки $z_B=2+3i$;
б) $f(z)=y+1-xi$, L — отрезок прямой от точки $z_A=1$ до точки $z_B=-i$;
в) $f(z)=z\mathrm{Im}z^2$, L — парабола $y=x^2$ от точки $z_A=0$ до точки $z_B=1+i$;
г) $f(z)=\overline{z}\mathrm{Re}z$, L — парабола $y=x^2$ от точки $z_A=0$ до точки $z_B=1+i$;
д) $f(z)=\mathrm{Im}z^3$, L — парабола $y=x^3$ от точки $z_A=0$ до точки $z_B=-1-i$.

Задача 13. Вычислить интеграл по замкнутому контуру:

а) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{z^2}{z-2i}\,\mathrm{d}\,z$; б) $\displaystyle\oint_{|z|=4}\frac{z^2}{z-2i}\,\mathrm{d}\,z$; в) $\displaystyle\oint_{|z-i|=3/2}\frac{\mathrm{d}\,z}{z(z^2+4)}$;
г) $\displaystyle\oint_{|z|=1/2}\frac{1-z^2+3z^3}{4z^3}\,\mathrm{d}\,z$; д) $\displaystyle\oint_{|z-1|=2}\frac{\sin z}{z-1}\,\mathrm{d}\,z$; е) $\displaystyle\oint_{|z|=4}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z-\pi}\,\mathrm{d}\,z$;
ж) $\displaystyle\oint_{|z-1-i|=5/4}\frac{2\,\mathrm{d}\,z}{z^2(z-1)}$; з) $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{\mathrm{d}\,z}{z^2+2z}$; и) $\displaystyle\oint_{|z-3|=1}\frac{2+\sin 3z}{z^2(z-\pi)}\,\mathrm{d}\,z$;

к) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{(z+1)\,\mathrm{d}\,z}{z^2+2z-3}$.

Задача 14. Разложить функцию в ряд Лорана по степеням z в окрестности точки $z_0 = 0$, указать область сходимости полученного ряда:

а) $z^3\,\mathrm{e}^{1/z}$; б) $\dfrac{1-\sin z^2}{z^2}$; в) $\dfrac{z^2}{1-z}$;

г) $\dfrac{1}{z(z-1)}$; д) $\dfrac{1}{2z-5}$; е) $\dfrac{1}{3z^2+z}$.

Задача 15. Разложить функцию в ряд Лорана в окрестности точки z_0, указать область сходимости полученного ряда:

а) $\dfrac{z^2}{1-z}$, $z_0 = 1$; б) $\dfrac{z^4}{(z-2)^2}$, $z_0 = 2$; в) $\dfrac{1}{z(z-1)}$, $z_0 = 1$;

г) $\dfrac{1}{z^2-4}$, $z_0 = -2$; д) $\dfrac{1}{z^2+9}$, $z_0 = 3i$.

Задача 16. Найти все разложения функции в ряд Лорана по степеням z, указать области сходимости полученных рядов:

а) $\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$; б) $\dfrac{z-1}{(z+2)(z+4)}$; в) $\dfrac{z-2}{z^2+4}$.

Задача 17. Найти все разложения функции в ряд Лорана по степеням $z-z_0$, указать области сходимости полученных рядов:

а) $\dfrac{1}{z(z-1)}$, $z_0 = 1$; б) $\dfrac{1}{z(z-1)}$, $z_0 = -2$; в) $\dfrac{z}{z^2-4}$, $z_0 = -2$;

г) $\dfrac{z}{z^2-4}$, $z_0 = 1$; д) $\dfrac{z+2}{z^2+4}$, $z_0 = 2i$; е) $\dfrac{z+2}{z^2+4}$, $z_0 = 2$.

Задача 18. Найти разложение функции $\dfrac{3z}{(z-2)(z+3)}$ в ряд Лорана в области $0 < |z-1| < 5$.

Задача 19. Найти разложение функции $\dfrac{3z}{(z-2)(z+3)}$ в ряд Лорана в области $1 < |z-3| < 6$.

Задача 20. Найти разложение функции $\dfrac{1}{z^2-5z+4}$ в ряд Лорана в области $1 < |z-2| < 2$.

Задача 21. Найти разложение функции $\dfrac{1}{z^2-5z+4}$ в ряд Лорана в области $3 < |z+2| < 6$.

Задача 22. Найти конечные изолированные особые точки функции и определить их характер; для полюсов определить порядок:

а) $\dfrac{1}{z(z-1)}$; б) $\dfrac{z}{(z-1)(z-3)}$; в) $\dfrac{z}{z^2+4}$; г) $\dfrac{z}{z^2-2z+5}$;

д) $\dfrac{z+i}{z-i}$; е) $\dfrac{z^2}{(z-2)^3}$; ж) $\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$; з) $\dfrac{z^2}{(z-1)(z-2)^2}$;

и) $\dfrac{z^2+2z+1}{z^3-z^5}$; к) $\dfrac{\sin z}{z^4}$; л) $\dfrac{1-\cos z}{z^4}$; м) $(z+i)^2\,\mathrm{e}^{\frac{3}{z+i}}$.

Ответы.

2. а) $4+i$; б) $5-5i$; в) $11,5+5i$; г) $-5,6+2,2i$. **3.** $z_1 = \cos\pi + i\sin\pi$, $z_1 = \mathrm{e}^{\pi i}$; $z_2 = \pi(\cos 0 + i\sin 0)$,

$z_2 = \pi\,\mathrm{e}^{0i}$; $z_3 = 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $z_3 = 2\,\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{2}i}$; $z_4 = 3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $z_4 = 3\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{3\pi}{4}i}$; $z_5 = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$, $z_5 = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}i}$. **4.** $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$; $z_2 = 4\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$; $z_1 \cdot z_2 = 8\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 4\sqrt{3} + 4i$; $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{i}{2}$; $z_1^{10} = 2^{10}\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right) = -512(1+i\sqrt{3})$. **5.** а) $-32-32i$; б) $-64(\sqrt{3}+i)$. **7.** а) i; б) $-\mathrm{e}^{\pi}$; в) $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **8.** а) левая полуплоскость; б) верхняя полуплоскость; в) вертикальная полоса ширины 4; г) сектор; д) круг радиуса 5 с центром в начале координат; е) круг радиуса 1 с центром в точке $z_0 = -2i$; ж) внешность круга радиуса 2 с центром в точке $z_0 = 5-3i$. **9.** а) $|z| < \dfrac{1}{2}$, $R = \dfrac{1}{2}$; б) $|z| < \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $R = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; в) $|z| < 1$, $R = 1$; г) $|z-3i| < \dfrac{1}{2}$, $R = \dfrac{1}{2}$; д) $|z+1| < \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $R = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; е) $|z-2-i| < 1$, $R = 1$. **10.** а) аналитична на $\mathbb{C}$, $f'(z) = 6z+2$; б) аналитична на $\mathbb{C}$, $f'(z) = 4iz-3$; в) аналитична при $z \neq 0$, $f'(z) = -\dfrac{1}{z^2}$; г) аналитична при $z \neq -4$, $f'(z) = \dfrac{4}{(z+4)^2}$; д) не является аналитической, функция дифференцируема только при $z = 0$, $f'(0) = 0$; е) не является аналитической, функция дифференцируема только при $z = 0$, $f'(0) = 0$. **11.** а) $8i-15$; б) $-\dfrac{3+2i}{8}$. **12.** а) $-\dfrac{19}{3}+9i$; б) -1; в) $-\dfrac{6}{35}+i$; г) $\dfrac{11}{15}+\dfrac{i}{4}$; д) $\dfrac{2}{5}+\dfrac{7}{8}i$. **13.** а) 0; б) $-8\pi i$; в) $\dfrac{\pi i}{4}$; г) $-\dfrac{\pi i}{2}$; д) $2\pi i \cdot \sin 1$; е) $-2\pi i$; ж) $4\pi i$; з) 0; и) $\dfrac{4i}{\pi}$; к) $2\pi i$. **14.** а) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^{n-3}}$, $0 < |z| < \infty$; б) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{4n}}{(2n+1)!}$, $0 < |z| < \infty$; в) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$; г) $\displaystyle -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $0 < |z| < 1$; д) $\displaystyle -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n z^n}{5^{n+1}}$, $|z| < \dfrac{5}{2}$; е) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^n z^{n-1}$, $0 < |z| < \dfrac{1}{3}$. **15.** а) $-\dfrac{1}{z-1} - 2 - (z-1)$, $0 < |z-1| < \infty$; б) $\dfrac{16}{(z-2)^2} + \dfrac{32}{z-2} + 24 + 8)z-2) + (z-2)^2$, $0 < |z-2| < \infty$; в) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^{n-1}$, $0 < |z-1| < 1$; г) $\displaystyle -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{4^n}$, $0 < |z+2| < 4$; д) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-3i)^{n-1}}{(6i)^{n+1}}$, $0 < |z-3i| < 6$. **16.** а) $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) z^n$, $|z| < 1$; $\displaystyle -\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{3^n}\right)$, $1 < |z| < 3$; $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 1}{z^{n+1}}$, $3 < |z| < \infty$; б) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{5}{2 \cdot 4^{n+1}} - \frac{3}{2^{n+2}}\right) z^n$, $|z| < 2$; $\displaystyle\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3 \cdot 2^n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5 \cdot z^n}{4^{n+1}}\right)$, $2 < |z| < 4$; $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3 \cdot 2^n + 5 \cdot 4^n}{z^{n+1}}$, $4 < |z| < \infty$; в) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-i}{2} \cdot (-1) + \frac{1+i}{2}\right) \frac{z^n}{(2i)^{n+1}}$, $|z| < 2$; $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-i}{2} \cdot (-1) + \frac{1+i}{2}\right) \frac{(2i)^n}{z^{n+1}}$, $2 < |z| < \infty$. **17.** а) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{n-1}$, $0 < |z-1| < 1$; $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}$, $1 < |z-1| < \infty$; б) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)(z+2)^n$, $|z+2| < 2$; $\displaystyle -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z+2)^{n+1}}$, $2 < |z| < 3$; $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{(z+2)^{n+1}}$, $3 < |z+2| < \infty$; в) $\displaystyle\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{4^n}$, $0 < |z+2| < 4$; $\displaystyle\frac{1}{z+2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4^{n-1}}{(z+2)^{n+1}}$, $4 < |z+2| < \infty$; г) $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{3^{n+1}} - 1\right)(z-1)^n$, $|z-1| < 1$; $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}$, $1 < |z-1| < 3$; $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n 3^n}{(z-1)^{n+1}}$, $3 < |z-1| < \infty$; д) $\displaystyle\frac{1-i}{2} \cdot \frac{1}{z-2i} + \frac{1+i}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2i)^n}{(4i)^{n+1}}$, $0 < |z-2i| < 4$; $\displaystyle\frac{1-i}{2} \cdot \frac{1}{z-2i} + \frac{1+i}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4i)^n}{(z-2i)^{n+1}}$,

$4 < |z-2i| < \infty$; е) $\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{(2-2i)^n}+\frac{1}{(2+2i)^n}\right)(z-2)^n$, $|z-2| < 2\sqrt{2}$; $\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2-2i)^n+(2+2i)^n}{(z-2)^{n+1}}$, $2\sqrt{2} < |z-2| < \infty$. **18.** $\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{z-2}+\frac{9}{25}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{5^n}$.
19. $\frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-3)^{n+1}}+\frac{9}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-3)^n}{6^{n+1}}$. **20.** $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(z-2)^{n+1}}-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{2^n}$.
21. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{(z+2)^{n+1}}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{6^{n+1}}$. **22.** а) $z_1=0$, $z_2=1$ — простые полюсы; б) $z_1=1$, $z_2=3$ — простые полюсы; в) $z_1=2i$, $z_2=-2i$ — простые полюсы; г) $z_1=1+2i$, $z_2=1-2i$ — простые полюсы; д) $z=i$ — простой полюс; е) $z=2$ — полюс 3-го порядка; ж) $z_1=i$, $z_2=-i$ — полюсы 3-го порядка; з) $z_1=1$ — простой полюс; $z_2=-2$ — полюс 2-го порядка; и) $z_1=-1$ — устранимая особая точка; $z_2=1$ — простой полюс; $z_3=0$ — полюс 3-го порядка; к) $z=0$ — полюс 3-го порядка; л) $z=0$ — полюс 2-го порядка; м) $z=-i$ — существенно особая точка.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вопросы.

1. Классическое определение вероятности.

2. Что называется суммой двух событий?

3. Теорема сложения вероятностей для совместных событий.

4. Теорема сложения вероятностей для несовместных событий.

5. Что называется произведением двух событий?

6. Теорема умножения вероятностей для зависимых событий.

7. Теорема умножения вероятностей для независимых событий.

8. Формула полной вероятности.

9. Что такое схема Бернулли?

10. Формула Бернулли.

11. Функция распределения случайной величины ξ определяется равенством: ...

12. Свойства функции распределения.

13. Плотность распределения непрерывной случайной величины связана с функцией распределения формулами: ...

14. Свойства плотности распределения.

15. Математическое ожидание дискретной случайной величины вычисляется по формуле: ...

16. Математическое ожидание непрерывной случайной величины вычисляется по формуле: ...

17. Дисперсия случайной величины вычисляется по формуле: ...

18. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[a;b]$, если ее плотность распределения имеет вид ...

19. Если случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[a;b]$, то ее математическое ожидание равно ...

20. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ, если ее плотность распределения имеет вид ...

21. Если случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами a и σ, то $M\xi = \ldots$, $D\xi = \ldots$, $P(\alpha < \xi < \beta) = \ldots$

Задачи.

Задача 1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях равна семи.

Задача 2. В урне 10 белых, 11 черных, 12 красных шаров. Наугад вынули один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Задача 3. В урне 4 белых и 5 черных шаров. Из урны наугад вынимают два шара. Найти вероятность того, что один из этих шаров — белый, а другой — черный.

Задача 4. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей будет только одна окрашенная.

Задача 5. Студент знает 25 вопросов из 30. Найти вероятность того, что из наудачу взятых трех вопросов экзаменационного билета студент знает: а) все три вопроса, содержащиеся в билете; б) только два вопроса билета.

Задача 6. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника.

Задача 7. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных, а во второй соответственно 10 и 8. Из обеих урн наудачу извлекают по одному шару. Какова вероятность, что оба шара одного цвета?

Задача 8. Машина при проверке проходит три вида испытаний. Первое испытание она проходит успешно в 90%, второе — в 80% и третье — в 75% случаев. Найти вероятность того, что машина пройдет успешно испытания только одного вида.

Задача 9. Производится стрельба по удаляющейся цели. При первом выстреле вероятность попадания равна 0,8; при каждом последующем выстреле вероятность уменьшается в 2 раза. Произведено 3 выстрела. Определить вероятности следующих событий: $A = \{$ровно два попадания$\}$; $B = \{$хотя бы одно попадание$\}$.

Задача 10. Стрелок выстрелил 3 раза по удаляющейся цели. При первом выстреле вероятность попадания равна 0,9; при втором — 0,8; при третьем — 0,7. Найти вероятность того, что стрелок попал: а) ровно один раз; б) хотя бы один раз; в) не более одного раза.

Задача 11. В ящике содержится 12 деталей завода № 1, 20 деталей завода № 2, 18 деталей завода № 3. Вероятность того, что деталь завода № 1 отличного качества, равна 0,9; для деталей заводов № 2 и № 3 эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

Задача 12. Семена для посева в хозяйство поступают из трех семеноводческих хозяйств, причем первое и второе хозяйства присылают по 30% всех семян. Всхожесть семян из первого хозяйства 95%, второго 90%, третьего 85%. Определить вероятность того, что наудачу взятое семя не взойдет.

Задача 13. Два автомата производят одинаковые детали, которые сбрасываются на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй — 84%. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь окажется отличного качества.

Задача 14. В 1-м ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных; во 2-м — 30 деталей, из них 24 стандартных; в 3-м — 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наугад извлеченная деталь из наудачу взятого ящика стандартная.

Задача 15. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут: а) ровно четыре; б) не менее четырех.

Задача 16. В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 5 пакетов акций в результате торгов по первоначальной цене будет продано не менее двух пакетов.

Задача 17. Доля плодов, пораженных болезнью, составляет 25%. Случайным образом выбирается 6 плодов. Определить вероятность того, что в выборке по крайней мере один плод окажется пораженным болезнью.

Задача 18. Вероятность того, что изделие не выдержит испытание, равна 0,0006. Найти вероятность того, что из 1000 наудачу взятых изделий не выдержат испытания не менее 2 изделий.

Задача 19. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушения финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины: а) 480 предприятий; б) не менее 480 предприятий.

Задача 20. Найти $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ и вероятности $P(\xi = 30)$, $P(\xi = 35)$, $P(\xi < 43)$ по заданному закону распределения СВ ξ :

ξ	20	30	40	50
P	0,1	0,6	0,1	0,2

Задача 21. Найти p и числовые характеристики случайной величины ξ, заданной рядом распределения:

ξ	-1	0	1	2
P	0,2	0,2	0,2	p

Задача 22. Найти $M\xi$, $D\xi$, $P(\xi > -1)$, если известна плотность распределения СВ ξ:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -2, \\ 0,25x + 0,75, & \text{если } -2 < x \leq 0, \\ 0, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Задача 23. Найдите $M\xi$, $D\xi$, $P(-1 < \xi \leq 0,5)$, если известна функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ 1,5x - 0,5x^2, & \text{если } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Задача 24. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения — 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 2 мин. Каково среднее время ожидания?

Задача 25. СВ ξ распределена по нормальному закону с $M\xi = 5$ и $D\xi = 0,64$. а) Найти вероятность попадания этой СВ в интервал $(4;7)$. б) Какова вероятность того, что СВ примет значение, большее чем 3? равное 3?

Задача 26. Найти числовые характеристики и вероятность $\mathbf{P}(\xi \in [2;8])$, если известна плотность распределения случайной величины ξ:

$$p(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x+3)^2}{8}\right\}.$$

Задача 27. Плотность вероятности СВ ξ задана выражением: $p(x) = a\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-5)^2}{8}}$. Определить коэффициент a. Найти числовые характеристики этой СВ и вероятность того, что в результате опыта СВ отклонится от своего математического ожидания не более чем на 1,5.

Ответы.

1. $\frac{1}{6}$. **2.** $\frac{10}{33}$. **3.** $\frac{5}{9}$. **4.** $\frac{C_{10}^1 \cdot C_5^2}{C_{15}^3} = \frac{20}{91}$. **5.** а) $\frac{C_{25}^3}{C_{30}^3} = \frac{115}{203}$; б) $\frac{C_{25}^2 \cdot C_5^1}{C_{30}^3} = \frac{75}{203}$. **6.** а) $\frac{2}{\pi} \approx 0,637$; б) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0,414$. **7.** 0,479. **8.** 0,08. **9.** $P(A) = 0,368$; $P(B) = 0,904$. **10.** а) 0,092; б) 0,994; в) 0,098. **11.** 0,78. **12.** 0,105. **13.** 0,68. **14.** 0,728. **15.** а) 0,32805; б) 0,91854. **16.** 0,34464. **17.** 0,822 **18.** 0,1219. **19.** а) 0,0114; б) 0,8962. **20.** $M\xi = 1240$, $D\xi = 84$, $\sigma_\xi \approx 9,2$, $P(\xi = 30) = 0,6$, $P(\xi = 35) = 0$, $P(\xi < 43) = 0,7$. **21.** $p = 0,4$, $M\xi = 0,8$, $D\xi = 1,36$, $\sigma_\xi \approx 1,17$. **22.** $M\xi = -\frac{5}{6}$, $D\xi = \frac{11}{36}$, $P(\xi > M\xi) \approx 0,291$. **23.** $M\xi = \frac{5}{12}$, $D\xi = \frac{11}{144}$, $P(-1 < \xi \le 0,5) = 0,625$.**24.** 0,4; среднее время ожидания 2,5 мин. **25.** а) 0,8882; б) 0,9938; в) 0. **26.** $M\xi = -3$, $D\xi = 4$, $\mathbf{P}(\xi \in [2;8]) = 0,2643$. **27.** $a = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$, $M\xi = 5$, $D\xi = 4, \sigma_\xi = 2$, $P(|\xi - M\xi| \le 1,5) \approx 0,5468$.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Вопросы.

1. Выборка — это ...

2. Вариационный ряд — это ...

3. Статистический ряд — это ...

4. Что называется полигоном?

5. Что называется гистограммой?

6. Что называется эмпирической функцией распределения?

7. Свойства эмпирической функции распределения.

8. Как рассчитывается выборочное среднее?

9. Как рассчитывается выборочная дисперсия?

10. Что такое исправленная выборочная дисперсия?

11. Что называется несмещенной оценкой параметра распределения?

12. Несмещенной оценкой математического ожидания является ...

13. Несмещенной оценкой дисперсии является ...

14. Основные задачи корреляционного анализа.

15. Основные задачи регрессионного анализа.

Задачи.

Задача 1. По данной выборке найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии, построить полигон частот, записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график:

$$4 \quad 7 \quad 6 \quad 12 \quad 6 \quad 8 \quad 9 \quad 4$$

Задача 2. По данному статистическому ряду найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии, построить полигон частот, записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график:

x_i	0	1	2	3
n_i	6	9	4	1

Задача 3. По данному интервальному статистическому ряду найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии, построить гистограмму относительных частот, записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график:

$[x_{i-1}; x_i)$	$[-2; 2)$	$[2; 6)$	$[6; 10)$	$[10; 14)$
n_i	20	90	60	30

Задача 4. По наблюденным значениям x и y найти выборочный коэффициент корреляции и в предположении нормальности распределения проверить его значимость при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

x	1	2	3	4	5
y	4	5	3.5	1.5	2

Задача 5. По наблюденным значениям x и y найти выборочное уравнение линейной регрессии y на x, построить прямую на корреляционном поле.

x	1	2	3	4	5
y	4.5	5.5	4	2	2.5

Ответы.

1. $\overline{x} = 7$; $s^2 \approx 7,14$. **1.** $\overline{x} = 1$; $s^2 \approx 0,74$. **3.** $\overline{x} = 6$; $s^2 \approx 12,06$. **4.** $r_{x,y} \approx -0,823$; значим. **5.** $\widehat{y} = -0,75x + 5,95$.

ЗАДАЧИ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

Уровень Б

РЯДЫ

Теоретические упражнения.

1. Верно ли утверждение: если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится?

2. Верно ли утверждение: если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится?

3. Верно ли утверждение: если для некоторого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ предел n-го остатка ряда $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, то ряд сходится?

4. Верно ли утверждение: если для некоторого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ предел n-го остатка ряда $\lim\limits_{n\to\infty} r_n \neq 0$, то ряд расходится?

5. Верно ли утверждение: если для некоторого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ предел n-й частичной суммы ряда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$, то ряд сходится?

6. Верно ли утверждение: если для некоторого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ предел n-й частичной суммы ряда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \neq 0$, то ряд расходится?

7. Верно ли утверждение: если для некоторого ряда предел n-го остатка ряда $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, то предел общего члена ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?

8. Верно ли утверждение: если для некоторого ряда предел общего члена ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то предел n-го остатка ряда $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$?

9. Верно ли утверждение: если для некоторого ряда существует конечный предел n-й частичной суммы ряда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то предел общего члена ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?

10. Может ли сумма двух сходящихся рядов быть расходящимся рядом?

11. Может ли сумма двух расходящихся рядов быть сходящимся рядом?

12. В расходящемся ряде отбросили первые 1000 членов. Может ли полученный ряд быть сходящимся?

13. Что можно сказать о сходимости ряда с положительными членами, если его общий член a_n удовлетворяет условию: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,001$?

14. Что можно сказать о сходимости ряда с положительными членами, если его общий член a_n удовлетворяет условию: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0,001$?

15. Изменится ли сумма условно сходящегося ряда, если его первые 500 членов поменять местами?

16. Какая будет допущена ошибка, если за сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!}$ взять сумму его первых 7 членов?

17. Существует ли степенной ряд, область сходимости которого не содержит ни одной точки?

18. Какие значения может принимать радиус сходимости степенного ряда?

19. Изменится ли радиус сходимости степенного ряда после его дифференцирования? интегрирования?

20. Сколько раз можно дифференцировать степенной ряд в его интервале сходимости?

21. Изменится ли радиус сходимости ряда Тейлора после его дифференцирования? интегрирования?

22. Существует ли ряд Маклорена для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$?

23. Какую область сходимости будет иметь сумма двух степенных рядов с разными областями сходимости?

24. В каком случае решение задачи Коши для дифференциального уравнения представляется рядом Маклорена, а в каком — рядом Тейлора?

Задачи.

Задача 1. Исследовать сходимость ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n(2n-1)!}{n^5}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{2n^4-1}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{4^n+1}$.

Задача 2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}n}{n^4+4}$; в) $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{\ln n}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\frac{\pi n}{15}}{3^n}$.

Задача 3. Найти область сходимости степенного ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}x^n}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-4)^n}{3^n+1}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(x-2)^{2n}$; г) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n!(x-1)^n}{(2n)!}$.

Задача 4. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3+x^2}$.

Задача 5. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ в ряд Тейлора в точке $x_0 = 1$ и найти область сходимости этого ряда.

Задача 6. Разложить функцию $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ в ряд Маклорена и найти область сходимости этого ряда.

Задача 7. Вычислить $\ln 1,5$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

Задача 8. Вычислить $\ln 0,5$ с точностью $\varepsilon = 0,01$.

Задача 9. Представить интеграл $\int\limits_0^x \sin x^2\,\mathrm{d}\,x$ в виде ряда Маклорена и найти область сходимости этого ряда.

Задача 10. Представить интеграл $\int\limits_0^x \ln(1-3x^2)\,\mathrm{d}\,x$ в виде ряда Маклорена и найти область сходимости этого ряда.

Задача 11. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,3} \sqrt[3]{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$ с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Задача 12. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в ряд решения задачи Коши $y' = x^2 + y^2$, $y(1)0$.

Задача 13. Найти несколько первых членов разложения в ряд Маклорена общего решения дифференциального уравнения $y'' = yx^2$.

Задача 14. Представить в виде ряда Маклорена общее решение дифференциального уравнения $y'' = -xy$.

РЯДЫ ФУРЬЕ

Теоретические упражнения.

1. Пусть функция $f(x)$ имеет период $T = 2l$, кусочно-непрерывна и кусочно-монотонна на $[-l; l]$. Верно ли, что соответствующий этой функции ряд Фурье сходится во всех точках отрезка $[-l; l]$?

2. Пусть функция $f(x)$ имеет период $T = 2l$, кусочно-непрерывна и кусочно-монотонна на $[-l; l]$. Верно ли, что соответствующий этой функции ряд Фурье сходится во всех точках $x \in \mathbb{R}$?

3. Пусть функция $f(x)$ имеет период $T = 2l$, кусочно-непрерывна и кусочно-монотонна на $[-l; l]$. Пусть x_0 — произвольная точка отрезка $[-l; l]$. Верно ли, что сумма соответствующего этой функции ряда Фурье в точке x_0 равна $S(x_0) = f(x_0)$?

4. Пусть функция $f(x)$ имеет период $T = 2l$, кусочно-непрерывна и кусочно-монотонна на $[-l; l]$. Пусть x_0 — произвольная точка отрезка $[-l; l]$. Верно ли, что сумма соответствующего этой функции ряда Фурье в точке x_0 равна
$S(x_0) = \dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$?

5. Пусть функция $f(x)$ определена, кусочно-непрерывна и кусочно-монотонна на $[0; l]$. Пусть $S_1(x)$ — сумма ряда Фурье по синусам для $f(x)$, а $S_2(x)$ — сумма ряда Фурье по косинусам для $f(x)$. В каких точках $S_1(x) = S_2(x)$?

Задачи.

Задача 1. Используя разложение в ряд Фурье функции
$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -2 \le x < 0, \\ x & \text{при } 0 \le x \le 2, \end{cases}$ показать, что:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \dfrac{\pi}{4}$.

Задача 2. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 4$) функцию $f(x) = x - 4$, $4 < x < 8$; построить графики функции и суммы ряда.

Задача 3. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 2\pi$) функцию $f(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$; построить графики функции и суммы ряда.

Задача 4. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 2\pi$) функцию $f(x) = x^2$, $\pi < x < \pi$; построить графики функции и суммы ряда.

Задача 5. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$, $0 \le x \le \pi$, в ряд Фурье по косинусам; построить графики функции и суммы ряда.

Задача 6. Разложить функцию $f(x) = 2x$, $0 \le x \le 1$, в ряд Фурье по синусам; построить графики функции и суммы ряда.

Задача 7. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 < x \le 0, \\ 1 & \text{при } 0 < x \le 1, \end{cases}$ в комплексный ряд Фурье.

Задача 8. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -2 < x \le 0, \\ -x & \text{при } 0 < x \le 2, \end{cases}$ в комплексный ряд Фурье.

Задача 9. Разложить функцию $f(x) = \mathrm{e}^x$, $-\pi < x \le \pi$, в комплексный ряд Фурье.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Теоретические упражнения.

1. Верно ли утверждение: если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, то она аналитична в этой точке?

2. Верно ли утверждение: если функция $f(z)$ аналитична в точке z_0, то она дифференцируема в этой точке?

3. Верно ли утверждение: если функция $f(z)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0, то она аналитична в этой точке?

4. Верно ли утверждение: если функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0, то она дифференцируема в этой точке?

5. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $|z| < 5$ и $\displaystyle\int\limits_{L_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 5$, где L_1 — парабола $y = x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$. Чему равен интеграл $\displaystyle\int\limits_{L_2} f(z)\,\mathrm{d}\,z$, где L_2 — прямая $y = x$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$?

6. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $|z| < 5$ и $\displaystyle\int\limits_{L_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 5$, где L_1 — парабола $y = x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$. Чему равен интеграл $\displaystyle\int\limits_{L_2} f(z)\,\mathrm{d}\,z$, где L_2 — парабола $y = x^2$ от точки $A(1;1)$ до точки $O(0;0)$?

7. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $|z| < 5$. Чему равен интеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}\,z$?

8. Чему равен интеграл $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\mathrm{d}\,z}{z}$, если обход контура осуществляется: а) по часовой стрелке; б) против часовой стрелки?

Задачи.

Задача 1. Записать числа $z_1 = \cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}$, $z_2 = -\cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6}$, $z_3 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{6}$ в тригонометрической и показательной формах записи.

Задача 2. Во множестве комплексных чисел найти и изобразить на комплексной плоскости все значения корней:

а) $\sqrt{4i}$; б) $\sqrt{-2i}$; в) $\sqrt[3]{-125}$; г) $\sqrt[4]{-16}$; д) $\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$.

Задача 3. Используя формулу Муавра, выразить через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ функции: а) $\cos 3\varphi$; б) $\sin 4\varphi$.

Задача 4. Показать, что:

а) $\mathrm{Ln}1 = 2\pi k i$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $\mathrm{Ln}(-1) = (\pi+2\pi k)i$, $k\in\mathbb{Z}$; в) $\mathrm{Ln}i = \left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)i$, $k\in\mathbb{Z}$.

Задача 5. Проверить, что: а) $\cos i \approx 1,54$; б) $\cos 3i > 10$.

Задача 6. При каком значении λ функция $f(z) = y+\lambda x i$ дифференцируема?

Задача 7. Найти аналитическую функцию $f(z)$, если:

а) $u(x,y) = \mathrm{Re}z = x^2 - y^2 - x$; б) $v(x,y) = \mathrm{Im}z = x+y$;

в) $v(x,y) = \mathrm{Im}z = xy$, $f(i) = \dfrac{1}{2}$.

Задача 8. Вычислить интеграл по замкнутому контуру:

а) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{1-\cos z^2}{z^2}\,\mathrm{d}\,z$; б) $\oint\limits_{|z-1|=1} \dfrac{\mathrm{d}\,z}{(z+1)^3(z-1)^3}$; в) $\oint\limits_{|z+1|=1} \dfrac{\mathrm{d}\,z}{(z+1)^3(z-1)^3}$;

г) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{\cos iz - 1}{z^3}\,\mathrm{d}\,z$; д) $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{z-\sin z}{z^4}\,\mathrm{d}\,z$; е) $\oint\limits_{|z+i|=1} \dfrac{\sin z}{(z+i)^3}\,\mathrm{d}\,z$.

Задача 9. Определить кольцо сходимости ряда Лорана и найти сумму ряда:

а) $\ldots + \dfrac{1}{z^3} + \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z} + 1 + \dfrac{z}{2} + \left(\dfrac{z}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{2}\right)^3 + \ldots$;

б) $\ldots + \dfrac{4}{z^4} + \dfrac{3}{z^3} + \dfrac{2}{z^2} + \dfrac{1}{z} + 1 + 2z + (2z)^2 + (2z)^3 + \ldots$;

в) $\ldots + \dfrac{1}{2^3(z-1)^3} + \dfrac{1}{2^2(z-1)^2} + \dfrac{1}{2(z-1)} + 1 + \dfrac{z-1}{5} + \left(\dfrac{z-1}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{z-1}{5}\right)^3 + \ldots$.

Задача 10. Разложить функцию $\dfrac{z^4}{(z-2)^2}$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности точки $z_0 = 0$, указать область сходимости полученного ряда.

Задача 11. Найти конечные изолированные особые точки функции и определить их характер; для полюсов определить порядок:

а) $\dfrac{1}{z(z-1)}$; б) $\dfrac{z}{z^2+4}$; в) $\dfrac{z}{z^2-2z+5}$; г) $\dfrac{z^2}{(z-2)^3}$;

д) $\dfrac{z^2}{(z-1)(z-2)^2}$; е) $\dfrac{z^2+2z+1}{z^3-z^5}$; ж) $\dfrac{\sin z}{z^4}$; з) $\dfrac{1-\cos z}{z^4}$;

и) $(z+i)^2\,\mathrm{e}^{\frac{3}{z+i}}$.

Задача 12. Вычислить интеграл с помощью вычетов:

а) $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{\mathrm{d}\, z}{(z-1)(z-2)^2}$; б) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z^2 \,\mathrm{d}\, z}{(z^2+1)(z+3)}$; в) $\oint\limits_{|z|=5} \dfrac{\mathrm{e}^z \,\mathrm{d}\, z}{z^2+4}$;

г) $\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z}{(z-i)(z-3)} \,\mathrm{d}\, z$; д) $\oint\limits_{|z-2i|=2} \dfrac{\mathrm{d}\, z}{\mathrm{e}^z - 1}$; е) $\oint\limits_{|z|=2} zcosfrac1z-1 \,\mathrm{d}\, z$.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теоретические упражнения.

1. В ящике находятся апельсины, мандарины, яблоки. Из ящика взяли один фрукт. События: A={из ящика взяли яблоко}, B={из ящика взяли апельсин}, C={из ящика взяли мандарин}. Что означает событие $\overline{A+C}$?

2. Производится наблюдение за группой, состоящей из трех однородных объектов. Каждый из них за время наблюдения может быть обнаружен или не обнаружен. События: A={обнаружен ровно один из 3-х объектов}, B={обнаружен хотя бы один объект}. Что означают события $A+B$, AB, $\overline{AB}$, $\overline{A}\cdot\overline{B}$?

3. Может ли сумма двух событий A и B совпадать с их произведением?

4. Вероятность события равна 0. Следует ли из этого, что событие невозможное?

5. Вероятность события равна 1. Следует ли из этого, что событие достоверное?

6. Всякая ли случайная величина имеет: а) ряд распределения; б) плотность распределения; в) функцию распределения?

7. Может ли функция распределения: а) принимать отрицательные значения; б) быть больше 1; в) убывать; г) на некотором участке оставаться постоянной; д) всюду быть постоянной?

8. Может ли плотность распределения: а) принимать отрицательные значения; б) быть больше 1; в) убывать; г) на некотором участке оставаться постоянной; д) всюду быть постоянной?

9. Всякая ли случайная величина имеет: а) математическое ожидание; б) дисперсию?

10. Может ли быть отрицательным: а) математическое ожидание; б) дисперсия?

11. У случайной величины ξ изменили знак на обратный. Как изменятся при этом $M\xi$, $D\xi$, σ_ξ?

12. Какие значения принимает случайная величина ξ — число выпадений нечетного числа очков при четырех независимых подбрасываниях кубика? Верно ли, что она имеет биномиальное распределение? Если да, каковы параметры этого распределения?

13. В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. рублей. ξ — число выигрышей при пяти сделанных покупках. Какие значения принимает эта случайная величина? Верно ли, что она имеет биномиальное распределение? Если да, каковы параметры этого распределения?

14. Из 15 собранных агрегатов 6 нуждаются в дополнительной смазке. ξ — число агрегатов, нуждающихся в дополнительной смазке, среди 5 наудачу отобранных из общего числа. Какие значения принимает эта случайная величина? Верно ли, что она имеет биномиальное распределение? Если да, каковы параметры этого распределения?

15. Торговый агент имеет 5 телефонных номеров потенциальных покупателей и звонит им по очереди до тех пор, пока не получит заказ на покупку товара. Вероятность того, что потенциальный покупатель сделает заказ, равна 0,4. ξ — число телефонных разговоров, которые предстоит провести агенту. Какие значения принимает эта случайная величина? Верно ли, что она имеет биномиальное распределение? Если да, каковы параметры этого распределения?

16. Тест состоит из 6 вопросов. На каждый вопрос приведено 4 ответа, один из которых правильный. ξ — число правильных ответов при простом угадывании. Какие значения принимает эта случайная величина? Верно ли, что она имеет биномиальное распределение? Если да, каковы параметры этого распределения?

17. Следует ли из некоррелированности случайных величин их независимость? А наоборот?

18. Чему равен коэффициент корреляции случайных величин ξ и $1+\xi$?

19. Чему равен коэффициент корреляции случайных величин ξ и $\eta = 1 - 2\xi$?

Задачи.

Задача 1. Правильную монету подбросили N раз. Какова вероятность того, что герб выпал ровно k раз?

Задача 2. Правильная кость при бросании с равнми шансами падает на любую из граней: 1, 2, 3, 4, 5, 6. В случае бросания двух правильных костей сумма выпавших очков заключена между 2 и 12. Из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 можно получить в сумме как 9, так и 10 двумя различными способами: 9=3+6=4+5; 10=4+6=5+5. В задаче с тремя костями и 9, и 10 получается шестью способами. Почему же тогда 9 появляется чаще, когда бросают две кости, а 10 — когда бросают три кости?

Задача 3. Из колоды в 52 карты вынули наугад три карты. Какова вероятность того, что это "тройка", "семерка" и "туз"?

Задача 4. На билете "Суперлото"размещены 30 чисел от 1 до 90. В ходе игры случайным образом выбираются бочонки с номерами от 1 до 90. Билет оказывается выигрышным, если за первые 85 ходов вынуты бочонки со всеми номерами, отмеченными на билете. Какова вероятность выигрыша?.

Задача 5. Студент пришел на экзамен, зная 15 вопросов из 20. Найти вероятность того, что он ответит не менее, чем на два из трех предложенных ему вопросов.

Задача 6. Два игрока играют в кости до победы в трех партиях (в каждой партии они имеют равные шансы на выигрыш). Игра прервана, когда один выиграл две, а другой — одну партию. Как справедливо разделить ставку?

Задача 7. Три игрока поочередно бросают правильную монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятность выигрыша для каждого.

Задача 8. Три автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность изготовления бракованной детали на первом автомате равна 0,04, на втором — 0,07, на третьем — 0,05. Производительности первого и третьего автоматов равны между собой, а производительность второго автомата в 1,5 раза выше производительности первого автомата. Найти вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь бракованная.

Задача 9. Пять присяжных заседателей А, Б, В, Г и Д решают вопрос о виновности или невиновности подсудимого большинством голосов. Заседатели А и Б выносят неверное решение с вероятностью 5%, заседатели В и Г ошибаются с вероятностью 10%, а заседатель Д ошибается с вероятностью 20%. Все заседатели ошибаются независимо друг от друга. Не уменьшится ли вероятность ошибки, если заседатель Д (который ошибается чаще других) перестанет рассуждать самостоятельно и будет всегда повторять решение заседателя А (который ошибается реже всего)?

Задача 10. При переливании крови нужно учитывать группы крови донора и больного. Человеку, имеющему IV группу крови, можно перелить кровь любой группы; человеку со II или III группой крови можно перелить либо кровь той же группы, либо I-й; человеку с I группой крови можно перелить только кровь I группы. Среди населения 33,7% имеют I группу крови, 37,5% — II группу, 20,9% — III группу, 7,9% IV группу. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

Задача 11. В торговую фирму поступают телевизоры от трех поставщиков в отношении 1 : 4 : 5. Практика показала, что среди телевизоров, поступающих от 1-го, 2-го и 3-го поставщиков, соответственно 98%, 88% и 92% не требуют ремонта в течение гарантийного срока. Проданный телевизор потребовал ремонта в течение гарантийного срока. От какого поставщика вероятнее всего поступил этот телевизор?

Задача 12. Имеется 1000 монет, причем у одной из них герб с обеих сторон, а остальные монеты правильные. Наугад выбранная монета бросается 10 раз, причем при всех бросаниях она выпадает гербом кверху. Какова вероятность того, что была выбрана монета с двумя гербами?

Задача 13. Найти p, $M\xi$, $D\xi$, $P(|\xi - M\xi| < \sigma_\xi)$, если известен закон распределения случайной величины ξ:

ξ	1	2	3	4	5
P	0,1	0,2	p	0,2	0,1

Задача 14. Дана плотность распределения

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le -3, \\ a(x+3), & \text{если } -3 < x \le 0, \\ 0, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Найти a, $M\xi$, $D\xi$, $P\{\xi > 0,5\}$, $P\{-1 < \xi \le 1\}$, $P\{\xi = -1,5\}$.

Задача 15. Найти a, $p_\xi(x)$, $M\xi$, $\mathbf{P}\{-1 < \xi \le 2\}$, $\mathbf{P}\{\xi = 0,5\}$, если дана функция распределения случайной величины ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \le 1, \\ a(x^2-1), & \text{если } 1 < x \le 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Задача 16. Найти a, $M\xi$, $D\xi$, $\mathbf{P}\{\xi > 0,5\}$, $\mathbf{P}\{-1 < \xi \le 2\}$, $\mathbf{P}\{\xi = 0,5\}$, если дана плотность распределения вероятностей случайной величины ξ:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ ax, & \text{если } 0 < x \le 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Задача 17. Найти a, $p_\xi(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $\mathbf{P}\{1 < \xi \le 3\}$, $\mathbf{P}\{\xi = 2\}$, если дана функция распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \le 2, \\ a(x^2-2x), & \text{если } 2 < x \le 4, \\ 1, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Задача 18. Найти функцию распределения случайной величины ξ и $\mathbf{P}(-\pi/3 \le \xi \le \pi/4)$, если задана ее плотность распределения:

$$p(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \in [-\pi/2; 0], \\ 0 & \text{при } x \notin [-\pi/2; 0]. \end{cases}$$

Задача 19. Найти $M\xi$, $D\xi$, $P(\xi < \sigma_\xi)$, если известна плотность распределения случайной величины ξ:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1, \\ \dfrac{4}{3x^2}, & \text{если } 1 < x \le 4, \\ 1, & \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Задача 20. Известны $M\xi = 1$ и $D\xi = 0,75$ случайной величины ξ, имеющей биномиальное распределение. Найти $\mathbf{P}(\xi > 0)$.

Задача 21. Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина, распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта составляет 15 дней.

Задача 22. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с $M\xi = 0$. Найти среднее квадратичное отклонение, если $\mathbf{P}(\xi \le 3) = 0,9$.

Теоретические упражнения.

1. Получить систему нормальных уравнений метода наименьших квадратов для определения по экспериментальным данным параметров квадратичной зависимости $\widehat{y} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$.

Задачи.

Задача 1. Для определения содержания воды (%) в некотором продукте из большой партии взята выборка объема $n_1 = 10$, по которой рассчитаны выборочные характеристики: $\overline{x_1} = 7,2$, $s_1^2 = 1,85$. Для уточнения результатов их этой же партии взялм еще одну выборку объема $n_2 = 20$, причем оказалось, что $\overline{x_2} = 7,5$, $s_2^2 = 1,15$. Найти $\overline{x}$ и s^2 для объединенной выборки.

Задача 2. Предполагая, что выборка взята из нормального распределения, оцените математическое ожидание с надежностью $\gamma = 0,95$:

$$3; \quad 6; \quad 5; \quad 11; \quad 5; \quad 8; \quad 9; \quad 3.$$

Задача 3. По данному интервальному статистическому ряду, предполагая, что выборка взята из нормального распределения, оценить математическое ожидание с надежностью $\gamma = 0,95$.

$[x_{i-1}; x_i)$	$[-3; 1)$	$[1; 5)$	$[5; 9)$	$[9; 13)$
n_i	10	45	30	15

Задача 4. Норма времени на выполнение операции на конвейере равна 8 с. Произведено 6 замеров интервалов времени, затраченных на эту операцию:

$$9,9; \quad 12,2; \quad 11,4; \quad 8,4; \quad 7,4; \quad 9,5.$$

Выяснить на уровне значимости $\alpha = 0,05$, равны ли реальные затраты времени нормативным или превосходят норму.

Задача 5. Одной из важных характеристик качества колумбийской кормовой патоки является число градусов плотности Брикса. Это показатель количества твердого вещества в патоке и основной фактор, рассматриваемый при ее производстве. Приведены 7 выборочных показателей для некоторой партии кормовой патоки: 81; 75; 78; 74; 82; 83; 80. Проверить при $\alpha = 0,05$ гипотезу о том, что среднее число градусов Брикса данной партии равно 80.

Задача 6. Определение концентрации SiO_2 в мартеновском шлаке проводилось весовым (5 опытов) и фотокалориметрическим (4 опыта) методами. Для первого метода получены следующие значения среднего и дисперсии: $22,5$ и $0,0529$; для второго метода: $23,3$ и $0,16$. Свидетельствует ли при уровне значимости $\alpha = 0,05$ различие между средними значениями о систематическом расхождении между результатами применения первого и второго методов?